

Одна задача механики системы материальных точек.

Д. К. Бобылева.

Рѣшить вопросъ о движеніи n материальныхъ точекъ $M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_n$, остающихся на прямой линіи, которая не выходитъ изъ плоскости XU ; каждая изъ точекъ M_i притягивается къ началу координатъ силою равною $\mu m_i r_i$, а между каждою парою точекъ M_i и M_j существуютъ взаимныя притяженія, равныя $\varepsilon m_i m_j r_{ij}$.

$m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_n$ означаютъ массы точекъ, r_i — разстояніе точки M_i отъ начала координатъ, r_{ij} — разстояніе между точками M_i и M_j .

Уравненіями связей могутъ служить равенства:

$$(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1) = 0,$$

$$(x_4 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_4 - y_1)(x_2 - x_1) = 0,$$

.

$$(x_n - x_1)(y_2 - y_1) - (y_n - y_1)(x_2 - x_1) = 0,$$

число которыхъ $(n - 2)$. Такъ какъ число всѣхъ координатъ $2n$, то число независимыхъ координатъ равно $2n - (n - 2) = (n + 2)$, а потому предстоитъ произвести $(2n + 4)$ интегрированій и получить столько же независимыхъ интеграловъ для полного рѣшенія вопроса.

Не трудно видѣть, что дифференціальныя уравненія движенія центра инерціи будутъ:

$$x_c'' = -\mu x_c, \quad y_c'' = -\mu y_c \quad (1)$$

и что ихъ рѣшенія, требующія четырехъ интегрированій, будутъ:

$$x_c = a_c \cos t\sqrt{\mu} + \frac{\alpha_c}{\sqrt{\mu}} \sin t\sqrt{\mu},$$

$$y_c = b_c \cos t\sqrt{\mu} + \frac{\beta_c}{\sqrt{\mu}} \sin t\sqrt{\mu},$$

гдѣ a_c, b_c суть начальные координаты, α_c и β_c — проекціи начальной скорости центра инерціи.

Послѣ этого замѣнимъ x_i черезъ $(x_c + \xi_i)$ и y_i — черезъ $(y_c + \eta_i)$ въ дифференціальныхъ уравненіяхъ движенія точекъ, которыя на основаніи дифференціальныхъ уравненій (1) получаютъ тогда видъ:

$$m_1 \ddot{\xi}_1 = -m_1 \kappa^2 \xi_1 + \lambda_3 (\eta_3 - \eta_2) + \dots + \lambda_n (\eta_n - \eta_2),$$

$$m_1 \ddot{\eta}_1 = -m_1 \kappa^2 \eta_1 - \lambda_3 (\xi_3 - \xi_2) - \dots - \lambda_n (\xi_n - \xi_2),$$

$$m_2 \ddot{\xi}_2 = -m_2 \kappa^2 \xi_2 - \lambda_3 (\eta_3 - \eta_1) - \dots - \lambda_n (\eta_n - \eta_1),$$

$$m_2 \ddot{\eta}_2 = -m_2 \kappa^2 \eta_2 + \lambda_3 (\xi_3 - \xi_1) + \dots + \lambda_n (\xi_n - \xi_1),$$

$$m_i \ddot{\xi}_i = -m_i \kappa^2 \xi_i + \lambda_i (\eta_2 - \eta_1),$$

$$m_i \ddot{\eta}_i = -m_i \kappa^2 \eta_i - \lambda_i (\xi_2 - \xi_1),$$

гдѣ i означаетъ одно изъ чиселъ 3, 4, ..., n ; $\lambda_3, \lambda_4, \dots, \lambda_n$ суть множители, свойственные связямъ; $\kappa^2 = \mu + \varepsilon M$, $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$.

