

# Объ одномъ преобразованіи гиперэллиптическихъ интеграловъ.

К. А. Торопова.

Въ настоящей замѣткѣ я намѣренъ рассмотреть преобразование гиперэллиптическихъ интеграловъ

$$\int \frac{f(x) dx}{\sqrt{R(x)}}$$

[ $R(x)$  цѣлый полиномъ  $x$ ,  $f$  — есть знакъ рациональной функціи] посредствомъ введенія въ нихъ новой переменнѣй  $y$  уравненіемъ

$$y = U(x),$$

гдѣ  $U(x)$  цѣлый полиномъ  $x$ .

Изслѣдованіе этого преобразованія даетъ возможность составить безчисленное множество гиперэллиптическихъ интеграловъ, приводящихся къ интеграламъ низшихъ классовъ.

## I.

Положимъ, что, вводя въ интеграль

$$\int \frac{f(x) dx}{\sqrt{R(x)}} \dots \dots \dots (1)$$

вмѣсто  $x$  новую переменнѣй  $y$  уравненіемъ

$$y = U(x),$$



мы получаемъ интегралъ

$$\int \frac{f_1(y) dy}{\sqrt{R_1(y)}} \dots \dots \dots (2)$$

Пусть

$$R_1(y) = (y - \alpha_1)(y - \alpha_2) \dots (y - \alpha_m),$$

гдѣ  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  различны между собою; тогда, по введеніи въ интегралъ (2)  $x$ , будемъ имѣть

$$\int \frac{f_1(U) U' dx}{\sqrt{(U - \alpha_1)(U - \alpha_2) \dots (U - \alpha_m)}} \dots \dots \dots (3)$$

Полиномы  $U - \alpha_1, U - \alpha_2, \dots, U - \alpha_m$  можно представить въ такомъ видѣ:

$$\left. \begin{aligned} U - \alpha_1 &= p_1^2 \gamma_1, \\ U - \alpha_2 &= p_2^2 \gamma_2, \\ &\dots \dots \dots \\ U - \alpha_m &= p_m^2 \gamma_m, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (a)$$

гдѣ полиномы  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$  не имѣютъ кратныхъ множителей; они не имѣютъ также общихъ множителей, на основаніи сдѣланнаго предположенія о постоянныхъ  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ , ибо разность

$$p_i^2 \gamma_i - p_k^2 \gamma_k = \alpha_k - \alpha_i$$

не можетъ имѣть этого множителя.

Интегралъ (3) представится въ такомъ видѣ:

$$\int \frac{f_1(U) U' dx}{p_1 p_2 \dots p_m \sqrt{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_m}}$$

Полиномы  $p_1, p_2, \dots, p_m$ , какъ видно изъ равенствъ (a), суть дѣлители производной  $U'$  и потому функція

$$\frac{U'}{p_1 p_2 \dots p_m} = \varrho$$

есть цѣлый полиномъ  $x$ .



Сравнивая полученный интеграль съ (1), мы должны положить:

$$\left. \begin{aligned} \varphi f_1(U) &= f(x) \\ \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_m &= R(x) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (b)$$

Возьмемъ изъ  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$  какіе-нибудь  $i$  полиномовъ, на примѣръ  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_i$ , и положимъ:

$$\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_i = R_i(x);$$

тогда въ интеграль

$$\int \frac{\lambda dx}{\sqrt{R_i(x)}}$$

раціональную функцію  $\lambda$  можно подобрать на безчисленное множество манеръ такъ, чтобы этотъ интеграль приводился къ интегралу низшаго класса.

Въ самомъ дѣлѣ, помножая числителя и знаменателя подъ интеграломъ на произведеніе  $p_1 p_2 \dots p_i$ , получимъ интеграль

$$\int \frac{\lambda p_1 p_2 \dots p_i dx}{\sqrt{(U - \alpha_1)(U - \alpha_2) \dots (U - \alpha_i)}}.$$

Полагая

$$\lambda = \frac{U'}{p_1 p_2 \dots p_i} f(U), \quad U = y,$$

гдѣ  $f$  знакъ произвольной раціональной функціи, будемъ имѣть интеграль

$$\int \frac{f(y) dy}{\sqrt{(y - \alpha_1)(y - \alpha_2) \dots (y - \alpha_i)}},$$

гдѣ подъ знакомъ корня есть полиномъ степени  $i$ , меньшей, вообще, чѣмъ степень полинома  $\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_i$ .

Очевидно, если  $i = 2$ , то получается интеграль, выражающійся въ логарифмахъ и алгебраическихъ функціяхъ.

Отсюда слѣдуетъ такая теорема: если гиперэллиптическій интеграль

$$\int \frac{f(x) dx}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_m}}$$



приводится къ интегралу низшаго класса (посредствомъ указаннаго преобразованія), то интеграль

$$\int \frac{\lambda dx}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_i}} \quad (i < m)$$

также приводится къ интегралу низшаго класса; а интеграль

$$\int \frac{\rho dx}{\sqrt{\gamma_k \gamma_e}} \quad (k < m, e < m) \dots \dots \dots (4)$$

выражается въ логариѣмахъ и алгебраическихъ функціяхъ.

