Объ одной теоремѣ относительно алгебраическихъ интеграловъ.

И. Л. Пташицкаго.

1. Въ настоящей замѣткѣ я желаю дать другое болѣе простое доказательство теоремы, которая въ предыдущей статьѣ послужила основаніемъ двухъ методовъ для рѣшенія вопроса объ алгебраическомъ интегрированіи даннаго алгебраическаго дифференціала ydx [1]).

2. Теорема. *Пусть P есть цѣлая функція отъ x; z — функція, опредѣляемая неприводимымъ уравненіемъ съ цѣлыми коэффиціентами*

$$z^n + \varphi_1(x)z^{n-1} + \varphi_2(x)z^{n-2} + \ldots = 0\,,$$

Пусть $z_1, z_2, \ldots z_n$ представляютъ всѣ значенія, принимаемыя функціею z для каждаго значенія x и $\triangle$ дискриминантъ уравненія съ z. Пусть наконецъ

$$\triangle = D^2.E,$$

гдѣ D, E цѣлые полиномы относительно x; полиномъ E не содержитъ линейныхъ кратныхъ множителей.

Если интегралъ

$$\int \frac{z}{P}\, dx$$

выражается алгебраическою функціею, то можно положить

$$\int \frac{z}{P}\, dx = \frac{X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \ldots + X_{n-1} z^{n-1}}{Y},$$

[1]) Первому доказательству посвящены *nn*⁰ 3 — 5 предыдущей статьи.

гдѣ Y, X_0, $X_1, \ldots X_{n-1}$ *суть цѣлыя функціи отъ* x, *опредѣляемыя слѣдующимъ образомъ:*

1^0 Y *равенъ произведенію изъ полинома*

$$D$$

на общій наибольшій дѣлитель полиномовъ

$$P, \quad \frac{dP}{dx};$$

2^0 X_0, $X_1, \ldots X_{n-1}$ *удовлетворяютъ равенствамъ:*

$$X_i = \frac{Y}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} 1, & z_1, & z_1^2, \ldots z_1^{i-1}, & \int \frac{z_1}{P}\,dx, & z_1^{i+1}, \ldots z_1^{n-1} \\ 1, & z_2, & z_2^2, \ldots z_2^{i-1}, & \int \frac{z_2}{P}\,dx, & z_2^{i+1}, \ldots z_2^{n-1} \\ . & . & . & . & . \\ 1, & z_n, & z_n^2, \ldots z_n^{i-1}, & \int \frac{z_n}{P}\,dx, & z_n^{i+1}, \ldots z_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

гдѣ $i = 0, 1, 2, \ldots n-1$.

3. Доказательство. Пусть интегралъ

$$\int \frac{z}{P}\,dx$$

выражается алгебраически. Тогда должно существовать равенство

$$\int \frac{z}{P}\,dx = \frac{X_0}{Y_0} + \frac{X_1}{Y_1}z + \frac{X_2}{Y_2}z^2 + \ldots + \frac{X_{n-1}}{Y_{n-1}}z^{n-1}, \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

въ которомъ X_0, Y_0, X_1, $Y_1, \ldots$ означаютъ цѣлыя функціи отъ x. Можно предположить, что дробь $\frac{X_i}{Y_i}$ несократима.

Равенство (1) влечетъ за собою n уравненій

$$\int\frac{z_1}{P}\,dx=\frac{X_0}{Y_0}+\frac{X_1}{Y_1}z_1+\frac{X_2}{Y_2}z_1{}^2+\ldots+\frac{X_{n-1}}{Y_{n-1}}z_1{}^{n-1},$$

$$\int\frac{z_2}{P}\,dx=\frac{X_0}{Y_0}+\frac{X_1}{Y_1}z_2+\frac{X_2}{Y_2}z_2{}^2+\ldots+\frac{X_{n-1}}{Y_{n-1}}z_2{}^{n-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int\frac{z_n}{P}\,dx=\frac{X_0}{Y_0}+\frac{X_1}{Y_1}z_n+\frac{X_2}{Y_2}z_n{}^2+\ldots+\frac{X_{n-1}}{Y_{n-1}}z_n{}^{n-1}.$$

Замѣтимъ, пользуясь этими уравненіями, что интегралъ

$$\int\frac{z_k}{P}\,dx,\qquad (k=1,\,2,\,3,\ldots n),\quad \ldots\ldots \quad (2)$$

вблизи каждой точки a можетъ быть представленъ съ помощью ряда, расположеннаго по возрастающимъ степенямъ $x-a$; такой рядъ будетъ содержать только конечное число членовъ съ отрицательными показателями.

