Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-ème série, Tome X, ~~№№ 5—6~~.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ.
Томъ X.
~~№№ 5—6~~. 1907/1908

ХАРЬКОВЪ.
Типографія и Литографія М. Зильберберг и С-вья.
(Рыбная улица, домъ № 30-й).
1909.

Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-ème série, Tome X.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ.

Томъ X.

(съ портретомъ А. Н. Коркина).

ХАРЬКОВЪ.
Типографія и Литографія М. Зильбербергъ и С-вья.
(Рыбная улица, домъ № 30-й).
1909.

СОДЕРЖАНІЕ:

X-го тома.

Заглавіе, отмѣченное *, является переводомъ заглавія оригинала.

TABLE DES MATIÈRES

du tome X.

Le titre désigné par un astérisque *, présente la traduction du titre original.

СОСТАВЪ
Харьковскаго Математическаго Общества
къ 1-му Января 1908 года.

A. Распорядительный комитетъ.

1. Предсѣдатель: проф. *Д. М. Синцовъ.*
2. Товарищи предсѣдателя: проф. *А. П. Грузинцевъ* и проф. *Ц. К. Русьянъ.*
3. Секретарь: проф. *Н. Н. Салтыковъ.*

B. Почетные члены.

1. Андреевъ Константинъ Алексѣевичъ, проф. Московскаго унив.
2. P. Appel, проф. Парижскаго университета, академикъ.
3. Бобылевъ Дмитрій Константиновичъ, проф. СПБ. университета.
4. Ермаковъ Василій Петровичъ, засл. проф. универ. св. Владиміра.
5. Жуковскій Николай Егоровичъ, проф. Московскаго унив.
6. Коркинъ Александръ Николаевичъ, проф. СПБ. унив.
7. Ляпуновъ Александръ Михайловичъ, академикъ.
8. Марковъ Андрей Андреевичъ, академикъ.
9. E. Picard, проф. Парижскаго университета, академикъ.
10. H. Poincaré, проф. Парижскаго университета, академикъ.
11. Поссе Константинъ Александровичъ, проф. СПБ. элект.-техн. инст.
12. Тихомандрицкій Матвѣй Александровичъ, засл. проф. Харьков. унив.
13. Стекловъ Владиміръ Андреевичъ, проф. СПБ. университета.
14. Грузинцевъ Алексѣй Петровичъ, проф. Харьков. унив.
15. Darboux Gaston, академикъ.
16. Klein Felix, проф. (Göttingen).
17. Hilbert David проф. (Göttingen).
18. Mittag-Leffler Gösta, проф. (Stockholm).
19. Mayer Adolf, проф. (Leipzig).
20. Cantor Georg, проф. (Halle)

С. Дѣйствительные члены.

1. Алексѣевскій Владиміръ Петровичъ, проф. Томскаго технол. инст.
2. Альбицкій Василій Ивановичъ, проф. Харьковскаго технол. инст.
3. Веребрюсовъ Александръ Степановичъ, бывш. преп. Старобѣл. гимн
4. Виноградовъ Иванъ Алексѣевичъ, директ. Харьков. коммерч. учил.
5. Граве Дмитрій Александровичъ, проф. унив. св. Владиміра.
6. Гречаниновъ Алексѣй Васильевичъ, бывш. проф. Харьк.-техн. инст.
7. Грицай Алексѣй Сергѣевичъ, директ. Сумскаго реальн. учил.
8. Евдокимовъ Николай Николаевичъ, приватъ-доцентъ Харьк. унив.
9. Зворыкинъ Константинъ Алексѣевичъ, бывш. дир. Кіев. полит. инст.
10. Зерновъ Дмитрій Степановичъ, проф. СПБ. техн. инст.
11. Кирпичевъ Викторъ Львовичъ, проф. СПБ.
12. Киселевъ Андрей Петровичъ, препод. Воронеж. кадетск. корпуса.
13. Клюшниковъ Александръ Андреевичъ, препод. 1-й Харьков. гимн.
14. Кнаббе Владиміръ Сергѣевичъ, проф. Харьков. техн. инст.
15. Косенко Михаилъ Семеновичъ, бывш. преп. Харьковской 4-ой гимн.
16. Лагутинскій Михаилъ Николаевичъ, приватъ-доцентъ Харьк. унив.
17. Латышевъ Григорій Алексѣевичъ, проф. Харьк. техн. инст.
18. Левитскій Григорій Васильевичъ, проф. Юрьевскаго унив.
19. Маевскій Андрей Васильевичъ, дир. Курскаго реал. учил.
20. Михайловскій Болеславъ Григорьевичъ, б. преп. Харьк. реал. учил.
21. Мухачевъ Петръ Матвѣевичъ, директ. Харьков. техн. инст.
22. Пильчиковъ Николай Дмитріевичъ, проф. Харьк. техн. инст.
23. Погорѣлко Александръ Константиновичъ, б. проф. Харьк. техн. инст.
24. Проскурниковъ Николай Васильевичъ, б. преп. Харьк. реальн. учил.
25. Пшеборскій Антонъ Павловичъ, проф. Харьковскаго унив.
26. Радцигъ Александръ Александровичъ, проф. Кіевск. политехн. инст.
27. Раевскій Сергѣй Александровичъ, быв. попечитель Харьк. учебн. окр.
28. Рейнботъ Александръ Евгеньевичъ, бывш. стип. Харьков. унив.
29. Роговскій Евгеній Александровичъ, проф. Харьков. унив.
30. Рудневъ Петръ Матвѣевичъ, директ. Урюп. реальн. учил.
31. Русьянъ Цезарь Карловичъ, проф. Харьковскаго унив.
32. Салтыковъ Николай Николаевичъ, проф. Харьков. универ.
33. Самецкій Рафаилъ Николаевичъ, директ. Усть-Медвѣд. реальн. учил.
34. Сикора Іосифъ Іосифовичъ, астрономъ Пулковск. обсерват.
35. Синцовъ Дмитрій Матвѣевичъ, проф. Харьков. унив.
36. Синяковъ Германъ Аѳанасьевичъ, преп. 2-й Харьк. гимн.
37. Струве Людвигъ Оттовичъ, проф. Харьков. унив.
38. Флавицкій Николай Михайловичъ, бывшій лабор. Харьк. унив.
39. Флоровъ Петръ Степановичъ, директ. Урюп. реальн. учил.
40. Шейдтъ Ипполитъ Константиновичъ, бывш. преп. 1-й Харьк. гимн.

41. Шиллеръ Николай Николаевичъ, членъ совѣта М. Н. П.
42. Шимковъ Андрей Петровичъ, директ. Москов. сельско-хозяйств. инст.
43. Шиховъ Василій Васильевичъ, окружн. инсп. Харьков. уч. округа.
44. Штукаревъ Иванъ Дмитріевичъ, бывш. преп. 2-й Харьков. гимн.
45. Чернай Николай Андреевичъ, проф. Харьков. техн. инст.

D. Члены корреспонденты:

a) **русскіе.**

1. Васильевъ Александръ Васильевичъ, проф. Казанскаго унив.
2. Вороной Георгій Өеодосіевичъ, проф. Варшавскаго унив.
3. Котельниковъ Александръ Петровичъ, проф. Казанскаго унив.
4. Некрасовъ Павелъ Алексѣевичъ, членъ совѣта М. Н. П.
5. Пташицкій Иванъ Львовичъ, проф. СПБ. унив.
6. Сомовъ Павелъ Осиповичъ, бывш. проф. Варшавск. унив.
7. Тороповъ, Константинъ Александровичъ, преп. Таганр. техн. учил.

b) **иностранные.**

1. Cosserat E., проф. Тулузскаго университета.
2. Hadamard J., проф. въ Сорбоннѣ, Парижъ.
3. Hurwitz A., проф. политехникума въ Цюрихѣ.
4. Kneser A., проф. Бреславскаго университета.
5. Korn A., проф. Мюнхенскаго университета.
6. Zaremba S., проф. Краковскаго университета.
7. Schlesinger Ludwig, проф. университета, Klausenburg.

Изслѣдованія по теоріи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи.

Н. Н. Салтыкова.

(Окончаніе).

ГЛАВА IX.

Интегрирующіе множители и безконечно-малыя преобразованія.

1. Задача интегрированія разсматриваемыхъ дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, какъ это слѣдуетъ изъ предыдущаго изложенія, во всѣхъ встрѣчающихся различныхъ случаяхъ, съ теоретической точки зрѣнія, всегда приводится къ интегрированію линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи. Всѣ послѣдующія страницы настоящаго изслѣдованія посвящаются изученію этихъ послѣднихъ уравненій и соотвѣтствующихъ имъ дифференціальныхъ уравненій обыкновенныхъ или въ полныхъ дифференціалахъ.

Пусть имѣемъ линейное уравненіе съ частными производными одной функціи f

$$X\,(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + X\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad (1)$$

и соотвѣтствующее ему обыкновенное дифференціальное уравненіе

$$dy - X\,dx = 0, \qquad (2)$$

гдѣ X представляетъ функцію перемѣнныхъ величинъ x и y.

Обозначимъ черезъ q *интегрирующій множитель* послѣдняго уравненія; въ такомъ случаѣ имѣютъ мѣсто равенства

$$q = \frac{\partial f}{\partial y},\ \ qX = -\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Отсюда, во-первыхъ, слѣдуетъ, что интегрирующій множитель уравненія (2) получается изъ интеграла уравненія (1) при помощи дифференцированія и, во-вторыхъ, получается уравненіе

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial\,(qX)}{\partial y} = 0,$$

или

$$\frac{\partial q}{\partial x} + X\frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial y}q = 0, \tag{3}$$

которое служитъ для опредѣленія множителя q, независимо отъ интеграла уравненія (1).

Система обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, соотвѣтствующая частному уравненію (3), представляется въ *каноническомъ видѣ*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial H}{\partial q}, \ \frac{dq}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y} \tag{4}$$

гдѣ введено слѣдующее обозначеніе

$$H \equiv Xq,$$

при чемъ первое изъ написанныхъ уравненій тождественно съ даннымъ уравненіемъ (2).

Уравненія (4) представляютъ *каноническую систему Ліувилля* [1]), въ которую онъ преобразовываетъ каждое уравненіе, удвоивъ число функціональныхъ перемѣнныхъ, т. е. вводя въ настоящемъ случаѣ новую функціональную перемѣнную q.

Система (4) линейна относительно послѣдней перемѣнной q. Легко также убѣдиться, что послѣдняя система имѣетъ интегралъ, линейный относительно перемѣнной q. Въ самомъ дѣлѣ, чтобы уравненіе

$$\eta q = b, \tag{5}$$

представляло интегралъ системы (4), гдѣ b-произвольная постоянная величина и η-функція x и y, для этого должно удовлетворяться тождественно слѣдующее равенство

$$\frac{\partial(\eta q)}{\partial x} + \frac{\partial(\eta q)}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial(\eta q)}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial y} = 0,$$

которое, при помощи скобокъ Пуассона, выражается слѣдующимъ образомъ

$$(p + H, \ \eta q) = 0, \tag{6}$$

гдѣ p и q разсматриваются какъ частныя производныя перваго порядка одной и той же функціи соотвѣтственно по независимымъ перемѣннымъ x и y.

---

[1]) Ср. *Laurent—Traité d' Analyse*, t. VI p. 96.

Поэтому функція η опредѣляется слѣдующимъ уравненіемъ

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} + X\frac{\partial \eta}{\partial y} = \eta\frac{\partial X}{\partial y}, \text{ или } \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\eta}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\eta}X\right) = 0, \tag{7}$$

т. е. выраженіе $\frac{1}{\eta}$ представляетъ интегрирующій множитель уравненія (2).

Въ виду того, что послѣдній множитель всегда существуетъ, то, стало-быть, существуетъ и разсматриваемый линейный интегралъ (5) канонической системы уравненій (4).

Такъ какъ значеніе вспомогательной перемѣнной Ліувилля q представляетъ выраженіе интегрирующаго множителя уравненія (2), то само собою разумѣется, что, обратно, опредѣляемое значеніе q изъ извѣстнаго линейнаго интеграла вида (5)

$$q = \frac{b}{\eta}, \text{ или выраженіе } \frac{1}{\eta}$$

представляетъ каждое интегрирующій множитель уравненія (2).

С. Ли даетъ особое, спеціальное названіе лѣвой части интеграла (5), представляя ее въ нѣсколько иномъ видѣ. Если функція f обозначаетъ интегралъ уравненія (1), то въ такомъ случаѣ q выражается при помощи частной производной $\frac{\partial f}{\partial y}$, и С. Ли называетъ первую часть интеграла (5) *безконечно-малымъ преобразованіемъ* уравненія (1) или (2)-ого, обозначая его слѣдующимъ образомъ

$$U(f) \equiv \eta\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{8}$$

При этомъ очевидно, что равенство (6) приводится къ слѣдующему виду

$$(X(f),\ U(f)) = 0 \tag{9}$$

и показываетъ, что *безконечно-малое преобразованіе* $U(f)$ является интеграломъ уравненія (1) одновременно съ функціей f. С. Ли принимаетъ послѣднее свойство безконечно-малыхъ преобразованій за ихъ опредѣленіе. Что же касается термина: *безконечно-малое преобразованіе*, то онъ естественно вытекаетъ изъ того соображенія, что выраженіе $U(f)$ представляетъ коэффиціентъ безконечно-малаго приращенія интеграла уравненія (1), соотвѣтствующаго безконечно-малому приращенію $\eta\delta t$ перемѣнной y, гдѣ δt обозначаетъ нѣкоторую безконечно-малую величину [1]).

[1]) См. *S. Lie—Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (Mathematische Annalen, Bd. XI, S. 490).*

Если разсматривать $U(f)$ не только какъ функцію перемѣнныхъ x, y, а какъ выраженіе (8), то въ такомъ случаѣ послѣднее равенство (9) приводитъ обратно къ прежнему уравненію (7), служащему для опредѣленія функціи η.

Изъ послѣдняго замѣчанія непосредственно вытекаетъ прежнее заключеніе въ новой формѣ, т. е. *если извѣстно безконечно-малое преобразованіе (8) уравненія (2), то интегрированіе его совершается при помощи квадратуры,* вслѣдствіе того, что выраженіе $\frac{1}{\eta}$ представляетъ интегрирующій множитель уравненія (2).

Наконецъ, легко видѣть, что дифференціальное уравненіе съ частными производными перваго порядка, соотвѣтствующее канонической системѣ (4), выражается слѣдующимъ образомъ

$$p + Xq = 0, \tag{10}$$

т. е. представляетъ исходное уравненіе (1), гдѣ вмѣсто производныхъ $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ введены соотвѣтственно обозначенія p и q. Слѣдовательно, *каноническая система Ліувилля (4), соотвѣтствующая уравненію (2), получается какъ слѣдствіе приложенія общей теоріи Якоби-Гамильтона къ линейному уравненію съ частными производными (1).*

Такъ какъ безконечно-малое преобразованіе уравненія (1) опредѣляетъ интегралъ канонической системы (4), то зная $U(f)$, получаемъ интегралъ (5), а второй интегралъ системы (4) получается слѣдующимъ образомъ.

Подставляя значенія p и q, опредѣляемыя уравненіями (5) и (10), въ равенство

$$dz = pdx + qdy,$$

получаемъ точный дифференціалъ

$$dz = \frac{b}{\eta}(dy - X\,dx).$$

Дифференцируя по b интегралъ послѣдняго, получаемъ второй интегралъ канонической системы (4), который вмѣстѣ съ тѣмъ является очевидно также искомымъ интеграломъ уравненія (2)

$$\int \frac{1}{\eta}(dy - X\,dx) = a,$$

гдѣ a обозначаетъ новую произвольную постоянную величину.

Этотъ результатъ получается также, независимо отъ послѣднихъ соображеній, какъ непосредственное слѣдствіе приведеннаго выше предложеніе, что выраженіе $\frac{1}{\eta}$ представляетъ интегрирующій множитель уравненія (2). Если мы воспользовались теоріей каноническихъ уравненій, которая въ данномъ случаѣ приводитъ къ прежнимъ результатамъ, то только для того, чтобы изложенныя соображенія послужили намъ руководящей идеей для послѣдующихъ обобщеній.

Такимъ образомъ, по отношенію къ уравненіямъ (1) и (2), интегрирующій множитель послѣдняго изъ уравненій и ихъ безконечно-малое преобразованіе являются эквивалентными элементами для интегрированія разсматриваемыхъ уравненій. Кромѣ того, благодаря изложеннымъ соображеніямъ, устанавливается впервые на этихъ страницахъ тѣсная связь между понятіями объ интегрирующемъ множителѣ, безконечно-маломъ преобразованіи уравненія (2) и соотвѣтствующими ему каноническими уравненіями Ліувилля. Вмѣстѣ съ тѣмъ становится очевиднымъ, что преобразованіе Ліувилля обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій къ каноническому виду пріобрѣтаетъ существенное значеніе въ теоріи дифференціальныхъ уравненій, которое не придавали ему до сихъ поръ.

2. Начнемъ съ распространенія предыдущихъ результатовъ на одно уравненіе въ полныхъ дифференціалахъ

$$dx = \sum_{h=1}^{m} X_h \, dt_h , \tag{11}$$

и на соотвѣтствующую ему якобіевскую систему уравненій съ частными производными

$$X_h(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial t_h} + X_h \frac{\partial f}{\partial x} = 0 ,$$

$$h = 1, 2, \dots m,$$

гдѣ всѣ X_h обозначаютъ функціи перемѣнныхъ $t_1, t_2, \dots t_m$ и x.

Интегрирующій множитель уравненія (11), который мы обозначимъ черезъ p, удовлетворяетъ слѣдующей якобіевской [1]) системѣ

$$\frac{\partial p}{\partial t_h} + X_h \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial X_h}{\partial x} p = 0 ,$$

$$h = 1, 2, \dots m.$$

---

[1]) Обыкновенно *якобіевскими* называются только системы линейныхъ однородныхъ уравненій.

Соотвѣтствующія уравненія въ полныхъ дифференціалахъ представляются совокупностью уравненій (11)-аго и слѣдующаго

$$dp = -\sum_{h=1}^{m} \frac{\partial X_h}{\partial x} p dt_h.$$

Если ввести обозначенія

$$X_h\ p \equiv H_h,$$

для всѣхъ значеній h, отъ 1 до m, то оба уравненія, (11)-ое и послѣднее, становятся

$$dx = \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial H_h}{\partial p} dt_h,\ dp = -\sum_{h=1}^{m} \frac{\partial H_h}{\partial x} dt_h \tag{12}$$

и представляютъ такимъ образомъ обобщенную *каноническую* систему Ліувилля.

Пусть η обозначаетъ функцію перемѣнныхъ величинъ $t_1,\ t_2, \ldots t_m$, x и выраженіе

$$U(f) \equiv \eta \frac{\partial f}{\partial x}$$

представляетъ безконечно-малое преобразованіе уравненія (11), удовлетворяющее тождественно условіямъ

$$(X_h(f),\ U(f)) = 0, \quad h = 1, \ldots m. \tag{13}$$

Поэтому каноническая система (12) имѣетъ слѣдующій интегралъ

$$\eta p = b,$$

гдѣ b обозначаетъ произвольную постоянную величину. Само собою разумѣется, что опредѣляемое послѣднимъ уравненіемъ значеніе

$$\frac{b}{\eta}, \text{ или выраженіе } \frac{1}{\eta}$$

представляютъ интегрирующіе множители уравненія (11). Слѣдовательно, интегралъ послѣдняго принимаетъ видъ

$$\int \frac{1}{\eta} \left(dx - \sum_{h=1}^{m} X_h\ dt_h \right) = a,$$

при чемъ a обозначаетъ произвольную постоянную величину.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ заключенію, что *уравненіе въ полныхъ дифференціалахъ, имѣющее безконечно-малое преобразованіе, интегрируется при помощи квадратуры.*

Это послѣднее предложеніе становится очевиднымъ *a priori*, если принять во вниманіе, что каждое уравненіе въ полныхъ дифференціалахъ преобразовывается, согласно теоріи А. Майера [1]), въ обыкновенное дифференціальное уравненіе. Что же касается С. Ли [2]), опубликовавшаго впервые этотъ результатъ, то онъ вывелъ его какъ слѣдствіе своей теоріи интегрирующаго множителя замкнутой системы линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка.

Написанный интегралъ получается также на основаніи уравненій, которыя вытекаютъ изъ равенствъ (13) и показываютъ, что выраженіе $\frac{1}{\eta}$ представляетъ интегрирующій множитель даннаго уравненія (11) [3]).

Наконецъ, тотъ же самый результатъ получается при помощи теоремы Якоби-Ліувилля, аналогично предыдущему случаю одного обыкновеннаго дифференціальнаго уравненія.

3. Переходимъ теперь къ разсмотрѣнію системы n обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$dx_i = X_i\,dt, \quad i = 1,\ 2, \ldots n, \tag{14}$$

гдѣ всѣ X_i обозначаютъ функціи перемѣнныхъ величинъ $t,\ x_1,\ x_2, \ldots x_m$. Обозначая черезъ

$$p_1,\ p_2, \ldots p_n$$

систему n интегрирующихъ множителей Якоби [4]) уравненій (14), получаемъ слѣдующія равенства (см. C. Jordan, Cours d'Analyse t. III, 1896, p. 68).

$$\left.\begin{aligned} &p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i = 1,\ 2, \ldots n, \\ &\sum_{k=1}^{n} p_k X_k = -\frac{\partial f}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

[1]) См. мое сочиненіе: *Объ интегрированіи уравненій...* стр. 34—37 и 41—44.

[2]) *S. Lie*—Mathematische Annalen, Bd. XI, p. 504—521.

[3]) Эти уравненія имѣютъ очевидно слѣдующій видъ

$$\frac{\partial \eta}{\partial t_h} + X_k \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial X_h}{\partial x}\eta,$$
$$h = 1,\ 2, \ldots m.$$

[4]) *Jacobi.—Dilucidationes de aequationum differentialium vulgarium systematis earumque connexione cum aequationibus differentialibus partialibus linearibus primi ordinis (Gesammelte Werke, Bd. IV, S. 240).*

гдѣ функція f обозначаетъ интегралъ слѣдующаго линейнаго уравненія съ частными производными, соотвѣтствующаго системѣ (14),

$$X(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0. \tag{16}$$

Исключая производныя функціи f изъ уравненій (15), получаемъ уравненія, служащія для опредѣленія значеній p_i, независимо отъ f,

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial p_i}{\partial t} + \sum\limits_{k=1}^{n} X_k \dfrac{\partial p_i}{\partial x_k} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial X_k}{\partial x_i} p_k = 0, \\ i=1,2,\ldots n, \end{array}\right| \tag{17}$$

$$\frac{\partial p_r}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_r}, \tag{18}$$

для всѣхъ различныхъ значеній указателей r и k, отъ 1 до n. Слѣдовательно, искомыя значенія p_i представляютъ рѣшенія системы (17), которыя кромѣ того удовлетворяютъ условіямъ (18). Система уравненій (17) принадлежитъ къ якобіевскому виду, изслѣдованному въ главѣ III настоящаго сочиненія. Соотвѣтствующая система обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій имѣетъ значеніе

$$dx_i = X_i\,dt, \quad dp_i = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_k}{\partial x_i} p_k \; dt,$$

$$i=1,2\ldots n,$$

и представляетъ *каноническую систему* Ліувилля, въ которую онъ преобразовываетъ данную систему (14). Дѣйствительно, благодаря обозначенію

$$\sum_{k=1}^{n} X_k p_k \equiv H,$$

послѣднія уравненія становятся

$$\left.\begin{array}{c} dx_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} dt, \quad dp_i = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}.dt, \\ i=1,2\ldots n. \end{array}\right\} \tag{19}$$

Легко видѣть, что для того, чтобы найти рѣшеніе системы (17), удовлетворяющее условіямъ (18), для этого достаточно составить интегралъ дифференціальнаго уравненія съ частными производными, соотвѣтствующаго канонической системѣ (19). Нетрудно замѣтить, что это послѣднее частное уравненіе представляетъ ничто иное какъ уравненіе (16), и, стало быть, мы возвращаемся обратно къ n первымъ формуламъ (15), выражающимъ значенія множителей p_i, при помощи интеграла уравненія (16). *Поэтому каноническая система Ліувилля (19) получается въ результатѣ приложенія къ уравненію (16) общей теоріи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи.*

Пусть выраженіе

$$U(f) \equiv \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

представляетъ безконечно-малое преобразованіе системы уравненій (14), при чемъ $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ обозначаютъ функціи перемѣнныхъ $t, x_1, x_2, \ldots x_n$. Въ такомъ случаѣ выраженіе $U(f)$, разсматриваемое какъ функція перемѣнныхъ $t, x_1, x_2, \ldots x_n$ представляетъ интегралъ уравненія (16) одновременно съ функціей f, и мы получаемъ равенство

$$(X(f),\ U(f)) = 0. \tag{20}$$

Поэтому уравненіе

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i\, p_i = b, \tag{21}$$

представляетъ интегралъ канонической системы Ліувилля (19), гдѣ b обозначаетъ произвольную постоянную величину и лѣвая часть равенства получается изъ выраженія $U(f)$ замѣной въ немъ производныхъ $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ обозначеніями p_i.

Съ другой стороны, будемъ ли исходить изъ условія (20), или изъ предположенія, что уравненіе (21) представляетъ интегралъ системы (19), мы получаемъ каждый разъ слѣдующую систему уравненій, которымъ должны удовлетворять коэффиценты ξ_i,

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} X_k \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \xi_k,$$

$$i = 1, 2 \ldots n.$$

На основаніи теоріи, изложенной въ III-й главѣ настоящаго изслѣдованія, интегрированіе послѣдней системы приводится къ интегрированію совокупности обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій (14) и слѣдующихъ

$$d\xi_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \xi_k\, dt,$$

$$i = 1, 2 \ldots n.$$

Послѣднія уравненія отличаются отъ *варіаціонныхъ* уравненій Пуанкаре только обозначеніемъ функціональныхъ перемѣнныхъ δx_1, $\delta x_2, \ldots \delta x_n$, которыя связаны съ ξ_i слѣдующими соотношеніями

$$\delta x_i = \xi_i \, \delta t, \quad i = 1, 2 \ldots n.$$

Наконецъ, замѣтимъ, что совокупность данныхъ уравненій (14) и n послѣднихъ выведенныхъ уравненій образуетъ каноническую систему при условіи, что исходныя уравненія (14) представляютъ каноническую систему.

4. Всѣ предыдущія соображенія прилагаются также къ системамъ уравненій въ полныхъ дифференціалахъ

$$\left. \begin{array}{c} dx_i = \sum_{h=1}^{m} X_i^h dt_h, \\ i = 1, 2 \ldots n, \end{array} \right| \tag{22}$$

гдѣ всѣ X_i^h обозначаютъ функціи перемѣнныхъ величинъ $t_1, t_2, \ldots t_m$, $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Покажемъ прежде всего, что преобразованіе Ліувилля прилагается также къ уравненіямъ въ полныхъ дифференціалахъ. Дѣйствительно, введемъ новыя перемѣнныя величины

$$y_1, y_2, \ldots y_n,$$

опредѣляемыя слѣдующими уравненіями

$$dy_i = -\sum_{h=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_k^h}{\partial x_i} y_k \, dt_h, \quad i = 1, 2 \ldots n.$$

Легко видѣть, что совокупность послѣднихъ уравненій, вмѣстѣ съ (22)-ыми, представляетъ каноническую систему. Для этого слѣдуетъ замѣтить прежде всего, что разсматриваемыя уравненія представляютъ систему уравненій въ полныхъ дифференціалахъ. Вводя затѣмъ обозначенія

$$\sum_{k=1}^{n} X_k^h y_k \equiv H_h, \quad h = 1, 2 \ldots m,$$

мы представляемъ разсматриваемыя уравненія въ каноническомъ видѣ

$$\left. \begin{array}{c} dx_i = \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial H_h}{\partial y_i} dt_h, \quad dy_i = -\sum_{h=1}^{m} \frac{\partial H_h}{\partial x_i} dt_h, \\ i = 1, 2, \ldots n. \end{array} \right| \tag{23}$$

Согласно съ опредѣленіемъ, интегрирующіе множители Якоби системы (22)

$$p_1, p_2, \ldots p_n$$

представляютъ соотвѣтственно значенія частныхъ производныхъ

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

гдѣ функція f является интеграломъ якобіевской системы

$$\left. \begin{array}{c} X^h(f) \equiv \dfrac{\partial f}{\partial t_h} + \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^h \dfrac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \\ h = 1, 2, \ldots m. \end{array} \right\} \quad (24)$$

Съ другой стороны, аналогично предыдущему случаю обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, множители p_i опредѣляются слѣдующей системой уравненій

$$\left. \begin{array}{c} \dfrac{\partial p_i}{\partial t_h} + \sum\limits_{k=1}^{n} X_k^h \dfrac{\partial p_i}{\partial x_k} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial X_k^h}{\partial x_i} p_k = 0, \\ i = 1, 2, \ldots n, \qquad h = 1, 2, \ldots m, \end{array} \right\} \quad (25)$$

и уравненіями (18)-ыми. Послѣдняя написанная система nm уравненій (25) принадлежитъ къ типу уравненій, изслѣдованныхъ въ III-ьей главѣ настоящаго сочиненія. Какъ слѣдуетъ изъ изложенной тамъ теоріи, система уравненій въ полныхъ дифференціалахъ, соотвѣтствующая уравненіямъ (25), представляется въ видѣ канонической системы, которая получается изъ предыдущей системы (23), замѣной въ ней перемѣнныхъ y_i черезъ p_i. Другими словами послѣдняя система получается въ результатѣ приложенія къ линейнымъ уравненіямъ (24) общей теоріи уравненій съ частными производными перваго порядка.

Наконецъ, *каждому безконечно-малому преобразованію системы уравненій (22)*

$$U(f) \equiv \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

соотвѣтствуетъ интегралъ

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i p_i = b$$

канонической системы, къ которой приводятся данныя уравненія (22); при этомъ ξ обозначаютъ функціи перемѣнныхъ $t_1, t_2, \ldots t_m, x_1, x_2, \ldots x_n$, а b—произвольную постоянную величину.

Аналогично предыдущему, функціи ξ_i опредѣляются слѣдующей системой уравненій [1]), которая также принадлежитъ къ типу изслѣдованныхъ въ III-ьей главѣ,

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t_h} + \sum_{k=1}^{n} X_k^h \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_i^h}{\partial x_k} \xi_k, \quad i = 1, 2, \ldots n, \qquad h = 1, 2, \ldots m.$$

5. Въ виду полной аналогіи, которую представляютъ уравненія въ полныхъ дифференціалахъ съ обыкновенными дифференціальными уравненіями, мы ограничимся разсмотрѣніемъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій (14). Предположимъ, что слѣдующія уравненія

$$\left.\begin{array}{c} f_k(t, x_1, x_2, \ldots x_n) = a_k, \\ k = 1, 2, \ldots n, \end{array}\right\} \tag{26}$$

представляютъ n различныхъ интеграловъ системы (14), при чемъ всѣ a_k обозначаютъ различныя произвольныя постоянныя величины. Производныя

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_1}, \frac{\partial f_k}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial f_k}{\partial x_n},$$

согласно съ предыдущимъ опредѣленіемъ, представляютъ значенія n интегрирующихъ множителей Якоби системы уревненій (14), которые условимся обозначать слѣдующимъ образомъ

$$p_{1k}, p_{2k}, \ldots p_{nk}.$$

Такъ какъ число различныхъ интеграловъ (26) равняется n, то мы имѣемъ, стало-быть, n различныхъ системъ интегрирующихъ множителей, соотвѣтствующихъ n значеніямъ k, отъ 1 до n.

Наконецъ, вслѣдствіе того, что послѣднія n уравненій (19) линейны относительно перемѣнныхъ p_i, то очевидно, что они имѣютъ рѣшенія слѣдующаго вида

$$p_i = \sum_{k=1}^{n} b_k p_{ik}, \quad i = 1, 2, \ldots n,$$

гдѣ b_k обозначаютъ произвольныя постоянныя величины. Далѣе, само собою разумѣется, что опредѣлитель

---

[1]) См. мое изслѣдованіе: *Sur les transformations infinitésimales des équations différentielles (Journal Jordan, 1897, p. 429).*

Ср. *A. Mayer.—Zur Theorie der infinitesimalen Transformationen und im Besondern der infinitesimalen Berührungstransformationen der Ebene (Berichte u. d. Verhandlungen d. K. S. Gesellschaft der W. zu Leipzig, Math.-Phys. classe, 1893, S. 697).*

$$M \equiv \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix}$$

отличенъ отъ нуля. Поэтому предыдущія уравненія, будучи разрѣшены относительно постоянныхъ b_k, даютъ n слѣдующихъ интеграловъ системы (19)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{M_{ik}}{M} p_i = b_k, \qquad (27)$$
$$k = 1, 2, \dots n,$$

гдѣ выраженіе M_{ik} обозначаетъ миноръ опредѣлителя M, соотвѣтствующій его элементу p_{ik}, находящемуся на пересѣченіи k-ого столбца и i-ой строки разсматриваемаго опредѣлителя.

Послѣдніе интегралы представляются также слѣдующимъ образомъ

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial x_i}{\partial a_k}\right) p_i = b_k,$$
$$k = 1, 2, \dots n,$$

гдѣ всѣ x_i обозначаютъ ихъ значенія, опредѣляемыя уравненіями (26), и скобки указываютъ на результатъ замѣны a_k ихъ функціональными значеніями f_k. Эти уравненія или выводятся изъ уравненій (27), или составляются непосредственно, на основаніи теоремы Ліувилля для канонической системы (19), по отношенію къ которой уравненія (27) образуютъ систему n интеграловъ въ инволюціи, разрѣшимыхъ относительно каноническихъ перемѣнныхъ перваго класса.