Не трудно найти выраженіе интеграла (4) въ логариѣмахъ, когда  $\rho$  есть цѣлый полиномъ (случай, рассмотрѣнный еще Абелемъ).

Въ самомъ дѣлѣ, интеграль (4) равенъ

$$\int \frac{\rho p_k p_e dx}{\sqrt{(U - \alpha_k)(U - \alpha_e)}};$$

положивъ

$$\rho = \frac{U'}{p_k p_e},$$

найдемъ

$$\int \frac{U' dx}{\sqrt{(U - \alpha_k)(U - \alpha_e)}},$$

выраженіе котораго чрезъ логариѣмы таково:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \lg \frac{U - \frac{\alpha_k + \alpha_e}{2} + \sqrt{(U - \alpha_k)(U - \alpha_e)}}{U - \frac{\alpha_k + \alpha_e}{2} - \sqrt{(U - \alpha_k)(U - \alpha_e)}} = \\ & = \frac{1}{2} \lg \frac{p_k^2 \gamma_k + p_e^2 \gamma_e + 2p_k p_e \sqrt{\gamma_k \gamma_e}}{p_k^2 \gamma_k + p_e^2 \gamma_e - 2p_k p_e \sqrt{\gamma_k \gamma_e}} = \lg \frac{p_k \sqrt{\gamma_k} + p_e \sqrt{\gamma_e}}{p_k \sqrt{\gamma_k} - p_e \sqrt{\gamma_e}}. \end{aligned}$$

Слѣдовательно,

$$\int \frac{\rho dx}{\sqrt{\gamma_k \gamma_e}} = \lg \frac{p_k \sqrt{\gamma_k} + p_e \sqrt{\gamma_e}}{p_k \sqrt{\gamma_k} - p_e \sqrt{\gamma_e}}.$$



Такъ какъ степени полиномовъ  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$  всѣ одинаковой четности, то въ интегралѣ, выражающемся въ логариомахъ, мы имѣемъ подъ знакомъ корня полиномъ четной степени.

Разсмотримъ сказанное на примѣрѣ.

Данъ гиперэллиптическій интегралъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

гдѣ

$$R(x) = (x^4 + 12x^3 + 40x^2 + 48x + 1)(x^2 + 10x + 19)(x^2 + 8x + 4)(x^2 + 4).$$

Введемъ въ этомъ интегралѣ новую переменную  $y$  уравненіемъ

$$y = x^4 + 12x^3 + 40x^2 + 48x + 1.$$

Если будемъ дѣлить многочленъ  $x^4 + 12x^3 + 40x^2 + 48x + 1$  послѣдовательно на  $x^2 + 10x + 19$ ,  $x^2 + 8x + 4$ ,  $x^2 + 4$ , то увидимъ, что остатки отъ этихъ дѣленій не зависятъ отъ  $x$  и въ частныхъ получаются полные квадраты. Отсюда, на основаніи вышеизложеннаго, заключаемъ, что данный гиперэллиптическій интегралъ приводится къ интегралу низшаго класса.

Въ самомъ дѣлѣ, легко видѣть, что

$$y + 18 = (x + 1)^2(x^2 + 10x + 19),$$

$$y + 15 = (x + 2)^2(x^2 + 8x + 4),$$

$$y + 143 = (x + 6)^2(x^2 + 4).$$

Слѣдовательно, помножая подъ интеграломъ числителя и знаменателя на  $(x + 1)(x + 2)(x + 6)$ , получимъ эллиптическій интегралъ

$$\frac{1}{4} \int \frac{dy}{\sqrt{y(y + 18)(y + 15)(y + 143)}}.$$

Вмѣстѣ съ этимъ заключаемъ, что интегралы:

$$\int \frac{(x + 6) dx}{\sqrt{(x^4 + 12x^3 + 40x^2 + 48x + 1)(x^2 + 10x + 19)(x^2 + 8x + 4)}},$$

$$\int \frac{(x + 1) dx}{\sqrt{(x^4 + 12x^3 + 40x^2 + 48x + 1)(x^2 + 8x + 4)(x^2 + 4)}},$$

$$\int \frac{(x + 2) dx}{\sqrt{(x^4 + 12x^3 + 40x^2 + 48x + 1)(x^2 + 10x + 19)(x^2 + 4)}}$$



тою же подстановкою приводятся соответственно къ эллиптическимъ:

$$\frac{1}{4} \int \frac{dy}{\sqrt{y(y+18)(y+15)}},$$

$$\frac{1}{4} \int \frac{dy}{\sqrt{y(y+15)(y+143)}}, \quad \frac{1}{4} \int \frac{dy}{\sqrt{y(y+18)(y+143)}}.$$

Точно также гиперэллиптическій интеграль

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+10x+19)(x^2+8x+4)(x^2+4)}}$$