Рѣшая систему нашихъ уравненій относительно коэффиціентовъ $\frac{X_0}{Y_0}$, $\frac{X_1}{Y_1}$, ..., получаемъ формулу:

$$\frac{X_i}{Y_i}=\frac{1}{\sqrt{\triangle}}\begin{vmatrix} 1,\ z_1,\ z_1{}^2,\ldots z_1{}^{i-1},\ \int\frac{z_1}{P}\,dx,\ z_1{}^{i+1},\ldots z_1{}^{n-1} \\ 1,\ z_2,\ z_2{}^2,\ldots z_2{}^{i-1},\ \int\frac{z_2}{P}\,dx,\ z_2{}^{i+1},\ldots z_2{}^{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1,\ z_n,\ z_n{}^2,\ldots z_n{}^{i-1},\ \int\frac{z_n}{P}\,dx,\ z_n{}^{i+1},\ldots z_n{}^{n-1} \end{vmatrix},\quad .\ .\ (3)$$

$$(i=0,\ 1,\ 2,\ldots n-1).$$

Представимъ эту формулу подъ другимъ видомъ.

Съ этою цѣлью замѣтимъ, что всѣ элементы опредѣлителя, входящаго въ формулу (3), за исключеніемъ элементовъ i-аго столбца, остаются конечными при всѣхъ конечныхъ значеніяхъ x. Что же касается элемента (2) i-аго столбца, то очевидно, что онъ можетъ обращаться въ безконечность только при значеніяхъ x равныхъ корнямъ полинома P. Пусть

$$P=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_l)^{\alpha_l}.$$

Легко видѣть, что при $x=a$ интегралъ (2) или будетъ оставаться конечнымъ, или будетъ обращаться въ безконечность порядка не выше, какъ дробь $\dfrac{1}{(x-a)^{\alpha-1}}$.

Слѣдовательно, разсматриваемый нами опредѣлитель приводится къ

$$\frac{f(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}(x-a_2)^{\alpha_2-1}\ldots(x-a_l)^{\alpha_l-1}},$$

гдѣ $f(x)$ представляетъ функцію, остающуюся конечною при всѣхъ конечныхъ значеніяхъ x. Припомнимъ еще, что радикалъ $\sqrt{\triangle}$ входящій въ формулу (3), равенъ $D.\sqrt{E}$, гдѣ полиномъ E не содержитъ линейныхъ кратныхъ множителей.

Отсюда заключаемъ, что формула (3) даетъ

$$\frac{X_i}{Y_i}=\frac{f(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}(x-a_2)^{\alpha_2-1}\ldots(x-a_l)^{\alpha_l-1}.D\sqrt{E}}.$$

Изъ этого равенства, припомнивъ свойства функцій $f(x)$, E, X_i, Y_i, видимъ, что полиномъ Y_i долженъ дѣлить полиномъ

$$Y=D.(x-a_1)^{\alpha_1-1}(x-a_2)^{\alpha_2-1}\ldots(x-a_l)^{\alpha_l-1}.$$

Итакъ въ равенствѣ (1) можемъ считать, что

$$Y_i=Y,\quad (i=0,1,2,\ldots n-1);$$

это предложеніе и составляетъ первую часть доказываемой теоремы.

Подставляя затѣмъ вышенайденное значеніе полинома Y_i въ формулу (3), мы получимъ изъ нея выраженіе для полинома X_i, которое и докажетъ вторую часть нашей теоремы.