Изъ этихъ дифференціальныхъ уравненій получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i (\xi_i \eta_i'' - \eta_i \xi_i'') = 0, \quad \dots \dots \dots (2)$$

далѣе, на основаніи уравненій связей:

$$\xi_i \ddot{\xi}_i + \eta_i \ddot{\eta}_i = -\kappa^2 (\xi_i^2 + \eta_i^2) \dots \dots \dots (3)$$

для i равнаго 3, 4, ..., n ; если же принять въ расчетъ, что всѣ точки находятся на прямой и означить черезъ ϑ уголъ, составляемый этою прямою съ осью X -овъ, такъ что

$$\frac{\eta_1}{\xi_1} = \frac{\eta_2}{\xi_2} = \frac{\eta_3}{\xi_3} = \dots = \frac{\eta_i}{\xi_i} = \dots = \frac{\eta_n}{\xi_n} = \operatorname{tg} \vartheta,$$

то окажется, что дифференціальное уравненіе (3) имѣетъ мѣсто также и для точекъ M_1 и M_2 .

Кромѣ этого здѣсь имѣеть мѣсто законъ живой силы, выражаемый интеграломъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i [(\xi'_i)^2 + (\eta'_i)^2] = -\kappa^2 \sum_{i=1}^{i=n} m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2) + 2h \quad \dots \quad (4)$$

Означимъ черезъ $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_i, \dots, \rho_n$ разстоянія точекъ отъ центра инерціи; эти разстоянія и производныя отъ нихъ по времени связаны равенствами:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \rho_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \rho'_i = 0.$$

Интегрируя дифференціальное уравненіе (2), получимъ:

$$J \frac{d\vartheta}{dt} = J_0 \vartheta'_0, \quad \dots \quad (I)$$

гдѣ

$$J = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \rho_i^2, \quad J_0 = \sum_{i=1}^{i=n} m_i a_i^2;$$

$a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n$ означаютъ начальныя величины разстояній $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n$ будутъ означать начальныя величины производныхъ $\rho'_1, \rho'_2, \dots, \rho'_n$.

Интеграль (4) выразится такъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i [(\rho'_i)^2 + \rho_i^2 (\vartheta')^2] + \kappa^2 J = 2h, \quad \dots \quad (II)$$

$$2h = A + (\vartheta'_0)^2 + \kappa^2 J_0; \quad A = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \alpha_i^2.$$

Далѣе, каждое изъ дифференціальныхъ уравненій (3) можно представить такъ:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \rho_i^2}{dt^2} = (\rho'_i)^2 + \rho_i^2 (\vartheta')^2 - \kappa^2 \rho_i^2, \quad \dots \quad (5)$$

поэтому интегралу (II) можно дать слѣдующій видъ:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 J}{dt^2} + 2x^2 J = 2h (6)$$

Произведя надъ (6) два интегрированія, получимъ:

$$J - \frac{h}{x^2} = \left(J_0 - \frac{h}{x^2} \right) \cos 2xt + \frac{K}{x} \sin 2xt, . . . (III, IV)$$

гдѣ

$$K = \sum_{i=1}^{i=n} m_i a_i \alpha_i.$$

Изъ теоріи опредѣлителей извѣстно, что

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^{i=n} m_i \varrho_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{i=n} m_i (\varrho'_i)^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^{i=n} m_i \varrho_i \varrho'_i \right)^2 = \\ & = \sum_i \sum_j m_i m_j (\varrho_i \varrho'_j - \varrho_j \varrho'_i)^2, (7) \end{aligned}$$

гдѣ двойная сумма распространяется на всевозможныя сочетанія чиселъ 1, 2, n попарно. Примѣнивъ равенство это къ начальнымъ значеніямъ ϱ и ϱ' , получимъ:

$$J_0 A - K^2 = \sum_i \sum_j m_i m_j (a_i \alpha_j - a_j \alpha_i)^2; (8)$$

отсюда видно, что $J_0 A - K^2$ есть величина положительная. Отношеніе

$$\frac{J_0 A - K^2}{J_0^2 \vartheta_0'^2},$$

которое будетъ также величиною положительною, мы означимъ черезъ D^2 . Легко видѣть, что

$$2h = K^2 + J_0 (\vartheta_0')^2 (1 + D^2) + J_0 x^2 (9)$$

и что

$$J = J_0 \vartheta_0'^2 (1 + D^2) \frac{\sin^2 t x}{x^2} \left\{ 1 + \frac{x^2}{\vartheta_0'^2 (1 + D^2)} \left(\cot g t x + \frac{K}{x J_0} \right)^2 \right\}. . . (10)$$