приводится къ эллиптическому

$$\frac{1}{4} \int \frac{dy}{\sqrt{(y+18)(y+15)(y+143)}}.$$

Кромѣ того, мы имѣемъ выраженія въ логариомахъ слѣдующихъ интеграловъ:

$$\int \frac{4(x^2+8x+12)dx}{\sqrt{(x^4+12x^3+40x^2+48x+1)(x^2+10x+19)}} =$$

$$= \lg \frac{p_1\sqrt{\gamma_1} + p_2\sqrt{\gamma_2}}{p_1\sqrt{\gamma_1} - p_2\sqrt{\gamma_2}}$$

$$\int \frac{4(x^2+7x+6)dx}{\sqrt{(x^4+12x^3+40x^2+48x+1)(x^2+8x+4)}} =$$

$$= \lg \frac{p_1\sqrt{\gamma_1} + p_3\sqrt{\gamma_3}}{p_1\sqrt{\gamma_1} - p_3\sqrt{\gamma_3}}$$

$$\int \frac{4(x^2+3x+2)dx}{\sqrt{(x^4+12x^3+40x^2+48x+1)(x^2+4)}} =$$

$$= \lg \frac{p_1\sqrt{\gamma_1} + p_4\sqrt{\gamma_4}}{p_1\sqrt{\gamma_1} - p_4\sqrt{\gamma_4}}$$

$$\int \frac{4(x+6)dx}{\sqrt{(x^2+10x+19)(x^2+8x+4)}} =$$

$$= \lg \frac{p_2\sqrt{\gamma_2} + p_3\sqrt{\gamma_3}}{p_2\sqrt{\gamma_2} - p_3\sqrt{\gamma_3}}$$



$$\int \frac{4(x+2)dx}{\sqrt{(x^2+10x+19)(x^2+4)}} = \lg \frac{p_2\sqrt{\gamma_2} + p_4\sqrt{\gamma_4}}{p_2\sqrt{\gamma_2} - p_4\sqrt{\gamma_4}}$$

$$\int \frac{4(x+1)dx}{\sqrt{(x^2+8x+4)(x^2+4)}} = \lg \frac{p_3\sqrt{\gamma_3} + p_4\sqrt{\gamma_4}}{p_3\sqrt{\gamma_3} - p_4\sqrt{\gamma_4}}.$$

Здѣсь

$$p_1 = 1, \quad \gamma_1 = x^4 + 12x^3 + 40x^2 + 48x + 1,$$

$$p_2 = x + 1, \quad \gamma_2 = x^2 + 10x + 19,$$

$$p_3 = x + 2, \quad \gamma_3 = x^2 + 8x + 4,$$

$$p_4 = x + 6, \quad \gamma_4 = x^2 + 4.$$

Подобныхъ примѣровъ можно составить, конечно, сколько угодно; для этого стоитъ только взять за  $y$  полиномъ

$$\int (x+a_1)^{2l_1-1} (x+a_2)^{2l_2-1} \dots (x+a_q)^{2l_q-1} dx + C.$$

Понятное дѣло, что въ указанномъ примѣрѣ, какъ и вообще, кромѣ перечисленныхъ интеграловъ, мы имѣемъ еще множество другихъ вида

$$\int \frac{ldx}{\sqrt{R_1(x)}},$$

[гдѣ  $R_1(x) = R(x)(y-a_k)(y-a_{k+1})\dots$ ] приводящихся къ интеграламъ низшихъ классовъ; въ этихъ интегралахъ разностямъ

$$y - a_k = p_k^2 \gamma_k, \quad y - a_{k+1} = p_{k+1}^2 \gamma_{k+1}, \dots$$

соотвѣтствуютъ значенія для  $p_k, p_{k+1}\dots$  независящія отъ  $x$ . Такіе интегралы мы въ счетъ принимать не будемъ.

Изъ предыдущаго видимъ, что, если намъ удастся посредствомъ указаннаго преобразованія найти одинъ гиперэллиптическій интеграль

$$\int \frac{ldx}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_m}},$$

приводящійся къ интегралу низшаго класса, то мы сейчасъ же найдемъ еще  $\frac{m(m-1)}{1.2}$  интеграловъ, выражающихся въ логариюмахъ и  $2^m \frac{m(m+1)}{1.2} - 2$  интеграловъ, приводящихся къ интеграламъ низшихъ классовъ; въ этомъ



послѣднемъ числѣ заключается  $\frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$  интеграловъ, приводящихся къ эллиптическимъ,  $\frac{(m+1)m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$  интеграловъ, приводящихся къ интеграламъ перваго класса, и т. д. Эти числа выведены мною на основаніи извѣстныхъ свойствъ числа сочетаній изъ  $m$  элементовъ по  $n$ .

Въ приведенномъ выше примѣрѣ  $m = 4$  и потому мы нашли, кромѣ даннаго, еще 6 интеграловъ, выражающихся въ логариѣмахъ и 4 интеграла, приводящихся къ эллиптическимъ.

II.

Для составленія гиперэллиптическихъ интеграловъ, приводящихся къ интеграламъ низшихъ классовъ, можно пользоваться также слѣдующимъ приемомъ.

Возьмемъ интегралъ

$$\int \frac{q dx}{\sqrt{R}},$$

(гдѣ  $q$  и  $R$  цѣлые полиномы  $x$ ) выражающійся въ логариѣмахъ. Такихъ интеграловъ мы знаемъ сколько угодно.