Совокупность уравненій (26) и (27) представляетъ $2n$ различныхъ интеграловъ системы (19). Такимъ образомъ, *если извѣстны всѣ n интеграловъ данныхъ уравненій (14), то полная система интеграловъ соотвѣтствующей канонической системы Ліувилля (19) составляется при помощи операцій дифференцированія.*

Легко видѣть, что совокупность интеграловъ (26) и (27) образуетъ каноническую систему по отношенію къ уравненіямъ (19). Это слѣдуетъ, во-первыхъ, изъ того, что имѣютъ мѣсто условія

$$(f_s, f_r) = 0,$$

для всѣхъ значеній s и r, отъ 1 до n, такъ какъ функціи f_k зависятъ только отъ каноническихъ перемѣнныхъ перваго класса. Затѣмъ, во-вторыхъ, значенія p_{ik} утождествляютъ условія (18). Поэтому указанныя выше значенія функціи p_i удовлетворяютъ также послѣднимъ условіямъ. Слѣдовательно, интегралы (27) находятся въ инволюціи. Такимъ образомъ, называя черезъ F_k лѣвыя части уравненій (27), мы получаемъ слѣдующія тождества

$$(F_s, F_r) = 0,$$

для всѣхъ значеній s и r, отъ 1 до n. Наконецъ, получаемъ еще слѣдующія значенія скобокъ Пуассона

$$(F_s, f_r) \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_s}{\partial p_k} \frac{\partial f_r}{\partial x_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_s}{\partial p_k} p_{kr}.$$

Подставляя въ послѣднія выраженія значенія производныхъ $\dfrac{\partial F_s}{\partial p_k}$, представляемъ такимъ образомъ предыдущія выраженія

$$(F_s, f_r) \equiv \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{n} M_{ks}\, p_{kr}.$$

Отсюда, на основаніи свойствъ опредѣлителя M, приходимъ къ искомымъ равенствамъ

$$(F_s, f_r) \equiv \begin{cases} 0, & r \gtrless s, \\ 1, & r = s, \end{cases}$$

которыя, совмѣстно съ предыдущими равенствами, показываютъ, что разсматриваемые интегралы дѣйствительно образуютъ каноническую систему.

Кромѣ того, изъ существованія интеграловъ (27) заключаемъ, что каноническая система (19) имѣетъ n интеграловъ въ инволюціи, линейныхъ относительно вспомогательныхъ перемѣнныхъ Ліувилля p_i.

Само собою разумѣется, что вводя вспомогательныя перемѣнныя, чтобы привести данныя уравненія къ каноническому виду, мы удвоиваемъ число уравненій. Поэтому до сихъ поръ геометры въ своихъ вычисленіяхъ не пользовались преобразованіемъ Ліувилля. Какъ однако слѣдуетъ изъ предыдущихъ разсужденій, новыя вводимыя Ліувиллемъ перемѣнныя величины тѣсно связаны съ тѣми величинами, которыя встрѣчаются въ теоріи дифференціальныхъ уравненій или въ видѣ интегрирующихъ множителей Якоби, или при разсмотрѣніи безконечно-малыхъ преобразованій изслѣдуемыхъ уравненій. Такимъ образомъ введеніе вспомогательныхъ перемѣнныхъ Ліувилля не усложняетъ задачи интегрированія данныхъ уравненій больше, чѣмъ всѣ упомянутыя теоріи. Напротивъ преобразованіе разсматриваемыхъ уравненій къ каноническому виду представляетъ существенное удобство, въ виду особенностей теоріи каноническихъ уравненій, которыя упрощаютъ задачу интегрированія дифференціальныхъ уравненій.

ГЛАВА X.

Приложенiе безконечно-малыхъ преобразованiй къ интегрированiю дифференцiальныхъ уравненiй.

1. Первый вопросъ, который представляется при интегрированiи данныхъ дифференцiальныхъ уравненiй, при помощи ихъ безконечно-малыхъ преобразованiй, состоитъ въ разысканiи послѣднихъ.

Въ моемъ изслѣдованiи: *Sur les transformations infinitésimales*, опубликованномъ въ *Journal de Mathématiques pures et appliquées* за 1897 годъ [1]), показано, что задача вычисленiя безконечно-малыхъ преобразованiй системы дифференцiальныхъ уравненiй обыкновенныхъ и въ полныхъ дифференцiалахъ равнозначна задачѣ интегрированiя этихъ самыхъ уравненiй. То же самое заключенiе вытекаетъ съ особенной наглядностью изъ разсужденiй, изложенныхъ въ предыдущей главѣ. Поэтому теорiя безконечно-малыхъ преобразованiй представляетъ одинъ изъ тѣхъ формальныхъ, общихъ способовъ интегрированiя дифференцiальныхъ уравненiй, которыя приводятъ, въ различныхъ частныхъ случаяхъ, сравнительно съ другими прiемами интегрированiя, къ болѣе или менѣе удачному разрѣшенiю задачи интегрированiя дифференцiальныхъ уравненiй того или другого частнаго вида.

Становясь на послѣднюю точку зрѣнiя, мы приходимъ къ необходимости изученiя элементовъ теорiи безконечно-малыхъ преобразованiй, достаточныхъ для интегрированiя дифференцiальныхъ уравненiй и къ разсмотрѣнiю вычисленiй, необходимыхъ для выполненiя самого интегрированiя.

Послѣднiе два вопроса служили предметомъ постоянныхъ изслѣдованiй С. Ли. Мнѣ удалось, съ своей стороны, получить въ этомъ направленiи нѣсколько результатовъ, изложенiе которыхъ представляетъ содержанiе настоящей главы.

Отличительная черта трудовъ С. Ли заключается въ оригинальности и новизнѣ формы изложенiя своихъ мыслей и результатовъ. Поэтому очень часто утрачивается связь между изслѣдованiями С. Ли и другихъ геометровъ. Но, кромѣ того, идеи С. Ли не всегда приводятъ

---

[1]) T. III, 5-e série, p. 429.

къ простому представленію изслѣдуемыхъ вопросовъ и, что всего важнѣе, иногда не даютъ естественнаго разъясненія сущности разсматриваемыхъ задачъ. Высказанныя соображенія относятся, по нашему мнѣнію, также къ теоріи безконечно-малыхъ преобразованій. Какъ мы видѣли въ предыдущей главѣ, существуетъ тѣсная связь между безконечно-малыми преобразованіями дифференціальныхъ уравненій, ихъ интегрирующими множителями Якоби и преобразованіемъ Ліувилля разсматриваемыхъ уравненій къ каноническому виду. Благодаря послѣднему обстоятельству, *интегрированіе уравненій, для которыхъ извѣстны безконечно-малыя преобразованія, представляетъ частный случай задачи интегрированія каноническихъ уравненій.*

Такимъ образомъ мы вносимъ нѣкоторыя упрощенія въ теорію безконечно-малыхъ преобразованій и приходимъ къ уменьшенію числа операцій, необходимыхъ для интегрированія системъ дифференціальныхъ уравненій обыкновенныхъ и въ полныхъ дифференціалахъ, допускающихъ такъ называемую группу безконечно-малыхъ преобразованій; наконецъ, всѣ необходимыя для выполненія послѣдняго интегрированія операціи, которыя совершаются при помощи квадратуръ, пріобрѣтаютъ у насъ весьма простое выраженіе.

На послѣдующихъ страницахъ излагаются подробно эти результаты, которые были опубликованы раньше въ *Journal de Mathématiques pures et appliquées* [1]) за 1905 г. въ мемуарѣ: *Etude sur les transformations infinitésimales* и въ статьѣ: *Приложеніе теоріи группъ безконечно-малыхъ преобразованій къ интегрированію дифференціальныхъ уравненій при помощи квадратуръ*, напечатанной въ Протоколахъ Физико-Математическаго Общества, состоящаго при Кіевскомъ Университетѣ [2]).

Пусть имѣемъ систему обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$dx_k = X_k dt, \qquad k = 1, 2, \ldots n, \tag{1}$$

гдѣ всѣ X_k представляютъ функціи независимой перемѣнной t и зависимыхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Соотвѣтствующее линейное уравненіе съ частными производными перваго порядка функціи f перемѣнныхъ $t, x_1, x_2, \ldots x_n$, разсматриваемыхъ какъ независимыя, принимаетъ слѣдующій видъ

$$X(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0. \tag{2}$$

---

[1]) 6-e série, tome I, p. 53.

[2]) Кіевскія Университетскія Извѣстія за 1904 г.

Предположимъ, что разсматриваемыя уравненія (1) или (2) допускаютъ m различныхъ [1]) безконечно-малыхъ преобразованій

$$U_1(f),\ U_2(f), \ldots U_m(f), \tag{3}$$

гдѣ введены слѣдующія обозначенія

$$U_k(f) \equiv \sum_{i=1}^{n} \xi_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

при чемъ всѣ коэффиціенты ξ_{ik} представляютъ функціи перемѣнныхъ $t, x_1, x_2, \ldots x_n$.

С. Ли говоритъ, что *безконечно-малыя преобразованія (3) образуютъ группу*, если они удовлетворяютъ тождественно слѣдующимъ условіямъ

$$(U_s(f),\ U_r(f)) = \sum_{\rho=1}^{m} c_{sr\rho} U_\rho(f),$$

для всѣхъ различныхъ значеній s и r, отъ 1 до m, *при чемъ всѣ величины $c_{sr\rho}$ представляютъ постоянныя значенія.*

Наконецъ, условившись обозначать черезъ p_i частныя производныя функціи f

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = p_i, \quad i = 1,\ 2, \ldots n,$$

введемъ слѣдующія обозначенія

$$\sum_{i=1}^{n} X_i p_i \equiv H, \quad \sum_{i=1}^{n} \xi_{ik} p_i \equiv F_k.$$

Въ нашихъ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ мы ограничимся предположеніемъ о существованіи группъ безконечно-малыхъ преобразованій и не будемъ прибѣгать къ операціямъ, для составленія новыхъ безконечно-малыхъ преобразованій или интеграловъ разсматриваемыхъ дифференціальныхъ уравненій. Кромѣ того мы не будемъ предполагать извѣстными интегралы этихъ послѣднихъ уравненій, такъ какъ въ каждомъ случаѣ, когда нѣкоторые изъ этихъ интеграловъ становятся извѣстными, задача интегрированія соотвѣтствующихъ дифференціальныхъ уравненій пре-

---

[1]) Безконечно-малыя преобразованія называются *различными*, если они не связаны между собой линейными зависимостями съ постоянными коэффиціентами.

образовывается въ новую задачу, при чемъ порядокъ интегрируемой системы уравненій становится меньше сравнительно съ исходной системой [1]).

Каждое безконечно-малое преобразованіе даетъ мѣсто интегралу канонической системы Ліувилля, соотвѣствующей даннымъ уравненіямъ (1). Поэтому идея С. Ли, примѣнить безконечно-малыя преобразованія къ интегрированію данныхъ уравненій, приводится по существу къ тому, чтобы ввести въ вычисленія интегралы второго класса канонической системы Ліувилля и воспользоваться ими для вычисленія искомыхъ интеграловъ, которые принадлежатъ къ первому классу.

2. Условившись въ предыдущихъ обозначеніяхъ, будемъ называть группу безконечно-малыхъ преобразованій (3) *группой въ инволюціи*, если всѣ постоянныя величины $c_{sr\rho}$ тождественно равны нулямъ, т. е. функціи F_k находятся въ инволюціи, удовлетворяя тождественно условіямъ

$$(F_s,\ F_r) = 0,$$

для всѣхъ различныхъ значеній s и r, отъ 1 до m.

Первое предложеніе, которое мы имѣемъ въ виду доказать, состоитъ въ слѣдующемъ:

Если система обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій (1) допускаетъ группу n различныхъ безконечно-малыхъ преобразованій въ инволюціи, то интегрированіе данной системы совершается при помощи одной только квадратуры.

Въ самомъ дѣлѣ, данныя функціи

$$F_1,\ F_2, \ldots F_n$$

представляютъ n различныхъ интеграловъ въ инволюціи линейнаго уравненія съ частными производными перваго порядка функціи F независимыхъ перемѣнныхъ

$$x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ p_1,\ p_2, \ldots p_n,$$

которое, при помощи скобокъ Пуассона, представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (H,\ F) = 0. \tag{4}$$

Поэтому соотвѣтствующая каноническая система обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій

---

[1]) См. по этому поводу изслѣдованія *С. Ли*: Mathematische Annalen, Bd. XI, S. 487, и *Vorlesungen über Differentialgeichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, bearbeitet u. herausgegeben v. G. Scheffers.*

C. Jordan. Cours d'Analyse, t III. 1896, p.p. 79—87.

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_k}, \tag{5}$$
$$k = 1, 2, \ldots n,$$

имѣетъ n интеграловъ въ инволюціи, разрѣшимыхъ относительно всѣхъ перемѣнныхъ $p_1, p_2, \ldots p_n$,

$$F_i = b_i, \; i = 1, 2, \ldots n, \tag{6}$$

гдѣ b_i представляютъ n различныхъ произвольныхъ постоянный величинъ.

Слѣдовательно, остальные n интеграловъ разсматриваемой каноніческой системы (5) опредѣляются, на основаніи извѣстной теоремы Якоби—Ліувилля, при помощи одной квадратуры, приводящейся къ интегрированію точнаго дифференціала

$$dz = -H\,dt + \sum_{k=1}^{n} p_k dx_k,$$

гдѣ всѣ p_k представляютъ ихъ значенія, опредѣляемыя уравненіями (6). Пусть интегралъ послѣдняго точнаго дифференціала представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$z = V(t, x_1, x_2, \ldots x_n, b_1, b_2, \ldots b_n) + b,$$

гдѣ b обозначаетъ новую произвольную постоянную величину. Въ такомъ случаѣ искомые n интеграловъ системы (5) представляются уравненіями

$$\frac{\partial V}{\partial b_i} = a_i, \; i = 1, 2, \ldots n, \tag{7}$$

гдѣ всѣ a_i обозначаютъ n новыхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ.

Легко убѣдиться, что эти послѣднія уравненія представляютъ вмѣстѣ съ тѣмъ интегралы данной системы уравненій (1).

Дѣйствительно, слѣдуетъ прежде всего замѣтить, что первыя n уравненій канонической системы (5) представляютъ данныя уравненія (1); остальныя же n уравненій (5) являются уравненіями Ліувилля, которыя онъ вводитъ для преобразованія данной системы (1) къ каноническому виду. Такъ какъ далѣе уравненія (6) разрѣшимы относительно всѣхъ перемѣнныхъ p_k, то, какъ хорошо извѣстно, уравненія (7) разрѣшимы относительно перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$. Наконецъ, нетрудно убѣдиться, что уравненія (7) не зависятъ отъ постоянныхъ

$$b_1, b_2, \ldots b_n.$$

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ уравненія (6) линейны относительно p_k, то опредѣленныя изъ этихъ уравненій выраженія послѣднихъ перемѣнныхъ линейны относительно всѣхъ постоянныхъ b_i. Поэтому выраженіе dz, а также выраженіе его интеграла, т. е. функція V, линейны относительно всѣхъ b_i. Слѣдовательно, всѣ частныя производныя $\frac{\partial V}{db_i}$ не заключаютъ совершенно постоянныхъ величинъ $b_1, b_2, \ldots b_n$, и уравненія (7) представляютъ, стало-быть, искомые интегралы данной системы уравненій (1).

Послѣдніе интегралы легко представить въ явной формѣ черезъ посредство коэффиціентовъ данныхъ безконечно-малыхъ преобразованій. Дѣйствительно, уравненія (6) представляются слѣдующимъ образомъ въ явной формѣ

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_{ik} p_i = b_k,$$
$$k=1,\ 2, \ldots n.$$

Называемъ черезъ $\triangle$ отличный отъ нуля опредѣлитель

$$\triangle \equiv \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{21} & \cdots & \xi_{n1} \\ \xi_{12} & \xi_{22} & \cdots & \xi_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{1n} & \xi_{2n} & \cdots & \xi_{nn} \end{vmatrix}.$$

Обозначая черезъ $\triangle_{ri}$ миноръ опредѣлителя $\triangle$, соотвѣтствующій его элементу ξ_{ri}, получаемъ

$$p_r = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\triangle_{ri}}{\triangle},$$
$$r=1,\ 2, \ldots n,$$

при чемъ послѣднія значенія p_r удовлетворяютъ условіямъ

$$\frac{\partial p_r}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_r},$$

для всѣхъ значеній r и k, отъ 1 до n. Такъ какъ b_k представляютъ произвольныя постоянныя величины, то мы получаемъ слѣдующія тождества

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\triangle_{ri}}{\triangle}\right) = \frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\triangle_{ki}}{\triangle}\right),$$
$$k,\ r=1,\ 2, \ldots n,$$

при чемъ i получаетъ рядъ значеній отъ 1 до n. Отсюда слѣдуетъ, что отношенія

$$\frac{\triangle_{1i}}{\triangle}, \frac{\triangle_{2i}}{\triangle}, \ldots \frac{\triangle_{ni}}{\triangle}$$

представляютъ системы интегрирующихъ множителей данныхъ уравненій (1). Стало-быть, интегралы ихъ становятся

$$\int \sum_{k=1}^{n} \frac{\triangle_{ki}}{\triangle} (dx_k - X_k\, dt) = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots n,$$

гдѣ выраженія подъ знаками интеграловъ представляютъ точные дифференціалы и a_i обозначаютъ произвольныя постоянныя величины.

3. Для продолженія нашего изслѣдованія въ томъ же самомъ направленіи, необходимо распространить полученные результаты на уравненія въ полныхъ дифференціалахъ и на якобіевскія системы линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи и на какія угодно *замкнутыя* системы послѣднихъ уравненій.

Возьмемъ систему уравненій въ полныхъ дифференціалахъ въ слѣдующемъ видѣ

$$\left. dx_i = \sum_{h=1}^{m} X_i^h\, dt_h, \quad i = 1, 2, \ldots n, \right\} \tag{8}$$

гдѣ коэффиціенты X_i^h являются функціями независимыхъ перемѣнныхъ $t_1, t_2, \ldots t_m, x_1, x_2, \ldots x_n$ и удовлетворяютъ извѣстнымъ условіямъ, показывающимъ, что написанныя уравненія представляютъ систему уравненій въ полныхъ дифференціалахъ.

Въ такомъ случаѣ соотвѣтствующая нашимъ уравненіямъ якобіевская система имѣетъ видъ

$$\left. X^h(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial t_h} + \sum_{i=1}^{n} X_i^h \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad h = 1, 2, \ldots m. \right\} \tag{9}$$

Наконецъ, каноническая система, въ которую преобразовываются данныя уравненія (8), становится

$$dx_i = \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial H_h}{\partial p_i} dt_h, \quad dp_i = -\sum_{h=1}^{m} \frac{\partial H_h}{\partial x_i} dt_h,$$

$$i = 1, 2, \ldots n,$$

гдѣ функціи H_h имѣютъ значенія

$$H_h \equiv \sum_{k=1}^{n} X_k^h p_k.$$

Поэтому, на основаніи *обобщенной теоремы Якоби—Ліувилля*, распространенной мною на *системы каноническихъ уравненій въ полныхъ дифференціалахъ* [1]), доказанное выше предложеніе, относительно обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, распространяется слѣдующимъ образомъ на уравненія въ полныхъ дифференціалахъ и на якобіевскія системы:

Если системы уравненій въ полныхъ дифференціалахъ (8), или соотвѣтствующая якобіевская система (9) допускаютъ группу въ инволюціи n различныхъ безконечно-малыхъ преобразованій, то интегрированіе данныхъ уравненій совершается при помощи одной только квадратуры.

Наконецъ, послѣднее предложеніе относится не только къ якобіевскимъ системамъ, но распространяется также весьма легко и на всякую *замкнутую* систему линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи, т. е. такую систему, что скобки Пуассона, составленныя изъ лѣвыхъ частей ея уравненій, выражаются линейно черезъ эти лѣвыя части и, стало-быть, уничтожаются, на основаніи данныхъ уравненій.

Мы условимся говорить, что *замкнутая система* линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи допускаетъ *замкнутую группу безконечно-малыхъ преобразованій, если составленныя изъ нихъ скобки Пуассона выражаются линейно съ постоянными коэффиціентами относительно лѣвыхъ частей уравненій данной замкнутой системы.*

Чтобы убѣдиться въ справедливости послѣдняго обобщенія только что приведеннаго предложенія, относительно якобіевскихъ системъ, на замкнутыя системы, достаточно указать на то, что послѣдній случай приводится къ предыдущему. Въ самомъ дѣлѣ, какъ хорошо извѣстно, разсматриваемая замкнутая система, разрѣшеніемъ ея уравненій относительно частныхъ производныхъ, приводится къ якобіевской

---

[1]) См. сообщ. *Харьк. Мат. Общ. т. VI стр. 225, Comptes rendus d. S. de l'Acad. des Sc., 23 janvier, 30 janvier, 4 juillet, 1899* и главу VII настоящаго сочиненія.

системѣ, и, путемъ алгебраическихъ преобразованій, замкнутая группа разсматриваемыхъ безконечно-малыхъ преобразованій переходитъ въ группу въ инволюціи, соотвѣтствующую полученной якобіевской системѣ [1]).

Для примѣра возьмемъ слѣдующую систему уравненій

$$dx = X\,dt, \quad dy = Y\,dt, \tag{10}$$

допускающую группу двухъ слѣдующихъ различныхъ безконечно-малыхъ преобразованій

$$U_1(f) \equiv \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial x}, \quad U_2(f) \equiv \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial y},$$

гдѣ X, Y, ξ_1, η_1, ξ_2, η_2 представляютъ функціи перемѣнныхъ t, x, y.

Какъ извѣстно, возможны только слѣдующихъ два случая [2]): или имѣетъ мѣсто условіе

$$(U_1(f),\ U_2(f)) = 0,$$

или существуетъ зависимость

$$(U_1(f),\ U_2(f)) = U_1 f.$$

Если имѣетъ мѣсто первый случай, то составляемъ тогда слѣдующія уравненія

$$U_1(f) = b_1,\ U_2(f) = b_2,$$

при чемъ b_1, b_2, обозначаютъ произвольныя постоянныя величины. Вычисляемъ затѣмъ квадратуру

$$f = \int \frac{1}{\triangle} [b_1 \eta_2 - b_2 \eta_1)(dx - X\,dt) + (b_2 \xi_1 - b_1 \xi_1)(dy - Y\,dt)] + b,$$

гдѣ b — новая произвольная постоянная величина и имѣетъ $\triangle$ значеніе

$$\triangle \equiv \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1.$$

Въ такомъ случаѣ оба искомые интеграла данной системы дифференціальныхъ уравненій (10) становятся

---

[1]) Cp. *S. Lie.*—Mathematische Annalen, Bd. XI, S. 495.
C. Jordan.—Cours d'Analyse, t. III, 1-re édition, p. 81—82.

[2]) *S. Lie—Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen bearbeitet und herausgegeben v. G. Scheffers, Leipzig 1891, S. 412.*

$$\frac{\partial f}{\partial b_1}=a_1, \quad \frac{\partial f}{\partial b_2}=a_2,$$

гдѣ a_1 и a_2 представляютъ двѣ произвольныхъ постоянныхъ величины, при чемъ производныя $\frac{\partial f}{\partial b_1}$, $\frac{\partial f}{\partial b_2}$ не зависятъ отъ величинъ b_1 и b_2.

Во второмъ изъ указанныхъ предположеній, относительно разсматриваемой группы, получается слѣдующая полная система линейныхъ уравненій

$$\frac{\partial f}{\partial t}+X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}=0, \quad \xi_1\frac{\partial f}{\partial x}+\eta_1\frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

имѣющая безконечно-малое преобразованіе $U_2(f)$. Разрѣшая два послѣднихъ уравненія относительно производныхъ $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, получаемъ якобіевскую систему, которой соотвѣтствуетъ слѣдующее уравненіе въ полныхъ дифференціалахъ

$$dy=\frac{\eta_1}{\xi_1}\,dx+(Y-\frac{\eta_1}{\xi_1}X)\,dt.$$

Это уравненіе имѣетъ безконечно-малое преобразованіе

$$U_2'f\equiv\frac{\triangle}{\xi_1}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Поэтому отношеніе $\frac{\xi_1}{\triangle}$ представляетъ интегрирующій множитель послѣдняго уравненія въ полныхъ дифференціалахъ, его интегралъ становится

$$\int\frac{\xi_1}{\triangle}\left[dy-\frac{\eta_1}{\xi_1}\,dx-(Y-\frac{\eta_1}{\xi_1}X)\,dt\right]=a_1$$

и представляетъ вмѣстѣ съ тѣмъ одинъ изъ интеграловъ системы (10), при чемъ a_1 обозначаетъ произвольную постоянную величину.

Второй изъ искомыхъ интеграловъ получается затѣмъ при помощи квадратуры. Въ самомъ дѣлѣ, подставляя значеніе y, опредѣляемое найденнымъ интеграломъ, въ первое изъ данныхъ уравненій, получаемъ уравненіе

$$dx=(X)\,dt,$$

имѣющее безконечно-малое преобразованіе

$$U_1'(f)\equiv(\xi_1)\frac{\partial f}{\partial x},$$

гдѣ скобки обозначаютъ результатъ произведеннаго исключенія. Поэтому второй искомый интегралъ становится

$$\int \frac{1}{(\xi_1)} [dx - (X)\, dt] = a_2 ,$$

гдѣ a_2 — новая произвольная постоянная величина.

4. Основываясь на полученныхъ результатахъ, легко установить второй случай интегрированія дифференціальныхъ уравненій (1) или (2), уравненій въ полныхъ дифференціалахъ и якобіевскихъ системъ, при помощи квадратуръ, въ томъ предположеніи, что разсматриваемыя уравненія допускаютъ такъ называемую *интегрируемую группу безконечно-малыхъ преобразованій* [1]).

Чтобы составить понятіе объ *интегрируемой группѣ*, начнемъ съ опредѣленія такъ называемыхъ *производныхъ группъ данной группы безконечно-малыхъ преобразованій.*

Обозначимъ черезъ

$$U_1(f),\ U_2(f), \ldots\ U_n(f) \tag{11}$$

группу n различныхъ безконечно-малыхъ преобразованій системы уравненій (1).

Пусть послѣдняя группа заключаетъ *подгруппу* [2]) n_1 безконечно-малыхъ преобразованій

$$U_1(f),\ U_2(f), \ldots\ U_{n_1}(f),$$

гдѣ $n_1 < n$; послѣдняя называется *производной группой*, если всѣ безконечно-малыя преобразованія данной группы удовлетворяютъ слѣдующимъ условіямъ

$$(U_s(f),\ U_r(f)) = \sum_{\rho=1}^{n_1} c_{sr\rho}\, U_\rho(f),$$

для всѣхъ различныхъ значеній s и r, отъ 1 до n, при чемъ $c_{sr\rho}$ представляютъ постоянныя величины.

Предположимъ, что указанная производная группа имѣетъ въ свою очередь также производную группу; эта послѣдняя въ такомъ случаѣ называется *второй производной* данной группы и т. д.

Очевидно, что данная группа допускаетъ конечное число производныхъ группъ.

---

[1]) *S. Lie и Engel.—Theorie der Transformationsgruppen.* Bd. III, s. 679.

[2]) Мы говоримъ, что нѣсколько безконечно-малыхъ преобразованій данной группы образуютъ подгруппу, если они образуютъ самостоятельно группу, независимо отъ остальныхъ безконечно-малыхъ преобразованій данной группы.

Если послѣдняя производная данной группы приводится къ одному только безконечно-малому преобразованію, то мы называемъ разсматриваемую группу *интегрируемой*.

Предположимъ, что группа (11) интегрируемая и имѣетъ q производныхъ подгруппъ. Представимъ каждую послѣдовательную производную группу въ новой строкѣ слѣдующимъ образомъ:

$$
\begin{array}{l}
U_1(f),\ U_2(f), \ldots U_{n_{q-1}}(f), \ldots U_{n_2}(f), \ldots U_{n_1}(f), \ldots U_n(f);\\
U_1(f),\ U_2(f), \ldots U_{n_{q-1}}(f), \ldots U_{n_2}(f), \ldots U_{n_1}(f);\\
U_1(f),\ U_2(f), \ldots U_{n_{q-1}}(f) \ldots U_{n_2}(f);\\
\quad .\qquad .\qquad \ldots \qquad\quad \ldots\\
\quad .\qquad .\qquad \ldots \qquad\quad \ldots\\
U_1(f),\ U_2(f), \ldots U_{n_{q-1}}(f);\\
U_1(f).
\end{array}
$$

Въ такомъ случаѣ, согласно съ С. Ли, интегрированіе уравненій (1) совершается при помощи n различныхъ квадратуръ [1]. Но мы имѣемъ въ виду показать, что число квадратуръ, необходимыхъ для интегрированія системы (1) въ разсматриваемомъ случаѣ, равняется числу производныхъ подгруппъ данной группы, увеличенному на единицу. Такимъ образомъ всякій разъ, когда число разсматриваемыхъ производныхъ подгруппъ меньше n, то изслѣдумая задача интегрированія разрѣшается при помощи меньшаго числа квадратуръ, нежели этого требуетъ С. Ли.

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи понятія о производныхъ группахъ, становится очевиднымъ, что равенства

$$X(f)=0, \quad U_1(f)=0, \quad U_2(f)=0, \ldots U_{n_1}(f)=0 \tag{12}$$

образуютъ замкнутую систему линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка неизвѣстной функціи f, и что послѣдняя система допускаетъ *замкнутую группу* $n-n_1$ *различныхъ безконечно-малыхъ преобразованій*

$$U_{n_1+1}(f), \quad U_{n_1+2}(f), \ldots U_n(f). \tag{13}$$

Дѣйствительно, скобки Пуассона, составленныя изъ лѣвыхъ частей уравненій (12), уничтожаются, на основаніи этихъ самыхъ уравненій, а скобки Пуассона, изъ безконечно-малыхъ преобразованій (13), выражаются линейно съ постоянными коэффиціентами черезъ лѣвыя части уравненій (12).

[1]) *S. Lie.—Mathematische Annalen,* Bd. XI, s. 517—518.
S. Lie и Engel.—Theorie der Transformationsgruppen, Bd. III, s. 708—709.

Поэтому, въ силу предложенія, доказаннаго въ $n^{0}3$, интегрированіе системы уравненій (12) совершается при помощи одной только квадратуры, и мы получаемъ дифференцированіемъ $n - n_1$ различныхъ ея интеграловъ, которые обозначимъ черезъ

$$f_1, f_2, \ldots f_{n-n_1}.$$

Послѣднія функціи являются вмѣстѣ съ тѣмъ интегралами уравненія (2). Поэтому число входящихъ въ него независимыхъ перемѣнныхъ и вмѣстѣ съ тѣмъ порядокъ системы уравненій (1) могутъ быть понижены на $n - n_1$ единицъ. Предположимъ, что полученные интегралы различны относительно перемѣнныхъ

$$x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \ldots x_n.$$

Вводя вмѣсто послѣднихъ, новыми перемѣнными, функціи $f_1, f_2, \ldots f_{n-n_1}$, мы преобразовываемъ уравненіе (2) къ слѣдующему виду

$$X'(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n_1} X'_i \frac{\partial f}{\partial x_i}. \tag{14}$$

Такъ какъ функціи f служатъ интегралами уравненій (12), то первая производная нашей группы (11), будучи преобразована также къ новымъ перемѣннымъ, представляетъ *интегрируемую группу* n_1 различныхъ безконечно-малыхъ преобразованій, допускаемыхъ уравненіемъ (14), которая представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$U'_1(f),\ U'_2(f), \ldots U'_{n_1}(f),$$

гдѣ введены обозначенія

$$U'_k(f) = \sum_{i=1}^{n_1} \xi'_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

и поставленные сверху буквъ значки отмѣчаютъ результатъ совершеннаго преобразованія.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ задачѣ, аналогичной исходной задачѣ, но порядка болѣе низкаго на $n - n_1$ единицъ.

Прилагая къ уравненію (14) предыдущія разсужденія, мы получаемъ, при помощи одной только квадратуры и дифференцированія, $n_1 - n_2$ интеграловъ уравненія (14), пусть

$$f_{n-n_1+1}, f_{n-n_1+2}, \ldots f_{n-n_2},$$

различныхъ, положимъ, относительно перемѣнныхъ

$$x_{n_1+1}, x_{n_2+2}, \ldots x_{n_1}.$$

Преобразовываемъ уравненіе (14) къ новымъ перемѣннымъ, принимая за таковыя только что написанные интегралы и т. д.

Наконецъ, послѣ $q—1$ кратнаго повторенія указанныхъ операцій вычисленія, мы приходимъ къ составленію замкнутой системы двухъ слѣдующихъ линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка функціи f, по независимымъ перемѣннымъ t, x_1, x_2, $\ldots x_{q-1}$,

$$X^{(q-1)}(f)=0, \qquad Y_1^{(q-1)}(f)=0,$$

допускающихъ *замкнутую* группу безконечно-малыхъ преобразованій

$$U_2^{(q-1)}(f),\ U_3^{(q-1)}(f), \ldots U_{n_{q-1}}^{(q-1)}(f).$$

Выполнивъ еще одну, q-ю по счету, квадратуру, мы составляемъ, при помощи дифференцированія, $n_{q-1}—1$ интеграловъ послѣднихъ двухъ уравненій, которые мы обозначимъ черезъ

$$f_{n-n_{q-1}+1}, f_{n-n_{q-1}+2}, \ldots f_{n-1}$$

и будемъ предполагать различными относительно перемѣнныхъ

$$x_2, x_3, \ldots x_{n_{q-1}}.$$

Принимая полученные интегралы за новыя перемѣнныя, вмѣсто послѣднихъ величинъ, мы приходимъ, наконецъ, къ уравненію вида

$$\frac{\partial f}{\partial t}+X_1^{(q)}\frac{\partial f}{\partial x_1}=0,$$

допускающему безконечно-малое преобразованіе

$$U_1^{(q)}(f)\equiv \xi_{11}^{(q)}\frac{\partial f}{\partial x_1}.$$

Стало быть, соотвѣтствующее обыкновенное дифференціальное уравненіе имѣетъ интегрирующій множитель $\frac{1}{\xi_{11}^{(q)}}$ и искомый интегралъ разсматриваемаго уравненія f_n получается при помощи квадратуры

$$\int\frac{1}{\xi_{11}^{(q)}}(dx_1-X_1^{(q)}\,dt).$$

Приравнявъ произвольнымъ постояннымъ величинамъ всѣ вычисленные интегралы и возвратившись къ первоначальной системѣ перемѣнныхъ, мы получаемъ такимъ образомъ полную систему интеграловъ данныхъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій (1).