Подставивъ это выраженіе для J въ интеграль (I), произведемъ пятое интегрирование; тогда получимъ:

$$\cotg(\vartheta + \Gamma)\sqrt{1 + D^2} = \frac{x}{\vartheta'_0\sqrt{1 + D^2}} \left(\cotgtx + \frac{K}{J_0x} \right);$$

а если предположимъ, что при $t = 0$ уголъ ϑ равенъ нулю, то окажется, что

$$\tgtx = \frac{J_0x \tg\varphi}{J_0\vartheta'_0\sqrt{1 + D^2} - K \tg\varphi}, \dots \dots \dots (V)$$

$$\varphi = \vartheta\sqrt{1 + D^2}$$

$$J \left\{ \left(\cos\varphi - \frac{K}{J_0\vartheta'_0\sqrt{1 + D^2}} \sin\varphi \right)^2 + \frac{x^2 J_0^2}{J_0^2 \vartheta'^2_0 (1 + D^2)} \sin^2\varphi \right\} = J_0. \dots (11)$$

Теперь замѣтимъ, что дифференціальныя уравненія (3) или (5) можно написать такъ:

$$\varrho_i \varrho_i'' = \varrho_i^2 [(\vartheta')^2 - x^2];$$

поэтому имѣемъ $(n - 1)$ дифференціальныя уравненій:

$$\frac{\varrho_1''}{\varrho_1} = \frac{\varrho_2''}{\varrho_2} = \dots = \frac{\varrho_i''}{\varrho_i} = \dots = \frac{\varrho_n''}{\varrho_n},$$

изъ которыхъ найдемъ столько же интеграловъ:

$$\left. \begin{aligned} \varrho_1 \varrho_2' - \varrho_2 \varrho_1' &= C_{12}, \\ \dots \dots \dots \\ \varrho_1 \varrho_n' - \varrho_n \varrho_1' &= C_{1n}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (E)$$

гдѣ

$$C_{1i} = a_1 \alpha_i - \alpha_i \alpha_1.$$

Эти интегралы можно представить подъ видомъ равенствъ:

$$\frac{d\left(\frac{\varrho_2}{C_{12}\varrho_1}\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{\varrho_3}{C_{13}\varrho_1}\right)}{dt} = \dots = \frac{d\left(\frac{\varrho_n}{C_{1n}\varrho_1}\right)}{dt} = \frac{1}{\varrho_1^2}, \dots (12)$$

поэтому можно произвести $(n - 2)$ новыхъ интегрированій и получить столько же интеграловъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varrho_3}{C_{13}\varrho_1} - \frac{\varrho_2}{C_{12}\varrho_1} &= \Gamma_{23} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{\varrho_n}{C_{1n}\varrho_1} - \frac{\varrho_2}{C_{12}\varrho_1} &= \Gamma_{2n}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (F)$$

гдѣ

$$\Gamma_{2i} = \frac{a_i}{C_{1i}a_1} - \frac{a_2}{C_{12}a_1} = - \frac{(a_2a_i - a_1a_2)}{C_{1i}C_{12}} \dots \dots \dots (13)$$

Такимъ образомъ, произведено $4 + 5 + n - 1 + n - 2$, то есть $(2n + 6)$ интегрированій, а требовалось только $(2n + 4)$; правда, постоянныя C_{1i} связаны между собою зависимостью:

$$\sum_{i=2}^{i=n} m_i C_{1i} = 0, \dots \dots \dots (14)$$

а съ постоянными Γ_{2i} еще другою зависимостью:

$$\sum_{i=3}^{i=n} m_i \Gamma_{2i} C_{12} C_{1i} + m_1 C_{12} = 0^*), \dots \dots \dots (15)$$

*) Эти равенства (14) и (15) суть слѣдствія того, что

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i a_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i \alpha_i = 0;$$