Въ этомъ случаѣ, какъ извѣстно, существуютъ два полинома  $P$  и  $Q$ , удовлетворяющіе равенству

$$P^2 - Q^2 R = C = \text{пост.}$$

Полиномы  $P$  и  $Q$  найдутся посредствомъ разложенія  $\sqrt{R}$  въ непрерывную дробь, именно  $\frac{P}{Q}$  будетъ одна изъ подходящихъ дробей этого разложенія.

Положимъ

$$P = U,$$

тогда

$$Q^2 R = U^2 - C.$$

Помножая числителя и знаменателя подъ интеграломъ на  $Q$ , получимъ

$$\int \frac{q Q dx}{\sqrt{[U^2 - C]}}.$$



Положивъ здѣсь

$$\rho = \frac{U'}{Q} = \frac{P'}{Q},$$

найдемъ

$$\int \frac{\rho dx}{\sqrt{R}} = \frac{1}{2} \lg \frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}}.$$

Такъ какъ степень  $P$  на  $m$  единицъ выше степени полинома  $Q$  (если  $R$  есть  $2m$ -ой степени), то, очевидно,  $\rho = \frac{P'}{Q}$  будетъ  $(m - 1)$ -ой степени.

Замѣтимъ, что интеграль

$$\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{R}}$$

выражается въ логариѣмахъ и алгебраическихъ функціяхъ и въ томъ случаѣ, когда

$$f(x) = \frac{P'}{Q} F(P),$$

гдѣ  $F$  знакъ произвольной рациональной функціи, а  $P$  и  $Q$  вышеупомянутые полиномы; иначе говоря, *если мы имѣемъ  $\sqrt{R}$ , разлагающійся въ непрерывную дробь, то вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ безчисленное множество интеграловъ вида*

$$\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{R}},$$

*выражающихся въ логариѣмахъ и алгебраическихъ функціяхъ.*

Не трудно доказать также слѣдующую теорему.

Теорема. Если интеграль

$$\int \frac{\rho dx}{\sqrt{R}},$$

гдѣ  $\rho$  и  $R$  цѣлые полиномы, выражается въ логариѣмахъ, то гиперэллиптической интеграль первого вида

$$\int \frac{\rho dx}{\sqrt{P \cdot R}},$$



гдѣ  $P$  полиномъ, удовлетворяющій равенству

$$P^2 - Q^2 R = \text{пост.},$$

приводится къ эллиптическому.

Для доказательства замѣчаемъ, что по предыдущему  $\varrho = \frac{P'}{Q}$  и, слѣдовательно,

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{P \cdot R}} = \int \frac{P' dx}{Q \sqrt{R \cdot P}} = \int \frac{P' dx}{\sqrt{P(P^2 - C)}}.$$

Полагая

$$P = y,$$

получимъ

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{P \cdot R}} = \frac{dy}{\sqrt{y(y^2 - C)}},$$

что и требовалось доказать.

Кромѣ этого гиперэллиптическаго интеграла можно найти еще нѣсколько другихъ, приводящихся къ интеграламъ низшихъ классовъ.

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ нѣсколько постоянныхъ  $C_1, C_2 \dots C_n$  и разложимъ разности  $P - C_1, P - C_2, \dots$  на множители; можемъ написать:

$$U - C_1 = p_1^2 \gamma_1,$$

$$U - C_2 = p_2^2 \gamma_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$U - C_n = p_n^2 \gamma_n.$$

Тогда интеграль

$$\int \frac{\lambda dx}{\sqrt{R \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n}}$$

приводится къ интегралу низшаго класса положеніемъ

$$\lambda = \frac{U'}{Q p_1 p_2 \dots p_n} = \frac{P'}{Q p_1 p_2 \dots p_n}$$

и

$$U = y,$$



и вмѣстѣ съ нимъ, по вышеизложенному, приводится къ интегралу низшаго класса и какой угодно изъ интеграловъ

$$\frac{\lambda dx}{\sqrt{R \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_i}} \quad (i < n).$$

Полиномы  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , очевидно, должны быть, какъ и  $Q$ , дѣлителями полинома  $P'$ . Число ихъ, слѣдовательно, не превышаетъ  $m - 1$ , если  $2m$  есть степень полинома  $R$ . (Замѣтимъ опять, что здѣсь мы не принимаемъ въ расчетъ значеній  $p_1, p_2, \dots$ , не зависящихъ отъ  $x$ ).

Изъ сказаннаго получаемъ слѣдующій приемъ для составленія гиперэллиптическихъ интеграловъ, приводящихся къ интеграламъ низшихъ классовъ.

Беремъ какой-нибудь интеграль

$$\int \frac{q dx}{\sqrt{R}}$$

( $q$  и  $R$  цѣлые полиномы), выражающійся въ логариомахъ.

Извѣстнымъ способомъ найдемъ полиномы  $P$  и  $Q$ , удовлетворяющіе равенству

$$P^2 - Q^2 R = C.$$

Производный полиномъ  $P'$  дѣлимъ на  $Q$  и частное представляемъ въ видѣ произведения  $p_1 p_2 \dots p_n$ . Затѣмъ дѣлимъ  $P$  послѣдовательно на  $p_1^2, p_2^2, \dots, p_n^2$ . Частныя будутъ  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  и остатки  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . (Эти остатки, необходимо, будутъ величины, независящія отъ  $x$ ).