Само собою разумѣется, что приведенныя разсужденія прилагаются безъ существенныхъ измѣненій также къ интегрированію системы уравненій въ полныхъ дифференціалахъ, допускающихъ интегрируемую группу безконечно-малыхъ преобразованій.

Изъ предыдущаго изложенія слѣдуетъ, что число необходимыхъ квадратуръ, для интегрированія уравненій въ обоихъ разсмотрѣнныхъ случаяхъ, меньше сравнительно съ требованіями С. Ли, который рѣшаетъ каждую изъ обѣихъ задачъ, при помощи n различныхъ квадратуръ. Между тѣмъ оказывается, что, въ случаѣ *группы въ инволюціи*, достаточно всего одной квадратуры, а при *интегрируемой группѣ*, число необходимыхъ квадратуръ равняется числу производныхъ группъ, увеличенному на единицу.

Вводимое упрощеніе вытекаетъ изъ основного положенія, что *каждое безконечно-малое преобразованіе С. Ли системы данныхъ дифференціальныхъ уравненій опредѣляетъ интегралъ соотвѣтствующей канонической системы Ліувилля.*

Этотъ результатъ, который остался незамѣченнымъ С. Ли и его послѣдователями, является существеннымъ для развитія теоріи безконечно-малыхъ преобразованій. Благодаря тому же результату пріобрѣтаетъ новое значеніе преобразованіе Ліувилля данныхъ уравненій къ каноническому виду, которому до сихъ поръ не приписывали значенія, вслѣдствіе необходимости удвоить при этомъ число разсматриваемыхъ перемѣнныхъ. Однако, какъ оказывается, при разсмотрѣніи безконечно-малыхъ преобразованій, мы вводимъ тѣ же самыя перемѣнныя Ліувилля, образующія, совмѣстно съ данными, два класса каноническихъ перемѣнныхъ. Такимъ образомъ является возможность приложить къ изученію безконечно-малыхъ преобразованій теорію каноническихъ уравненій обыкновенныхъ и въ полныхъ дифференціалахъ, которая, мы полагаемъ, должна пріобрѣсти первенствующее значеніе при интегрированіи дифференціальныхъ уравненій, допускающихъ безконечно-малыя преобразованія.

Возьмемъ, для примѣра, систему дифференціальныхъ уравненій [1])

$$dx = Xdt, \quad dy = Ydt, \quad dz = Zdt,$$

допускающую слѣдующую группу безконечно-малыхъ преобразованій

---

[1]) Cp. *S. Lie.—Vorlesungen über Differentialgeichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen bearbeitet und herausgegeben v. G. Scheffers*, ss. 545—555.

$$U_1(f),\quad U_2(f),\quad U_3(f),$$

удовлетворяющихъ условіямъ

$$(U_1(f),\ U_2(f))=0,\quad (U_1(f),\ U_3(f))=U_1(f),\quad (U_2(f),\ U_3(f))=0,$$

при чемъ введены обозначенія

$$U_i(f)\equiv \xi_i\frac{\partial f}{\partial x}+\eta_i\frac{\partial f}{\partial y}+\zeta_i\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Первая производная подгруппа данной группы состоитъ изъ одного безконечно-малаго преобразованія $U_1(f)$. Поэтому, интегрируя систему уравненій

$$X(f)=0,\quad U_1(f)=0,\quad U_2(f)=b_1,\quad U_3(f)=b_2,$$

получаемъ, при помощи квадратуры, уравненіе

$$f=V(t,\ x,\ y,\ z,\ b_1,\ b_2)+b,$$

гдѣ b_1, b_2 и b представляютъ три произвольныхъ постоянныхъ величины.

Стало быть, два интеграла данной системы представляются уравненіями

$$\frac{\partial V}{\partial b_1}=a_1,\quad \frac{\partial V}{\partial b_1}=a_2,$$

гдѣ a_1 и a_2—двѣ произвольныхъ постоянныхъ величины.

Введемъ далѣе слѣдующее обозначеніе

$$\triangle\equiv\begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1 & \zeta_1\\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2\\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3\end{vmatrix},$$

и назовемъ черезъ $\triangle_{ri}$ миноръ послѣдняго опредѣлителя, соотвѣтствующій его элементу, расположенному на пересѣченіи r-аго столбца и i-ой строки. Поэтому, на основаніи указанныхъ выше соображеній, оба предыдущихъ интеграла представляются также въ слѣдующемъ видѣ

$$\int\left[\frac{\triangle_{12}}{\triangle}(dx-Xdt)+\frac{\triangle_{22}}{\triangle}(dy-Ydt)+\frac{\triangle_{32}}{\triangle}(dz-Zdt)\right]=a_1,$$

$$\int\left[\frac{\triangle_{13}}{\triangle}(dx-Xdt)+\frac{\triangle_{23}}{\triangle}(dy-Ydt)+\frac{\triangle_{33}}{\triangle}(dz-Zdt)\right]=a_2.$$

Предположимъ, что полученные интегралы разрѣшимы относительно перемѣнныхъ y и z. Въ такомъ случаѣ третій искомый интегралъ находится при помощи квадратуры

$$\int \frac{1}{\xi_1'}[dx - X'dt]\, a_3,$$

гдѣ a_3 обозначаетъ новую произвольную постоянную величину.

5. Въ XI томѣ *Mathematische Annalen* (p. 521) С. Ли приложилъ къ рѣшенію своей задачи, изслѣдованной въ главѣ VIII-ой настоящаго сочиненія, теорію группъ безконечно-малыхъ преобразованій. Развитыя выше соображенія позволяютъ также и здѣсь внести упрощенія въ изложеніе С. Ли и приводятъ рѣшеніе разсматриваемой задачи къ приложенію теоремы Якоби-Ліувилля.

Возвращаемся къ системѣ m уравненій съ частными производными въ инволюціи

$$\left.\begin{array}{c} F_i(x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ p_1,\ p_2 \ldots p_n) = 0, \\ i = 1,\ 2, \ldots m, \end{array}\right\} \tag{15}$$

удовлетворяющихъ условію

$$D\left(\frac{F_1,\ F_2, \ldots F_m}{p_1,\ p_2, \ldots p_m}\right) \gtrless 0.$$

Предположимъ, что соотвѣтствущая система линейныхъ уравненій въ инволюціи

$$(F_i,\ f) = 0, \qquad i = 1,\ 2, \ldots m, \tag{16}$$

имѣетъ $m+r$ различныхъ интеграловъ

$$F_1,\ F_2, \ldots F_m,\ f_1,\ f_2, \ldots f_r, \quad (r < 2n - 2m) \tag{17}$$

образующихъ *функціональную группу*, съ $m+q$ *существенными функціями*.

Очевидно, что каждое выраженіе

$$U_k(f) \equiv (f_k,\ f)$$

представляетъ безконечно-малое преобразованіе системы уравненій (16). Что же касается безконечно-малыхъ преобразованій

$$V_1(f),\ V_2(f), \ldots V_q(f), \tag{18}$$

составленныхъ въ VIII главѣ (см. n^02), то они уничтожаются для значеній f, представленныхъ рядомъ интеграловъ (17), и кромѣ того образуютъ группу безконечно-малыхъ преобразованій въ инволюціи [1]).

Какъ и раньше (см. loc. c.), при помощи послѣдовательныхъ интегрированій, находимъ рядъ $n-m-q-\varrho$ различныхъ интеграловъ въ инволюціи системы уравненій (16)

$$f_{r+1},\ f_{r+2},\ \dots f_{n-m+\rho} \tag{19}$$

и составляемъ $n-m-q-\varrho$ новыхъ безконечно-малыхъ преобразованій

$$V_{q+1}(f),\ V_{q+1}(f),\ \dots V_{n-m+\rho}(f). \tag{20}$$

Всѣ выраженія (18) и (20) образуютъ группу $n-m-\varrho$ безконечно-малыхъ преобразованій въ инволюціи, которыя кромѣ того уничтожаются для всѣхъ значеній интеграловъ (17) и (19) системы линейныхъ уравненій (16). Это послѣднее соображеніе является весьма существеннымъ для дальнѣйшаго изложенія.

Предполагая интегралы (17) и (19) различными относительно перемѣнныхъ $x_{n-\rho+1},\ x_{n-\rho+2},\ \dots x_n,\ p_1,\ p_2,\ \dots p_n$, принимаемъ функціи (17) и (19) за новыя перемѣнныя величины вмѣсто послѣднихъ перемѣнныхъ. Само собою разумѣется, что уравненія (16) преобразовываются въ уравненія слѣдующаго вида

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}+\sum\limits_{s=1}^{n-m-\rho} X_{si}\dfrac{\partial f}{\partial x_{m+s}}=0\,, \\ i=1,\dots m,\end{array}\right| \tag{21}$$

и группа ихъ $n-m-\varrho$ безконечно-малыхъ преобразованій становится

$$\begin{array}{c}V'_\sigma f\equiv\sum\limits_{s=1}^{n-m-\rho}\xi_{s\sigma}\dfrac{\partial f}{\partial x_{m+s}} \\ \sigma=1,\ 2,\dots n-m-\rho,\end{array}$$

гдѣ всѣ коэффиціенты X_{si}, $\xi_{s\sigma}$ зависятъ отъ перемѣнныхъ величинъ $x_1,\ x_2,\ \dots x_{n-\rho}$ и отъ значеній $F_1,\ F_2,\ \dots F_m,\ f_1,\ f_2,\ \dots f_{n-m+\rho}$, которыя разсматриваются какъ постоянныя величины. Въ такомъ случаѣ интегрированіе системы (21) заканчивается при помощи одной только квадратуры. Въ самомъ дѣлѣ, введемъ обозначеніе

---

[1]) Ср. *E. Goursat.—Leçons sur l'intégration...* p. 50—51 и мое изслѣдованіе: *Etude sur les transformations infinitésimales (Journal Jordan 1905, p. 74—75).*

$$D \equiv \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{21} & \dots & \xi_{n-m-\rho,\,1} \\ \xi_{12} & \xi_{22} & \dots & \xi_{n-m-\rho,\,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ \xi_{1,\,n-m-\rho} & \xi_{2,\,n-m-\rho} & \dots & \xi_{n-m-\rho,\,n-m-\rho} \end{vmatrix}$$

и назовемъ черезъ D_{si} миноръ послѣдняго опредѣлителя, соотвѣтствующій его элементу ξ_{si}.

Проинтегрировавъ точный дифференціалъ

$$df = \sum_{s=1}^{n-m-\rho} \sum_{k=1}^{n-m-\rho} b_k \frac{D_{sk}}{D} (dx_{m+s} - \sum_{i=1}^{m} X_{si}\, dx_i),$$

представимъ искомые интегралы слѣдующими формулами

$$\frac{\partial f}{\partial b_k}, \qquad k=1,\, 2, \dots n-m-\rho,$$

или при помощи слѣдующихъ квадратуръ

$$\int \sum_{s=1}^{n-m-\rho} \frac{D_{sk}}{D} (dx_{m+s} - \sum_{i=1}^{m} X_{si}\, dx_i),$$

$$k=1,\, 2, \dots n-m-\rho.$$

Затѣмъ интегрированіе дифференціальныхъ уравненій съ частными производными (15) совершается на основаніи теоріи характеристикъ.

Общія изслѣдованія, относящіяся къ интегрированію въ конечномъ видѣ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка.

Статья I.

Д. Мордухай-Болтовского.

§ 1. Многочисленныя изслѣдованія, относящіяся къ интегрированію въ конечномъ видѣ Абелевыхъ интеграловъ, основываются на теоремахъ Льювиля [1]) и Абеля [2]).

Первый доказалъ, что, если Абелевъ интегралъ выражается въ конечномъ видѣ, т. е. выражается черезъ основныя трансцендентныя функціи (показательныя, тригонометрическія, логариѳмическія и круговыя), то это выраженіе можетъ быть приведено къ слѣдующей формѣ:

$$\int F(x, y)\, dx = \chi(x, y) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \log \psi_k(x, y) \tag{1}$$

гдѣ C_k постоянныя, $\chi(x, y)$ и $\psi_k(x, y)$ алгебраическія функціи отъ (x, y).

Абель дѣлаетъ къ этому существенное добавленіе,—онъ доказываетъ, что функціи $\chi(x, y)$, $\psi_k(x, y)$ можно всегда предположить раціональными функціями (x, y).

Методы Льювиля и Абеля могутъ быть примѣнены къ рѣшенію болѣе общаго вопроса, о формѣ интеграла $U = C$ неприводимаго алгебраическаго дифференціальнаго уравненія перваго порядка

$$f(x, y, y') = 0 \tag{2}$$

въ томъ случаѣ, когда этотъ интегралъ выражается въ конечномъ видѣ.

---

1) *Liouville.* Intégrales dont la valeur est algébrique. Journal de Crelle B. X. 1833. p. 342. Sur la détermination des Intégrales dont la valeur est algébrique Journ. de l'Ecole Polytechnique. t. XIV. Ch. 22. 1833. p. 124. Mémoire sur l'integration d'une classe des fonctions transcendantes. Journ. de Crelle. B. XIII. 1835.

2) *Abel.* Précis d'une théorie des fonctions elliptiques. Journal de Crelle B. IV. 1829 и Oeuvres t. II. p. 545.

Фуксъ [1]) при помощи совершенно другихъ методъ изслѣдованія доказываетъ слѣдующую интересную теорему:

Если общій интегралъ неприводимаго дифференціальнаго уравненія перваго порядка (2) алгебраическій, то онъ всегда можетъ быть представленъ въ слѣдующей формѣ:

$$\Phi(x, y, \triangle) = C \tag{3}$$

Φ раціональная функція $(x, y, \triangle)$, и $\triangle$ опредѣляется неприводимымъ алгебраическимъ уравненіемъ

$$f(x, y, \triangle) = 0. \tag{4}$$

Мы докажемъ не только то, что этотъ результатъ можетъ быть полученъ обычнымъ методомъ Льювиля, съ большимъ успѣхомъ уже примѣнявшимся Кенигсбергеромъ [2]) къ рѣшенію многихъ вопросовъ, относящихся къ дифференціальнымъ уравненіямъ, но мы также обобщимъ результатъ Фукса, доказавъ теорему, что

Если общій интегралъ неприводимаго дифференціальнаго уравненія перваго порядка (2) выражается въ конечномъ видѣ, то онъ всегда можетъ быть представленъ въ слѣдующей формѣ:

$$\Phi(x, y, \triangle) \sqrt[n]{G(x, y, \triangle)} + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \log \prod_{j=0}^{j=n-1} \psi_k^{\alpha^{-j}}(x, y, \triangle, \alpha^j) \sqrt[n]{G(x, y, \triangle)} \tag{5}$$

Φ, G раціональныя функціи $(x, y, \triangle)$, ψ_k раціональная функція $(x, y, \triangle, G)$, $\triangle$ опредѣляется уравненіемъ (4), α первообразный корень двучленнаго уравненія $\alpha^n = 1$.

§ 2. Приступая къ изслѣдованію, замѣтимъ, что всякое алгебраическое дифференціальное уравненіе можно привести къ виду:

$$M(x, y, t)\,dx + N(x, y, t)\,dy = 0, \tag{6}$$

гдѣ $M(x, y, t)$, $N(x, y, t)$ раціональныя функціи (x, y, t), t опредѣляется неприводимымъ алгебраическимъ уравненіемъ

$$F(x, y, t) = 0. \tag{7}$$

Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$y' = \alpha(x, y, t), \tag{8}$$

---

[1]) *Fuchs.* Sitzungsber. der Berliner Akademie 11 Dez. 1884. s. 1171.

[2]) *Königsberger.* Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen. Leipzig. 1888 и другія его статьи въ журналѣ Крелля.

гдѣ $\alpha(x, y, t)$ какая угодно раціональная функція (x, y, t) мы приводимъ уравненіе (2) къ виду (6), если t подчинимъ уравненію

$$f[x, y, \alpha(x, y, t)] = 0 \tag{9}$$

или (7). Въ частномъ случаѣ можно положить

$$t = \triangle, \tag{10}$$

гдѣ $\triangle$ опредѣляется уравненіемъ (4).

Положимъ сперва, что лѣвая часть уравненія (6) представляетъ полный дифференціалъ du, такъ что

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}. \tag{11}$$

Тогда общій интегралъ уравненія (6) будетъ

$$U = C,$$

гдѣ $U = \int (Mdx + Ndy)$, гдѣ для краткости полагаемъ $M = M(x, y, t)$, $N = N(x, y, t)$.

Намъ приходится воспроизводить только съ небольшими измѣненіями разсужденія Льювиля, чтобы доказать:

Если $\int (Mdx + Ndy)$ *выражается въ конечномъ видѣ, то можетъ быть всегда приведенъ къ виду*:

$$\int (Mdx + Ndy) = \chi(x, y, t) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \log \psi_k(x, y, t), \tag{12}$$

гдѣ χ_i, ψ_k *алгебраическія функціи* (x, y, t), C_k *постоянное*.

Вмѣстѣ съ Льювилемъ [1]) называемъ функціи e^{u_1}, $e^{u_2} \ldots lgu_1$, $lgu_2 \ldots$ гдѣ u_1, u_2 алгебраическія функціи (x, y, t) основными трансцендентными перваго класса, алгебраическія функціи отъ нихъ при условіи, что онѣ не приходятся къ алгебраическимъ функціямъ (x, y, t) назовемъ вообще трансцендентными перваго класса.

Функціи e^v, lgv, гдѣ v трансцендентныя перваго класса будутъ основными трансцендентными второго класса, при условіи, что онѣ не приводятся къ трансцендентнымъ перваго класса, алгебраическія функціи отъ основныхъ трансцендентныхъ второго класса при томъ же условіи будутъ трансцендентныя второго класса и т. д.

---

[1]) *Liouville*. Mémoire sur la classification des transcendentes и т. д. Journal de Liouville t. II 1837. p. 56.

Предполагаемъ, что U трансцендентная n-го класса, такъ что

$$U = \int (Mdx + Ndy) = \pi(\theta_1^{(n)}, \theta_2^{(n)} \ldots), \tag{13}$$

гдѣ π алгебраическая функція отъ основныхъ трансцендентныхъ n-го класса: $\theta_1^{(n)}$, $\theta_2^{(n)} \ldots$ и трансцендентныхъ нисшихъ классовъ. Изъ безконечнаго числа выраженій для U мы беремъ тѣ, въ которыхъ число трансцендентныхъ n-го класса: $\theta_i^{(n)}$ доведено до минимума.

Изъ этихъ послѣднихъ выраженій беремъ тѣ, въ которыхъ число трансцендентныхъ n—1-го класса: $\theta_i^{(n-1)}$ доведено до минимума и т. д.

При такомъ выборѣ будемъ говорить, что *выраженіе U дано въ приготовленномъ видѣ.* Въ этомъ случаѣ всякое равенство

$$N[\theta_1^{(n)}, \theta_2^{(n)} \ldots] = 0 \tag{14}$$

гдѣ N алгебраическая функція отъ трансцендентныхъ n класса: $\theta_i^{(n)}$ и нисшихъ классовъ, должно быть тождествомъ, ибо въ противномъ случаѣ изъ уравненія (14) опредѣлили бы $\theta_1^{(n)}$ черезъ $\theta_2^{(n)} \ldots$ и подставивъ въ уравненіе (13), получили бы для U выраженіе черезъ меньшее число основныхъ трансцендентныхъ n-го класса.

Такимъ же образомъ убѣждаемся, что равенство

$$N[\theta_1^{(j)}, \theta_2^{(j)} \ldots] = 0 \tag{15}$$

гдѣ N алгебраическая функція основныхъ трансцендентныхъ j класса: $\theta_i^{(j)}$ и нисшихъ классовъ приводится къ тождеству.

Вслѣдствіе этого *уравненіе (14) и уравненіе (15) остаются въ силѣ и по замѣнѣ въ первомъ $\theta_i^{(n)}$, во второмъ $\theta_i^{(j)}$ какими угодно функціями отъ (x, y).* Такъ можно замѣнять $\theta_i^{(n)}$ черезъ $m\theta_i^{(n)}$ или $\theta_i^{(n)} + m$, гдѣ m постоянное.

Пользуясь этимъ замѣчаніемъ, докажемъ, что *въ выраженіи U, если оно дано въ приготовленномъ видѣ, не входятъ вовсе показательныя функціи.*

Положимъ:

$$\int (Mdx + Ndy) = \pi(\theta) \tag{16}$$

$$\theta = e^u \tag{17}$$

и трансцендентная n—1 класса, π алгебраическая функція (θ, x, y) и другихъ трансцендентныхъ n-го и нисшихъ классовъ. Дифференцируя (16) имѣемъ

$$Mdx + Ndy = \frac{\partial \pi(\theta)}{\partial x} dx + \frac{\partial \pi(\theta)}{\partial y} dy$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{\partial \pi(\theta)}{\partial x} \\ N &= \frac{\partial \pi(\theta)}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

или
$$M = \left(\frac{\partial \pi(\theta)}{\partial x}\right) + \frac{\partial \pi(\theta)}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} \tag{19}$$

$$N = \left(\frac{\partial \pi(\theta)}{\partial y}\right) + \frac{\partial \pi(\theta)}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}, \tag{20}$$

гдѣ $\left(\frac{\partial \pi(\theta)}{\partial x}\right)$ и $\left(\frac{\partial \pi(\theta)}{\partial y}\right)$ обозначаютъ частныя производныя, взятыя по x и по y, въ предположенiи, что θ разсматривается, какъ опредѣленная функцiя (x, y).

Уравненiе (19) на основанiи урав. (17) приводится къ виду:

$$M = \left(\frac{\partial \pi(\theta)}{\partial x}\right) + \frac{\partial \pi(\theta)}{\partial \theta}\,\theta\,\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{21}$$

Это послѣднее уравненiе алгебраическое и должно оставаться въ силѣ и по замѣнѣ θ какой угодно функцiей отъ (x, y), напримѣръ $m\theta$, гдѣ m постоянное.

Но послѣдняя замѣна даетъ:

$$M = \left(\frac{\partial \pi(m\theta)}{\partial x}\right) + \frac{\partial \pi(m\theta)}{\partial (m\theta)}\,m\theta\,\frac{\partial u}{\partial x} \tag{21'}$$

или
$$M = \frac{\partial \pi(m\theta)}{\partial x}, \tag{18'}$$

откуда черезъ сравненiе съ уравненiемъ (18) имѣемъ

$$\frac{\partial \pi(m\theta)}{\partial x} = \frac{\partial \pi(\theta)}{\partial x},$$

слѣдовательно:
$$\pi\,(m\theta) = \pi(\theta) + \sigma(y),$$

гдѣ $\sigma(y)$ зависитъ только отъ y. Такимъ же образомъ уравненiе (20) даетъ

$$\pi\,(m\theta) = \pi(\theta) + \tau(x),$$

поэтому
$$\pi\,(m\theta) = \pi(\theta) + C, \tag{22}$$

гдѣ C постоянное, которое можетъ зависѣть отъ m.

Взявъ частную производную по θ, имѣемъ

$$m\frac{\partial \pi(m\theta)}{\partial (m\theta)} = \frac{\partial \pi(\theta)}{\partial \theta},$$

а взявъ по m, имѣемъ:

$$\theta \frac{\partial \pi(m\theta)}{\partial(m\theta)} = \frac{\partial C}{\partial m} = C',$$

гдѣ C' постоянное. Исключеніе $\frac{\partial \pi(m\theta)}{\partial(m\theta)}$ даетъ:

$$\theta \frac{\partial \pi(\theta)}{\partial \theta} = C' m = E$$

откуда

$$\pi(\theta) = E lg \theta + F$$

F не зависитъ отъ θ или

$$\pi(\theta) = Eu + F \tag{23}$$

т. е. для U получаемъ выраженіе уже не содержащее θ, чего быть не можетъ, такъ какъ по условію U задано въ приготовленномъ видѣ.

Положимъ теперь

$$\theta = lg u, \tag{24}$$

гдѣ u трансцендентная $n-1$-го класса. Въ этомъ случаѣ получаемъ опять уравненіе (19) и (20), изъ которыхъ первое на основаніи уравненія (24) приводится къ виду:

$$M = \left(\frac{\partial \pi(\theta)}{\partial x}\right) + \frac{\partial \pi(\theta)}{\partial \theta} \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial x} \tag{25}$$

уравненіе это алгебраическое относительно θ, остается въ силѣ и по замѣнѣ θ какой угодно функціей $(x\ y)$, напримѣръ, $\theta + m$, такъ что

$$M = \left(\frac{\partial \pi(\theta + m)}{\partial x}\right) + \frac{\partial \pi(\theta + m)}{\partial(\theta + m)} \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial x} \tag{25'}$$

или

$$M = \frac{\partial \pi(m + \theta)}{\partial x}, \tag{17''}$$

откуда черезъ сравненіе съ ур. (19), получаемъ

$$\frac{\partial \pi(\theta + m)}{\partial x} = \frac{\partial \pi(\theta)}{\partial x}$$

$$\pi(\theta + m) = \pi(\theta) + \sigma(y)$$

и такимъ же образомъ, на основаніи ур. (20), имѣемъ

$$\pi(\theta + m) = \pi(\theta) + \tau(x),$$

откуда

$$\pi(\theta+m)=\pi(\theta)+C, \tag{26}$$

гдѣ C постоянное.

Дифференцируя по θ и по m имѣемъ:

$$\frac{\partial\pi(\theta+m)}{\partial(\theta+m)}=\frac{\partial\pi(\theta)}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial\pi(\theta+m)}{\partial(\theta+m)}=\frac{\partial C}{\partial m}=E,$$

откуда

$$\frac{\partial\pi(\theta)}{\partial\theta}=E$$

$$\pi(\theta)=E\theta+F, \tag{27}$$

гдѣ E постоянное, а F не зависитъ отъ θ

или

$$\pi(\theta)=Elgu+F \tag{28}$$

вообще

$$U=\pi(\theta_1,\theta_2\ldots)=\sum_{i=1}^{i=n}E_i\log u_i+F, \tag{29}$$

гдѣ E_i постоянныя, F трансцендентная функція $\overline{n-1}$ класса.

Мы докажемъ, что $u_1, u_2, \ldots u_n$ должны быть тоже алгебраическими функціями (x, y).

Если бы U была трансцендентной функціей, то по вышедоказанному въ нее не могли бы входить показательныя функціи. Мы имѣли бы

$$u_i=P_i(\chi), \tag{30}$$

гдѣ P_i алгебраическая функція $\chi=\log v$ (v трансцендентная $\overline{n-2}$ класса), x, y и другихъ трансцендентныхъ $\overline{n-2}$ и нисшихъ классовъ.

Уравненіе (29) и (30) даютъ:

$$M=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{C_i}{P_i(\chi)}\left[\left(\frac{\partial P_i}{\partial x}\right)+\frac{\partial P_i}{\partial\chi}\frac{\partial\chi}{\partial x}\right]+\frac{\partial F}{\partial x}$$

это послѣднее уравненіе алгебраическое относительно χ и остается въ силѣ по замѣнѣ χ на $\chi+m$ и мы, какъ выше, изъ ур. (25) получили (28), получаемъ отсюда:

$$\pi(\theta)=D\log v+G, \tag{31}$$

D постоянное, G не зависитъ отъ χ.

Вообще:

$$\pi(\theta)=\sum_{i=1}^{i=g} D_i \log v_i + G, \tag{32}$$

гдѣ D_i постоянныя, G трансцендентная $\overline{n-2}$ класса, послѣднее же не можетъ имѣть мѣста, такъ какъ тогда противно условію $U=\pi(\theta)$ была бы трансцендентная не n-го, а нисшаго класса.

§ 3. Теперь, мало отклоняясь отъ разсужденій Абеля, доказываемъ, что въ уравненіи (12)
χ (x, y, t) и ψ_k (x, y, t) можно предполагать раціональными функціями (x, y, t).

Для доказательства положимъ:

$$\int (Mdx+Ndy)=\xi_0^{(1)}+\sum_{k=1}^{k=m} C_k \log \xi_k^{(1)}, \tag{33}$$

гдѣ $\xi_0^{(1)}$, $\xi_k^{(1)}$ алгебраическія функціи (x, y, t) опредѣляемыя неприводимыми уравненіями

$$\lambda_k(x, y, t, \xi_k)=0 \qquad k=0, 1. 2 \ldots m \tag{34}$$

Обозначая черезъ:

$$\begin{matrix} \xi_0^{(1)}, & \xi_1^{(1)}, & \xi_2^{(1)} \ldots & \xi_m^{(1)} \\ \xi_0^{(2)}, & \xi_1^{(2)}, & \xi_2^{(2)} \ldots & \xi_m^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_0^{(N)}, & \xi_1^{(N)}, & \xi_2^{(N)}, & \xi_m^{(N)} \end{matrix} \tag{35}$$

системы значеній:

$$\xi_0, \quad \xi_1, \quad \xi_2 \ldots \quad \xi_m,$$

удовлетворяющія системѣ уравненія (34), составимъ функцію:

$$\tau_i=\sum_{k=0}^{k=m} \alpha_k \xi_k^{(i)},$$

гдѣ постоянныя α_k подбираемъ такъ, чтобы всѣ τ_i были бы между собой различны.

Эти функціи τ_i будутъ опредѣляться уравненіями:

$$\tau^N - A_1 \tau^{N-1} + \ldots (-1)^N A_N = 0, \tag{36}$$

въ которомъ коэффиціенты A_i, а слѣдовательно и всякія раціональныя симметрическія функціи τ_i будутъ раціональными симметрическими функціями величинъ (35), а на основаніи уравненій (34) раціональными функціями (x, y, t).

Легко видѣть, что всякая раціональная функція величинъ каждой изъ системъ (35):

$$\xi_0^{(i)}, \quad \xi_1^{(i)}, \quad \xi_2^{(i)} \dots \xi_m^{(i)} \tag{37}$$

въ частномъ случаѣ, каждая изъ этихъ величинъ (37) выражается раціонально въ τ_i.

Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$S(\tau, x, y, t) = (\tau - \tau_1)(\tau - \tau_2) \dots (\tau - \tau_N)$$

и обозначая упомянутую функцію черезъ P_i, а черезъ $P_1, P_2 \dots$ тѣ же функціи отъ величинъ другихъ системъ (35), будемъ имѣть:

$$S(\tau, x, y, t) . \sum_{i=1}^{i=N} \frac{P_i}{\tau - \tau_i} = U(\tau, x, y, t), \tag{38}$$

гдѣ $U\ (\tau, x, y, t)$ раціональная функція (τ, x, y, t).

Полагая въ уравненіи (38) $\tau = \tau_i$ получаемъ

$$P_i = \frac{U(\tau_i, x, y, t)}{S'_{\tau_i}(\tau_i, x, y, t)}$$

гдѣ S'_{τ_i} отлично отъ нуля, такъ какъ по предположенію τ_i простой корень уравненія (36).

Въ частномъ случаѣ имѣемъ

$$\xi_k^{(i)} = \alpha^{(k)}\ (\tau_i, x, y, t), \tag{39}$$

гдѣ $\alpha^{(k)}$ раціональная функція (τ_i, x, y, t)

Дифференцируя уравненіе (33) имѣемъ:

$$M = \frac{\partial \xi_0^{(1)}}{\partial x} + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \frac{1}{\xi_k^{(1)}} \frac{\partial \xi_k^{(1)}}{\partial x} \tag{40}$$

$$N = \frac{\partial \xi_0^{(1)}}{\partial y} + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \frac{1}{\xi_k^{(1)}} \frac{\partial \xi_k^{(1)}}{\partial y} \tag{41}$$

Первое изъ этихъ уравненій на основаніи уравненія (34) приводится къ уравненію:

$$M = \pi_0(\xi_0^{(1)}, x, y, t) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \frac{1}{\xi_k^{(1)}} \pi_k(\xi_k^{(1)}, x, y, t), \tag{42}$$

гдѣ

$$\pi_k = \pi_k(\xi_k^{(1)}, x, y, t) = -\frac{\dfrac{\partial \lambda_k^{(1)}}{\partial x}}{\dfrac{\partial \lambda_k^{(1)}}{\partial \xi_k^{(1)}}}, \tag{43}$$

если для краткости положить:

$$\lambda_k^{(1)} = \lambda_k(\xi_k^{(1)}, x, y, t)$$

или

$$\pi(\tau_1, x, y, t) = 0 \tag{44}$$

гдѣ π цѣлая функція (τ_1, x, y, t)

Положимъ теперь, что неприводимое уравненіе, опредѣляющее $\tau = \tau_1$ будетъ:

$$S'(\tau, x, y, t) = 0, \tag{45}$$

такъ что

$$S(\tau, x, y, t) = S'(\tau, x, y, t)\; S''(\tau, x, y, t),$$

причемъ на ряду съ $\tau = \tau_1$ уравненіе (45) удовлетворяютъ еще:

$$\tau = \tau_2, \tau_3 \ldots \tau_m.$$

Вслѣдствіе неприводимости, уравненіе (45), имѣя съ (42) одинъ общій корень $\tau = \tau_1$, будетъ имѣть и остальные корни, удовлетворяющіе уравненію (42), такъ что:

$$\pi(\tau_i, x, y, t) = 0 \tag{44'}$$

$$i = 1.\, 2.\, 3 \ldots m$$

Но замѣна τ_1 на τ_i въ уравненіи (44) равносильна замѣнѣ $\xi_k^{(1)}$ на $\xi_k^{(i)}$ въ уравненіи (42), такъ что

$$M = \pi(\xi_0^{(i)}, x, y, t) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \frac{1}{\xi_k^{(i)}} \pi_k(\xi_k^{(i)}, x, y, t), \tag{42'}$$

а, такъ какъ на основаніи уравненія (34):

$$\pi_k(\xi_k^{(i)}, x, y, t) = -\frac{\dfrac{\partial \lambda_k^{(i)}}{\partial x}}{\dfrac{\partial \lambda_k^{(i)}}{\partial \xi_k^{(i)}}} \tag{43'}$$

гдѣ $\lambda_k^{(i)} = \lambda_k(\xi_k^{(i)},\ x,\ y,\ t)$, то получаемъ

$$M = \frac{\partial \xi_0^{(i)}}{\partial x} + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \frac{1}{\xi_k^{(i)}} \frac{\partial \xi_k^{(i)}}{\partial x} \tag{40'}$$

Такимъ же образомъ, исходя изъ уравненія (41), получаемъ

$$N = \frac{\partial \xi_0^{(i)}}{\partial y} + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \frac{1}{\xi_k^{(i)}} \frac{\partial \xi_k^{(i)}}{\partial y} \tag{41'}$$

Умножая (40′) на dx, (41′) на dy, складывая и интегрируя, получаемъ:

$$\int (Mdx + Ndy) = \xi_0^{(i)} + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \log \xi_k^{(i)} \tag{33'}$$

$$i = 1,\ 2 \ldots \mathit{м}$$

Складывая почленно и дѣля на $\mathit{м}$, получаемъ

$$\int (Mdx + Ndy) = \frac{1}{\mathit{м}} \sum_{i=1}^{i=\mathit{м}} \xi_0^{(i)} + \frac{1}{\mathit{м}} \sum_{k=1}^{k=m} C_k \log \prod_{i=1}^{i=\mathit{м}} (\xi_k^{(i)}),$$

замѣчая же, что

$$\sum_{i=1}^{i=\mathit{м}} \xi_k^{(i)} \quad \text{и} \quad \prod_{i=1}^{i=\mathit{м}} (\xi_k^{(i)}),$$

какъ раціональныя симметрическія функціи $\xi_k^{(i)}$, $\xi_k^{(i)}$, а на основаніи уравненія (39) раціональныя симметрическія функціи τ_i и раціональныя функціи $(x,\ y,\ t)$, будутъ приводиться на основаніи уравненія (45) къ раціональнымъ функціямъ отъ $(x,\ y,\ t)$, мы получаемъ для $\int (Mdx + Ndy)$ выраженіе:

$$\int (Mdx + Ndy) = \varphi(x,\ y,\ t) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \log \psi_k(x,\ y,\ t), \tag{45}$$

гдѣ C_k постоянныя $\varphi(x,\ y,\ t)$, $\psi_k(x,\ y,\ t)$ раціональныя функціи $(x,\ y,\ t)$, въ частномъ случаѣ при $t = \triangle$ выраженіе (5).

