

Объ интерполированіи двухъ произведеній.

И. И. Иванова.

Если черезъ

$$\prod_{ax+b}$$

обозначимъ произведение

$$(a+b)(2a+b)(3a+b)\dots(xa+b),$$

а черезъ

$$\prod_{ax^2+b}$$

произведение

$$(1^2a+b)(2^2a+b)(3^2a+b)\dots(x^2a+b),$$

то, при условіи $0 < b < a$, имѣютъ мѣсто слѣдующія неравенства:

$$\prod_{ax+b} > \sqrt{2\pi a} x^{x+\frac{1}{2}+\frac{b}{a}} e^{-x+\frac{b}{a}} \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\prod_{ax+b} < \sqrt{2\pi a} x^{x+\frac{1}{2}} (x+1)^{\frac{b}{a}} e^{-x+\frac{1}{12x}+\frac{b}{a}}$$

и

$$\prod_{ax^2+b} > 2\pi a x^{2x+1-\frac{2x}{a}} e^{-2x+\frac{b}{a}} \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{2} \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{\pi^4}{90} - \frac{1}{3(x+1)(x+2)(x+3)} \right)$$

$$\prod_{ax^2+b} < 2\pi a x^{2x+1-\frac{2x}{a}} e^{-2x+\frac{1}{6x}+\frac{b}{a}} \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{x+1} \right)$$

Въ двухъ первыхъ неравенствахъ C обозначаетъ постоянную Эйлера:

$$C = 0,5772156\dots$$

Докажемъ два первыхъ неравенства. Очевидно, что

$$\prod_{xa+b} = a^x \cdot 1 \cdot 2 \dots x \cdot \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{b}{2a}\right) \left(1 + \frac{b}{3a}\right) \dots \left(1 + \frac{b}{ax}\right).$$

Изъ разложенія $\lg\left(1 + \frac{b}{ka}\right)$ въ рядъ:

$$\lg\left(1 + \frac{b}{ka}\right) = \frac{b}{ka} - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{ka}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{b}{ka}\right)^3 - \dots,$$

при условіи

$$0 < b < a,$$

находимъ:

$$1 + \frac{b}{ka} < e^{\frac{b}{ka}} \quad \text{и} \quad 1 + \frac{b}{ka} > e^{\frac{b}{ka} - \frac{1}{2} \frac{b^2}{a^2 k^2}},$$

слѣдовательно,

$$\prod_{ax+b} > a^x \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x \cdot e^{\frac{b}{a} \sum_1^x \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \sum_1^x \frac{1}{k^2}}$$

и

$$\prod_{ax+b} < a^x \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x \cdot e^{\frac{b}{a} \sum_1^x \frac{1}{k}}.$$

Если C обозначаетъ постоянную Эйлера, то, какъ извѣстно,

$$C = \left(\frac{1}{1} - \lg \frac{2}{1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \lg \frac{3}{2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{x} - \lg \frac{x+1}{x}\right) + \dots$$

и такъ какъ

$$\frac{1}{m} - \lg \frac{m+1}{m} > 0$$

и

$$\lg \frac{m+1}{m} - \frac{1}{m+1} > 0, \quad \text{при } m > 1,$$

то имѣемъ

$$\sum_1^x \frac{1}{k} > C + \lg x,$$

$$\sum_1^x \frac{1}{k} < C + \lg(x+1).$$

Далѣе, извѣстно, что

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

и такъ какъ, очевидно,

$$\sum_k^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} > \sum_k^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1},$$

то находимъ, что

$$\sum_1^x \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{x+1}$$

принимая во вниманіе выведенныя неравенства, а также два извѣстныя неравенства:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x > \sqrt{2\pi x} x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x}$$

$$\text{и} \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x < \sqrt{2\pi x} x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x+\frac{1}{12x}},$$

мы и находимъ требуемыя:

$$\prod_{ax+b} > \sqrt{2\pi a} x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x+\frac{b}{a}} (C + \lg x) - \frac{1}{2} \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{x+1} \right)$$

или

$$\prod_{ax+b} > \sqrt{2\pi a} x^{x+\frac{b}{a}+\frac{1}{2}} e^{-x+\frac{b}{a}} C - \frac{1}{2} \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{x+1} \right)$$

и

$$\prod_{ax+b} < \sqrt{2\pi a} x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x+\frac{1}{12x}+\frac{b}{a}} (C + \lg(x+1))$$

или

$$\prod_{ax+b} < \sqrt{2\pi x} x^{x+\frac{1}{2}} (x+1)^{\frac{b}{a}} e^{-x+\frac{1}{12x}+\frac{b}{a}} C$$

Послѣдніе два вышепредложенныя неравенства доказываются точно такъ же. При доказательствѣ ихъ придется принять во вниманіе, кромѣ двухъ неравенствъ Стирлинга, еще слѣдующія два:

$$\sum_1^x \frac{1}{k^2} > \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{x},$$

$$\sum_1^x \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{x+1}$$

и

$$\sum_1^x \frac{1}{k^4} < \frac{\pi^4}{90} - \frac{1}{3(x+1)(x+2)(x+3)},$$

которыя доказываются очень легко и изъ которыхъ второе было уже выше доказано.

С.-Петербургъ.
20 Марта 1888 г.