Тогда интеграль

$$\int \frac{q dx}{\sqrt{R \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n}}$$

приведется къ интегралу низшаго класса, а вмѣстѣ съ нимъ приведется къ интеграламъ низшихъ классовъ извѣстное число другихъ интеграловъ и, кромѣ того, найдется нѣсколько интеграловъ, выражающихся въ логариомахъ.

Прослѣдимъ сказанное сейчасъ на примѣрѣ.

Возьмемъ интеграль

$$\int \frac{q dx}{\sqrt{(x^2 + ax + b)^2 - 4abx}}$$



Этот интеграл выражается въ логариомахъ, такъ какъ

$$\begin{aligned} \sqrt{(x^2+ax+b)^2-4abx} &= \\ &= x^2+ax+b + \frac{1}{x+a} + \\ &\quad - \frac{1}{2ab} + \frac{1}{-2a(x+a)} + \frac{1}{x^2+ax+b} + \dots \end{aligned}$$

Находимъ полиномы  $P$  и  $Q$ :

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} &= x^2+ax+b + \frac{1}{x+a} + \frac{1}{-2ab} + \frac{1}{-2a(x+a)} = \\ &= \frac{(x^2+ax+b)[(x+a)^2+b] - 2ab(x+a)}{(x+a)^2+b}. \end{aligned}$$

Слѣдовательно, имѣемъ

$$P = (x^2+ax+b)[(x+a)^2+b] - 2ab(x+a),$$

$$Q = (x+a)^2+b,$$

и  $P^2 - Q^2R = -4a^2b^3.$

По раздѣленіи  $P$  на  $Q$  у насъ получится частное первой степени:  $4x+a$ .

Такимъ образомъ, прежде всего имѣемъ

$$\int \frac{(4x+a) dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2-4abx}} = \frac{1}{2} \operatorname{lg} \frac{P+Q\sqrt{(x^2+ax+b)^2-4abx}}{P-Q\sqrt{(x^2+ax+b)^2-4abx}}$$

и интеграль

$$\begin{aligned} \int \frac{(4x+a) dx}{\sqrt{[(x^2+ax+b)^2-4abx][(x^2+ax+b)((x+a)^2+b]-2ab(x+a)]}} &= \\ &= \int \frac{dy}{\sqrt{y(y^2+4a^2b^3)}}, \end{aligned}$$

гдѣ  $y = (x^2+ax+b)((x+a)^2+b) - 2ab(x+a).$

Полагаемъ  $p_1 = x + \frac{a}{4}$  и дѣлимъ  $p$  на  $\left(x + \frac{a}{4}\right)^2$ , найдемъ частное



$$\gamma_1 = x^2 + \frac{5ax}{2} + 2b + \frac{27a^2}{16}$$

и остатокъ

$$C_1 = b^2 - \frac{9a^2b}{8} - \frac{27a^4}{256}.$$

На основаніи вышеизложеннаго получаемъ слѣдующія выраженія интеграловъ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{P\gamma_1}} = 4 \int \frac{dy}{\sqrt{(y^2 + 4a^2b^3)(y - b^2 + \frac{9}{8}a^2b + \frac{27}{256}a^4)}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{PR\gamma_1}} = 4 \int \frac{dy}{\sqrt{y(y^2 + 4a^2b^3)(y - b^2 + \frac{9}{8}a^2b + \frac{27}{256}a^4)}},$$

$$\int \frac{(x^2 + 2ax + a^2 + b)}{\sqrt{P\gamma_1}} dx = \lg \frac{\sqrt{P} + p_1\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{P} - p_1\sqrt{\gamma_1}}.$$

Кромѣ того, можно выразить въ логариѣмахъ и алгебраическихъ функціяхъ интегралы:

$$\int \frac{(4x + a) f(P) dx}{\sqrt{(x^2 + ax + b)^2 - 4abx}},$$

$$\int \frac{(x^2 + 2ax + a^2 + b) f(P) dx}{\sqrt{P\gamma_1}},$$

гдѣ  $f(P)$  произвольная рациональная функція  $P$ .

Точно такъ же можемъ выразить въ эллиптическихъ интегралахъ и такіе гиперэллиптическіе:

$$\int \frac{f(P) dx}{\sqrt{R\gamma_1}}, \quad \int \frac{f(P) dx}{\sqrt{PR\gamma_1}}.$$

Очевидно, такимъ образомъ, что и посредствомъ рассмотрѣннаго сейчасъ приѣма можемъ найти сколько угодно гиперэллиптическихъ интеграловъ, выражающихся чрезъ эллиптическіе.

### III.

Положимъ, намъ данъ интегралъ

$$\int \frac{ldx}{\sqrt{N(x)}},$$



гдѣ  $N(x)$  цѣлый полиномъ  $x$ , и требуется узнать, не приводится ли онъ къ интегралу низшаго класса.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ вопросъ этотъ можетъ быть рѣшенъ въ положительномъ смыслѣ, на основаніи вышеизложеннаго.