§ 4. Теперь переходимъ къ случаю, когда двучленъ $Mdx + Ndy$ не представляетъ полнаго дифференціала. Интегрирующій множитель $\mu = \frac{1}{M} \frac{\partial U}{\partial x}$, черезъ умноженіе на который $Mdx + Mdy$ приводится къ полному дифференціалу, удовлетворяетъ уравненію перваго порядка въ частныхъ производныхъ:

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

или $\omega=\log\mu$ уравненію:

$$\varphi\frac{\partial\omega}{\partial x}+\psi\frac{\partial\omega}{\partial y}=\chi, \tag{47}$$

гдѣ

$$\varphi=N,\ \ \psi=-M,\ \ \chi=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}$$

раціональныя функціи отъ (x, y, t).

Если интегралъ U дифференціальнаго уравненія $Mdx+Ndy=0$ выражается въ конечномъ видѣ, то вмѣстѣ съ тѣмъ выражается въ конечномъ видѣ и интегрирующій множитель

$$\mu=\frac{1}{M}\frac{\partial U}{\partial x}$$

и $\omega=log\,\mu$.

Мы теперь будемъ разыскивать форму для μ въ томъ случаѣ, когда μ выражается въ конечномъ видѣ. Форма для U найдется изслѣдованіемъ интеграла

$$\int\mu\,(Mdx+Ndy),$$

аналогичнымъ изслѣдованіямъ §§ 2 и 3.

А именно мы докажемъ, что:

Если интегралъ дифференціальнаго уравненія

$$M(x,\ y,\ t)\,dx+N(x,\ y,\ t)\,dy=0 \tag{6}$$

выражается въ конечномъ видѣ, то всегда для него существуетъ интегрирующій множитель типа:

$$\mu=e^{H(x,\ y,\ t)}\prod_{k=1}^{k=m}[H_k(x,\ y,\ t)]^{\lambda_k}, \tag{46}$$

гдѣ $H(x, y, t)$, $H_k(x, y, t)$ раціональныя функціи (x, y, t), λ_k постоянныя.

Теорема будетъ доказана, если докажемъ, что, *если алгебраическое линейное уравненіе*

$$\varphi\frac{\partial\omega}{\partial x}+\psi\frac{\partial\omega}{\partial y}=\chi \tag{47}$$

перваго порядка имѣетъ частный интегралъ, выражающійся въ конечномъ видѣ, то оно всегда имѣетъ частный интегралъ типа:

$$\omega = H(x, y, t) + \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \lg H_k(x, y, t), \tag{48}$$

гдѣ $H(x, y, t)$, $H_k(x, y, t)$ *раціональныя функціи отъ* (x, y, t).

Сохраняя классификацію трансцендентныхъ § 2, мы докажемъ сперва, что на ряду съ частнымъ интеграломъ, содержащимъ показательную функцію $\theta = e^u$ и трансцендентныя $\overline{n-1}$ класса, всегда существуетъ интегралъ, не содержащій ея.

Полагая

$$\omega = \pi(\theta), \tag{49}$$

гдѣ $\pi(\theta)$ имѣетъ то же значеніе, что въ уравненіи (16), будемъ имѣть на основаніи уравненія (47)

$$\varphi \frac{\partial \pi(\theta)}{\partial x} + \psi \frac{\partial \pi(\theta)}{\partial y} = \chi \tag{50}$$

или

$$\varphi \left[\left(\frac{\partial \pi(\theta)}{\partial x} \right) + \frac{\partial \pi(\theta)}{\partial \theta} \theta \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \psi \left[\left(\frac{\partial \pi(\theta)}{\partial y} \right) + \frac{\partial \pi(\theta)}{\partial \theta} \theta \frac{\partial u}{\partial y} \right] = \chi \tag{51}$$

Уравненіе это алгебраическое относительно θ и другихъ трансцендентныхъ n—го и нисшихъ порядковъ и будетъ оставаться въ силѣ по замѣнѣ θ на $m\theta$, такъ что

$$\varphi \left[\left(\frac{\partial \pi(m)\theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial \pi(m\theta)}{\partial (m\theta)} m\theta \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \psi \left[\left(\frac{\partial \pi(m\theta)}{\partial y} \right) + \frac{\partial \pi(m\theta)}{\partial (m\theta)} m\theta \frac{\partial u}{\partial y} \right] = \chi \tag{51}$$

или

$$\varphi \frac{\partial \pi(m\theta)}{\partial x} + \psi \frac{\partial \pi(m\theta)}{\partial y} = \chi, \tag{50'}$$

откуда черезъ сравненіе съ уравненіемъ (50) имѣемъ:

$$\varphi \frac{\partial H(\theta, m)}{\partial x} + \psi \frac{\partial H(\theta, m)}{\partial y} = 0, \tag{52}$$

гдѣ

$$H(\theta, m) = \pi(m\theta) - \pi(\theta). \tag{53}$$

Здѣсь слѣдуетъ различать два случая, смотря по тому, зависитъ или независитъ $H(\theta, m)$ отъ θ. Въ первомъ случаѣ, полагая

$$H(\theta, m) = \alpha,$$

будемъ имѣть $u = P(\alpha, x, y)$, гдѣ P алгебраическая функція α и другихъ трансцендентныхъ n—го и нисшихъ порядковъ, причемъ α частное рѣшеніе уравненія:

$$\varphi \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \psi \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0 \tag{54}$$

Тогда

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) + \frac{\partial P}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) + \frac{\partial P}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y}$$

$$\varphi \frac{\partial \omega}{\partial x} + \psi \frac{\partial \omega}{\partial y} = \varphi \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) + \psi \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) + \frac{\partial P}{\partial \alpha} \left[\varphi \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \psi \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right] = \chi$$

или на основаніи уравненія (54):

$$\varphi \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) + \psi \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \chi \tag{55}$$

Уравненіе это алгебраическое относительно θ и другихъ трансцендентныхъ n—го и нисшихъ порядковъ и остается въ силѣ по замѣнѣ θ такимъ значеніемъ, при которомъ α равно постоянному c, т. е.

$$\varphi \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{\alpha = c} + \psi \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{\alpha = c} = \chi \tag{56}$$

Возьмемъ теперь

$$\omega = P(c\,,\ x\,,\ y) = P_0$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial P_0}{\partial x} = \left(\frac{\partial P_0}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial P_0}{\partial y} = \left(\frac{\partial P_0}{\partial y}\right),$$

откуда

$$\varphi \frac{\partial P_0}{\partial x} + \psi \frac{\partial P_0}{\partial y} = \varphi \left(\frac{\partial P_0}{\partial x}\right) + \psi \left(\frac{\partial P_0}{\partial y}\right)$$

Но такъ какъ очевидно

$$\left(\frac{\partial P_0}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{\alpha = c}, \quad \frac{\partial P_0}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{\alpha = c},$$

то по уравненію (56)

$$\varphi \frac{\partial P_0}{\partial x} + \psi \frac{\partial P_0}{\partial y} = \chi \tag{57}$$

и $P_0 = P(c\,,\ x\,,\ y)$, уже не содержащая $\theta = e^u$, будетъ тоже частнымъ интеграломъ уравненія (47).

Во второмъ случаѣ, когда $H(\theta, m)$ не зависитъ отъ θ, получаемъ уравненіе

$$\pi(m\theta) = \pi(\theta) + C \tag{22}$$

§ 2, которое намъ дало

$$\pi(\theta) = Eu + F \tag{23}$$

т. е. $\pi(\theta)$ въ видѣ трансцендентной, противно условію, не содержащей алгебраически θ.

Такимъ же точно образомъ, изслѣдуя случай, когда $\theta = \log u$, u трансцендентная $\overline{n-1}$ класса, приходимъ или къ уравненію (57), гдѣ

$$P_0 = P(c, x, y)$$

уже не содержитъ θ, или къ уравненію (26) § 2:

$$\pi(\theta + m) = \pi(\theta) + C, \tag{26}$$

которое даетъ намъ

$$\pi(\theta) = \sum_{i=1}^{i=m} E_i \log u_i + F \tag{29}$$

(E_i постоянныя, F трансцендентныя $\overline{n-1}$ класса) и на основаніи котораго, какъ въ § 2, доказываемъ, что u_i, F алгебраическія функціи.

Далѣе полагаемъ:

$$\omega = H_0^{(1)}(x, y, t) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \log H_k^{(1)}(x, y, t) \tag{58}$$

гдѣ $H_k^{(1)}(x, y, t)$ алгебраическія функціи (x, y, t), C_k постоянныя.

Опредѣляя изъ уравненія (58) $\frac{\partial\omega}{\partial x}$ и $\frac{\partial\omega}{\partial y}$ и подставляя въ уравненіе (47), получаемъ алгебраическое уравненіе

$$\varphi\left(\frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial x} + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \frac{1}{H_k^{(1)}} \frac{\partial H_k^{(1)}}{\partial x}\right) + \psi\left(\frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial y} + \sum_{k=k}^{k=m} C_1 \frac{1}{H_k^{(1)}} \frac{\partial H_k^{(1)}}{\partial y}\right) = \chi \tag{59}$$

или

$$\varphi\left[P_0(H_0^{(1)}, x, y, t) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \frac{1}{H_k^{(1)}} P_k(H_k^{(1)}, x, y, t)\right] +$$

$$+ \psi\left[Q_0(H_0^{(1)}, x, y, t) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \frac{1}{H_k^{(1)}} P_k(H_k^{(1)}, x, y, t)\right] = \chi \tag{60}$$

гдѣ

$$P_i(H_k^{(1)}, x, y, t) = -\frac{\dfrac{\partial L_k^{(1)}}{\partial x}}{\dfrac{\partial L_k^{(1)}}{\partial H_k^{(1)}}} \tag{61}$$

$$Q_i(H_k^{(1)}, x, y, t) = -\frac{\dfrac{\partial L_k^{(1)}}{\partial y}}{\dfrac{\partial L_k^{(1)}}{\partial H_k^{(1)}}}, \tag{62}$$

гдѣ

$$L_k^{(1)} = L_k(H_k^{(1)}, x, y, t),$$

а

$$L_k(H_k, x, y, t) = 0 \tag{63}$$

алгебраическія уравненія, опредѣляющія H_k.

Намъ остается только повторить разсужденія § 3, чтобы исходя изъ уравненій (59) и (62) доказать существованіе слѣдующихъ уравненій:

$$\varphi\left(\frac{\partial H_0^{(i)}}{\partial x} + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \frac{1}{H_k^{(i)}} \frac{\partial H_k^{(i)}}{\partial x}\right) + \psi\left(\frac{\partial H_0^{(i)}}{\partial y} + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \frac{1}{H_k^{(i)}} \frac{\partial H_k^{(i)}}{\partial y}\right) = \chi, \tag{59'}$$

гдѣ

$$H_k^{(i)} = A^{(k)}(T_i, x, y, t) \tag{64}$$

раціональная функція (T_i, x, y, t), T_i опредѣляется неприводимымъ уравненіемъ:

$$S(T_i, x, y, t) = 0 \tag{65}$$

Уравненіе (59') или, что тоже,

$$\varphi \frac{\partial \omega_i}{\partial x} + \psi \frac{\partial \omega_i}{\partial y} = \chi,$$

гдѣ

$$\omega_i = H_0^{(i)}(x, y, t) + \sum_{k=1}^{k=m} C_h \log H_k^{(i)}(x, y, t)$$

даютъ по сложеніи:

$$\varphi \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \psi \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \chi,$$

гдѣ

$$\Omega = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=N} H_0^{(i)}(x, y, t) + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=m} C_k \log \prod_{i=1}^{i=N} H_k^{(i)}(x, y, t) =$$

$$= H(x, y, t) + \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \log H_k(x, y, t),$$

гдѣ $H(x, y, t)$, $H_k(x, y, t)$ раціональныя функціи (x, y, t), λ_k постоянныя.

§ 5. Такимъ образомъ, если интегралъ U выражается въ конечномъ видѣ, то онъ можетъ быть представленъ слѣдующимъ интеграломъ

$$U = \int e^{H(x, y, t)} \prod_{k=1}^{k=m} [H_k(x, y, t)]^{\lambda_k} [M(x, y, t)\,dx + N(x, y, t)\,dy]. \quad (66)$$

Къ этому интегралу будутъ относиться наши дальнѣйшія изслѣдованія.

При помощи разсужденій аналогичныхъ развитымъ въ § 2, мы можемъ доказать, что

Если общій интегралъ (66) выражается съ конечномъ видѣ, то онъ можетъ выражаться въ одной изъ слѣдующихъ двухъ формъ:

$$U = e^{H(x, y, t)} \prod_{k=1}^{k=q} [H_k(x, y, t)]^{\lambda_k} \sqrt[n]{G(x, y, t)} \quad (67)$$

$$U = \Phi(x, y, t, \sqrt[n]{G(x, y, t)}) + \sum_{1}^{k=m} C_k \log \psi_k(x, y, t, \sqrt[n]{G(x, y, t)}), \quad (68)$$

гдѣ H_k, G *раціональныя функціи* (x, y, t), Φ, ψ_k *раціональныя функціи* (x, y, t, g), *гдѣ* $g = \sqrt[n]{G(x, y, t)}$, λ_k, C_k *постоянныя.*

Мы будемъ опять пользоваться классификаціей трансцендентныхъ § 2, но только введя въ нее слѣдующее измѣненіе. За основныя трансцендентныя n—го класса принимаемъ не только показательныя функціи e^u и lgu, гдѣ u трансцендентная $n-1$ класса, но еще степенныя функціи $u^\lambda = e^{\lambda\, lgu}$, гдѣ λ какое угодно несоизмѣримое число, считавшіяся въ § 2 за трансцендентныя $n+1$ класса.

Принимая болѣе краткое обозначеніе:

$$U = \int e^{H(x, y, t)} P(x, y, t)\,[Mdx + Ndy], \quad (69)$$

гдѣ

$$P(x, y, t) = \prod_{k=1}^{k=m} [H_k(x, y, t)]^{\lambda_k} \tag{70}$$

полагаемъ:

$$U = \pi(\theta), \tag{71}$$

гдѣ π алгебраическая функція отъ трансцендентныхъ $\theta = e^u$ или $\theta = u^\lambda$, которыя полагаемъ трансцендентными класса $n > 1$ и другихъ трансцендентныхъ n—го и нисшихъ классовъ.

Мы докажемъ, что, если предполагать, что число трансцендентныхъ n—го класса, входящихъ въ U, доведено до минимума, то такія трансцендентныя e^u, u^λ въ U вовсе не входятъ.

Дифференцируя уравненіе (69), имѣемъ:

$$e^{H(x, y, t)} P(x, y, t) M = \left(\frac{\partial \pi(\theta)}{\partial x}\right) + \frac{\partial \pi(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \tag{72}$$

$$e^{H(x, y, t)} P(x, y, t) N = \left(\frac{\partial \pi(\theta)}{\partial y}\right) + \frac{\partial \pi(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}. \tag{73}$$

Такъ какъ

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \theta \frac{\partial u}{\partial x} \text{ или } \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\lambda \theta}{u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \theta \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\lambda \theta}{u} \frac{\partial u}{\partial y},$$

то уравненія эти будутъ типа:

$$N(\theta, \alpha, \beta_1, \beta_2 \ldots \beta_q) = 0, \tag{74}$$

гдѣ N алгебраическая функція отъ трансцендентной θ, другихъ трансцендентныхъ n—го класса и трансцендентныхъ нисшихъ классовъ, между прочимъ перваго класса:

$$\alpha = e^{H(x, y, t)}$$

$$\beta_k = [H_k(x, y, t)]^{\lambda_k}, \quad {}_{k=1,\,2,\ldots\,q}$$

λ_k число несоизмѣримое.

Это уравненіе (74) остается въ силѣ по замѣнѣ θ какой угодно функціей (x, y, t), напримѣръ $m\theta$. Поэтому параллельно уравненію (72) будемъ имѣть:

$$e^{H(x, y, t)} P(x, y, t) M = \left(\frac{\partial \pi(m\theta)}{\partial x}\right) + \frac{\partial \pi(m\theta)}{\partial (m\theta)} \frac{\partial (m\theta)}{\partial x} \tag{72'}$$

или

$$e^{H(x,\,y,\,t)}\,P(x\,,\;y\,,\;t)\,M=\frac{\partial\pi\,(m\theta)}{\partial x}$$

откуда

$$\frac{\partial\pi\,(m\theta)}{\partial x}=\frac{\partial\pi\,(\theta)}{\partial x}$$

или

$$\pi\,(m\theta)=\pi\,(\theta)+\sigma\,(y).$$

Уравненіе (73) такимъ же образомъ дастъ

$$\pi\,(m\theta)=\pi\,(\theta)+\tau\,(x),$$

откуда

$$\pi\,(m\theta)=\pi\,(\theta)+C \tag{22}$$

C постоянное, на основаніи же § 2 имѣемъ

$$\pi\,(\theta)=Eu+F \tag{23}$$

E постоянное, F не зависитъ отъ θ, т. е. $\pi\,(\theta)$ противно условію не содержитъ θ.

Полагаемъ теперь $\theta=\log u$, гдѣ u трансцендентная $\overline{n-1}$-го класса, $n>1$.

Тогда уравненія (72) и (73) опять дадутъ уравненія (74), остающіяся въ силѣ и по замѣнѣ θ на $\theta+m$ и воспроизводя опять разсужденія § 2, получаемъ

$$\pi\,(\theta+m)=\pi\,(\theta)+C \tag{26}$$

откуда

$$\pi\,(\theta)=E\log u+F, \tag{28}$$

E постоянное, F не зависитъ отъ θ.

Здѣсь u можно всегда предполагать или трансцендентной перваго класса или алгебраической функціей, если только число трансцендентныхъ всѣхъ классовъ до 2-го включительно доведено до минимума.

Въ самомъ дѣлѣ на основаніи разсужденій § 2 имѣемъ, если положить

$$u=P\,(\chi)$$

гдѣ P алгебраическая функція $\chi=\log v$ трансцендентной $\overline{n-1}$-го класса и другихъ трансцендентныхъ $\underline{n-1}$-го и нисшихъ классовъ, то

$$\pi\,(\theta)=D\log v+G \tag{31}$$

или

$$\pi\,(\theta)=\sum_{i=1}^{i=q}D_i\log v_i+G \tag{32}$$

D_i постоянныя, G трансцендентныя $\overline{n-2}$ класса, т. е. $\pi(\theta)$ противно условію трансцендентная $\overline{n-1}$ класса.

Переходя теперь къ трансцендентнымъ перваго класса, мы *не будемъ предполагать, что число ихъ доведено до минимума.*

Изъ безконечнаго числа выраженій для U съ наименьшими числами трансцендентныхъ n, $\overline{n-1}$, ... 2 классовъ, мы будемъ дѣлать слѣдующій выборъ. Въ U входятъ кромѣ α, β_i еще нѣкоторыя трансцендентныя перваго класса $\theta_i^{(1)}$, мы остановимся на томъ выраженіи, въ которомъ не число всѣхъ функцій: α, β_i, $\theta_i^{(1)}$ а только функцій $\theta_i^{(1)}$ доведено до минимума.

При такомъ выводѣ всякое равенство:

$$N(\theta,\ \alpha,\ \beta_1\ \beta_2 \dots \beta_q) = 0, \tag{75}$$

гдѣ N алгебраическая функція θ, α, β_i и другихъ трансцендентныхъ перваго класса $\theta_i^{(1)}$ будетъ тождествомъ и будетъ оставаться въ силѣ по замѣнѣ θ какой угодно функціей отъ $(x,\ y,\ t)$, ибо, въ противномъ случаѣ, опредѣляя θ черезъ α, β_i, $\theta_i^{(1)}$ мы получили бы выраженіе U черезъ меньшее число функцій $\theta_i^{(1)}$.

Относительно функцій α, β_i важно сдѣлать слѣдующее замѣчаніе: можно предполагать, что между α, β_i не существуетъ соотношеній типа

$$\alpha^{p^{(i)}}\ \beta_1^{p_1^{(i)}}\ \beta_2^{p_2^{(i)}} \dots \beta_q^{p_q^{(i)}} = Q(x,\ y,\ t), \tag{76}$$

гдѣ $Q(x,\ y,\ t)$ алгебраическая функція $(x,\ y,\ t)$, $p^{(i)}$, $p_1^{(i)} \dots p_q^{(i)}$ постоянныя.

Въ самомъ дѣлѣ въ противномъ случаѣ, опредѣляя изъ соотношеній (76) нѣкоторыя изъ β_i въ функціи отъ α и остальныхъ β_i, получаемъ для μ выраженіе типа

$$\mu = e^{H(x,\ y,\ t)} \prod_{k=1}^{k=n} [H_k(x,\ y,\ t)]^{\lambda k}\,\Theta(x,\ y,\ t),$$

гдѣ Θ $(x,\ y,\ t)$ алгебраическая функція отъ $(x,\ y,\ t)$, а изъ этого выраженія μ, получаемъ выраженіе

$$\mu = e^{H(x,\ y,\ t)} \prod_{k=1}^{k=m} [H_k(x,\ y,\ t)]^{\lambda k},$$

гдѣ между $\alpha = e^{H(x,\ y,\ t)}$, $\beta = [H_k(x,\ y,\ t)]^{\lambda k}$ уже не существуетъ соотношеній типа (75).

Возвращаясь къ выраженію (69), полагаемъ $\theta = e^u$, $\theta = u^\lambda$, гдѣ u алгебраическая функція, λ число несоизмѣримое. Уравненія (72) и (73) или (74) въ настоящемъ случаѣ будутъ уравненіями типа (75) и должны оставаться въ силѣ по замѣнѣ θ на $m\theta$. Если θ не равно ни α, ни β то, какъ выше, получаемъ уравненія (72′), (23) и (22), откуда заключаемъ, что θ не входитъ въ U. Если же $\theta=\alpha$ или $\theta=\beta_i$, то уравненіе (72)

$$\alpha P(x, y, t) M=\left(\frac{\partial \pi(\theta)}{\partial x}\right)+\frac{\partial \pi(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \tag{72}$$

будетъ уравненіемъ типа (75),

$$N(\alpha, \beta_1, \beta_2 \ldots \beta_q)=0, \tag{77}$$

гдѣ N алгебраическая функція α, β_i. Другихъ трансцендентныхъ перваго класса $\theta_i^{(1)}$, не должно входить въ уравненіе (77), ибо въ противномъ случаѣ, опредѣляя одну $\theta_i^{(1)}$ черезъ другія, мы получили бы для U выраженіе съ меньшимъ числомъ трансцендентныхъ $\theta_i^{(1)}$. Легко видѣть, что уравненіе (77) должно быть обязательно типа (76), если только оно не будетъ тождествомъ, т. е. не будетъ удовлетворяться по замѣнѣ $\theta=\alpha$, β_i какой угодно функціей (x, y, t). Въ самомъ дѣлѣ, если уравненіе (77) не имѣетъ мѣсто тождественно для всякаго α, то оно даетъ

$$\alpha=F(\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_q), \tag{78}$$

гдѣ F алгебраическая функція $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_q$, откуда

$$\frac{\partial H(x, y, t)}{\partial x}=\frac{\left(\frac{\partial F(\beta_i)}{\partial x}\right)+\sum_{i=1}^{i=q} \frac{\partial F(\beta_i)}{\partial \beta_i} \frac{\partial \beta_i}{\partial x}}{F(\beta_i)} \tag{78}$$

$$\frac{\partial H(x, y, t)}{\partial y}=\frac{\left(\frac{\partial F(\beta_i)}{\partial y}\right)+\sum_{i=1}^{i=q} \frac{\partial F(\beta_i)}{\partial \beta_i} \frac{\partial \beta_i}{\partial y}}{F(\beta_i)} \tag{79}$$

эти уравненія, въ которыхъ

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial x}=\frac{\lambda_i \beta_i}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial x}, \quad \frac{\partial \beta_i}{\partial y}=\frac{\lambda_i \beta_i}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial y}, \tag{80}$$

будутъ алгебраическими относительно β_i; и здѣсь могутъ представиться два случая: или эти оба уравненія (78) и (79) тождества по отношенію нѣкоторыхъ $\beta_i=\beta$ и потому остаются въ силѣ при замѣнѣ β на $m\beta$, или же они даютъ β въ алгебраической функціи отъ β_i

$$\beta=F_1(\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_i). \tag{81}$$

Въ первомъ случаѣ получаемъ изъ уравненій (78), (79)

$$\frac{\dfrac{\partial F(\beta)}{\partial x}}{F(\beta)} = \frac{\dfrac{\partial F(m\beta)}{\partial x}}{F(m\beta)} \tag{82}$$

$$\frac{\dfrac{\partial F(\beta)}{\partial y}}{F(\beta)} = \frac{\dfrac{\partial F(m\beta)}{\partial y}}{F(m\beta)}, \tag{83}$$

откуда

$$F(m\beta) = CF(\beta), \tag{84}$$

гдѣ C постоянное. Дифференцируя по β и m имѣемъ

$$m\frac{\partial F(m\beta)}{\partial(m\beta)} = C\frac{\partial F(\beta)}{\partial\beta}$$

$$\beta\frac{\partial F(m\beta)}{\partial(m\beta)} = F(\beta)\frac{\partial C}{\partial m},$$

откуда

$$C\beta\frac{\partial F(\beta)}{\partial\beta} = \frac{\partial C}{\partial m}F(\beta)$$

и

$$F(\beta) = E\beta^s, \tag{85}$$

гдѣ E не зависитъ отъ β, s постоянное, или, опредѣляя форму $F(\beta)$ относительно другихъ трансцендентныхъ β_i, вообще,

$$F(\beta) = E\beta_1^{s_1}\beta_2^{s_2}\dots\beta_i^{s_i}. \tag{86}$$

Если уравненія (78), (79) тождества по отношенію всѣхъ β_i, то

$$\alpha = F(\beta) = E\beta_1^{s_1}\beta_2^{s_2}\dots\beta_q^{s_q}. \tag{87}$$

гдѣ E не зависитъ отъ $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_q$, т. е. имѣемъ уравненіе типа (76), которое не можетъ имѣть мѣста. Поэтому мы имѣемъ уравненіе (81), изъ котораго, какъ выше изъ (78) выводимъ, что или

$$\beta = E\beta_1^{s_1}\beta_2^{s_2}\dots\beta_i^{s_i}, \tag{88}$$

гдѣ E не зависитъ отъ β_i, чего быть не можетъ или

$$\beta' = F_2(\beta_1, \beta_2 \dots \beta_j) \tag{89}$$
$$j < i$$

β' опять одна изъ функцій β_i. Продолжая такимъ же образомъ дальше, приходимъ къ случаю, когда $j = 0$ т. е. къ случаю, когда

$$\beta_i = [H_i(x, y, t)]^{\lambda_i}$$

равно алгебраической функціи (x, y, t).

Такимъ образомъ уравненіе (77) тождественно удовлетворяется по замѣнѣ $\theta = \alpha$, β_i на $m\theta$. Производя теперь въ уравненіи (72) или, что тоже, въ уравненіяхъ

$$\alpha P(x, y, t) M = \left(\frac{\partial \pi (\alpha)}{\partial x}\right) + \frac{\partial \pi (\alpha)}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \tag{90}$$

$$\alpha \beta R(x, y, t) M = \left(\frac{\partial \pi (\beta)}{\partial x}\right) + \frac{\partial \pi (\beta)}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} \tag{91}$$

въ первомъ, вмѣсто α, — $m\alpha$, во второмъ, вмѣсто β, — $m\beta$, получаемъ

$$m\alpha P(x, y, t) M = \left(\frac{\partial \pi (m\alpha)}{\partial x}\right) + \frac{\partial \pi (m\alpha)}{\partial (m\alpha)} \frac{\partial (m\alpha)}{\partial x} \tag{92}$$

$$m\alpha \beta R(x, y, t) M = \left(\frac{\partial \pi (m\beta)}{\partial x}\right) + \frac{\partial \pi (m\beta)}{\partial (m\beta)} \frac{\partial (m\beta)}{\partial x} \tag{93}$$

находимъ

$$\frac{\partial \pi (m\theta)}{\partial x} = m \frac{\partial \pi (\theta)}{\partial x} \tag{94}$$

гдѣ $\theta = \alpha$, β, и такимъ же образомъ изъ уравненія (73):

$$\frac{\partial \pi (m\theta)}{\partial y} = m \frac{\partial \pi (\theta)}{\partial y}, \tag{95}$$

откуда

$$\pi (m\theta) = m\pi (\theta) + C \tag{96}$$

гдѣ C не зависитъ отъ θ.

Дифференцируя уравненіе (96) по θ и m, имѣемъ:

$$m \frac{\partial \pi (m\theta)}{\partial (m\theta)} = m \frac{\partial \pi (\theta)}{\partial \theta}$$

$$\theta \frac{\partial \pi (m\theta)}{\partial (m\theta)} = \pi (\theta) + \frac{\partial C}{\partial m},$$

откуда

$$\theta \frac{\partial \pi (\theta)}{\partial \theta} = \left[\pi (\theta) + \frac{\partial C}{\partial m}\right]$$

или

$$\pi (\theta) + \frac{\partial C}{\partial m} = E\theta$$

$$\pi (\theta) = E\theta + F, \tag{97}$$

гдѣ E не зависитъ отъ θ, а F постоянно.

Поэтому можно написать, если α, β_i входятъ въ U:

$$U = \alpha \beta_1 \, \beta_2 \ldots \beta_r \, \Theta (x, y, t), \tag{98}$$

гдѣ $\Theta(x, y, t)$ алгебраическая функція трансцендентныхъ типа lgu, гдѣ u алгебраическая функція отъ (x, y, t).

Замѣтимъ, что, если въ μ входятъ: α, β_1, $\beta_2 \ldots \beta_q$, то всѣ эти трансцендентныя входятъ и въ U, такъ что въ уравненіи (98) $r = q$.

Въ самомъ дѣлѣ для всякой функціи $\theta = \alpha$, β_i не входящей въ U, имѣемъ:

$$\frac{\partial \pi(m\theta)}{\partial x} = \frac{\partial \pi(\theta)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \pi(m\theta)}{\partial y} = \frac{\partial \pi(\theta)}{\partial y}$$

откуда на основаніи уравненій (94) и (95) имѣемъ

$$\frac{\partial \pi(\theta)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \pi(\theta)}{\partial y} = 0$$

и

$$\pi(\theta) = const, \quad Mdx + Ndy = 0, \quad M = 0, \quad N = 0$$

и уравненіе (6) обращается въ тождество.

Мы останавливаемся пока на томъ случаѣ, когда μ содержитъ: α, β_1 $\beta_2 \ldots \beta_q$. Мы покажемъ, что въ этомъ случаѣ

$$U = e^{H(x, y, t)} \prod_{k=1}^{k=q} [H_k(x, y, t)]^{\lambda_k} \sqrt[n]{G(x, y, t)}. \tag{67}$$

Замѣтимъ прежде всего, что на основаніи доказаннаго выше:

$$U = \sum_{i=1}^{i=m} E_i lg u_i + F,$$

гдѣ E_i постоянныя, F трансцендентная перваго класса. Мы имѣемъ по этому тождественно

$$\Theta(x, y, t) \, \alpha\beta_1 \, \beta_2 \ldots \beta_q = \sum_{i=1}^{i=m} E_i lg u_i + F, \tag{99}$$

гдѣ въ лѣвую и правую часть входятъ тѣ же трансцендентныя.

Это равенство должно тождественно удовлетворяться по замѣнѣ $lg u_i$ какими угодно функціями (x, y, t), ибо въ противномъ случаѣ мы могли бы, выразивъ $lg u$ черезъ $lg u_i$, α, β_i найти, для U выраженіе съ меньшимъ числомъ трансцендентныхъ $lg u_i$. Поэтому, полагая $lg u_i = 0$ имѣемъ

$$F = \Theta_0(x, y, t) \, \alpha\beta_1 \, \beta_2 \ldots \beta_q, \tag{100}$$

гдѣ $\Theta_0(x, y, t)$ получено изъ $\Theta(x, y, t)$ замѣной $lg u_i = 0$.