въ самомъ дѣлѣ, подставивъ въ (14) вмѣсто C_{1i} ихъ выраженія въ $a_1, \alpha_1, a_i, \alpha_i$, а въ (15) выраженія Γ_{2i} по формулѣ (13), получимъ:

$$\sum_{i=2}^{i=n} m_i C_{1i} = a_1 \sum_{i=1}^{i=n} m_i \alpha_i - a_1 \sum_{i=1}^{i=n} m_i a_i,$$

$$\sum_{i=3}^{i=n} m_i \Gamma_{2i} C_{12} C_{1i} = a_2 \sum_{i=2}^{i=n} m_i a_i - a_2 \sum_{i=2}^{i=n} m_i \alpha_i = - m_1 (a_2 a_1 - a_2 \alpha_1).$$

такъ что, стало быть, произведено два излишнихъ интегрированія. Однако, при ближайшемъ разсмотрѣннн полученныхъ результатовъ, оказывается, что вопросъ еще не рѣшенъ и что нужно произвести еще одно интегрированіе. Въ самомъ дѣлѣ, постоянныя C_{1i} , Γ_{2i} связаны между собою и съ постоянными h , K , J_0 , ϑ'_0 еще одною зависимостью, которая получится изъ равенства (8) слѣдующимъ образомъ:

Вмѣсто A подставимъ $2h - J_0(\vartheta'_0)^2 + x^2$ и вмѣсто $(a_i\alpha_j - a_j\alpha_i)$ для i и j неравныхъ единицъ — слѣдующее:

$$\frac{a_1 a_i \alpha_j - a_i a_j \alpha_1 - a_1 a_j \alpha_i + a_i \alpha_j \alpha_1}{a_1} = \frac{a_i C_{1j} - a_j C_{1i}}{a_1},$$

или, выразивъ a_i и a_j въ Γ_{2i} и въ Γ_{2j} :

$$(\Gamma_{2i} - \Gamma_{2j}) C_{1i} C_{1j}.$$

Такимъ образомъ, получимъ:

$$2hJ_0 - K^2 - J_0^2(\vartheta'_0)^2 + x^2 = \sum_{ij} m_i m_j (\Gamma_{2i} - \Gamma_{2j})^2 C_{1i}^2 C_{1j}^2 + \sum_{k=2}^{k=n} m_1 m_k C_{1k}^2, \dots \dots \dots (16)$$

гдѣ i и j суть числа 2, 3, ..., n , взятые во всевозможныхъ сочетаніяхъ попарно.

Послѣднее интегрированіе я произведу надъ дифференціальнымъ уравненіемъ:

$$d\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right) = C_{12} \frac{dt}{\varrho_1^2},$$

въ которомъ замѣню dt , на основаніи интеграла (I)-го, отношеніемъ $Jd\vartheta : J_0\vartheta'_0$, вслѣдствіе чего получится:

$$d\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right) = \frac{C_{12}}{J_0\vartheta'_0} \frac{J}{\varrho_1^2} d\vartheta. \dots \dots \dots (17)$$

Теперь я преобразую выраженіе момента инерціи J при помощи равенствъ:

$$\varrho_i = \frac{C_{1i}}{C_{12}} \varrho_2 + C_{1i} \Gamma_{2i} \varrho_1 = \frac{C_{1i}}{C_{12}} \varrho_2 - \frac{(a_2\alpha_i - a_i\alpha_2)}{C_{12}} \varrho_1$$

или

$$\varrho_i = \frac{C_{1i}\varrho_2 - C_{2i}\varrho_1}{C_{12}},$$

если обозначить разности $(a_2\alpha_i - a_i\alpha_2)$ через C_{2i} ; тогда получимъ:

$$C_{12}^2 J = \varrho_2^2 \sum_{i=1}^{i=n} m_i C_{1i}^2 - 2\varrho_2\varrho_1 \sum_{i=1}^{i=n} m_i C_{1i} C_{2i} + \varrho_1^2 \sum_{i=1}^{i=n} m_i C_{2i}^2, \quad \dots \quad (18)$$