Разлагаемъ подкоренной полиномъ  $N(x)$  на множители

$$M_1 M_2 \dots M_n,$$

при чемъ степени этихъ множителей должны быть одинаковой четности, и смотримъ, не получается ли при нѣкоторой комбинаціи полиномовъ  $M_1 M_2, \dots$ , напр.  $M_1 M_2 \dots M_i$ , въ разложеніи  $\sqrt{M_1 M_2 \dots M_i}$  непрерывная періодическая дробь (предполагается, что степень произведения  $M_1 M_2 \dots M_i$  выше 2). Допустимъ, что получается. Ищемъ тогда полиномы  $P$  и  $Q$ , удовлетворяющіе равенству

$$P^2 - Q^2 M_1 M_2 \dots M_i = C.$$

Дѣлимъ  $P'$  на  $Q$  и пусть частное будетъ  $p_1 p_2 \dots p_k$ . Тогда, если данный интегралъ приводится къ болѣе простому посредствомъ нашего преобразованія, то въ частныхъ отъ дѣленія  $P$  на  $p_1^2, p_2^2, \dots$  должны получиться полиномы  $M_{i+1}, M_{i+2}, \dots M_n$  и въ остаткахъ величины, независящія отъ  $x$ .

Для приведенія даннаго интеграла къ интегралу низшаго класса слѣдуетъ ввести въ него новую переменную  $y$  уравненіемъ

$$y = P.$$

Разсмотримъ это на гиперэллиптическомъ интегралѣ Эрмита <sup>1)</sup>

$$\int \frac{ldx}{\sqrt{(x^2 - a)(4x^3 + 3ax + b)}}.$$

Для удобства замѣнимъ въ немъ  $a$  чрезъ  $a^2$

$$\int \frac{ldx}{\sqrt{(x^2 - a^2)(4x^3 + 3a^2x + b)}}.$$

Представивъ подкоренной полиномъ въ видѣ произведения

$$(x - a)(x + a)(4x^3 + 3a^2x + b),$$

<sup>1)</sup> Sur un exemple de réduction des intégrales Abeliennes aux fonctions elliptiques. (Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 1876).



попробуем разложить

$$\sqrt{(x+a)(4x^3+3a^2x+b)}$$

въ непрерывную дробь:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+a)(4x^3+3a^2x+b)} &= \sqrt{(2x^2+ax-a^2)^2+(b-a^3)(x+a)} = \\ &= 2x^2+ax-a^2 + \frac{1}{2(2x-a)} + \frac{1}{2(2x^2+ax-a^2)} + \frac{1}{2(2x-a)} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{b-a^3} \end{aligned}$$

Видимъ, что получается периодическая дробь. Опредѣляемъ полиномы  $P$  и  $Q$

$$\frac{P}{Q} = 2x^2 + ax - a^2 + \frac{b-a^3}{2(2x-a)} = \frac{8x^3 - 6a^2x + b + a^3}{2(2x-a)}$$

Частное отъ дѣленія  $P$  на  $Q$  есть  $3(2x+a) = 3p_1$ . Дѣлимъ  $P$  на  $(2x+a)^2$ ; получимъ частное, равное какъ разъ  $2(x-a)$  и остатокъ  $b+3a^3$ .

Закключаемъ отсюда, что гиперэллиптическій интегралъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(4x^3-3a^2x+b)}}$$

приводится къ эллиптическому. Для нахождения этого эллиптическаго интеграла слѣдуетъ числителя и знаменателя въ данномъ интегралѣ помножить на  $p_1Q$  и потомъ положить

$$y = 8x^3 - 6a^2x + b + a^3.$$

Точно такъ же приводится къ эллиптическому такой интегралъ

$$\int \frac{f(P)dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(4x^3-3a^2x+b)'}}$$

гдѣ  $f$  есть знакъ произвольной рациональной функціи.

Выше мы предполагали, что степень произведения  $M_1M_2\dots M_i$  выше двухъ. Случай, когда она равняется 2, особенно интересенъ, и мы разберемъ его отдѣльно въ слѣдующемъ  $n^0$ .



## IV.

Пусть гиперэллиптический интегралъ:

$$\int \frac{l dx}{\sqrt{R(x)}}$$

положеніемъ

$$y = U(x)$$

приводится къ интегралу нисшаго класса

$$\int \frac{l_1 dy}{\sqrt{(y-a_1)(y-a_2)\dots(y-a_k)}}$$

Представимъ разности подкоренного полинома въ видѣ

$$U - a_1 = p_1^2 \gamma_1,$$

$$U - a_2 = p_2^2 \gamma_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$U - a_k = p_k^2 \gamma_k.$$

Степени полиномовъ  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$  должны быть одинаковой четности, т. е. эти полиномы или всѣ нечетныхъ степеней, или всѣ четныхъ. Если  $R(x)$  нечетной степени, то, необходимо,  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$  будутъ нечетныхъ степеней, если же  $R(x)$  четной степени, то  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$  могутъ быть и четныхъ, и нечетныхъ степеней.