Уравненія

$$\alpha\beta_1\,\beta_2\ldots\beta_q\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\Theta\beta_1\,\beta_2\ldots\beta_q\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\ldots=\sum_{i=1}^{i=m}\frac{E_i}{u_i}\frac{\partial u_i}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\alpha\beta_1\,\beta_2\ldots\beta_q\frac{\partial\Theta}{\partial y}+\Theta\beta_1\,\beta_2\ldots\beta_q\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\ldots=\sum_{i=1}^{i=m}\frac{E_i}{u_i}\frac{\partial u_i}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial y}$$

будутъ алгебраическими относительно α, β_i и другихъ трансцендентныхъ перваго класса. Онѣ должны тождественно удовлетворяться при всякихъ α, β_i, ибо въ противномъ случаѣ имѣли бы уравненія типа (77).

Полагая $\alpha=\beta_i=0$ имѣемъ, такъ какъ при этомъ на основаніи уравненія (100), $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=0$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x}=0\qquad\frac{\partial\Omega}{\partial y}=0\,,$$

гдѣ

$$\Omega=\sum_{i=1}^{i=m}E_i\,lg\,u_i\,,$$

откуда $\Omega=Const$, а потому $\Theta(x, y, t)\,\alpha\beta^1\,\beta_2\ldots\beta_q$ на основаніи уравненія (99) не содержитъ $lg\,u_i$. Полагая u_i алгебраическими функціями (x, y, t), получаемъ уравненіе (99), гдѣ F алгебраическая функція α, β_i типа (77), поэтому

$$\Theta(x, y, t)\,\alpha\beta_1\,\beta_2\ldots\beta_q=F(\alpha, \beta_1, \beta_2\ldots\beta_q). \qquad (101)$$

Такимъ образомъ U, а слѣдовательно и $\Theta(x, y, t)$ не будетъ содержать трансцендентныхъ функцій, а потому будетъ алгебраической функціей. Остается только доказать, что эту функцію можно предполагать вида:

$$\Theta(x, y, t)=\sqrt[n]{G(x, y, t)}.$$

Для этого прежде всего замѣчаемъ, что множитель μ можетъ быть представленъ въ видѣ:

$$\mu=e^{H(x, y, t)}\prod_{k=1}^{k=q}[H_k\,x, y, t)]^{\lambda_k}\sqrt[n]{G(x, y, t)}, \qquad (102)$$

если черезъ n обозначить наименьшее кратное знаменателей раціональныхъ чиселъ: λ_{k+1}, $\lambda_{k+2}\ldots\lambda_q$. Интегралъ U приводится къ виду:

$$U=\int e^{H(x,\,y,\,t)}\,Q(x,\,y,\,t)\sqrt[n]{G(x,\,y,\,t)}\,[Mdx+Ndy],\qquad(103)$$

гдѣ

$$Q(x,\,y,\,t)=\prod_{k=1}^{k=q}[H_k(x,\,y,\,t)]^{\lambda k}=\beta_1\,\beta_2\ldots\beta_q.$$

Дифференцируя уравненіе (103) и, имѣя въ виду, что

$$U=\Theta(x,\,y,\,t)\,A,$$

гдѣ

$$A=\alpha\beta_1\,\beta_2\ldots\beta_q,$$

получаемъ по сокращеніи на $\alpha\beta_1\,\beta_2\ldots\beta_q$

$$M\sqrt[n]{G(x,\,y,\,t)}=\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\Theta B\qquad(104)$$

$$N\sqrt[n]{G(x,\,y,\,t)}=\frac{\partial\Theta}{\partial y}+\Theta C,\qquad(105)$$

гдѣ B и C раціональныя функціи $(x,\,y,\,t)$.

Если Θ опредѣляется уравненіемъ:

$$\lambda(\Theta,\,\sqrt[n]{G(x,\,y,\,t)},\,x,\,y,\,t)=0\qquad(106)$$

неприводимымъ въ области $(\sqrt[n]{G(x,\,y,\,t)},\,x,\,y,\,t)$, то будемъ имѣть уравненіе (104) въ формѣ:

$$M\sqrt[n]{G(x,\,y,\,t)}=P(\sqrt[n]{G(x,\,y,\,t)},\,x,\,y,\,t,\,\Theta)+\Theta B,\qquad(107)$$

гдѣ

$$P(\sqrt[n]{G(x,\,y,\,t)},\,x,\,y,\,t,\,\Theta)=-\frac{\dfrac{\partial\lambda}{\partial x}}{\dfrac{\partial\lambda}{\partial\Theta}}\qquad(108)$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)+\frac{\partial\lambda}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial x},\ \text{гдѣ}\ g=\sqrt[n]{G(x,\,y,\,t)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\sqrt[n]{G(x,\,y,\,t)}}{nG(x,\,y,\,t)}\frac{\partial G(x,\,y,\,t)}{\partial x},$$

откуда слѣдуетъ, что функція $P(\sqrt[n]{G(x,\,y,\,t)},\,x,\,y,\,t)$ раціональная функція $(\sqrt[n]{G(x,\,y,\,t)},\,x,\,y,\,t)$ и уравненіе (107) типа:

$$\pi(\Theta,\,\sqrt[n]{G(x,\,y,\,t)},\,x,\,y,\,t)=0.\qquad(109)$$

Это уравненіе, имѣя съ (106) одинъ общій корень, будетъ оставаться въ силѣ и по замѣнѣ Θ другими корнями уравненія (106); замѣняя же въ уравненіи (109) или, что тоже (107) для каждаго изъ Θ функціи P его значеніемъ (108), доказываемъ, что уравненіе (104) (и такимъ же образомъ уравненіе (105)) остаются въ силѣ послѣ этой замѣны.

Обозначая черезъ Θ_i корни уравненія (106), получаемъ:

$$M\sqrt[n]{G(x,\,y,\,t)} = \frac{\partial\Omega}{\partial x} + \Omega B$$

$$N\sqrt[n]{G(x,\,y,\,t)} = \frac{\partial\Omega}{\partial y} + \Omega C,$$

гдѣ

$$\Omega = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{i=p}\Theta_i$$

на основаніи уравненія (106) должна быть раціональной функціей:

$$(x,\,y,\,t,\,\sqrt[n]{G(x,\,y,\,t)}),$$

откуда

$$U = \Omega(x,\,y,\,t,\,\sqrt[n]{G(x,\,y,\,t)})\;A. \tag{110}$$

Имѣя въ виду выраженіе для U (103), мы получаемъ, что Ω, разсматриваемая, какъ функція $g = \sqrt[n]{G(x,\,y,\,t)}$, должна удовлетворять условію:

$$\Omega(\alpha^j g) = \alpha^j\,\Omega(g), \tag{110}$$

гдѣ α первообразный корень двучленнаго уравненія:

$$\alpha^n = 1,$$

откуда, если положить

$$\Omega(g) = \sum_{k=0}^{k=n-1}\Omega_k\,g^k$$

$$\Omega(g) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{j=n-1}\alpha^{-j}\sum\limits_{k=0}^{k=n-1}\Omega_k\,\alpha^{jk}g^k}{n} = \Omega_1 g$$

и, наконецъ, на основаніи уравненія (110) получаемъ

$$U = \Omega_1 A\sqrt[n]{G(x,\,y,\,t)},$$

гдѣ Ω_1 раціональная функція $(x,\,y,\,t)$ или, что тоже, уравненіе (67).

Переходимъ теперь къ случаю, когда μ не содержитъ α и β_i, тогда на основаніи уравненія (102):

$$\mu = \sqrt[n]{G(x, y, t)} \tag{111}$$

$$U = \int \sqrt[n]{G(x, y, t)}\,[Mdx + Ndy]. \tag{112}$$

Разсматривая U въ формѣ:

$$U = \int [S(x, y, \sigma, g)\,dx + T(x, y, \sigma, g)\,dy] \tag{113}$$

гдѣ

$$\sigma = \alpha t + \beta g \tag{114}$$

опредѣляется неприводимымъ въ области (x, y, t, g) уравненіемъ

$$f(\sigma, g, y, x) = 0 \tag{115}$$

мы имѣемъ на основаніи § 2, разсужденія котораго не мѣняются отъ замѣны выраженія

$$U = \int [M(x, y, t)\,dx + N(x, y, t)\,dy]$$

на выраженіе (113):

$$U = \xi_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{k=m} C_k\, lg\, \xi_k^{(1)} \tag{33'}$$

гдѣ $\xi_k^{(1)}$ опредѣляются уравненіями:

$$\lambda_k(x, y, t, g, \xi_k) = 0. \tag{34'}$$

Повторяя разсужденія § 3 съ тою только разницей, что вездѣ раціональныя функціи отъ (x, y, t) замѣняемъ раціональными функціями (x, y, t, g) получаемъ:

$$U = \Phi(x, y, t, g, \sigma) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k\, lg\, \psi_k(x, y, t, g, \sigma)$$

или, на основаніи уравненія (114):

$$U = \Phi(x, y, t, \sqrt[n]{G(x, y, t)}) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k\, lg\, \psi_k(x, y, t, \sqrt[n]{G(x, y, t)}). \tag{68}$$

Выведенныя нами формы (67) и (68) для интеграловъ U можно замѣнить другими. Если U интегралъ, то $lg\, U = C = c'$ будетъ тоже интеграломъ, вслѣдствіе чего форму (67) можемъ замѣнить слѣдующей:

$$U = \Phi(x, y, t) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k\, lg\, \psi_k(x, y, t). \tag{116}$$

Затѣмъ, если μ для одного значенія $\sqrt[n]{G(x, y, t)}$ будетъ интегрирующимъ множителемъ, то, какъ это слѣдуетъ изъ уравненія (47), μ будетъ интегрирующимъ множителемъ и для всякаго другаго значенія корня: $\alpha^j \sqrt[n]{G(x, y, t)}$. Если по этому

$$U(g) = C$$

$$U(\alpha^j g) = C_j, \quad j = 0, 1, 2 \ldots n-1,$$

причемъ

$$C_j = \int \alpha^j \mu (Mdx + Ndy) = \alpha^j C,$$

а также и

$$\sum_{j=0}^{j=n-1} \alpha^{-j} U(\alpha^j g) = \sum_{j=0}^{j=n-1} C_j \alpha^{-j} = Cn$$

откуда получаемъ слѣдующую теорему:

Если общій интегралъ дифференціальнаго уравненія:

$$M(x, y, t) dx + N(x, y, t) dy = 0 \tag{6}$$

выражается въ конечномъ видѣ, то онъ всегда можетъ быть представленъ въ слѣдующей формѣ:

$$\Phi(x, y, t) \sqrt[n]{G(x, y, t)} + \sum_{k=1}^{k=m} C_k lg \prod_{j=0}^{j=n-1} \psi_k^{\alpha^{-j}}(x, y, t, \alpha^j \sqrt[n]{G(x, y, t)}) = C \tag{117}$$

гдѣ $\Phi(x, y, t)$, $G(x, y, t)$ *раціональныя функціи* (x, y, t), $\psi_k(x, y, t, \sqrt[n]{G(x, y, t)})$ *раціональная функція отъ* $(x, y, t, \sqrt[n]{G(x, y, t)})$, C_k *постоянныя*, α *первообразный корень двучленнаго уравненія* $\alpha^n = 1$.

Полагая $t = \Delta$ получаемъ теорему, высказанную въ началѣ сочиненія.

Если полагать U функціей алгебраической, то членъ съ lg въ лѣвой части уравненія (117) долженъ исчезнуть, и мы получаемъ:

$$U = \Phi(x, y, t) \sqrt[n]{G(x, y, t)}.$$

Но очевидно, если $U = C$, то и $U^n = C^n = const$ и мы получаемъ упомянутую въ началѣ статьи теорему Фукса.

Примѣчаніе 1. Доказанная общая форма для интеграловъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка даетъ возможность рѣшить слѣдующую задачу.

Найти общую форму для рѣшенія y, удовлетворяющаго неприводимому уравненію перваго порядка (2) при условіи, что y выражается въ конечномъ видѣ?

Задача эта сводится къ изслѣдованію рѣшеній трансцендентнаго уравненія (117) при условіи, что эти рѣшенія выражаются въ конечномъ видѣ, которое мы отлагаемъ до слѣдующаго раза.

Примѣчаніе 2. Всѣ изслѣдованія настоящей статьи допускаютъ обобщенія въ томъ же направленіи, въ какомъ обобщаются изслѣдованія Льювиля и Абеля, относящіяся къ интегрированію въ конечномъ видѣ. Намъ прійдется воспользоваться изслѣдованіями Кенигсбергера [1]) и нашими въ нашей большой работѣ: „О приведеніи Абелевыхъ интеграловъ къ нисшимъ трансцендентнымъ“, помѣщенной въ „Извѣстіяхъ Варшавскаго Политехническаго Института за 1905 годъ“ [2]), чтобы доказать, что:

Если общій интегралъ неприводимаго дифференціальнаго уравненія перваго порядка (2) выражается черезъ Абелевы интегралы и функціи обращенія, то онъ долженъ быть формы:

$$\Phi(x, y, t) \sqrt[n]{G(x, y, t)} + \sum_{k=1}^{k=m} C_k lg \prod_{j=0}^{j=n-1} \psi_k^{\alpha^{-j}}(x, y, t, \alpha^j \sqrt[n]{G(x, y, t)}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=q} E_i \sum^{j=n-1} \alpha^{-j} \sum_{k=1}^{k=\pi i} \int_{(\xi_0, \eta_0)}^{\xi_{ij}^{(k)} \eta_{ij}^{(k)}} \Phi_i(\xi, \eta)\, d\xi, \tag{118}$$

гдѣ $\Phi(x, y, t)$, $G(x, y, t)$, $\psi_k(x, y, t, \alpha^i \sqrt[n]{G(x, y, t)})$ *имѣютъ прежнія значенія и гдѣ* $(\xi^{(k)}, \eta^{(k)})$ *опредѣляются уравненіями типа:*

$$\alpha_{0i}(x, y, t, \alpha^j g)\, \xi_{ij}^{\pi_i} + \alpha_{1i}(x, y, t, \alpha^j g)\, \xi_{ij}^{\pi_i - 1} + \ldots \alpha_{\pi_i i}(x, y, t, \alpha^j g) = 0 \tag{119}$$

$$\eta_{ij}^{(k)} = S(\xi_{ij}^{(k)}, x, y, t, \alpha^j g) \tag{120}$$

$\alpha_{ji}(x, y, t, \alpha^j g)$ *раціональная функція* $(x, y, t, \alpha^j g)$

$$g = \sqrt[n]{G(x, y, t)}$$

$S(\xi_{ij}^{(k)}(x, y, t, \alpha^j g)$ *раціональная функція* $(\xi_i^{(k)}, x, y, t, \alpha^j g)$, α *первообразный корень уравненія* $\alpha^n = 1$, π_i *порядокъ Абелева интеграла* $\int \Phi_i(\xi, \eta)\, d\xi$, *если этотъ интегралъ перваго рода.*

Примѣчаніе 3. Не трудно также видѣть, что приходится съ небольшими измѣненіями воспроизводить всѣ разсужденія настоящей статьи, чтобы доказать, что:

Если предполагать уравненіе (2) алгебраическимъ относительно (y', y) и трансцендентнымъ относительно x, то при условіи, что интегралъ выражается въ конечномъ видѣ черезъ y (но не черезъ x), общая

---

[1]) *Koenigsberger.* Ueber die Reduction Abelscher Integrale aut niedere Integralformen, speciell auf elliptische Integrale. Journ. de Crelle. B. 89. 1880. S. 89.

[2]) *Часть I.* Глава 1 §§ 15, 16, 17, 18. 19, 20, 21, 22, 23.

его форма будетъ выражаться формулой (117), но съ другимъ уже значеніемъ функціи Φ, G, ψ_k, а именно Φ, G будутъ раціональными функціями не (x, y, t), а только (y, t) а ψ_k раціональная функція не (x, y, t, g), а (y, t, g), относительно x всѣ эти функціи могутъ быть трансцендентными.

Тоже замѣчаніе относится и къ формѣ (118), (119) и (120). Равнымъ образомъ мы будемъ имѣть для этого случая *общую форму Эйлерова множителя*

$$\mu = e^{H(x, y, t)} \prod_{k=1}^{k=n} [H_k(x, y, t)]^{\lambda k},$$

въ которой $H(x, y, t)$, $H_k(x, y, t)$ раціональныя функціи (y, t), λ_k постоянныя.

Замѣтимъ здѣсь, между прочимъ, что въ томъ случаѣ, когда U алгебраическая функція отъ (y, t), то $e^{H(x, y, t)}$ долженъ приводиться къ функціи отъ одного x, и мы имѣемъ множитель:

$$\mu = P(x) \prod_{k=1}^{k=m} [H_k(x, y, t)]^{\lambda k}. \tag{121}$$

Когда уравненіе (2) первой степени относительно y', получаемъ интегрирующій множитель факторіальной формы:

$$\mu = P(y - u_1)^{\lambda_1} (y - u_2)^{\lambda_2} \ldots (y - u_n)^{\lambda_n}, \tag{122}$$

гдѣ P, u_1, $u_2 \ldots u_n$ алгебраическая функція отъ x. Необходимое существованіе множителя такой формы для дифференціальнаго уравненія

$$Mdx + Ndy = 0, \tag{123}$$

гдѣ M, N цѣлыя функціи отъ y, алгебраически интегрируемаго, доказано А. Н. Коркинымъ [1]).

---

[1]) Московскій Математ. Сборникъ XXIV, 2 за 1904 г. *А. Н. Коркинъ.* Изысканія о множителяхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка стр. 194. В. П. Ермаковъ называетъ такой множитель факторіальнымъ.

ОПЕЧАТКИ:

Въ статьѣ г. Мордухай-Болтовскаго (Сообщенія Х. М. О. (2) т. X. № 1) остались неисправленными слѣдующія опечатки:

	Напечатано:	*Должно быть:*
стр. 35 стр. 15 снизу	$\alpha^j) \sqrt[n]{G(x, y, \triangle)}$	$\alpha^j \sqrt[n]{G(x, y, \triangle))}$
стр. 36 стр. 7 „	приходятся	приводятся
стр. 37 стр. 12 сверху	$\theta_i^{(n)}$	$\theta_i^{(n)}$
стр. „ стр. 8 снизу	e^n	e^u,
стр. „ стр. 7 „	n	u
стр. 38 стр. 5 и 6 сверху:	*послѣ словъ:* „въ предположеніи, что θ“	*нужно вставить:* „постоянное и заключены нами въ скобки въ отличіе отъ частныхъ производныхъ $\frac{\partial\pi(\theta)}{\partial x}$ и $\frac{\partial\pi(\theta)}{\partial y}$, въ которыхъ θ“ и т. д.
стр. 45 стр. 3 снизу	$\varphi \frac{\partial\omega}{ox} + \psi \frac{\partial\omega}{oy} = \chi$	$\varphi \frac{\partial\omega}{\partial x} + \psi \frac{\partial\omega}{\partial y} = \chi$
стр. 46 стр. 3 „	$u =$	$\omega =$
стр. 48 стр. 11 „	трансцендентныя	трансцендентная
стр. „ стр. 4 „	(въ формулѣ (59)) C_1	C_k

Объ уравненіи въ частныхъ производныхъ

$(s^2 - rt)\, f(x, y) = 1$ или $s^2 - rt = f(p, q)$.

М. Лагутинскаго.

Еще въ 1848 г. J. A. Serret опубликовалъ небольшую замѣтку въ Journal de Mathématique (de Liouville) t. XIII, p. 361, гдѣ показываетъ, какъ найти линейчатыя поверхности постоянной кривизны. Ему удалось получить формулы для такихъ поверхностей, не содержащія ни одной квадратуры.

Stäckel и Scheffers получили въ недавнее время нѣкоторыя свойства этихъ поверхностей, составленныхъ изъ минимальныхъ прямыхъ.

Поверхности эти мнимыя, и значеніе ихъ для геометріи нельзя считать особенно важнымъ. Гораздо интереснѣе, какъ мнѣ кажется, аналитическая сторона дѣла. Въ этомъ смыслѣ идея J. A. Serret, насколько мнѣ извѣстно, не получила дальнѣйшаго развитія, а между тѣмъ интегрированіе уравненій въ частныхъ производныхъ 2-го порядка находится еще въ такой стадіи, что и частныя изслѣдованія въ этой области должны имѣть свою цѣнность въ качествѣ подготовительнаго матерьяла для полнаго рѣшенія этой трудной проблемы.

Въ концѣ статьи J. A. Serret указываетъ мимоходомъ дифференціальное уравненіе 2-го порядка, которое имѣетъ подобные же интегралы, но дѣйствительные. Въ настоящей работѣ я обобщаю этотъ результатъ. Въ самомъ дѣлѣ, задача J. A. Serret сводится къ интегрированію системы двухъ уравненій:

$$rt - s^2 = a\,(1 + p^2 + q^2)^2$$

и уравненія 3-го порядка линейчатыхъ поверхностей.

Результатъ, полученный J. A. Serret показалъ, что эта система вполнѣ интегрируема.

Я задался вопросомъ опредѣлить, при какихъ значеніяхъ функціи $f(p, q)$ уравненіе

$$s^2 - rt = f(p, q) \tag{1}$$

представляетъ интегрируемую систему съ дифференціальнымъ уравненіемъ линейчатыхъ поверхностей.

Оставляя въ сторонѣ очевидный случай развертывающихся поверхностей, получимъ слѣдующій результатъ:

I. Если эта система допускаетъ интегралъ, хотя бы не заключающій произвольныхъ постоянныхъ, функція $f(p, q)$ такова, что уравненіе

$$z = \sqrt[4]{f(x, y)} \tag{2}$$

представляетъ въ прямоугольныхъ декартовыхъ координатахъ линейчатую поверхность ортогональную къ плоскости $z = 0$, или конусъ съ вершиной въ плоскости $z = 0$, или цилиндръ съ образующими, параллельными плоскости $z = 0$.

II. Если функція $f(p, q)$ удовлетворяетъ этимъ условіямъ, разсматриваемая система вполнѣ интегрируема, т. е. допускаетъ интегралъ, который зависитъ отъ произвольной функціи, и для полученія котораго необходимы раціональныя (говоря вообще) алгебраическія дѣйствія и интегрированіе точнаго дифференціала отъ двухъ перемѣнныхъ.

Ради упрощенія вычисленій я преобразую уравненіе (1) съ помощію формулъ Лежандра въ новое

$$s^2 - rt = A^2, \tag{3}$$

гдѣ черезъ A я обозначаю функцію $\dfrac{1}{\sqrt{f(x, y)}}$.

Второе уравненіе системы не измѣнитъ своей формы, такъ какъ преобразованіе Лежандра геометрически преобразуетъ линейчатую поверхность въ линейчатую же.

Въ самомъ дѣлѣ, любая линейчатая неразвертывающаяся поверхность можетъ быть задана въ такой формѣ:

$$\begin{aligned} z &= ax + b \\ y &= cx + d \end{aligned} \tag{4}$$

гдѣ a, b, c, d функціи перемѣннаго параметра α,

Дифференцируя уравненія (4) по x и y, исключая $\frac{\partial\alpha}{\partial x}$, $\frac{\partial\alpha}{\partial y}$, найдемъ

$$p = a - \frac{a' x + b'}{c' x + d'} c$$

$$q = \frac{a' x + b'}{c' x + d'}$$

гдѣ a', b', c', d' первыя производныя функцій a, b, c, d по параметру α.

Внеся полученныя выраженія для p и q въ формулы Лежандра

$$X = p$$

$$Y = q$$

$$Z = z - px - qy$$

получимъ уравненіе преобразованной поверхности въ видѣ:

$$\begin{aligned} X &= a - Yc \\ Z &= b - Yd \end{aligned} \tag{5}$$

Полученныя формулы не только доказываютъ правильность нашего утвержденія, но и позволяютъ перейти отъ уравненій первоначальной поверхности къ уравненіямъ преобразованной и обратно.

Дифференціальное уравненіе линейчатыхъ поверхностей получится[1]), если исключить изъ двухъ уравненій

$$r + 2\,us + u^2\,t = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3\,u\,\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} + 3\,u^2\,\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} + u^3\,\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0 \tag{7}$$

вспомогательную функцію u.

Это уравненіе допускаетъ промежуточный интегралъ второго порядка, зависящій отъ произвольной функціи.

Подвергнемъ уравненіе (6) операціи $\frac{\partial}{\partial x} + u\,\frac{\partial}{\partial y}$. Результатъ въ силу уравненія (7) приведется къ произведенію

$$(s + ut)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + u\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0\,.$$

Но если мы примемъ равнымъ нулю первый множитель, то уравненіе (6) сведется къ такому

$$r + us = 0$$

а это совмѣстно съ уравненіемъ

$$s + ut = 0$$

можетъ существовать только для исключеннаго нами случая развертывающихся поверхностей.

---

[1]) См. напр. Salmon, Traité de géométrie analytique à trois dimensions. Deuxième partie p. 223.

Итакъ

$$\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{8}$$

Это уравненіе играетъ основную роль также и въ вышеупомянутой статьѣ J. A. Serret, хотя и получено имъ при помощи другихъ соображеній.

Интегралъ его напишется такъ

$$y-xu=\varphi(u) \tag{9}$$

или

$$u=m$$

гдѣ φ произвольная функція, а m произвольная постоянная.

Уравненія (6) и (9) совмѣстно представятъ искомый промежуточный интегралъ.

Этимъ мы сводимъ нашу задачу къ изслѣдованію системы двухъ уравненій въ частныхъ производныхъ второго порядка. Этотъ вопросъ разработанъ теоретически [1]), но я примѣню въ данномъ случаѣ частный пріемъ, ведущій быстрѣе къ цѣли.

Рѣшая уравненіе (6) относительно u, получаемъ:

$$u=\frac{-s\pm\sqrt{s^2-rt}}{t}=\frac{r}{-s\mp\sqrt{s^2-rt}}.$$

Замѣняя s^2-rt его значеніемъ изъ уравненія (3), найдемъ

$$\begin{aligned} r+su\pm uA=0 \\ s+tu\mp A=0. \end{aligned} \tag{10}$$

Наша система свелась на двѣ линейныя, различающіяся знакомъ для функціи A. Условіе же интегрируемости, какъ сейчасъ увидимъ, одно и тоже для обоихъ системъ, т. е. не зависитъ отъ этого знака.

Дифференцируя первое изъ нихъ по y, а второе по x и вычитая одинъ результатъ изъ другого, получимъ

$$s\frac{\partial u}{\partial y}-t\frac{\partial u}{\partial x}\pm\frac{\partial u}{\partial y}A\pm u\frac{\partial A}{\partial y}\pm\frac{\partial A}{\partial x}=0.$$

Замѣщая въ полученномъ уравненія $\frac{\partial u}{\partial x}$ его значеніемъ изъ уравненія (8) и сравнивая результатъ со вторымъ изъ уравненій (10), найдемъ

$$2\frac{\partial u}{\partial y}A+u\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial A}{\partial x}=0. \tag{11}$$

1) См. E. Goursat. Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre.

Это и есть искомое условіе. Функція A удовлетворяетъ дифференціальному уравненію въ частныхъ производныхъ перваго порядка. Оно интегрируется просто.

Положивъ

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\frac{\partial u}{\partial y} = \psi(u\,,\ x)$$

и подвергнувъ это тождество операціи $\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial y}$, найдемъ

$$-\frac{1}{2\sqrt{A^3}}\left\{u\frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - 2A\left(u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)\right\} = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Дифференцируя уравненіе (8) по y и внеся въ только что полученное уравненіе вмѣсто $u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ его значеніе $-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$, убѣдимся, на основаніи (11), что

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

т. е.

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\frac{\partial u}{\partial y} = \psi(u). \tag{12}$$

Опредѣляя $\frac{\partial u}{\partial y}$ изъ уравненія (9) и внеся полученное значеніе, найдемъ

$$\frac{1}{\sqrt{A}} = \psi(u)\{x + \varphi'(u)\} \tag{13}$$

гдѣ $\varphi'(u)$ первая производная отъ $\varphi(u)$ по u.

Уравненіе (13) и (9) показываютъ, что поверхность, выраженная уравненіемъ

$$z = \frac{1}{\sqrt{A}} = \sqrt[4]{f(xy)} = \psi(u)\{x + \varphi'(u)\} \tag{14}$$

линейчатая.

Легко опредѣлить геометрическій характеръ этихъ поверхностей.

Начнемъ со случая развертывающихся поверхностей.

Извѣстное условіе для этого приводится въ виду:

$$\begin{vmatrix} \psi'(u) & \psi'(u)\varphi'(u) + \psi(u)\varphi''(u) \\ 1 & \varphi'(u) \end{vmatrix} \equiv -\psi(u)\ \varphi''(u) = 0$$

гдѣ $\psi'(u)$ первая производная, а $\varphi''(u)$ вторая производная по u отъ функцій ψ и φ.

Полученное условіе показываетъ, что φ линейна относительно u. Полагая её равной $\alpha u - \beta$, найдемъ уравненіе поверхности въ видѣ

$$z = \psi\left(\frac{y+\beta}{x+\alpha}\right)(x+\alpha)$$

т. е. это будетъ конусъ, вершина котораго находится въ плоскости $z=0$.

Предположимъ теперь, что поверхность, выражаемая уравненіемъ (13) и (9) не конусъ.

Полагая въ уравненіи (14) z равнымъ нулю, найдемъ

$$\psi(u)\{x+\varphi'(u)\}=0$$

уравненіе, которое совмѣстно съ уравненіемъ (9) опредѣлитъ кривую пересѣченія поверхности съ плоскостью $z=0$.

Приравняемъ сначала нулю второй множитель

$$x+\varphi'(u)=0.$$

Это уравненіе совмѣстно съ уравненіемъ

$$y = ux + \varphi(u)$$

показываетъ, что проекція образующей касается линіи пересѣченія поверхности съ плоскостью, и слѣдовательно проектирующая плоскость, содержа двѣ касательныя къ поверхности: образующую и ея проекцію сама касается поверхности. Отсюда слѣдуетъ, что разсматриваемая линейчатая поверхность ортогональна къ плоскости $z=0$.

Что же касается перваго множителя, то онъ, обращаясь въ нуль, опредѣляетъ тѣ полости поверхности, которыя пересѣкаются съ плоскостью $z=0$ по образующимъ. Въ этомъ случаѣ образующая совпадаетъ со своей проэкціей и на такія полости наше заключеніе объ ортогональности къ плоскости $z=0$ не распространяется.

Докажемъ и обратно, если поверхность ортогональна къ плоскости $z=0$, то ея уравненія имѣютъ форму уравненій (14) и (9).

Чтобы избѣжать неопредѣленности, употребимъ такой пріемъ: напишемъ уравненіе поверхности въ формѣ

$$\begin{aligned} y &= \psi(u)\{x+\Theta(u)\}. \\ z &= ux + \varphi(u). \end{aligned} \qquad (15)$$

Опредѣлимъ входящія въ нихъ функціи такъ, чтобы поверхность была ортогональна къ плоскости $y=0$, и затѣмъ перемѣнимъ координаты y и z между собою.

Производная z по y q должна равняться нулю одновременно съ $y=0$.

Дифференцируя второе изъ уравненій (15) по y, получимъ

$$q=\{x+\varphi'(u)\}\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Но первое изъ уравненій (15) показываетъ, что $\frac{\partial u}{\partial y}$ не можетъ равняться нулю; слѣдовательно

$$x+\varphi'(u)=0.$$

Сравнивая его съ уравненіемъ

$$\psi(u)\{x+\Theta(u)\}=0$$

убѣждаемся, что $\Theta(u)=\varphi'(u)$.

Перемѣняя y на z, найдемъ

$$z=\psi(u)\{x+\varphi'(u)\}$$
$$y=ux+\varphi(u),$$

что и требовалось.

Теперь перейдемъ къ случаю $u=m$. Наша система будетъ состоять изъ двухъ уравненій, уравненія (3) и уравненія:

$$r+2ms+m^2t=0.$$

Если m отлично отъ 0 и ∞, то можно предполагать r и t отличными отъ нуля и слѣдовательно замѣнить подобно предыдущему нашу систему двумя уравненіями вида:

$$\begin{aligned} r+ms\pm mA&=0\\ s+mt\mp A&=0. \end{aligned} \tag{16}$$

Нетрудно убѣдиться непосредственно, что случаи $m=0$, $m=\infty$, также заключаются въ системѣ (16).

Обозначивъ $p+mq$ черезъ v, приведемъ систему (16) къ виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x}&=\mp mA\\ \frac{\partial v}{\partial y}&=\pm A. \end{aligned} \tag{17}$$

Откуда

$$m\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial A}{\partial x}=0$$

и слѣдовательно можно положить

$$A = \Theta'(y - mx) \tag{18}$$

гдѣ Θ' производная произвольной функціи Θ.

Линейчатая поверхность

$$z = \frac{1}{\sqrt{A}}$$

будетъ на сей разъ цилиндромъ, образующія котораго параллельны плоскости $z = 0$.

Такъ какъ при послѣдовательныхъ разсужденіяхъ мы предполагали только, что существуетъ какое-нибудь рѣшеніе нашей системы, то можно считать доказаннымъ первое положеніе:

Если разсматриваемая система имѣетъ какой-нибудь интегралъ, то функція $f(p, q)$ такова, что уравненіе

$$z = \sqrt[4]{f(x, y)}$$

представляетъ собою либо линейчатую поверхность, ортогональную къ плоскости $z = 0$, либо конусъ съ вершиной на плоскости $z = 0$, либо цилиндръ, образующія котораго параллельны плоскости $z = 0$.

Покажемъ теперь, что эти условія достаточны для полной интегрируемости системы.

Начнемъ съ послѣдняго случая, какъ наиболѣе простого.