поэтому:

$$\frac{J}{\varrho_1^2} C_{12}^2 = \sum_{i=1}^{i=n} m_i C_{1i}^2 \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1} - \frac{\sum_{i=1}^{i=n} m_i C_{1i} C_{12}}{\sum_{i=1}^{i=n} m_i C_{1i}^2} \right)^2 + \frac{\sum_{i=1}^{i=n} m_i C_{1i}^2 \sum_{i=1}^{i=n} m_i C_{2i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{i=n} m_i C_{1i} C_{2i} \right)^2}{\sum_{i=1}^{i=n} m_i C_{1i}^2}.$$

Изъ теории опредѣлителей извѣстно, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=n} m_i C_{1i}^2 \sum_{i=1}^{i=n} m_i C_{2i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{i=n} m_i C_{1i} C_{2i} \right)^2 &= \\ &= \sum_{ij} m_i m_j (C_{1i} C_{2j} - C_{1j} C_{2i})^2; \end{aligned}$$

здѣсь можно произвести слѣдующее преобразование:

$$C_{1i} C_{2j} - C_{1j} C_{2i} = a_2 (C_{1i} \alpha_j - C_{1j} \alpha_i) - \alpha_2 (C_{1i} a_j - C_{1j} a_i);$$

$$C_{1i} \alpha_j - C_{1j} \alpha_i = -(a_i \alpha_j - a_j \alpha_i) \alpha_1,$$

$$C_{1i} a_j - C_{1j} a_i = -(a_i \alpha_j - a_j \alpha_i) \alpha_1,$$

$$C_{1i} C_{2j} - C_{1j} C_{2i} = (a_1 \alpha_2 - a_2 \alpha_1) (a_i \alpha_j - a_j \alpha_i).$$

Поэтому, на основаніи равенства (8), вышесказанная разность оказывается равною:

$$C_{12}^2 (AJ_0 - K^2) = C_{12}^2 J_0^2 \vartheta_0'^2 D^2.$$

Слѣдовательно:

$$\frac{J}{\varrho_1^2} C_{12}^2 = \frac{C_{12}^2 J_0^2 \vartheta'_0{}^2 D^2}{\Sigma m_i C_{1i}^2} \left\{ \frac{(\Sigma m_i C_{1i}^2)^2}{J_0^2 \vartheta'_0{}^2 D^2 C_{12}^2} \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1} - \frac{\Sigma m_i C_{1i} C_{2i}}{\Sigma m_i C_{1i}^2} \right)^2 + 1 \right\}. \quad (18bis)$$

Имѣя это выраженіе, я подставляю его въ дифференціальное уравненіе (17), которое интегрирую, и получаю:

$$\frac{\Sigma m_i C_{1i}^2}{J_0 \vartheta'_0 D C_{12}} \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1} - \frac{\Sigma m_i C_{1i} C_{2i}}{\Sigma m_i C_{1i}^2} \right) = \operatorname{tg} D(\vartheta + \Gamma). \quad (19)$$

Здѣсь Γ новая постоянная; такъ какъ при $t=0$ уголъ $\vartheta=0$, $\varrho_1 = a_1$, $\varrho_2 = a_2$, то

$$\operatorname{tg} D\Gamma = \frac{a_2 \Sigma m_i C_{1i}^2 - a_1 \Sigma m_i C_{1i} C_{2i}}{a_1 J_0 \vartheta'_0 D C_{12}},$$

$$\begin{aligned} a_2 \Sigma m_i C_{1i}^2 - a_1 \Sigma m_i C_{1i} C_{2i} &= \Sigma m_i C_{1i} (a_2 C_{1i} - a_1 C_{2i}) = \\ &= C_{12} \Sigma m_i C_{1i} a_i = C_{12} (a_1 K - a_1 J_0); \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} D\Gamma = \frac{a_1 K - a_1 J_0}{a_1 J_0 \vartheta'_0 D} \cdot \dots \dots \dots (20)$$

Изъ выраженія (18 bis) и интегральнаго уравненія (19) получается:

$$\frac{J}{\varrho_1^2} = \frac{J_0^2 \vartheta'_0{}^2 D^2}{\Sigma m_i C_{1i}^2} \frac{1}{\cos^2 D(\vartheta + \Gamma)}, \quad \dots \dots \dots (21)$$