Если всѣ полиномы  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$  нечетныхъ степеней, то первой степени могутъ быть только два изъ нихъ, напр.  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , не болѣе. Въ самомъ дѣлѣ, тогда степень  $U(x)$  есть  $2m + 1$  (нечетная) и потому  $p_1$  и  $p_2$  оба будутъ степени  $m$  и, такъ какъ  $p_1$  и  $p_2$  суть дѣлители производной  $U'(x)$ , то остальные полиномы  $p_3, p_4, \dots, p_k$  будутъ величины постоянныя, не зависящія отъ  $x$ , и, стало быть,  $\gamma_3, \gamma_4, \dots, \gamma_k$  каждый будетъ степени  $2m + 1$ .

Этотъ случай, когда два изъ полиномовъ  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_k$  первой степени, я и намѣренъ здѣсь разобрать. Въ этомъ случаѣ видъ полинома  $U$  опредѣляется вполнѣ, а потому опредѣляется и видъ  $R(x)$ .



Пусть

$$\gamma_1 = x + a,$$

$$\gamma_2 = x + b.$$

Такъ какъ  $p_1$  и  $p_2$  суть дѣлители полинома  $U'(x)$ , то заключаемъ

$$U'(x) = (2m + 1)p_1p_2.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{U'}{\sqrt{(U-a_1)(U-a_2)}} = \frac{2m+1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}.$$

Интегрируя это дифференціальное уравненіе, получимъ

$$\begin{aligned} U - \frac{a_1 + a_2}{2} + \sqrt{(U-a_1)(U-a_2)} &= \\ = C \left[ x + \frac{a+b}{2} + \sqrt{(x+a)(x+b)} \right]^{2m+1} \end{aligned}$$

Постоянную  $C$ , вошедшую при интегрированіи, опредѣляемъ изъ условія, что при  $x+a=0$  должно быть  $U=a_1$ . Это условіе даетъ намъ такое равенство

$$C = \frac{\frac{a_1 - a_2}{2}}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2m+1}}.$$

Мѣняя знаки у радикаловъ, будетъ имѣть въ то же время

$$\begin{aligned} U - \frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{(U-a_1)(U-a_2)} &= \\ = C \left( x + \frac{a+b}{2} - \sqrt{(x+a)(x+b)} \right)^{2m+1} \end{aligned}$$

Складывая два полученные равенства, найдемъ

$$\begin{aligned} 2U - (a_1 + a_2) &= \frac{\frac{a_1 - a_2}{2}}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2m+1}} \left\{ \left( x + \frac{a+b}{2} + \sqrt{(x+a)(x+b)} \right)^{2m+1} + \right. \\ &\quad \left. + \left( x + \frac{a+b}{2} - \sqrt{(x+a)(x+b)} \right)^{2m+1} \right\}, \end{aligned}$$



откуда

$$U(x) = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{\frac{a_1 + a_2}{2}}{2\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2m+1}} \left\{ \left( x + \frac{a+b}{2} + \sqrt{(x+a)(x+b)} \right)^{2m+1} + \left( x + \frac{a+b}{2} - \sqrt{(x+a)(x+b)} \right)^{2m+1} \right\}.$$

Зная, что

$$\cos \operatorname{arccos} z = \frac{(z + \sqrt{z^2 - 1})^n + (z - \sqrt{z^2 - 1})^n}{2},$$

мы можем полиномъ  $U$  сокращенно написать такъ

$$U(x) = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2} \cos(2m+1) \operatorname{arccos} \frac{x + \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}.$$

Полиномы  $p_1$  и  $p_2$  будутъ

$$p_1 = \cos \operatorname{arccos} \frac{x + \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}} + \cos(m-1) \operatorname{arccos} \frac{x + \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}} + \dots + \frac{1}{2},$$

$$p_2 = \cos \operatorname{arccos} \frac{x + \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}} - \cos(m-1) \operatorname{arccos} \frac{x + \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}} + \dots + (-1)^m \frac{1}{2},$$

такъ что

$$U - a_1 = 4 \frac{a_1 - a_2}{b-a} (x+a) p_1^2,$$

$$U - a_2 = 4 \frac{a_1 - a_2}{b-a} (x+b) p_2^2.$$

Если бы мы рассмотрѣли случай, когда одинъ изъ полиномовъ  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$  нулевой степени, а другой второй степени, то нашли бы подобнымъ же образомъ выраженіе

$$U(x) = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2} \cos 2 \operatorname{arccos} \frac{x + \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}},$$



тогда

$$U(x) - a_1 = (a_1 - a_2)(x+a)(x+b) \left( \operatorname{cs}(m-1) \operatorname{arccs} \frac{x + \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}} + \operatorname{cs}(m-3) \operatorname{arccs} \frac{x + \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}} + \dots \right)^2$$

и

$$U(x) - a_2 = (a_1 - a_2) \left( \operatorname{cosnarccos} \frac{x + \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}} \right)^2$$

Изъ сказаннаго заключаемъ, что гиперэллиптическій интеграль ка-кого угодно класса

$$\int \sqrt{\frac{dx}{(x+a)(x+b) \left( A + B \operatorname{csnarccos} \frac{x + \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}} \right)}}$$

приводится къ эллиптическому.