Умножая уравненія (17) соотвѣтственно на dx и dy, складывая и интегрируя, найдемъ

$$p + mq = \pm \Theta(y - mx).$$

Отсюда

$$z = \pm \Theta(y - mx)\, x + \Theta_1(y - mx) \tag{19}$$

гдѣ Θ_1 произвольная функція, введенная интегрированіемъ.

Полученное уравненіе есть уравненіе коноида, всѣ образующія котораго параллельны одной плоскости, а именно перпендикулярной къ плоскости $z = 0$.

Чтобы перейти отъ полученнаго интеграла для уравненія (3) къ интегралу уравненія (1), представимъ уравненіе (19) въ видѣ двухъ

$$\left.\begin{aligned} z &= \pm \Theta(\beta)\, x + \Theta_1(\beta) \\ y &= mx + \beta. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Примѣнивъ къ нимъ формулы перехода (4) и (5), найдемъ:

$$x = \pm \Theta(\beta) - my$$

$$z = \Theta_1(\beta) - \beta y.$$

Вновь полученная поверхность будетъ также коноидъ того же типа, какъ и предыдущій.

Перейдемъ теперь къ интегрированію первыхъ двухъ случаевъ.

Положимъ

$$p + uq = \tau(u, x).$$

Операція $\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial y}$, произведенная надъ этимъ тождествомъ дастъ въ силу (6)

$$\frac{\partial \tau(u, x)}{\partial x} = 0$$

т. е.

$$p + uq = \tau(u) \tag{21}$$

гдѣ τ совершенно произвольная функція.

Дифференцируя обѣ части уравненія (21) по x и, принимая во вниманіе первое изъ уравненій (10), получимъ

$$q = \tau'(u) \pm \frac{uA}{\frac{\partial u}{\partial x}}$$

гдѣ $\tau'(u)$ первая производная отъ функціи $\tau(u)$ по u.

Подставляя значеніе q въ уравненіе (21) найдемъ

$$p = \tau(u) - u\tau'(u) \mp \frac{u^2A}{\frac{\partial u}{\partial x}}.$$

Такимъ образомъ мы привели нашу задачу къ интегрированію точнаго дифференціала:

$$dz = \left\{\tau(u) - u\tau'(u) \mp \frac{u^2A}{\frac{\partial u}{\partial x}}\right\}dx + \left\{\tau'(u) \pm \frac{uA}{\frac{\partial u}{\partial x}}\right\}dy. \tag{22}$$

Можно положить

$$z = V \mp W \tag{23}$$

гдѣ

$$dV = \{\tau(u) - u\tau'(u)\}\,dx + \tau'(u)\,dy \tag{24}$$

$$dW = \frac{uA}{\frac{\partial u}{\partial x}}(udx - dy).$$

Изъ уравненія (12) находимъ

$$A = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}{\varphi(u)^2}$$

и слѣдовательно

$$dW = \frac{1}{\psi(u)^2}\left\{\frac{u^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}{\frac{\partial u}{\partial x}}dx - \frac{u\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}{\frac{\partial u}{\partial x}}dy\right\}.$$

Но $-u\frac{\partial u}{\partial y}$ по уравненію (8) равно $\frac{\partial u}{\partial x}$ и мы имѣемъ

$$dW = \frac{1}{\psi(u)^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) = \frac{du}{\psi(u)^2}$$

и слѣдовательно

$$W = \int\frac{du}{\psi(u)^2}.$$

Возьмемъ теперь полный дифференціалъ отъ выраженія $V - x\tau(u)$. Въ силу уравненія (24) онъ приметъ видъ

$$d\{V - x\tau(u)\} = \tau'(u)(dy - udx - xdu).$$

Взявъ полный дифференціалъ отъ уравненія (9) и сравнивая съ только что полученнымъ, найдемъ

$$d\{V - x\tau(u)\} = \tau'(u)\varphi'(u)du.$$

Откуда

$$V = x\tau(u) + \int\tau'(u)\varphi'(u)du.$$

Внеся полученныя значенія V и W въ уравненіе (23), найдемъ

$$z = \mp\int\frac{du}{\psi(u)^2} + \int\tau'(u)\varphi'(u)du + x\tau(u).$$

Можно избавиться въ этомъ выраженіи отъ второго знака интеграла, положивъ произвольную функцію $\tau(u)$ равной $\sigma'\{\varphi'(u)\}$, гдѣ $\sigma'(v)$ первая производная произвольной функціи $\sigma(v)$. По выполненіи интегрированія, найдемъ

$$z = \mp\int\frac{du}{\psi(u)^2} - \sigma\{\varphi'(u)\} + \varphi'(u)\sigma'\{\varphi'(u)\} + x\sigma'\{\varphi'(u)\} \tag{25}$$

это выраженіе для z совмѣстно съ уравненіемъ

$$y - ux = \varphi(u)$$

и даетъ искомый интегралъ.

Формулы (4) и (5) дадутъ соотвѣтствующій интегралъ для уравненія (1) въ такомъ видѣ:

$$x = \sigma' \{\varphi'(u)\} - uy$$

$$z = \mp \int \frac{du}{\psi(u)^2} - \sigma\{\varphi'(u)\} + \varphi'(u)\,\sigma'\{\varphi'(u)\} - \varphi(u)\,y. \qquad (26)$$

Интегралъ, какъ видимъ, заключаетъ произвольную функцію.

Интеграція зависитъ отъ опредѣленія функцій φ и ψ по уравненіямъ (13) и (9). Въ случаѣ, разсматриваемомъ J. A. Serret, обѣ онѣ равнялись $\alpha\sqrt{1-u^2}$, гдѣ α постоянная; видъ этихъ функцій былъ очень простъ. Вообще же опредѣленіе ихъ при современномъ состояніи алгебры, дающей только небольшое число разрѣшимыхъ уравненій, можетъ представить непреоборимыя трудности. Можно обойти эти вычисленія слѣдующимъ образомъ. Прежде всего необходимо дать другое аналитическое условіе, которому удовлетворяетъ функція $f(p, q)$.

Подвергая уравненіе (13) дважды операціи $\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial y}$, получимъ

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{\sqrt{A}}}{\partial x^2} + 2u\frac{\partial^2 \frac{1}{\sqrt{A}}}{\partial x\,\partial y} + u^2\frac{\partial^2 \frac{1}{\sqrt{A}}}{\partial y^2} = 0. \qquad (27)$$

Новое повтореніе операціи приводитъ къ уравненію

$$\frac{\partial^3 \frac{1}{\sqrt{A}}}{\partial x^3} + 3u\frac{\partial^3 \frac{1}{\sqrt{A}}}{\partial x^2\,\partial y} + 3u^2\frac{\partial^3 \frac{1}{\sqrt{A}}}{\partial x\,\partial y^2} + u^3\frac{\partial^3 \frac{1}{\sqrt{A}}}{\partial y^3} = 0. \qquad (28)$$

Исключая u изъ обоихъ уравненій, получимъ первое условіе: оно показываетъ, что уравненіе

$$z = \sqrt[4]{f(x, y)} \qquad (29)$$

линейчатая поверхность.

Дифференцируя уравненіе (27) по y и замѣняя $\frac{\partial u}{\partial y}$ его выраженіемъ изъ уравненія (11), найдемъ

$$\frac{\partial^3 \frac{1}{\sqrt{A}}}{\partial x^2\,\partial y} + 2u\frac{\partial^3 \frac{1}{\sqrt{A}}}{\partial x\,\partial y^2} + u^2\frac{\partial^3 \frac{1}{\sqrt{A}}}{\partial y^3} - \left\{\frac{\partial^2 \frac{1}{\sqrt{A}}}{\partial x\,\partial y} + u\frac{\partial^2 \frac{1}{\sqrt{A}}}{\partial y^2}\right\}\left\{\frac{\frac{\partial A}{\partial x}}{A} + u\frac{\frac{\partial A}{\partial y}}{A}\right\} = 0. \qquad (30)$$

Исключая u изъ уравненія (27) и вновь полученнаго, найдемъ дополнительное условіе, которому подчинена функція A.

Любопытно, что въ данномъ случаѣ условіе ортогональности поверхности къ плоскости $z=0$, состоящее въ томъ, что p и q обращаются въ безконечность одного порядка для всѣхъ координатъ x, y, удовлетворяющихъ извѣстной *функціональной зависимости*, выражается дополнительнымъ дифференціальнымъ уравненіемъ, *тождественно* удовлетворяющимся *всѣми возможными* координатами x, y.

Перейдемъ къ опредѣленію функцій u, $\varphi(u)$, $\psi(u)$, $\varphi'(u)$. Функція u опредѣляется какъ общій корень трехъ уравненій (27), (28) и (30). Дѣйствія, необходимыя для его опредѣленія (говоря вообще) раціональны.

Соотвѣтствующія выраженія въ x и y для $\varphi(u)$ и $\psi(u)$ дадутъ формулы (9) и (13) и наконецъ $\varphi'(u)$ получится изъ уравненія (9) равнымъ $\dfrac{1}{\frac{\partial u}{\partial y}} - x$.

Для окончательнаго опредѣленія интеграла (25) останется квадратура $\displaystyle\int \frac{du}{\psi(u)^2}$, которая представится въ видѣ точнаго дифференціала отъ двухъ перемѣнныхъ.

Само собой разумѣется, что при этомъ способѣ уже нельзя будетъ воспользоваться формулами (4) и (5) для опредѣленія интеграла уравненія (1), а придется прибѣгнуть непосредственно къ формуламъ Лежандра.

Суммируя все предыдущее, видимъ, что и второе положеніе можно считать доказаннымъ.

Рѣшеніе уравненій „электромагнитной теоріи проводниковъ".

А. Грузинцева.

Электромагнитная теорія проводниковъ, данная мной въ 1899 году, приводитъ къ тремъ системамъ дифференціальныхъ уравненій; двѣ изъ нихъ представляютъ связь между электрическими перемѣщеніями или силами и магнитными силами и суть въ тоже время обобщеніе извѣстныхъ уравненій Максвелла или Герца; третья же система даетъ соотношеніе въ видѣ дифференціальныхъ уравненій между перемѣщеніями частицъ эфира и матеріи или другими словами, эта система уравненій—представляетъ движеніе іоновъ подъ вліяніемъ, какъ собственныхъ силъ взаимодѣйствія, такъ и силъ со стороны электрическаго поля. Если обозначимъ (f, g, h) проекціи перемѣщенія частицы эфира; (f_0, g_0, h_0)—матеріальной частицы (іона); x, y, z—координаты,—(α, β, γ) проекціи магнитной силы въ той же точкѣ (x, y, z) проводника: (p, q, r)—составляющія тока проводимости и t время, то упомянутыя системы будутъ:

$$\text{I.}\qquad 4\pi A\frac{\partial(f+f_0)}{\partial t}+4\pi Ap=\frac{\partial\beta}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial y}$$

и два подобныхъ для 2-хъ другихъ координатныхъ осей.

$$\text{II.}\qquad A\mu\frac{\partial\alpha}{\partial t}=\frac{4\pi}{K}\left[\frac{\partial(h-h_0)}{\partial y}-\frac{\partial(g-g_0)}{\partial z}\right]$$

и два подобныхъ для другихъ осей.

Въ этихъ уравненіяхъ K діэлектрическая постоянная среды, μ коэффиціентъ магнитной проницаемости, а A величина обратная скорости свѣта въ пустотѣ (міровомъ эфирѣ).

Эти уравненія того же внѣшняго вида, какъ и въ теоріи дисперсіи Гельмгольца, но существенно отличаются отъ нихъ значеніями составляющихъ тока проводимости; у насъ эти составляющія выражаются такими формулами:

$$p = \frac{4\pi C}{K}(f + \varepsilon f_0) \text{ и т. п.}$$

причемъ C коэффиціентъ электропроводности, а ε постоянный коэффиціентъ, связанный съ K и C и съ соотвѣтствующими коэффиціентами, характеризующими матеріальные іоны, а именно [1]:

$$\varepsilon = \left(\frac{C_0}{C} - 1\right)\frac{K}{K_0}.$$

Приэтомъ току проводимости приданъ болѣе широкій смыслъ.

Уравненія движенія іона имѣютъ видъ:

$$\text{III.} \qquad m\frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} + k\frac{\partial f_0}{\partial t} + a^2 f_0 = f \text{ и т. п.}$$

гдѣ m, k и a^2 постоянные коэффиціенты, имѣющіе опредѣленное механическое значеніе.

Въ приведенныхъ системахъ подлежатъ опредѣленію, какъ функціи координатъ и времени, количества:

$$f, g, h;\ f_0, g_0, h_0 \text{ и } \alpha, \beta, \gamma.$$

Мы не будемъ заниматься общимъ вопросомъ интегрированія этихъ уравненій, для насъ съ точки зрѣнія потребностей физики—достаточно взять нѣкоторыя частныя ихъ рѣшенія, пріемлемыя со стороны тѣхъ общихъ взглядовъ, которые составила современная физика о внутреннемъ механизмѣ электромагнитныхъ (оптическихъ) явленій, а именно, что всѣ эти количества измѣняются *періодически* во времени и въ пространствѣ. Скажемъ болѣе. Для потребностей физики *важны въ нашемъ случаѣ не формы рѣшеній, а тѣ соотношенія между физическими коэффиціентами* (K, C и т. п.), *которые получаются отъ подстановки тѣхъ или другихъ рѣшеній въ наши дифференціальныя уравненія.* Не безполезно привести еще одно соображеніе. Для опредѣленія формы рѣшенія надо знать механизмъ явленія глубже, чѣмъ то позволяетъ намъ современный уровень нашихъ знаній, а потому для избѣжанія гипотезъ, вовсе не требуемыхъ сущностью дѣла, мы можемъ довольствоваться частными рѣшеніями, не предрѣшая вопроса о подробностяхъ механизма разбираемыхъ явленій.

Гельмгольцъ для интегрированія уравненій (I) и (II) воспользовался предположеніемъ, что между f_0 и f, g и g_0, h и h_0 можно допустить постоянное соотношеніе:

---

[1]) Электромагнитная теорія проводниковъ, стр. 38,—только здѣсь написано ε вм. γ. Ученыя Записки Харьковскаго Университета за 1899 г. Кн. 4.

$$f_0 = uf, \quad g_0 = ug, \quad h_0 = uh \quad (a)$$

причемъ Гельмгольцъ считаетъ u постояннымъ комплекснымъ количествомъ, для опредѣленія котораго онъ полагалъ возможнымъ воспользоваться системой (III), дающей тогда по подстановкѣ значеній (a):

$$u = \frac{1}{a^2 - mp^2 + kp\sqrt{-1}},$$

гдѣ

$$p = \frac{2\pi}{\tau}, \ \tau \text{ — періодъ}$$

и

$$f = Me^Q \text{ и т. п.}$$

$$Q = pt\sqrt{-1} + ax + by + cz$$ [1].

Того же пріема держался и я въ своемъ изслѣдованіи.

Но противъ такого пріема можно сдѣлать очень серьезныя возраженія, и они были мнѣ сдѣланы проф. В. А. Стекловымъ.

Дѣйствительно, если

$$f_0 = uf,$$

то уравненіе (III) обращается въ обыкновенное дифференціальное уравненіе:

$$mu\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + ku\frac{\partial f}{\partial t} + (a^2 u - 1) f = 0,$$

которое имѣетъ общее рѣшеніе вида:

$$f = e^{-s_0 t}(F_1 e^{st\sqrt{-1}} + F_2 e^{-st\sqrt{-1}})$$

гдѣ $s_0 = \frac{k}{2m}$, $s^2 = \frac{a^2 u - 1}{mu} - \frac{k^2}{4m^2}$, а F_1 и F_2 функціи только координатъ и подлежатъ опредѣленію изъ остальныхъ нашихъ дифференціальныхъ уравненій. Но эти рѣшенія не пріемлемы уже потому одному, что представляютъ такъ называемыя „затухающія“ колебанія, которыхъ оптика не знаетъ; кромѣ того, вопросъ осложняется введеніемъ новыхъ функцій. На этихъ основаніяхъ я искалъ другой путь рѣшенія нашихъ уравненій, не прибѣгая къ гипотезѣ Гельмгольца. Оказалось, что можно придти къ тѣмъ же общимъ результатамъ, которые даны въ нашей „Электромагнитной теоріи проводниковъ“, не пользуясь гипотезой Гельмгольца, даже болѣе того,—можно получить условія, при которыхъ допустимо положеніе Гельмгольца. Эта задача и служитъ предметомъ настоящей замѣтки.

---

[1]) Эл. теорія, стр. 42.

Такъ какъ электрическая пертурбація (f, g, h) во всякомъ случаѣ есть періодическая функція времени, то, руководствуясь примѣромъ теоретической акустики (Гельмгольцъ, Кирхгоффъ), можно положить, что

$$f = F_1 \sin pt + F_2 \cos pt \tag{1}$$

причемъ p частота перемѣнъ (т. е. число перемѣнъ тока за 2π—секундъ), а F_1 и F_2 дѣйствительныя функціи координатъ (x, y, z).

Такимъ образомъ уравненіе для опредѣленія движенія матеріальнаго іона будетъ:

$$m \frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} + k \frac{\partial f_0}{\partial t} + a^2 f_0 = F_1 \sin pt + F_2 \cos pt, \tag{2}$$

т. е. обыкновенное уравненіе со второй частью.

Проинтегрируемъ сначала уравненіе:

$$m \frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} + k \frac{\partial f_0}{\partial t} + a^2 f_0 = 0. \tag{3}$$

Пусть

$$f_0 = ce^{st}$$

будетъ частное рѣшеніе уравненія (3).

Тогда для опредѣленія s имѣемъ уравненіе:

$$ms^2 + ks + a^2 = 0,$$

отсюда находимъ:

$$s = -s_0 \pm p_0 \sqrt{-1},$$

гдѣ

$$s_0 = \frac{k}{2m}, \quad p_0 = \frac{\sqrt{4a^2 m - k^2}}{2m} \tag{4}$$

причемъ k^2 вообще мало и меньше $4a^2 m$.

Такимъ образомъ полное рѣшеніе уравненія (3) будетъ:

$$f_0 = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} \tag{5}$$

гдѣ

$$s_1 = -s_0 + p_0 \sqrt{-1}, \quad s_2 = -s_0 - p_0 \sqrt{-1}. \tag{6}$$

Подставляя теперь значеніе (5) въ первоначальное уравненіе (2), получимъ для опредѣленія постоянныхъ c_1 и c_2 слѣдующія два уравненія:

$$e^{s_1 t} \frac{\partial c_1}{\partial t} + e^{s_2 t} \frac{\partial c_2}{\partial t} = 0$$

$$ms_1 e^{s_1 t} \frac{\partial c_1}{\partial t} + ms_2 e^{s_2 t} \frac{\partial c_2}{\partial t} = F_1 \sin pt + F_2 \cos pt.$$

Отсюда находимъ:

$$\left.\begin{aligned} m(s_1-s_2)\,e^{s_1 t}\frac{\partial c_1}{\partial t} &= F_1\sin pt + F_2\cos pt, \\ m(s_1-s_2)\,e^{s_2 t}\frac{\partial c_2}{\partial t} &= -F_1\sin pt - F_2\cos pt. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Для интегрированія этихъ уравненій предварительно замѣтимъ, что вообще:

$$\int Fe^{-st}\sin pt\,dt = -\frac{Fe^{-st}\sin pt}{s} + \frac{p}{s}\int Fe^{-st}\cos pt\,dt + C',$$

$$\int Fe^{-st}\cos pt\,dt = -\frac{Fe^{-st}\cos pt}{s} - \frac{p}{s}\int Fe^{-st}\sin pt\,dt + C'',$$

Отсюда найдемъ:

$$\int F_1 e^{-st}\sin pt\,dt = -\frac{F_1 e^{-st}}{p^2+s^2}(s\sin pt + p\cos pt) + \left[C' + \frac{p}{s}C''\right]\frac{s^2}{s^2+p^2},$$

$$\int F_2 e^{-st}\cos pt\,dt = +\frac{F_2 e^{-st}}{p^2+s^2}(p\sin pt - s\cos pt) + \left[C'' - \frac{p}{s}C'\right]\frac{s^2}{s^2+p^2}$$

причемъ C' и C'' постоянныя интегрированія, которыя могутъ быть функціями x, y, z.

Пользуясь этими интегралами, изъ уравненій (7) находимъ сначала c_1, а затѣмъ c_2, замѣняя въ c_1 величину s_1 черезъ s_2 и обратно:

$$c_1 = \frac{e^{-s_1 t}}{m(s_1-s_2)}\left[\frac{-F_1 s_1 + F_2 p}{p^2+s_1^2}\sin pt - \frac{F_1 p + F_2 s_1}{p^2+s_1^2}\cos pt\right] + c';$$

$$c_2 = \frac{e^{-s_2 t}}{m(s_1-s_2)}\left[\frac{F_1 s_2 - F_2 p}{p^2+s_2^2}\sin pt - \frac{F_1 p + F_2 s_2}{p^2+s_2^2}\cos pt\right] + c'',$$

причемъ c' и c'' новыя постоянныя.

Подставимъ теперь эти значенія c_1 и c_2 въ равенство (5), по приведеніи и сокращеніи на $(s_1 - s_2)$ получимъ:

$$f_0 = \frac{[F_1(s_1 s_2 - p^2) - F_2 p(s_1+s_2)]\sin pt + [F_1 p(s_1+s_2) + F_2(s_1 s_2 - p^2)]\cos pt}{m(p^2+s_1^2)(p^2+s_2^2)} + \\ + c' e^{s_1 t} + c'' e^{s_2 t}$$

Но при помощи равенствъ (6) находимъ:

$$s_1 s_2 = s_0^2 + p_0^2\,; \quad s_1 + s_2 = -2s_0\,;$$
$$p^2 + s_1^2 = p^2 + s_0^2 - p_0^2 - 2p_0 s_0\sqrt{-1}\,; \quad p^2 + s_2^2 = p^2 + s_0^2 - p_0^2 + 2p_0 s_0\sqrt{-1}\,;$$

а потому, если положимъ для краткости письма:

$$\frac{p_0^2 - p^2 + s_0^2}{m[(p^2 - p_0^2 + s_0^2)^2 + 4p_0^2 s_0^2]} = A\,; \quad \frac{2ps_0}{m[(p^2 - p_0^2 + s_0^2)^2 + 4p_0^2 s_0^2]} = B, \tag{8}$$

то получимъ для f_0 выраженіе:

$$f_0 = (AF_1 + BF_2)\sin pt - (BF_1 - AF_2)\cos pt + f_0' e^{-s_0 t}\sin p_0 t + \\ + f_0'' e^{-s_0 t}\cos p_0 t\,; \tag{9}$$

причемъ f_0' и f_0'' будутъ или постоянными или функціями x, y, z.

Подобныя же формулы получимъ для g_0 и h_0, замѣняя соотвѣтственно F_1, F_2, f_0', f_0'' черезъ G_1, G_2, g_0', g_0'' и H_1, H_2, h_0', h_0''.

Прежде чѣмъ идти дальше, дадимъ коэффиціентамъ A и B другой видъ. Подставляя въ нихъ значенія p_0 и s_0 изъ равенствъ (4), получимъ по приведеніи:

$$A = \frac{a^2 - mp^2}{(a^2 - mp^2)^2 + k^2 p^2}, \quad B = \frac{kp}{(a^2 - mp^2)^2 + k^2 p^2}. \tag{10}$$

Зная f_0, g_0, h_0, составляемъ выраженіе:

$$f + \varepsilon f_0 = [(1 + \varepsilon A) F_1 + \varepsilon BF_2]\sin pt - [\varepsilon BF_1 - (1 + \varepsilon A) F_2]\cos pt + \\ + \varepsilon f_0' e^{-s_0 t}\sin p_0 t + \varepsilon f_0'' e^{-s_0 t}\cos p_0 t\,;$$

и слѣдовательно:

$$f - f_0 = [(1 - A) F_1 - BF_2]\sin pt + [BF_1 + (1 - A) F_2]\cos pt - \\ - f_0' e^{-s_0 t}\sin p_0 t - f_0'' e^{-s_0 t}\cos p_0 t\,;$$

$$f + f_0 = [(1 + A) F_1 + BF_2]\sin pt - [BF_1 - (1 + A) F_2]\cos pt + \\ + f_0' e^{-s_0 t}\sin p_0 t + f_0'' e^{-s_0 t}\cos p_0 t.$$

Подобныя же выраженія получимъ для g_0 и h_0.

Подставимъ теперь значенія $f - f_0$ и $h - h_0$ во второе уравненіе системы (3) стран. 36-ой „Эл. теоріи проводниковъ“; по приведеніи, найдемъ:

$$\frac{AK\mu}{4\pi}\frac{\partial\beta}{\partial t}=\left[(1-A)\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial H_1}{\partial x}\right)-B\left(\frac{\partial F_2}{\partial z}-\frac{\partial H_2}{\partial x}\right)\right]\sin pt+$$
$$+\left[B\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial H_1}{\partial x}\right)+(1-A)\left(\frac{\partial F_2}{\partial z}-\frac{\partial H_2}{\partial x}\right)\right]\cos pt-$$
$$-e^{-s_0t}\left(\frac{\partial f_0'}{\partial z}-\frac{\partial h_0'}{\partial x}\right)\sin p_0t-e^{-s_0t}\left(\frac{\partial f_0''}{\partial z}-\frac{\partial h_0''}{\partial x}\right)\cos p_0t$$

причемъ f_0', f_0'', h_0', h_0'' предполагаются функціями x, y, z; если же они постоянныя количества, то послѣдніе члены съ $\sin p_0t$ и $\cos p_0t$ исчезаютъ.

Интегрируя послѣднее уравненіе по t, найдемъ:

$$\frac{AK\mu p}{4\pi}\beta=-\left[(1-A)\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial H_1}{\partial x}\right)-B\left(\frac{\partial F_2}{\partial z}-\frac{\partial H_2}{\partial x}\right)\right]\cos pt+$$
$$+\left[B\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial H_1}{\partial x}\right)+(1-A)\left(\frac{\partial F_2}{\partial z}-\frac{\partial H_2}{\partial x}\right)\right]\sin pt+$$
$$+\frac{pe^{-s_0t}}{p_0^2+s_0^2}\left(\frac{\partial f_0'}{\partial z}-\frac{\partial h_0'}{\partial x}\right)(s_0\sin p_0t+p_0\cos p_0t)-$$
$$-\frac{pe^{-s_0t}}{p_0^2+s_0^2}\left(\frac{\partial f_0''}{\partial z}-\frac{\partial h_0''}{\partial x}\right)(p_0\sin p_0t-s_0\cos p_0t)+\beta_0$$

причемъ β_0 функція x, y, z или постоянное.

Подобнымъ же образомъ найдемъ:

$$\frac{AK\mu p}{4\pi}\gamma=-\left[(1-A)\left(\frac{\partial G_1}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)-B\left(\frac{\partial G_2}{\partial x}-\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)\right]\cos pt+$$
$$+\left[B\left(\frac{\partial G_1}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)+(1-A)\left(\frac{\partial G_2}{\partial x}-\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)\right]\sin pt+$$
$$+\frac{pe^{-s_0t}}{p_0^2+s_0^2}\left(\frac{\partial g_0'}{\partial x}-\frac{\partial f_0'}{\partial y}\right)(s_0\sin p_0t+p_0\cos p_0t)-$$
$$-\frac{pe^{-s_0t}}{p_0^2+s_0^2}\left(\frac{\partial g_0''}{\partial x}-\frac{\partial f_0''}{\partial y}\right)(p_0\sin p_0t-s_0\cos p_0t)+\gamma_0\,.$$

Изъ этихъ двухъ выраженій составляемъ правыя части уравненій (I):

$$\frac{\partial\beta}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial y}=\frac{4\pi}{AK\mu p}\left\{\cos pt\left[(1-A)\left(\frac{\partial\Theta_1}{\partial x}-\Delta F_1\right)-B\left(\frac{\partial\Theta_2}{\partial x}-\Delta F_2\right)\right]+\right.$$
$$+\sin pt\left[B\left(\Delta F_1-\frac{\partial\Theta_1}{\partial x}\right)+(1-A)\left(\Delta F_2-\frac{\partial\Theta_2}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial\beta_0}{\partial z}-\frac{\partial\gamma_0}{\partial y}+$$
$$\left.+\frac{pe^{-s_0t}}{p_0^2+s_0^2}\begin{bmatrix}(s_0\sin p_0t+p_0\cos p_0t)\left(\Delta f_0'-\dfrac{\partial\theta_0'}{\partial x}\right)\\-(p_0\sin p_0t-s_0\cos p_0t)\left(\Delta f_0''-\dfrac{\partial\theta_0''}{\partial x}\right)\end{bmatrix}\right. \tag{I}$$

причемъ положено, какъ принято:

$$\Theta_i = \frac{\partial F_i}{\partial x} + \frac{\partial G_i}{\partial y} + \frac{\partial H_i}{\partial z}, \quad \theta_0^i = \frac{\partial f_0^i}{\partial x} + \frac{\partial g_0^i}{\partial y} + \frac{\partial h_0^i}{\partial z},$$

и для i надо взять послѣдовательно 1 и 2 или $'$ и $''$.

Точно также для лѣвой части перваго уравненія системы (1) стр. 35 составимъ выраженіе:

$$\begin{aligned} 4\pi A \frac{\partial (f+f_0)}{\partial t} + 4\pi A p = \frac{4\pi A}{K} \{ & (Kp[(1+A)F_1 + BF_2] - \\ & - 4\pi C[\varepsilon BF_1 - (1+\varepsilon A)F_2]) \cos pt + (Kp[BF_1 - (1+A)F_2] + \\ & + 4\pi C[(1+\varepsilon A)F_1 + \varepsilon BF_2]) \sin pt - \\ & - f_0' e^{-s_0 t}[(Ks_0 - 4\pi C\varepsilon)\sin p_0 t - Kp_0 \cos p_0 t] - \\ & - f_0'' e^{-s_0 t}[(Ks_0 - 4\pi C\varepsilon)\cos p_0 t + Kp_0 \sin p_0 t]\}. \end{aligned} \tag{II}$$

Полагая теперь для простоты письма:

$$\left.\begin{aligned} M &= Kp(1+A) - 4\pi CB\varepsilon \\ N &= KpB + 4\pi C(1+A\varepsilon) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

находимъ по сравненіи (I) и (II):

$$\begin{aligned} & \cos pt \left[(1-A)\left(\frac{\partial \Theta_1}{\partial x} - \Delta F_1\right) - B\left(\frac{\partial \Theta_2}{\partial x} - \Delta F_2\right)\right] + \\ & + \sin pt \left[B\left(\Delta F_1 - \frac{\partial \Theta_1}{\partial x}\right) + (1-A)\left(\Delta F_1 - \frac{\partial \Theta_2}{\partial x}\right)\right] + \\ & + \frac{pe^{-s_0 t}}{p_0^2 + s_0^2}\left[(s_0 \sin p_0 t + p_0 \cos p_0 t)\left(\Delta f_0' - \frac{\partial \theta_0'}{\partial x}\right) - (p_0 \sin p_0 t - s_0 \cos p_0 t)\left(\Delta f_0'' - \frac{\partial \theta_0''}{\partial x}\right)\right] = \\ & = A^2 \mu p \{\cos pt[MF_1 + NF_2] + \sin pt[NF_1 - MF_2] - \\ & - f_0' e^{-s_0 t}[(Ks_0 - 4\pi C\varepsilon)\sin p_0 t - Kp_0 \cos p_0 t] - \\ & - f_0'' e^{-s_0 t}[(Ks_0 - 4\pi C\varepsilon)\cos p_0 t + Kp_0 \sin p_0 t]\} \end{aligned}$$

или положивъ:

$$X = (1-A)\left(\frac{\partial \Theta_1}{\partial x} - \Delta F_1\right) - B\left(\frac{\partial \Theta_2}{\partial x} - \Delta F_2\right) - A^2 \mu p (MF_1 + NF_2),$$

$$Y = B\left(\frac{\partial \Theta_1}{\partial x} - \Delta F_1\right) + (1-A)\left(\frac{\partial \Theta_2}{\partial x} - \Delta F_2\right) + A^2 \mu p (NF_1 - MF_2),$$

$$U = \frac{pp_0}{p_0^2 + s_0^2}\left(\frac{\partial \theta_0'}{\partial x} - \Delta f_0'\right) + A^2 \mu p p_0 K f_0' + \frac{ps_0}{p_0^2 + s_0^2}\left(\frac{\partial \theta_0''}{\partial x} - \Delta f_0''\right) - A^2 \mu p (Ks_0 - 4\pi C\varepsilon) f_0''$$

$$V = \frac{ps_0}{p_0^2 + s_0^2}\left(\frac{\partial \theta_0'}{\partial x} - \Delta f_0'\right) - A^2 \mu p (Ks_0 - 4\pi C\varepsilon) f_0' - \frac{pp_0}{p_0^2 + s_0^2}\left(\frac{\partial \theta_0''}{\partial x} - \Delta f_0''\right) - A^2 \mu p p_0 K f_0''$$

получимъ:

$$X\cos pt - Y\sin pt = e^{-s_0 t}(U\cos p_0 t + V\sin p_0 t). \qquad (A)$$

Такъ какъ мы можемъ установить сами одно условіе для опредѣленія функцій F_1 и F_2, то выберемъ ихъ такъ, чтобы удовлетворялось равенство:

$$(1-A)\left(\frac{\partial\Theta_1}{\partial x} - \varDelta F_1\right) - B\left(\frac{\partial\Theta_2}{\partial x} - \varDelta F_2\right) = A^2\mu p\,(MF_1 + NF_2). \quad (a)$$

Поэтому уравненіе (A) обратится въ слѣдующее:

$$-Y\sin pt = e^{-s_0 t}(U\cos p_0 t + V\sin p_0 t). \qquad (B)$$

Это равенство должно существовать для всякаго значенія t, а потому, полагая $t=0$, находимъ:

$$U = 0.$$

Теперь равенство (B) будетъ:

$$-Y\sin pt = e^{-s_0 t}\,V\sin p_0 t.$$

Полагая здѣсь:

$$t = \frac{\pi}{p},\quad \frac{\pi}{p_0},$$

находимъ

$$Y = 0,\quad V = 0$$

или, раскрывая значеніе Y'а:

$$B\left(\frac{\partial\Theta_1}{\partial x} - \varDelta F_1\right) + (1-A)\left(\frac{\partial\Theta_2}{\partial x} - \varDelta F_2\right) = -A^2\mu p\,(NF_1 - MF_2). \quad (b)$$

Прежде чѣмъ идти дальше, остановимся на уравненіяхъ (a) и (b). Изъ нихъ находимъ:

$$\Theta_1 = 0,\quad \Theta_2 = 0.$$

Итакъ получаемъ для F_1 и F_2 уравненія:

$$\left.\begin{aligned} -(1-A)\varDelta F_1 + B\varDelta F_2 &= A^2\mu p\,(MF_1 + NF_2) \\ B\varDelta F_1 + (1-A)\varDelta F_2 &= A^2\mu p\,(NF_1 - MF_2) \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Эти уравненія обладаютъ интереснымъ свойствомъ. Если замѣнимъ въ нихъ F_1 черезъ $-F_2$, а F_2 черезъ F_1, то они обращаются одно въ другое, т. е. система (12) остается неизмѣнной. Отсюда заключаемъ, что если выраженіе

$$f = F_1 \sin pt + F_2 \cos pt \text{ и т. п.}$$

удовлетворяетъ нашимъ дифференціальнымъ уравненіямъ, то и выраженіе

$$f = -F_2 \sin pt + F_1 \cos pt \text{ и т. п.}$$

тоже удовлетворяетъ имъ. Но всѣ наши уравненія линейны, а потому они будутъ удовлетворяться и такимъ рѣшеніемъ для f:

$$(-F_2 \sin pt + F_1 \cos pt) + \sqrt{-1}(F_1 \sin pt + F_2 \cos pt) = (F_1 + F_2\sqrt{-1})e^{pt\sqrt{-1}}.$$

Къ тому же результату мы придемъ, если, помноживъ второе уравненіе въ системѣ (12) на $-\sqrt{-1}$, сложимъ съ первымъ. Дѣйствительно, мы получаемъ тогда:

$$\begin{aligned} &-[(1-A) + B\sqrt{-1}]\,\Delta(F_1 + \sqrt{-1}\,F_2) = \\ &= A^2\mu p(M - \sqrt{-1}\,N)(F_1 + \sqrt{-1}\,F_2) \end{aligned}$$

или, если положимъ:

$$F_1 + \sqrt{-1}\,F_2 = F \tag{13}$$

$$\Delta F = \frac{A^2\mu p(M - \sqrt{-1}\,N)}{(A-1) - B\sqrt{-1}}\,F. \tag{14}$$

Рѣшивъ это уравненіе, мы знаемъ F_1 и F_2. Намъ достаточно взять какое-нибудь частное рѣшеніе для F, — лишь бы оно представляло періодическую функцію (x, y, z).