а отсюда и изъ (11):

$$\varrho_1 = \frac{a_1 \cos D\vartheta - \frac{a_1 K - a_1 J_0}{J_0 \vartheta'_0 D} \sin D\vartheta}{\sqrt{\left(\cos \varphi - \frac{K}{J_0 \vartheta'_0 \sqrt{1+D^2}} \sin \varphi \right)^2 + \frac{x^2}{\vartheta'_0{}^2 (1+D^2)} \sin^2 \varphi}}, \quad (22)$$

потому что

$$\cos D\Gamma = \frac{a_1 J_0 \vartheta'_0 D}{\sqrt{J_0 \Sigma m_i C_{1i}^2}}, \quad \sin D\Gamma = \frac{a_1 K - a_1 J_0}{\sqrt{J_0 \Sigma m_i C_{1i}^2}},$$

$$\begin{aligned} J_0 \Sigma m_i C_{1i}^2 &= J_0 (a_1^2 A - 2a_1 \alpha_1 K + \alpha_1^2 J_0) = \\ &= (a_1 K - \alpha_1 J_0)^2 + a_1^2 (A J_0 - K^2) = (a_1 K - \alpha_1 J_0)^2 + a_1^2 J_0^2 \vartheta'_0{}^2 D^2. \end{aligned}$$

Имѣя выраженія для ϱ_1 , получимъ выраженія для ϱ_i слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{\varrho_i}{\varrho_1} = \frac{a_i}{a_1} + \frac{C_{1i}}{C_{12}} \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1} - \frac{a_2}{a_1} \right);$$

$$\begin{aligned} \frac{C_{1i}}{C_{12}} \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1} - \frac{a_2}{a_1} \right) &= \frac{J_0 \vartheta'_0 D C_{1i}}{\Sigma m_i C_{1i}^2} [\operatorname{tg} D(\vartheta + \Gamma) - \operatorname{tg} D\Gamma] = \\ &= \frac{J_0 \vartheta'_0 D C_{1i}}{\Sigma m_i C_{1i}^2} \frac{\sin D\vartheta}{\cos D\Gamma \cos D(\vartheta + \Gamma)}; \end{aligned}$$

$$\cos D\Gamma \cos D(\vartheta + \Gamma) = \frac{a_1 \vartheta'_0 D \sqrt{J_0}}{\sqrt{\Sigma m_i C_{1i}^2}} \frac{\varrho_1}{\sqrt{J}} \frac{J_0 \vartheta'_0 D}{\sqrt{\Sigma m_i C_{1i}^2}};$$

$$\varrho_i = \frac{a_i}{a_1} \varrho_1 + \frac{\sqrt{J} C_{1i}}{a_1 \vartheta'_0 D \sqrt{J_0}} \sin D\vartheta;$$

$$\varrho_i \sqrt{\frac{J_0}{J}} = a_i \cos D\vartheta - \frac{a_1 K - \alpha_1 J_0}{a_1 \vartheta'_0 D J_0} a_i \sin D\vartheta + \frac{C_{1i}}{a_1 \vartheta'_0 D} \sin D\vartheta;$$

$$(a_1 K - \alpha_1 J_0) a_i - J_0 C_{1i} = a_1 (a_i K - \alpha_i J_0).$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$\varrho_i = \frac{a_i \cos D\vartheta - \frac{a_i K - \alpha_i J_0}{J_0 \vartheta'_0 D} \sin D\vartheta}{\sqrt{\left(\cos \varphi - \frac{K}{J_0 \vartheta'_0 \sqrt{1 + D^2}} \sin \varphi \right)^2 + \frac{x^2}{\vartheta'_0{}^2 (1 + D^2)} \sin^2 \varphi}},$$

гдѣ $\varphi = \vartheta \sqrt{1 + D^2}$.

Конечно, полученное выраженіе для ϱ_i удовлетворяетъ дифференціальному уравненію второго порядка:

$$\varrho_i'' = \varrho_i \left[\left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 - x^2 \right],$$

въ которомъ

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{J_0 \vartheta'_0}{\frac{h}{x^2} + \left(J_0 - \frac{h}{x^2} \right) \cos 2\pi t + \frac{K}{x} \sin 2\pi t}.$$

11 Ноября 1888 г.