Для приведенія можно положить

$$y = \operatorname{cosnarccos} \frac{x + \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ выраженія въ логариѣмахъ для интеграловъ:

$$\int \sqrt{\frac{p_1 dx}{(x+b) \left( A + B \cos(2m+1) \operatorname{arccos} \frac{x + \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}} \right)}} =$$

$$\frac{1}{2m+1} \operatorname{lg} \frac{p_2 \sqrt{(x+b)} + \sqrt{\left( A + B \cos(2m+1) \operatorname{arccos} \frac{x + \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}} \right)}}{p_2 \sqrt{(x+b)} - \sqrt{\left( A + B \cos(2m+1) \operatorname{arccos} \frac{x + \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}} \right)}},$$



$$\int \frac{\cos m \arccos \frac{x + \frac{a+b}{2}}{b-a}}{2} dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b) \left( A + B \cos 2m \arccos \frac{x + \frac{a+b}{2}}{b-a} \right)}}$$

$$\frac{1}{2m} \lg \frac{P \sqrt{(x+a)(x+b)} + \sqrt{\left( A + B \cos 2m \arccos \frac{x + \frac{a+b}{2}}{b-a} \right)}}{P \sqrt{(x+a)(x+b)} - \sqrt{\left( A + B \cos 2m \arccos \frac{x + \frac{a+b}{2}}{b-a} \right)}}$$

$$\left[ \text{здѣсь } P = \cos(m-1) \arccos \frac{x + \frac{a+b}{2}}{b-a} + \cos(m-3) \arccos \frac{x + \frac{a+b}{2}}{b-a} + \dots \right]$$

и др.

Послѣднія разсужденія даютъ возможность доказать слѣдующую теорему.

Теорема. Если гиперэллиптической интегралъ перваго класса

$$\int \frac{\lambda dx}{\sqrt{R(x)}},$$

гдѣ  $R(x)$  полиномъ 5-й степени, приводится къ эллиптическому преобразованіемъ

$y =$  цѣлой функціи  $x$ ,

то необходимо должно быть

$$R(x) = (x+a)(x+b) \left( A + B \cos 3 \arccos \frac{x + \frac{a+b}{2}}{b-a} \right),$$

Для доказательства замѣтимъ сначала, что данный интегралъ не можетъ приводиться къ такому эллиптическому

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(y-a_1)(y-a_2)(y-a_3)(y-a_4)}},$$

такъ какъ, полагая



$$y - a_1 = p_1^2 \gamma_1,$$

$$y - a_2 = p_2^2 \gamma_2,$$

$$y - a_3 = p_3^2 \gamma_3,$$

$$y - a_4 = p_4^2 \gamma_4,$$

мы найдемъ

$$R(x) = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4,$$

но произведение четырехъ полиномовъ  $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$ , которыхъ степени одинаковой четности, не можетъ быть полиномомъ 5-й степени.

Слѣдовательно, если данный интеграль приведется къ эллиптическому, то такому:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(y-a_1)(y-a_2)(y-a_3)}}.$$

Полагая опять

$$y - a_1 = p_1^2 \gamma_1,$$

$$y - a_2 = p_2^2 \gamma_2,$$

$$y - a_3 = p_3^2 \gamma_3,$$

мы будемъ имѣть

$$R(x) = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3.$$

Значить полиномы  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$  должны быть нечетныхъ степеней, а такъ какъ сумма этихъ степеней равняется 5, то, очевидно, одинъ изъ этихъ полиномовъ будетъ 3-й степени, а остальные два первой степени.

Пусть

$$\gamma_1 = x + a,$$

$$\gamma_2 = x + b,$$

тогда, на основаніи сказаннаго въ этомъ п<sup>0</sup>, заключаемъ

$$y = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2} \cos(2m + 1) \arccos \frac{x + \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}},$$



а такъ какъ  $p_3$  въ этомъ случаѣ не зависитъ отъ  $x$  ( $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$  дѣлители полинома  $2m$ -й степени  $y'$ ), то  $y$  должно быть 3-й степени, ибо  $\gamma_3$ , какъ сказано выше, есть полиномъ 3-й степени.

Слѣдовательно,

$$y = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2} \cos 3\alpha r \cos \frac{x + \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}},$$

а это и доказываетъ теорему.

И такъ, изъ гиперэллиптическихъ интеграловъ перваго класса

$$\int \frac{(kx + 1) dx}{\sqrt{(mx^5 + nx^4 + px^3 + qx^2 + rx + s)}},$$

преобразованіемъ

$$y = \text{цѣлому полиному } x,$$

въ эллиптическому приводится только одинъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 2xm + n)(x^3 + 3mx^2 + \frac{3}{4}(3m^2 + n)x + c)}}.$$

(Здѣсь мы обозначили  $a + b$  чрезъ  $2m$ ,  $ab$  чрезъ  $n$ ).

Для приведенія можно положить

$$y = x^3 + 3mx^2 + \frac{3}{4}(3m^2 + n)x.$$

Въ частномъ случаѣ, когда  $m = 0$ , мы получаемъ интегралъ Эрмита

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + n)(x^2 + \frac{3}{4}nx + c)}},$$

о которомъ мы уже упоминали.

Подобная теорема не имѣетъ мѣста для гиперэллиптическихъ интеграловъ втораго, третьяго и т. д. классовъ.

Пермь.

Ноябрь 1887 г.