Положимъ:

$$F = F_0 e^{ax+by+cz}, \tag{15}$$

гдѣ F_0 и a, b, c комплексныя постоянныя.

Подставляя въ (14), находимъ:

$$a^2 + b^2 + c^2 = -\frac{A^2\mu p(M - N\sqrt{-1})}{1 - A + B\sqrt{-1}}. \tag{16}$$

Если подставимъ сюда значенія M, N, A и B, положивъ предварительно:

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= -A^2p^2V^2e^{2v\sqrt{-1}} \\ \text{и} \qquad A - B\sqrt{-1} = w\,, &\quad \frac{4\pi C}{p} = D \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

то получимъ:

$$K\mu - \frac{1+\varepsilon w}{1-w}D\mu\sqrt{-1} = \frac{1-w}{1+w}V^2e^{2v\sqrt{-1}}. \tag{I}$$

А это равенство *есть* тождественно наше дисперсіонное соотношеніе (I) „Электромагнитной теоріи проводниковъ" (стр. 44); причемъ количество w при помощи равенства (10) стр. 6 настоящей статьи можетъ быть представлено въ слѣдующей формѣ:

$$w = \frac{1}{a^2 - mp^2 + kp\sqrt{-1}}$$

т. е. оно тождественно съ Гельмгольцевскимъ u.

Итакъ мы получили наше основное дисперсіонное соотношеніе (I), не прибѣгая къ типотезѣ Гельмгольца.

Нашъ анализъ даетъ сверхъ того и условія, при которыхъ гипотеза Гельмгольца дѣлается простымъ частнымъ случаемъ нашихъ соображеній. Дѣйствительно, стоитъ только принять, что

$$f_0' = \text{const.}, \quad f_0'' = \text{const.},$$

какъ условія:

$$U = 0, \quad V = 0$$

дадутъ:

$$f_0' = 0, \quad f_0'' = 0,$$

а тогда рѣшеніе для f_0 будетъ:

$$f_0 = wf.$$

Но къ этимъ частнымъ условіямъ нѣтъ необходимости прибѣгать, какъ мы видѣли, для полученія дисперсіоннаго соотношенія.

Въ заключеніе замѣтимъ, что количества a, b, c должны имѣть видъ:

$$a = -\alpha_0 + \alpha\sqrt{-1}$$
$$b = -\beta_0 + \beta\sqrt{-1}$$
$$c = -\gamma_0 + \gamma\sqrt{-1}$$

и α_0, β_0, γ_0 должны быть положительны, чтобы лучи могли считаться поглощаемыми срединой.

Предыдущій анализъ можно значительно упростить, если сразу ввести комплексныя величины.

Положимъ, что напередъ выбрали для f, g, h рѣшеніе вида:

$$f = Fe^{pt\sqrt{-1}}, \quad g = Ge^{pt\sqrt{-1}}, \quad h = He^{pt\sqrt{-1}};$$

гдѣ F, G, H комплексныя функціи координатъ (x, y, z); и

$$p = \frac{2\pi}{\tau}$$

и τ — періодъ измѣненія кинетическаго состоянія средины.

Такимъ образомъ уравненіе движенія іона будетъ:

$$m\frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2}+k\frac{\partial f_0}{\partial t}+a^2 f_0=Fe^{pt\sqrt{-1}} \text{ и т. п.}$$

Отсюда находимъ, какъ и прежде:

$$f=uf+f_0' e^{s_1 t}+f_0'' e^{s_2 t} \text{ и т. п.}$$

гдѣ

$$u=\frac{1}{a^2-mp^2+kp\sqrt{-1}}.$$

Составляя затѣмъ уравненіе (3) стр. 36-й и (1) стр. 35-й находимъ по сравненіи результатовъ слѣдующее общее соотношеніе:

$$A^2K\mu\{(1+u)p\sqrt{-1}\,Fe^{pt\sqrt{-1}}+\frac{4\pi C}{K}(1+\varepsilon u)\,Fe^{pt\sqrt{-1}}+$$
$$+f_0's_1e^{s_1t}+f_0''s_2e^{s_2t}+\frac{4\pi C\varepsilon}{K}(f_0'e^{s_1t}+f_0''e^{s_2t})\}=\frac{1-u}{p\sqrt{-1}}\left(\Delta F-\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)-$$
$$-\frac{e^{s_1t}}{s_1}\left(\Delta f_0'-\frac{\partial\theta_0'}{\partial x}\right)-\frac{s^{s_2t}}{s_2}\left(\Delta f_0''-\frac{\partial\theta_0''}{\partial x}\right) \text{ и т. д.}$$

причемъ:

$$\Theta=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial z}.$$

Но мы всегда имѣемъ право выбрать функціи F, G и H такими, чтобы онѣ удовлетворяли уравненіямъ вида:

$$A^2K\mu\left[(1+u)p\sqrt{-1}+\frac{4\pi C}{K}(1+\varepsilon u)\right]F=\frac{1-u}{p\sqrt{-1}}\left(\Delta F-\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)$$

или проще:

$$\Delta F-\frac{\partial\Theta}{\partial x}=-A^2p^2\left[\frac{1+u}{1-u}K\mu-\frac{1+\varepsilon u}{1-u}D\mu\sqrt{-1}\right]F$$

и подобныя уравненія для G и H, причемъ положено:

$$\frac{4\pi C}{p}=D.$$

Положимъ для краткости письма:

$$\frac{1+u}{1-u}K\mu-\frac{1+\varepsilon u}{1-u}D\mu\sqrt{-1}=V^2e^{2v\sqrt{-1}},$$

тогда предыдущее уравненіе будетъ:

$$\varDelta F - \frac{\partial \Theta}{\partial x} = - A^2 p^2 V^2 e^{2v\sqrt{-1}} F.$$

Изъ этихъ уравненій находимъ, что

$$\Theta = 0,$$

а потому окончательно уравненіе для опредѣленія F будетъ:

$$\varDelta F = - A^2 p^2 V^2 e^{2v\sqrt{-1}} F.$$

Простое частное рѣшеніе, удовлетворяющее условіямъ періодичности въ пространствѣ, будетъ обычнаго вида:

$$F = F_0 e^{ax + by + cz}$$

гдѣ a, b, c комплексныя постоянныя.

Подстановка въ наше уравненіе дастъ:

$$a^2 + b^2 + c^2 = - A^2 p^2 V^2 e^{2v\sqrt{-1}},$$

т. е. данное раньше равенство:

$$\frac{1+u}{1-u} K\mu - \frac{1+\varepsilon u}{1-u} D\mu\sqrt{-1} = V^2 e^{2v\sqrt{-1}}$$

есть дисперсіонное соотношеніе нашей электромагнитной теоріи проводниковъ.

Для опредѣленія функцій f_0', f_0'', ... безъ труда находимъ уравненія:

$$\varDelta f_0' - \frac{\partial \theta_0'}{\partial x} = - A^2 \mu (s_1^2 + 4\pi C \varepsilon s_1) f_0',$$

и

$$\varDelta f_0'' - \frac{\partial \theta_0''}{\partial x} = - A^2 \mu (s_2^2 + 4\pi C \varepsilon s_2) f_0''.$$

Простѣйшія рѣшенія ихъ:

$$f_0' = \text{const.} = 0, \quad f_0'' = \text{const.} = 0.$$

Можно взять для f еще болѣе общее рѣшеніе вида:

$$f = F_1 e^{pt\sqrt{-1}} + F_2 e^{-pt\sqrt{-1}}$$

и подобрать функціи F_1 и F_2 такъ, чтобы окончательно f было дѣйствительной функціей координатъ и времени. Получается тоже дисперсіонное соотношеніе.

Sur la déviation pendant la chute libre d'un pesant.

C. Russyan.

On sait, qu'un pesant éprouve pendant la chute libre la déviation de la direction verticale du point de départ. La déviation composante, perpendiculaire au plan méridien de ce point, est déjà determinée par Poisson („Sur le mouvement des projectils" J. de l'Ec. Pol., t. 16, p. 32): elle est dirigée vers l'est et est égale à

$$\frac{1}{3}\omega g \operatorname{cs}\varphi t^3$$

au petit de l'ordre ω près, où ω est la vitesse angulaire de la rotation du globe terrestre et φ est la latitude astronomique du point de départ. Quant à la déviation composante, située dans le plan méridien, il dominait l'opinion, que cette dernière soit dirigée vers le sud et soit égale à

$$\frac{1}{6}\omega^2 g \operatorname{sn}\varphi \operatorname{cs}\varphi t^4$$

dans la supposition de la forme sphérique du globe terrestre (v. p. ex. P. Appell: „Traité de mécanique rationelle" t. II, p. 279). M. de Sparre démontre (C. R., 1905; Bull. de la Soc. math. de France, 1906), que cette déviation est dirigée vers le nord et est égale à

$$\frac{1}{8}\omega^4 L \operatorname{sn}^3\varphi \operatorname{cs}\varphi t^4,$$

où L est la distance du point de départ du centre de la Terre. Je démontre dans ce que va suivre, que la déviation en question est réellement dirigée vers le nord, et que la valeur donnée par M. de Sparre est la partie principale du premier terme de son dévellopement en fonction du temps.

Soit 0 le point de départ d'un pesant. L'axe positive $0Z$ soit dirigée vers le nadire; l'axe positive $0X$, située dans le plan méridien, soit dirigée vers le sud; l'axe positive $0Y$, perpendiculaire à ce plan, soit dirigée vers l'est.

Soit, enfin, φ la latitude astronomique du point O en valeur absolue, comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Les équations du mouvement relatif de ce pesant sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = p_x + \omega^2 \operatorname{sn}\varphi\,(x \operatorname{sn}\varphi - z \operatorname{cs}\varphi + h) + 2\omega \operatorname{sn}\varphi \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = p_y + \omega^2 y - 2\omega\left(\frac{dx}{dt}\operatorname{sn}\varphi - \frac{dz}{dt}\operatorname{cs}\varphi\right)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = p_z - \omega^2 \operatorname{cs}\varphi\,(x \operatorname{sn}\varphi - z \operatorname{cs}\varphi + h) - 2\omega \operatorname{cs}\varphi \frac{dy}{dt}$$

où p_x, p_y, p_z sont les composantes de l'accéleration, due à l'attraction newtonienne, et h est la distance du point de départ de l'axe de la rotation.

Si ξ, 0, ζ sont les coordonnées du centre du globe terrestre, on a dans la supposition que la Terre soit la sphère homogène, que

$$p_x = \frac{M(\xi - x)}{[(\xi - x)^2 + y^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}}, \quad p_y = -\frac{My}{[(\xi - x)^2 + y^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}},$$

$$p_z = \frac{M(\zeta - z)}{[(\xi - x)^2 + y^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}}.$$

Si $L = \sqrt{\xi^2 + \zeta^2}$ est la distance du point de départ du centre de la Terre, on a que

$$p_x = \frac{M}{L^3}(\xi - x)(1+\alpha)^{-3/2}, \quad p_y = -\frac{M}{L^3}y(1+\alpha)^{-3/2}, \quad p_z = \frac{M}{L^3}(\zeta - z)(1+\alpha)^{-3/2}$$

où

$$\alpha = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2x\xi - 2z\zeta}{L^2}.$$

Les composantes de l'accéleration newtonienne au point de départ sont:

$$X_0 = \frac{M}{L^3}\xi, \quad Y_0 = 0, \quad Z_0 = \frac{M}{L^3}\zeta.$$

de manière que

$$p_x = X_0 - \frac{M}{L^3}x(1+\alpha)^{-3/2} + \frac{M}{L^3}\xi[(1+\alpha)^{-3/2} - 1], \quad p_y = -\frac{M}{L^3}y(1+\alpha)^{-3/2},$$

$$p_z = Z_0 - \frac{M}{L^3}z(1+\alpha)^{-3/2} + \frac{M}{L^3}\zeta[(1+\alpha)^{-3/2} - 1].$$

Mais comme

$$\omega^2 \operatorname{sn}\varphi\,(x \operatorname{sn}\varphi - z \operatorname{cs}\varphi + h), \quad \omega^2 y, \quad -\omega^2 \operatorname{cs}\varphi\,(x \operatorname{sn}\varphi - z \operatorname{cs}\varphi + h)$$

sont les composantes de l'accéleration centrifuge au point (xyz), celles au point de départ sont

$$\omega^2 h \operatorname{sn}\varphi\,, \qquad 0\,, \qquad -\omega^2 h \operatorname{cs}\varphi\,.$$

Les expressions donc

$$X_0 + \omega^2 h \operatorname{sn}\varphi\,, \quad 0\,, \quad Z_0 - \omega^2 h \operatorname{cs}\varphi\,.$$

sont les composantes de l'accéleration de la pesanteur au point 0, dirigée vers le nadire, et on a que

$$X_0 + \omega^2 h \operatorname{sn}\varphi = 0\,, \qquad Z_0 - \omega^2 h \operatorname{cs}\varphi = g$$

ou que

$$X_0 = -\,\omega^2 h \operatorname{sn}\varphi\,, \qquad Z_0 = g + \omega^2 h \operatorname{cs}\varphi$$

où g est l'accéleration de la pesanteur au point de départ. On a donc après la substitution que

$$p_x = -\omega^2 h \operatorname{sn}\varphi - \frac{M}{L^3} x (1+\alpha)^{-3/2} + \frac{M}{L^3}\xi[(1+\alpha)^{-3/2} - 1]\,, \quad p_y = -\frac{M}{L^3} y (1+\alpha)^{-3/2}$$

$$p_z = g + \omega^2 h \operatorname{cs}\varphi - \frac{M}{L^3} z (1+\alpha)^{-3/2} + \frac{M}{L^3}\zeta[(1+\alpha)^{-3/2} - 1]\,.$$

En substituant ces valeurs des p_x, p_y, p_z dans les équations du mouvement relatif, nous les obtenons dans la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{M}{L^3} x (1+\alpha)^{-3/2} + \frac{M}{L^3}\xi[(1+\alpha)^{-3/2} - 1] + \omega^2 \operatorname{sn}\varphi (x \operatorname{sn}\varphi - z \operatorname{cs}\varphi) + 2\omega \operatorname{sn}\varphi \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{M}{L^3} y (1+\alpha)^{-3/2} + \omega^2 y - 2\omega\left(\frac{dx}{dt}\operatorname{sn}\varphi - \frac{dz}{dt}\operatorname{cs}\varphi\right)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g - \frac{M}{L^3} z (1+\alpha)^{-3/2} + \frac{M}{L^3}\zeta[(1+\alpha)^{-3/2} - 1] - \omega^2 \operatorname{cs}\varphi (x \operatorname{sn}\varphi - z \operatorname{cs}\varphi) - 2\omega \operatorname{cs}\varphi \frac{dy}{dt}\,.$$

Si p_0 est l'accéleration newtonienne au point de départ, on a que les composantes X_0 Z_0 sont

$$X_0 = p_0 \frac{\xi}{L}\,, \qquad Z_0 = p_0 \frac{\zeta}{L}$$

et

$$p_0 = \frac{M}{L^2}$$

mais comme d'un autre coté

$$X_0 = -\,\omega^2 h \operatorname{sn}\varphi\,, \qquad Z_0 = g + \omega^2 h \operatorname{cs}\varphi\,,$$

il en résulte que

$$\xi = -\frac{L}{p_0}\omega^2 h \operatorname{sn}\varphi\,, \qquad \zeta = \frac{L}{p_0}(g + \omega^2 h \operatorname{cs}\varphi)\,.$$

En substituant ces valeurs dans les équations du mouvement, nous obtenons

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{p_0}{L}x(1+\alpha)^{-3/2} - \omega^2 h \operatorname{sn}\varphi[(1+\alpha)^{-3/2}-1] + \omega^2 \operatorname{sn}\varphi(x \operatorname{sn}\varphi - z \operatorname{cs}\varphi) + 2\omega \operatorname{sn}\varphi \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{p_0}{L}y(1+\alpha)^{-3/2} + \omega^2 y - 2\omega\left(\frac{dx}{dt}\operatorname{sn}\varphi - \frac{dz}{dt}\operatorname{cs}\varphi\right)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g - \frac{p_0}{L}z(1+\alpha)^{-3/2} + (g+\omega^2 h \operatorname{cs}\varphi)[(1+\alpha)^{-3/2}-1] - \omega^2 \operatorname{cs}\varphi(x \operatorname{sn}\varphi - z \operatorname{cs}\varphi) - 2\omega \operatorname{cs}\varphi \frac{dy}{dt}.$$

où $$\alpha = \frac{(x^2+y^2+z^2)p_0 + 2xL\,\omega^2 h \operatorname{sn}\varphi - 2zL(g+\omega^2 h \operatorname{cs}\varphi)}{p_0 L^2}$$

Comme les coordonnées $x\,y\,z$ du mobile sont pratiquement très-petites par rapport à L, la fonction

$$(1+\alpha)^{-3/2}$$

est holomorphe aux environs du point (0, 0, 0) et les équations différentielles du mouvement possèdent trois intégrales holomorphes

$$x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$$

$$y = b_0 + b_1 t + b_1 t^2 + \dots$$

$$c = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots$$

Comme les coordonnées et la vitesse initiales sont nulles, on a que

$$a_0 = a_1 = b_0 = b_1 = c_0 = c_1 = 0,$$

et

$$x = a_2 t^2 + \dots \qquad y = b_2 t^2 + \dots \qquad z = c_2 t^2 + \dots.$$

Par conséquent la fonction

$$(1+\alpha)^{-3/2},$$

égale à

$$1 - \frac{3}{2}\alpha + \frac{15}{8}\alpha^2 - \dots,$$

se développe en série

$$1 - \frac{3}{p_0 L}[\omega^2 h \operatorname{sn}\varphi\, a_2 - c_2(g+\omega^2 h \operatorname{cs}\varphi)]\,t^2 + \dots;$$

En substituant dans les équations du mouvement au lieu des x, y, z, $(1+\alpha)^{-3/2}$ leurs développements et en égalant les coëfficents des mêmes degrés de t, nous obtenons la série d'équations

$$a_2 = 0 \quad b_2 = 0 \quad c_2 = g_2$$

$$a_3 = 0 \quad b_3 = \frac{1}{3}\omega g \operatorname{cs}\varphi, \quad c_3 = 0$$

$$a_4 = \frac{1}{8}\omega^2 g \operatorname{sn}\varphi\left(\operatorname{cs}\varphi - \frac{h}{L}\frac{g}{p_0}\right) - \frac{1}{8}\omega^4 \frac{h^2}{L}\frac{g}{p_0}\operatorname{sn}\varphi \operatorname{cs}\varphi,$$

$$b_4 = 0, \quad c_4 = -\frac{p_0}{L}\frac{g}{2} + \frac{3}{2}\frac{g}{pL}(g + \omega^2 h \operatorname{cs}\varphi)^2 - \frac{3}{2}\omega^2 g \operatorname{cs}\varphi^2$$

. . . .

de manière que

$$z = \frac{g}{2}t^2 + c_4 t^4 + \ldots$$

$$y = \frac{1}{3}\omega g \operatorname{cs}\varphi t^3 + b_5 t^5 + \ldots$$

$$x = a_4 t^4 + a_5 t^5 + \ldots$$

Il est aisé de voir de la forme des équations du mouvement, que les coëfficients des degrés plus élevés de t sont petits par rapport à ceux des degrés plus bas de l'ordre ω ou $\frac{1}{L}$ au moins. On en voit qu'il y a la déviation vers l'est, car le premier terme

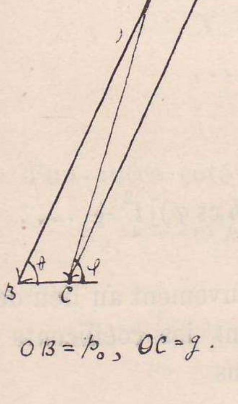
$$\frac{1}{3}\omega g \operatorname{cs}\varphi t^3$$

du développement de y est positif.

Quant à la déviation x dans le plan méridien, évaluons le coefficient a_4. Nous avons obtenu que

$$a_4 = \frac{1}{8}\omega^2 g \operatorname{sn}\varphi\left(\operatorname{cs}\varphi - \frac{h}{L}\frac{g}{p_0}\right) - \frac{1}{8}\omega^4 L\left(\frac{h}{L}\right)^2 \frac{g}{p_0}\operatorname{sn}\varphi \operatorname{cs}\varphi.$$

Nous allons exprimer g, h ou plutôt $\frac{h}{L}\frac{g}{p_0}$, $\frac{g}{p_0}\left(\frac{h}{L}\right)^2$ par L et p_0.



OA = ω²h, OB = p₀, OC = g.

Si la droite de l'accéleration newtonienne fait avec le plan d'équateur l'angle aigu θ, nous aurons que

$$g^2 = p_0^2 + \omega^4 h^2 - 2p\omega^2 h \operatorname{cs}\theta,$$

ou

$$g^2 = p_0^2 + \omega^4 h^2 - 2p_0\omega^2\frac{h^2}{L};$$

et d'autre coté que

$$p_0^2 = g^2 + \omega^4 h^2 + 2g\omega^2 h \operatorname{cs}\varphi.$$

En ajoutant ces deux équations nous obtenons que

$$\omega^2 h + g \operatorname{cs} \varphi - p_0 \frac{h}{L} = 0\,,$$

d'où

$$\frac{h}{L} = \frac{g \operatorname{cs} \varphi}{p_0 - \omega^2 L}.$$

En substituant cette valeur de $\frac{h}{L}$ dans la première équation, nous aurons que

$$g^2 = p_0^2 + \omega^4 L^2 \frac{g^2 \operatorname{cs}^2 \varphi}{(p_0 - \omega^2 L)^2} - 2 p_0 \omega^2 L \frac{g^2 \operatorname{cs}^2 \varphi}{(p_0 - \omega^2 L)^2}$$

d'où il vient que

$$\left(\frac{g}{p_0}\right)^2 = \frac{\left(1 - \frac{\omega^2 L}{p_0}\right)^2}{1 - \operatorname{sn}^2 \varphi \left(\frac{2\omega^2 L}{p_0} - \frac{\omega^4 L^2}{p_0^2}\right)}\,, \quad \frac{g}{p_0} = \frac{1 - \frac{\omega^2 L}{p_0}}{\left[1 - \operatorname{sn}^2 \varphi \left(\frac{2\omega^2 L}{p_0} - \frac{\omega^4 L^2}{p_0^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}. \quad \text{(a)}$$

Il en résulte que

$$\frac{g}{p_0}\frac{h}{L} = \frac{g}{p_0}\frac{g \operatorname{cs} \varphi}{p_0 - \omega^2 L} = \left(\frac{g}{p_0}\right)^2 \frac{\operatorname{cs} \varphi}{1 - \frac{\omega^2 L}{p_0}} = \frac{\left(1 - \frac{\omega^2 L}{p_0}\right) \operatorname{cs} \varphi}{1 - \operatorname{sn}^2 \varphi \left(2\frac{\omega^2 L}{p_0} - \frac{\omega^4 L^2}{p_0^2}\right)}$$

Il suit enfin de ces formules, que

$$\frac{g}{p_0}\left(\frac{h}{L}\right)^2 = \left(\frac{g}{p_0}\right)^3 \frac{\operatorname{cs}^2 \varphi}{\left(1 - \frac{\omega^2 L}{p_0}\right)^2} = \frac{\left(1 - \frac{\omega^2 L}{p_0}\right) \operatorname{cs}^2 \varphi}{\left[1 - \operatorname{sn}^2 \varphi \left(\frac{2\omega^2 L}{p_0} - \frac{\omega^4 L^2}{p_0^2}\right)\right]^{3/2}}.$$

La valeur donc de a_4 devient après la substitution

$$a_4 = \frac{1}{8} \omega^2 g \operatorname{sn} \varphi \operatorname{cs} \varphi \left[1 - \frac{1 - \frac{\omega^2 L}{p_0}}{1 - \operatorname{sn}^2 \varphi \left(\frac{2\omega^2 L}{p_0} - \frac{\omega^4 L^2}{p_0^2}\right)}\right] -$$

$$- \frac{1}{8} \omega^4 L \operatorname{sn} \varphi \operatorname{cs}^3 \varphi \frac{1 - \frac{\omega^2 L}{p_0}}{\left[1 - \operatorname{sn}^2 \varphi \left(\frac{2\omega^2 L}{p_0} - \frac{\omega^2 L^2}{p_0^2}\right)\right]^{3/2}}$$

ou après la transformation dans le premier terme

$$a_4 = \frac{1}{8}\omega^4 \operatorname{sn}\varphi \operatorname{cs}\varphi \frac{g}{p_0} L \frac{1 - \operatorname{sn}^2\varphi\left(2 - \dfrac{\omega^2 L}{p_0}\right)}{1 - \operatorname{su}^2\varphi\left(2\dfrac{\omega^2 L}{p_0} - \dfrac{\omega^4 L^2}{p_0^2}\right)} -$$

$$-\frac{1}{8}\omega^4 L \operatorname{sn}\varphi \operatorname{cs}^3\varphi \frac{1 - \dfrac{\omega^2 L}{p_0}}{\left[1 - \operatorname{sn}^2\varphi\left(\dfrac{2\omega^2 L}{p_0} - \dfrac{\omega^4 L^2}{p_0^2}\right)\right]^{3/2}}.$$

Si nous substituons au lieu de $\frac{g}{p_0}$ la valeur (a), nous obtiendrons:

$$a_4 = \frac{1}{8}\omega^4 L \operatorname{sn}\varphi \operatorname{cs}\varphi \frac{\left(1 - \dfrac{\omega^2 L}{p_0}\right)\left[1 - \operatorname{sn}^2\varphi\left(2 - \dfrac{\omega^2 L}{p_0}\right) - \operatorname{cs}^2\varphi\right]}{\left[1 - \operatorname{sn}^2\varphi\left(2\dfrac{\omega^2 L}{p_0} - \dfrac{\omega^4 L^2}{p_0^2}\right)\right]^{3/2}}$$

$$= -\frac{1}{8}\omega^4 L \operatorname{sn}^3\varphi \operatorname{cs}\varphi \frac{\left(1 - \dfrac{\omega^2 L}{p_0}\right)^2}{\left[\operatorname{cs}^2\varphi + \operatorname{sn}^2\varphi\left(1 - \dfrac{\omega^2 L}{p_0}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

Nous voyons que la déviation x est dirigée vers le nord.

La partie principale du premier terme

$$a_4 t^4$$

de cette déviation est

$$-\frac{1}{8}\omega^4 L \operatorname{sn}^3\varphi \operatorname{cs}\varphi\, t^4.$$

C'est la valeur de la déviation qui a été donnée par M. de Sparre.

Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions, définies par les équations différentielles linéaires du second ordre, et leurs applications au problème du développement d'une fonction arbitraire en séries procédant suivant les-dites fonctions.

par W. Stekloff.

1. Soit

$$(1)\qquad \lambda_0^2,\ \lambda_1^2,\ \lambda_2^2,\ \lambda_3^2,\ \ldots,\ \lambda_n^2,\ \ldots$$

une suite infinie, formée suivant une loi quelconque bien déterminée, de nombres positifs indéfiniment croissants, lorsque l'indice n tend vers l'infini.

Supposons qu'à chaque nombre λ_n^2 $(n=0, 1, 2, \ldots)$ corresponde une fonction $u_n(x)$ de la variable réelle x, continue et bien déterminée dans un certain intervalle (a, b) $(b > a)$.

On obtient ainsi une suite de fonctions

$$u_0(x),\ u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots,\ u_n(x),\ \ldots,$$

contenant λ_n^2 $(n=0, 1, 2, \ldots)$ comme paramètre, définies dans chaque cas particulier suivant une loi déterminée.

Le cas le plus intéressant est celui, où les fonctions u_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ se déterminent par une équation différentielle linéaire jointe à certaines conditions initiales ou à certaines conditions aux limites de l'intervalle (a, b).

Signalons, pour exemple, les fonctions trigonométriques, fonctions de Bessel et de Lamé, les polynomes de Hermite-Tchébicheff, satisfaisant à l'équation

$$u_u'' - axu_n' + anu_n = 0, \qquad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

où les entiers

$$0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

jouissent le rôle des nombres λ_n^2 $(n=0, 1, 2, \ldots)$.

Signalons aussi les polynomes de Jacobi verifiant l'équation

$$(1-x^2)\,u_n'' + (\alpha-\beta-(\alpha+\beta)\,x)\,u_n' + n\,(n-1+\alpha+\beta)\,u_n = 0,$$

où l'on peut prendre pour les nombres λ_n^2 la suite de nombres

$$\alpha+\beta,\ 2(\alpha+\beta+1),\ 3(\alpha+\beta+2),\ldots,\ n(\alpha+\beta+n-1),\ldots$$

Rappelons encore les polynomes de Tchébicheff satisfaisant à l'équation

$$xu_n''+(\beta-\alpha x)u_n'+\alpha n u_n=0,$$

les fonctions V_n de Sturm-Liouville qui se rencontrent dans le problème de refroidissement d'une barre hétérogène, définies par les équations

$$V_n''+(\lambda_n^2 p-q)V_n=0,\quad a<x<b, \tag{2}$$

jointes aux conditions aux limites

$$V_n'(a)-hV_n(a)=0,\quad V_n'(b)+HV_n(b)=0,$$

où p et q sont les fonctions positives de x, h et H deux constantes positives.

Les fonctions u_n de l'espèce considérée jouissent un rôle important dans diverses questions de l'Analyse et, en particulier, dans le problème du développement d'une fonction arbitraire $f(x)$ en séries infinies procédant suivant les fonctions $u_n\,(n=0,1,2,\ldots)$.

L'étude de ce dernier problème conduit tout d'abord à certaines expressions des fonctions u_n, qu'on appelle souvent „expressions asymptotiques", de la forme suivante

$$u_n=A_n(\cos\xi_n t+w_n(t)),\quad [\text{ou } A_n(\sin\xi_n t+w_n(t))]$$

où t est une fonction déterminée de la variable primitive x, ξ_n désigne une constante dépendant du nombre λ_n, A_n une autre constante dépendant de l'entier n, $w_n(t)$ une fonction dont le module tend vers zéro, lorsque n croît indéfiniment.

Il existe beaucoup de méthodes particulières conduisant dans divers cas particuliers aux expressions approchées de la forme tout à l'heure indiquée.

Rappelons, par exemple, un procédé de Laplace, appliqué par cet illustre géomètre aux polynomes de Legendre et, puis (en 1864), [1]) par Hermite aux polynomes qui portent le nom de polynomes de Hermite-Tchébicheff.

Une autre méthode a été donnée par Bonnet en 1852 [2]) pour les polynomes de Legendre et appliquée ensuite par M. Darboux au cas plus général de polynomes de Jacobi [3]).

---

[1]) Comptes Rendus, 1864. p. 266.

[2]) Journal de Liouville, T. XVII, p. 265, 1852.

[3]) Journal de Liouville, T. IV, 1878, p. 46.

Rappelons encore la méthode de M. Dini [1]), différente de celles de Laplace et de Bonnet et analogue à une méthode de Hanckel, à l'aide de laquelle M. Dini a établi les formules asymptotiques pour les fonctions de Bessel $J_\alpha(\lambda_n x)$, où λ_n est une racine réelle et positive de l'équation

$$zJ_{\alpha+1}(z) - (h+\alpha)\, J_\alpha(z) = 0\,,$$

h désignant une constante réelle, différente de zéro.

Signalons enfin les récentes recherches de M. Adamoff [2]), où l'auteur obtient les expressions asymptotiques pour les polynomes de Hermite-Tchébicheff ainsi que pour un cas particulier des polynomes de Jacobi, analogues à celles de Hermite et de Darboux, en prenant pour le point de départ certaines expressions de ces polynomes à l'aide des intégrales définies.

Eu égard à l'importance de l'approximation des fonctions de très-grands nombres pour divers problèmes de l'Analyse, je me permets d'indiquer, dans ce qui va suivre, une méthode générale et fort simple pour déduire les expressions asymptotiques pour toute suite de fonctions, définies par certaines équations différentielles linéaires du second ordre contenant comme des cas particuliers toutes les fonctions, mentionnées plus haut.

L'idée principale de cette méthode, représentant une généralisation de celle de Bonnet, découle des recherches de Liouville sur le problème du développement d'une fonction arbitraire en série de fonctions de Sturm-Liouville [l'équation (2)], publiées en 1837 dans le tome II du Journal de Liouville et perfectionnées récemment par M. Kneser dans ses Mémoires, insérés aux T. 58 et 60 des „Mathematische Annalen".

Après avoir exposé les fondements de la méthode, dont il s'agit, je l'applique aux divers cas particuliers: aux polynomes de Hermite, à une certaine classe des polynomes de Tchébicheff, aux polynomes de Jacobi et aux fonctions de Bessel.

L'emploi des expressions asymptotiques ainsi obtenues m'a conduit à une transformation des séries connues, qui servent de développement à une fonction arbitraire, en somme de deux autres, que nous appellerons série (α) et série (β), dont l'une (série (β)) converge absolument et uniformément, si la fonction développable satisfait aux certaines conditions très générales.

Donc la recherche des conditions de convergence de la série primitive se ramène, conformément aux idées de Laplace et de Hermite, à celle de convergence de l'autre série (α).

L'étude de ce dernier problème m'a permis non seulement de trouver les conditions générales de convergence uniforme de la série primitive,

---

[1]) Serie di Fourier etc. Pisa, 1880.

[2]) Bulletin de l'Ecole polythechnique de St-Petersbourg, 1906.

mais encore de déterminer la somme de cette série toutes les fois que la série (α) converge uniformément.

J'ai obtenu ce résultat en appliquant convenablement mon théorème général, établi en 1904 dans le Mémoire: „Sur certaines égalités générales, communes aux plusieurs suites de fonctions etc.", inséré dans les Bulletins de l'Académie des Sciences de St-Pétersbourg.

Je suis arrivé ainsi à une méthode nouvelle pour résoudre le problème du développement d'une fonction arbitraire en séries procédant suivant les fonctions, mentionnées plus haut.

Après avoir examiné divers cas particuliers, dont l'étude m'a conduit au résultat que je viens d'énoncer, j'expose les principes de la méthode sous la forme générale et je termine mes recherches en appliquant la méthode, dont il s'agit, au problème du développement d'une fonction donnée en série de fonctions de Sturm-Liouville, qui présentent une classe de fonctions trés étendue contenant comme des cas particuliers les fonctions trigonométriques, les fonctions de Bessel, celles de Lamé et beaucoup d'autres.

2. La suite de nombres

$$\lambda_0^2 < \lambda_1^2 < \lambda_2^2 < \lambda_3^2 < \ldots < \lambda_n^2 < \ldots, \tag{3}$$

$$\lim_{n=\infty} \lambda_n^2 = \infty$$

étant donnée, supposons que les fonctions correspondantes $u_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$ satisfassent à l'équation

$$p u_n'' + q u_n' + \lambda_n^2 r u_n = 0 \quad \text{pour } a \leqq x \leqq b. \tag{4}$$

Supposons que les fonctions p et r de la variable réelle x restent continues, positives et ne s'annulent pas à l'intérieur de l'intervalle (a, b).

Supposons encore que p et r admettent les dérivées de deux premiers ordres et que la fonction q, restant continue, admette la dérivée du premier ordre dans l'intervalle (a, b).

Soit

$$x = \alpha, \quad a < \alpha < b$$

un point quelconque, pris arbitrairement à l'intérieur de l'intervalle (a, b).

Ce sera un point ordinaire pour la fonction u_n vérifiant l'équation linéaire (4), en vertu des hypothèses faites sur les fonctions p, q et r.

L'équation (4) admet au voisinage du point $x = \alpha$ deux solutions particulières indépendantes, continues à l'intérieur de l'intervalle (a, b); on peut les définir par les conditions initiales suivantes

$$u_n(\alpha) = A_n, \quad u_n'(\alpha) = B_n, \tag{5}$$

A_n et B_n étant des constantes.

Cela posé, indiquons une méthode particulière de l'intégration de l'équation (4) qui nous conduira tout de suite aux expressions asymptotiques dont nous avons parlé plus haut (nº 1).

Introduisons au lieu de x une nouvelle variable t

$$t = \varphi(x),$$

φ étant une fonction quelconque donnée.

L'équation (4) devient

$$p\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 \frac{d^2u_n}{dt^2} + \left[p\frac{d^2t}{dx^2} + q\frac{dt}{dx}\right]\frac{du_n}{dt} + \lambda_n^2 r u_n = 0. \tag{6}$$

Posons

$$p\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = r, \quad t = \int dx\sqrt{\frac{r}{p}}. \tag{7}$$

On obtient

$$\frac{d^2u_n}{dt^2} + 2\Theta\frac{du_n}{dt} + \lambda_n^2 u_n = 0, \tag{8}$$

où l'on a posé

$$2\Theta = \frac{2qr + pr' - rp'}{2r\sqrt{rp}}. \tag{9}$$

Remplaçant dans Θ la variable x par son expression en t à l'aide de (7), on peut écrire

$$\frac{d^2u_n}{dt^2} + 2\Theta(t)\frac{du_n}{dt} + \lambda_n^2 u_n = 0. \tag{9_1}$$

Introduisons maintenant au lieu de u_n une nouvelle inconnue v_n en posant

$$u_n = z(t)\, v_n(t). \tag{10}$$

On obtient cette équation en $v_n(t)$

$$z\frac{d^2v_n}{dt^2} + [2z' + 2\Theta(t)z]\frac{dv_n}{dt} + [z'' + 2\Theta(t)z' + \lambda_n^2 z]v_n = 0, \tag{11}$$

où

$$z' = \frac{dz}{dt}, \quad z'' = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Choisissons $z(t)$ de façon que l'on ait

$$z' + \Theta(t).z = 0.$$

On peut poser

(12) $$z = e^{-\int \theta(t)\,dt}.$$

L'équation (11) se réduira à la suivante

(13) $$\frac{d^2 v_n}{dt^2} + \lambda_n^2 v_n = \mu(t)\, v_n\,,$$

où l'on a posé

(14) $$\mu(t) = \frac{d\Theta(t)}{dt} + \Theta^2(t).$$

Désignons par t_0, τ et t_1 les valeurs de t correspondant respectivement à $x = a$, $x = \alpha$, $x = b$.

En se rappelant l'hypothèse, faite sur les fonctions p, q et r, on peut affirmer, en vertu de (9) et (14), que la fonction $\mu(t)$ reste continue à l'intérieur de l'intervalle (t_0, t_1).

Transformons les conditions initiales (5).

L'équation (10) donne

$$A_n = u_n(\alpha) = z(\tau)\, v_n(\tau)\,,$$

$$\left.\frac{du_n}{dx}\frac{dx}{dt}\right|_{x=\alpha} = \frac{\sqrt{p(\alpha)}}{\sqrt{r(\alpha)}} B_n = z'(\tau)\, v_n(\tau) + z(\tau)\, v_n'(\tau)\,,$$

d'où

(15) $$v_n(\tau) = \frac{A_n}{z(\tau)} = A_n'\,,$$

(16) $$v_n'(\tau) = \frac{\sqrt{p(\alpha)}}{z(\tau)\sqrt{r(\alpha)}} B_n - \frac{z'(\tau)}{z(\tau)} A_n = B_n'.$$

3. Cherchons une solution de l'équation différentielle (13) satisfaisant aux conditions (15) et (16).

Soit

$$v = C_1 \cos \lambda_n t + C_2 \sin \lambda_n t$$

l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \lambda_n^2 v = 0.$$

Moyennant la méthode de Cauchy nous obtiendrons l'intégrale générale de l'équation (13) sous la forme suivante

$$v_n = D_1 \cos \lambda_n t + D_2 \sin \lambda_n t\,,$$

où D_1 et D_2 sont les fonctions de t, définies par les équations

$$\frac{dD_1}{dt}\cos\lambda_n t + \frac{dD_2}{dt}\sin\lambda_n t = 0\,,$$

$$\frac{dD_1}{dt}\sin\lambda_n t - \frac{dD_2}{dt}\cos\lambda_n t = -\frac{\mu(t)}{\lambda_n} v_n\,,$$

qui donnent

$$D_1 = C_1 - \frac{1}{\lambda_n}\int_\tau^t \mu(\xi)\, v_n(\xi) \sin\lambda_n\xi\, d\xi\,,$$

$$D_2 = C_2 + \frac{1}{\lambda_n}\int_\tau^t \mu(\xi)\, v_n(\xi) \cos\lambda_n\xi\, d\xi\,,$$

C_1 et C_2 étant des constantes arbitraires.

On a donc

$$v_n = C_1\cos\lambda_n t + C_2\sin\lambda_n t - \frac{1}{\lambda_n}\int_\tau^t \mu(\xi)\, v_n(\xi)\sin\lambda_n(\xi - t)\, d\xi \tag{17}$$

et

$$v'_n = \frac{dv_n}{dt} = -\lambda_n(C_1\sin\lambda_n t - C_2\cos\lambda_n t) + \int_\tau^t \mu(\xi)\, v_n(\xi)\cos\lambda_n(\xi - t)\, d\xi\,.$$

Il ne nous reste qu'à vérifier les équations (15) et (16).

On trouve aisément

$$C_1 = A'_n\cos\lambda_n\tau - \frac{B'_n}{\lambda_n}\sin\lambda_n\tau\,,$$

$$C_2 = A'_n\sin\lambda_n\tau + \frac{B'_n}{\lambda_n}\cos\lambda_n\tau\,,$$

et, en vertu de (17),

$$v_n = A'_n\cos\lambda_n(t-\tau) + \frac{B'_n}{\lambda_n}\sin\lambda_n(t-\tau) - \frac{1}{\lambda_n}\int_\tau^t \mu(\xi)\, v_n(\xi)\sin\lambda_n(\xi - t)\, d\xi\,. \tag{17_1}$$

4. Nous allons distinguer, pour plus de simplicité, deux cas différents

$$1)\ B'_n = 0\,,\ A'_n \gtreqless 0 \ \text{et}\ 2)\ A'_n = 0\,,\ B'_n \gtreqless 0\,.$$

Dans le premier cas on trouve

$$v_n = A_n' \cos \lambda_n (t - \tau) - \frac{1}{\lambda_n} \int_\tau^t \mu(\xi)\, v_n(\xi) \sin \lambda_n (\xi - t)\, d\xi. \tag{18}$$

Substituant cette expression de v_n dans l'intégrale du second membre de cette équation on obtient

$$v_n = A_n' \cos \lambda_n (t - \tau) - \frac{A_n'}{\lambda_n} \int_\tau^t \mu(\xi) \sin \lambda_n (\xi - t) \cos \lambda_n (\xi - \tau)\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_n^2} \int_\tau^t \mu(\xi) \sin \lambda_n (\xi - t) \left(\int_\tau^\xi \mu(\xi_1)\, v_n(\xi_1) \sin \lambda_n (\xi_1 - \xi)\, d\xi_1 \right) d\xi.$$

Remplaçant dans cette derniére intégrale $v_n(\xi_1)$ par son expression qui résulte de (18), on trouve ensuite

$$v_n = A_n' [\cos \lambda_n (t - \tau) - \frac{1}{\lambda_n} \int_\tau^t \mu(\xi) \sin \lambda_n (\xi - t) \cos \lambda_n (\xi - \tau)\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_n^2} \int_\tau^t \mu(\xi) \sin \lambda_n (\xi - t)\, d\xi \left(\int_\tau^\xi \mu(\xi_1) \sin \lambda_n (\xi_1 - \xi) \cos \lambda_n (\xi_1 - \tau)\, d\xi_1 \right) d\xi] -$$

$$- \frac{1}{\lambda_n^3} \int_\tau^t \mu(\xi) \sin \lambda_n (\xi_1 - t)\, d\xi \int_\tau^\xi \mu(\xi_1) \sin \lambda_n (\xi_1 - \xi)\, d\xi_1 \int_\tau^{\xi_1} \mu(\xi_2) v_n(\xi_2) \sin \lambda_n (\xi_2 - \xi_1)\, d\xi_2.$$

En continuant ainsi de suite nous obtiendrons une expression de v_n sous la forme d'une série, disposée suivant les puissances croissantes de

$$\varepsilon_n = \frac{1}{\lambda_n}.$$

Remplaçant, pour plus de symétrie, t par ξ_0, ξ par ξ_1, ξ_k par ξ_{k-1} et posant

$$\mu(\xi_k) \sin \lambda_n (\xi_k - \xi_{k-1}) = \varphi(\xi_k, \xi_{k-1}),$$

on aura évidemment

$$
\begin{aligned}
v_n(\xi_0) = A'_n \{ \cos \lambda_n (\xi_0 - \tau) - \varepsilon_n \int_\tau^{\xi_0} \varphi(\xi_1, \xi_0) \cos \lambda_n (\xi_1 - \tau)\, d\xi_1 + \\
+ \varepsilon_n^2 \int_\tau^{\xi_0} \varphi(\xi_1, \xi_0)\, d\xi_1 \int_\tau^{\xi_1} \varphi(\xi_2, \xi_1) \cos \lambda_n (\xi_2 - \tau)\, d\xi_2 + \\
+ \ldots + (-1)^k \varepsilon_n^k \int_\tau^{\xi_0} \varphi(\xi_1, \xi_0)\, d\xi_1 \int_\tau^{\xi_1} \varphi(\xi_2, \xi_1)\, d\xi_2 \ldots \int_\tau^{\xi_{k-1}} \varphi(\xi_k, \xi_{k-1}) \cos \lambda_n (\xi_k - \tau)\, d\xi_k \} + \\
+ (-1)^{k+1} \varepsilon_n^{k+1} \int_\tau^{\xi_0} \varphi(\xi_1, \xi_0)\, d\xi_1 \int_\tau^{\xi_1} \varphi(\xi_2, \xi_1)\, d\xi_2 \ldots \int_\tau^{\xi_{k-1}} \varphi(\xi_k, \xi_{k-1})\, d\xi_k \int_\tau^{\xi_k} \varphi(\xi_{k+1}, \xi_k)\, v_n(\xi_{k+1})\, d\xi_{k+1}.
\end{aligned}
\tag{18_1}
$$

5. Revenons à l'équation (18).

Supposons, pour fixer les idées, que $t > \tau$ et désignons par M'_n le maximum de $|v_n|$ dans l'intervalle (τ, b_1), où b_1 est un nombre quelconque, pris arbitrairement dans l'intervalle (τ, t_1).

L'équation (18) donne pour tous les points de l'intervalle (τ, b_1), intérieur à (τ, t_1),

$$
|v_n| \leqq |A'_n| + \frac{M'_n}{\lambda_n} \int_\tau^t |\mu(\xi)|\, d\xi. \tag{19}
$$

Posons

$$
\int_\tau^t |\mu(\xi)|\, d\xi = K < \int_{a_1}^{b_1} |\mu(\xi)|\, d\xi = N.
$$

On obtient, en tenant compte de (19),

$$
M'_n \left(1 - \frac{K}{\lambda_n}\right) \leqq |A'_n|.
$$

En se rappelant que λ_n croît indéfiniment avec l'indice n, on en conclut qu'il existe un entier ν tel qu'on ait, pour toutes les valeurs de n, plus grandes que ν,

$$
1 - \frac{K}{\lambda_n} > 1 - \frac{K}{\lambda_\nu} = Q_1 \qquad \text{pour } n \geqq \nu,
$$

Q_1 étant, pour toute valeur donnée de t, un nombre positif fixe, ne dépendant pas de n.

On aura donc, pour $n \overline{\gtreqless} \nu$ et pour toute intervalle (τ, b_1), intérieur à (τ, b),

$$|v_n| \leqq M'_n \leqq \frac{|A'_n|}{Q_1} = Q\,|A'_n| \qquad \text{pour } n \overline{\gtreqless} \nu. \tag{20}$$

Nous avons supposé que $t > \tau$, mais il est évident que l'inégalité, analogue à celle de (20), aura aussi lieu pour tout intervalle (a_1, τ), a_1 étant un nombre quelconque, pris arbitrairement entre les nombres t_0 et τ, c'est-à-dire

$$|v_n| \leqq M''_n \leqq Q\,|A'_n| \qquad \text{pour } n \overline{\gtreqless} \nu \tag{20_1}$$

et pour toutes les valeurs de $t (= \xi_0)$ appartenant à l'intervalle (a_1, τ), M''_n désignant le maximum de $|v_n|$ dans cet intervalle.

Les inégalités (20) et (20_1) conduisent à la suivante

$$|v_n| \leqq M_n \leqq Q\,|A_n| \qquad \text{pour } n \geqq \nu \tag{21}$$

et pour

$$a_1 \leqq t \leqq b_1,$$

où M_n désigne le maximum de $|v_n|$ dans l'intervalle (a_1, b_1).

6. Désignons maintenant par r_k le reste de la série (18_1)

$$r_k = (-1)^{k+1} \varepsilon_n^{k+1} \int_\tau^{\xi_0} \varphi(\xi_1, \xi_0)\,d\xi_1 \int_\tau^{\xi_1} \varphi(\xi_2, \xi_1)\,d\xi_2 \ldots \int_\tau^{\xi_{k-1}} \varphi(\xi_k, \xi_{k-1})\,d\xi_k \int_\tau^{\xi_k} \varphi(\xi_{k+1}, \xi_k) v_n(\xi_{k+1})\,d\xi_{k+1}$$

En remarquant que

$$\left| \int_\tau^{\xi_s} \varphi(\xi_s, \xi_{s-1})\,d\xi_s \right| \leqq \int_\tau^{\xi_s} |\varphi(\xi_s, \xi_{s-1})|\,d\xi_s \leqq \int_\tau^{t} |\mu(\xi_s)|\,d\xi_s = K < N \tag{22}$$

et en tenant compte de (21), on trouve

$$|r_k| < Q\,|A'_n|\,(\varepsilon_n K)^{k+1} = Q\,|A'_n| \left(\frac{N}{\lambda_n}\right)^{k+1}.$$

On en conclut qu'il existe un entier k_0 tel qu'on ait, pour $k \geqq k_0$,

$$|r_k| < \delta, \tag{23}$$

δ désignant un nombre positif, donné à l'avance, pourvu que

$$1 - \frac{N}{\lambda_n} > 0.$$

Il s'ensuit que l'inégalité (23) a lieu pour toutes les valeurs de n, plus grandes que ν (voir n[0] précédent), et pour toutes les valeurs de $t(=\xi_0)$ de l'intervalle (τ, b_1).

Les inégalités (22) supposent que $\xi_s > \tau$, or il est évident que l'inégalité (23) reste vraie pour toutes les valeurs de $t(=\xi_0)$ appartenant à l'intervalle (a_1, b_1), intérieur à l'intervalle donné (t_0, t_1).

L'inégalité (23) montre que *la série*

$$A_n\Big\{\cos\lambda_n(\xi_0-\tau)-\varepsilon_n\int_\tau^{\xi_0}\varphi(\xi_1,\xi_0)\cos\lambda_n(\xi_1-\tau)d\xi_1+\varepsilon_n^2\int_\tau^{\xi_0}\varphi(\xi_1,\xi_0)d\xi_1\int_\tau^{\xi_1}\varphi(\xi_2,\xi_1)\cos\lambda_n(\xi_2-\tau)d\xi_2+\ldots$$

$$+\ldots+(-1)^k\varepsilon_n^k\int_\tau^{\xi_0}\varphi(\xi_1,\xi_0)d\xi_1\int_\tau^{\xi_1}\varphi(\xi_2,\xi_1)d\xi_2\ldots\int_\tau^{\xi_{k-1}}\varphi(\xi_k,\xi_{k-1})\cos\lambda_n(\xi_k-\tau)d\xi_k+\ldots\Big\}$$

converge uniformément à l'intérieur de l'intervalle (t_0, t_1), *pourvu que* $n \geqq \nu$, *et sa somme est égale à* $v_n(\xi_0)\,[=v_n(t_0)]$ [1]).

Cette série donne une moyenne fort simple de calcul des valeurs de la fonction $v_n(\xi_0)$, pour les valeurs assez grandes de l'indice n, avec une approximation donnée à l'avance.

7. L'inégalité (21) peut être remplacée par l'égalité suivante

$$v_n = A_n'\vartheta_n Q,$$

où

(24) $$|\vartheta_n| < 1.$$

L'équation (18) devient

(25) $$v_n = A_n'\left(\cos\lambda_n(\xi_0-\tau)+\frac{\omega_n(\xi_0)}{\lambda_n}\right),$$

où l'on a posé

$$\omega_n(\xi_0) = -Q\int_\tau^{\xi_0}\mu(\xi_0)\,\vartheta_n(\xi_0)\sin\lambda_n(\xi-\xi_0)\,d\xi.$$

De cette égalité on tire, eu égard à (24),

(26) $$|\omega_n(\xi_0)| < Q\int_\tau^{\xi_0}|\mu(\xi)|\,d\xi, \qquad \text{si } \xi_0 > \tau$$

---

[1]) Il est aisé de voir que cette série converge non seulement uniformément, mais encore absolument.

et

$$|\omega_n(\xi_0)| < Q \int_{\xi_0}^{\tau} |\mu(\xi)|\, d\xi\,, \qquad \text{si } \xi_0 < \tau. \tag{26_1}$$

On a donc, quelle que soit la valeur de ξ_0, comprise entre les limites t_0 et t_1,

$$|\omega_n(\xi_0)| < QK = N \qquad \text{pour } n \geqq v, \tag{27}$$

où

$$N = \frac{K}{1 - \frac{K}{\lambda_\nu}}, \quad K < \int_{a_1}^{b_1} |\mu(\xi)|\, d\xi. \tag{28}$$

La formule (25) donne une expression asymptotique de la fonction v_n pour les valeurs de n assez grandes.

Nous obtiendrons l'expression correspondante de $u_n(x)$ à l'aide de l'équation (10) en y remplaçant t par son expression en x, A_n' par son expression en A_n à l'aide de (15).

On trouve ainsi

$$u_n(x) = \frac{A_n}{z(\tau)} z(\varphi(x)) \left[\cos \lambda_n (\varphi(x) - \tau) + \frac{\omega_n(\varphi(x))}{\lambda_n}\right]. \tag{29}$$

A cette égalité il faut ajouter encore l'inégalité suivante

$$|\vartheta_n(x)| = |\omega_n(\varphi(x))| < N \qquad \text{pour } n \geqq v. \tag{30}$$

8. Considérons maintenant le second cas, où

$$A_n' = 0\,, \quad B_n' \gtrless 0. \tag{30_1}$$

Il suffit de remplacer dans (18_1) A_n' par $\dfrac{B_n'}{\lambda_n}$, $\cos \lambda_n (\xi_0 - \tau)$ par $\sin \lambda_n (\xi_0 - \tau)$ pour obtenir immédiatement la formule suivante

$$\begin{aligned} v_n(\xi_0) = \frac{B_n'}{\lambda_n} \Big\{ & \sin\lambda_u(\xi_0 - \tau) - \varepsilon_n \int_{\tau}^{\xi_0} \varphi(\xi_1, \xi_0) \sin\lambda_n(\xi_1 \;\; \tau)\, d\xi_1 + \varepsilon_n^2 \int_{\tau}^{\xi_0} \varphi(\xi_1, \xi_0)\, d\xi_1 \int_{\tau}^{\xi_1} \varphi(\xi_2, \xi_1) \sin\lambda_n(\xi_2 - \tau)\, d\xi_2 + \cdots \\ & \ldots + (-1)^k \varepsilon_n^k \int_{\tau}^{\xi_0} \varphi(\xi_1, \xi_0)\, d\xi_1 \int_{\tau}^{\xi_1} \varphi(\xi_2, \xi_1)\, d\xi_2 \ldots \int_{\tau}^{\xi_{k-1}} \varphi(\xi_k, \xi_{k-1}) \sin\lambda_n(\xi_k - \tau)\, d\xi_k \Big\} + r_k, \end{aligned} \tag{31}$$

où

$$r_k = (-1)^{k+1} \varepsilon^{k+1} \int_{\tau}^{\xi_0} \varphi(\xi_1, \xi_0) d\xi_1 \int_{\tau}^{\xi_1} \varphi(\xi_2, \xi_1) d\xi_2 \ldots \int_{\tau}^{\xi_{k-1}} \varphi(\xi_k, \xi_{k-1}) d\xi_k \int_{\tau}^{\xi_k} \varphi(\xi_{k+1}, \xi_k) \sin \lambda_n (\xi_{k+1} - \tau) d\xi_{k+1}.$$

En répétant presque textuellement les raisonnements du n^0 6, on s'assure aisément que *la série (31) converge absolument et uniformément à l'intérieur de l'intervalle* (t_0, t_1) *et que sa somme est égale à* $v_n(\xi_0)$.

Formons maintenant l'expression asymptotique de v_n dans le cas considéré.

En répétant les raisonnements du n^0 5 on trouve, en tenant compte de (30_1),

$$(32) \qquad |v_n(\xi_0)| < \frac{|B_n'|}{\lambda_n} Q \qquad \text{pour } n \gtreqqless v$$

et pour

$$a_1 \leqq \xi_0 \leqq b_1.$$

L'inégalité précédente donne

$$v_n = \frac{B_n'}{\lambda_n} \vartheta_n Q, \quad |\vartheta_n| < 1.$$

Substituant cette expression de v_n dans (17_1) on obtient

$$(33) \qquad v_n(\xi_0) = \frac{B_n'}{\lambda_n} \left(\sin \lambda_n (\xi_0 - \tau) + \frac{\omega_n(\xi_0)}{\lambda_n} \right),$$

où, comme au n^0 7,

$$\omega_n(\xi_0) = -Q \int_{\tau}^{\xi_0} \mu(\xi) \vartheta_n(\xi) \sin \lambda_n (\xi - \xi_0) \, d\xi,$$

et

$$(34) \qquad |\omega_n(\xi_0)| < Q \cdot K = N \qquad \text{pour } n \gtreqqless v.$$

Moyennant enfin l'équation (10) on trouve la formule correspondante pour $u_n(x)$

$$(34_1) \qquad u_n(x) = \frac{B_n'}{\lambda_n} z(\varphi(x)) \left(\sin \lambda_n (\varphi(x) - \tau) + \frac{\omega_n(\varphi(x))}{\lambda_n} \right),$$

où il faut remplacer B_n' par son expression en B_n qui résulte de l'équation (16).

9. Faisons enfin quelques remarques sur le cas général, où A'_n et B'_n sont différents de zéro.

L'équation (17_1) montre que

$$|v_n| < |A'_n \cos \lambda_n (t-\tau) + \frac{B'_n}{\lambda_n} \sin \lambda_n (t-\tau)| \, Q \qquad \text{pour } n \geqq \nu .$$

On peut donc poser

$$(34_2) \qquad v_n = Q\left(A'_n \vartheta_{1n} + \frac{B'_n}{\lambda_n} \vartheta_{2n}\right),$$

où

$$|\vartheta_{1n}| < 1, \quad |\vartheta_{2n}| < 1.$$

Substituant (34_2) dans (17_1) on obtient cette formule asymptotique pour v_n

$$(35) \quad v_n = A'_n \left(\cos \lambda_n (t-\tau) + \frac{\omega_n^{(1)}(t)}{\lambda_n}\right) + \frac{B'_n}{\lambda_n}\left(\sin \lambda_n (t-\tau) + \frac{\omega_n^{(2)}(t)}{\lambda_n}\right),$$

où $\omega_n^{(1)}(t)$ et $\omega_n^{(2)}(t)$ sont les fonctions de t satisfaisant aux inégalités suivantes

$$\left.\begin{array}{l} |\omega_n^{(1)}(t)| < Q.K = N, \\ |\omega_n^{(2)}(t)| < Q.K = N \end{array}\right. \qquad \text{pour } n \geqq \nu .$$

Si nous employons le même procédé qu'au n° 4 (ou au n° 8), nous obtiendrons l'expression de v_n sous la forme de la série, disposée suivant les puissances entières de $\varepsilon_n = \frac{1}{\lambda_n}$, absolument et uniformément convergente à l'intérieur de l'intervalle (t_0, t_1).

10. Indiquons un autre procédé pour déduire les expressions asymptotiques, préférable dans plusieurs cas particuliers.

Considérons, par exemple, le cas qui se rencontre le plus souvent dans les applications: supposons qu'il existe une fonction $f(x)$, positive dans l'intervalle (a, b) et telle qu'on ait, pour toutes les valeurs de n plus grandes qu'un entier fixe n_0

$$(\alpha) \qquad \int_a^b f u_n^2 \, dx = \int_{t_0}^{t_1} f\sqrt{p} . z^2 v_n^2 dt < A_n'^2 K^2 \lambda^{2\beta},$$

où K désigne une constante fixe, ne dépendant pas de n, β désigne un nombre satisfaisant à la condition

$$|\beta| < 1.$$

On trouve

$$\left(\int_\tau^t \mu(\xi) v_n(\xi) \sin\lambda_n(\xi - t)\, d\xi\right)^2 + \left(\int_\tau^t \frac{\mu(\xi)}{\sqrt{f(\xi)}\, p^{\frac{1}{4}}(\xi) z(\xi)} \sin\lambda_n(\xi - t) \sqrt{f(\xi)}\, p^{\frac{1}{4}}(\xi) z(\xi) v_n(\xi)\, d\xi\right)^2 <$$

$$< A_n'^2 K^2 \lambda_n^{2\beta} \int_\tau^t \frac{\mu^2(\xi)}{f(\xi)\sqrt{p(\xi)}\, z^2(\xi)} \sin^2\lambda_n(\xi - t)\, d\xi.$$

Supposons qu'on ait, pour toutes les valeurs de t, comprises dans l'intervalle (τ, t_1)

$$(36) \qquad \int_\tau^t \frac{\mu^2(\xi)}{f(\xi)\sqrt{p(\xi)}\, z^2(\xi)} \sin^2\lambda_n(\xi - t)\, d\xi < \int_\tau^t \frac{\mu^2(\xi)}{f(\xi)\sqrt{p(\xi)}\, z^2(\xi)}\, d\xi = M^2(t) < N^2,$$

N désignant un nombre fixe.

Ces conditions étant remplies, on peut écrire, dans le cas de $B_n' = 0$,

$$(37) \qquad v_n = A_n'\left(\cos\lambda_n(t - \tau) + \frac{\omega_n(t)}{\lambda_n^{1-\beta}}\right),$$

où la fonction

$$(38) \qquad \omega_n(t) = -\frac{1}{A_n'} \int_\tau^t \mu(\xi) v_n(\xi) \sin\lambda_n(\xi - t)\, d\xi$$

satisfait à l'inégalité

$$(38_1) \qquad |\omega_n(t)| < K\, |M(t)| < KN$$

pour toutes les valeurs de t, comprises entre τ et t_1.

Nous avons supposé, dans ce qui précède, que $t > \tau$.

Si $t < \tau$, il suffit de supposer que

$$\int_t^\tau \frac{\mu^2(\xi)}{f(\xi)\sqrt{p(\xi)}\, z^2(\xi)} \sin^2\lambda_n(\xi - t)\, d\xi = M^2(t) < N$$

pour obtenir pour v_n la même formule asymptotique (38) jointe à l'inégalité (38_1).

Supposons maintenant que $A_n' = 0$ et que, pour toutes les valeurs de n, plus grandes qu'un entier fixe n_0,

$$(\alpha_1) \qquad \int_a^b f u_n^2\, dx = \int_{t_0}^{t_1} f \sqrt{p}\, z^2 v_n^2\, d\xi < \frac{B_n'^2}{\lambda_n^2} K^2 \lambda_n^{2\beta},$$

où K est un nombre fixe, β est un nombre dont le module est plus petit que l'unité.

Dans ce cas on trouve, eu égard à (36) et (36_1), la formule suivante

$$(39) \qquad v_n = \frac{B_n'}{\lambda_n}\left(\sin \lambda_n (t - \tau) + \frac{\omega_n(t)}{\lambda_n^{1-\beta}}\right),$$

où la fonction

$$(40) \qquad \omega_n(t) = -\frac{\lambda_n}{B_n'} \int_\tau^t \mu(\xi)\, v_n(\xi) \sin \lambda_n (\xi - t)\, d\xi$$

satisfait à l'inégalité

$$(40_1) \qquad |\omega_n(t)| < K\,|M(t)| < KN.$$

11. Les formules (37) et (38_1) ainsi que celles de (39) et (40_1) peuvent être transformées de la manière suivante:

Substituant (37) dans (17_1), en y posant $B_n' = 0$, on trouve

$$(41) \qquad v_n = A_n'\left(\cos \lambda_n (t - \tau) + \frac{\vartheta_n(t)}{\lambda_n}\right),$$

où l'on a posé

$\xi - t$

$$(42) \qquad \vartheta_n(t) = -\int_\tau^t \mu(\xi) \sin \lambda_n (\xi - t) \cos \lambda_n \cancel{(t - \tau)}\, d\xi - \frac{1}{\lambda_n^{1-\beta}} \int_\tau^t \mu(\xi) \sin \lambda_n (\xi - t)\, \omega_n(\xi)\, d\xi.$$

De cette égalité on tire, en tenant compte de (38_1) et de ce que λ_n^2 croît en même temps que l'indice n,

$$(43) \qquad |\vartheta_n(t)| < \int_\tau^t |\mu(\xi)|\, d\xi + \frac{K}{\lambda_n^{1-\beta}} \int_\tau^t |\mu(\xi)|\,|M(\xi)|\, d\xi = \psi(t) <$$

$$< N + \frac{KN^2}{\lambda_1^{1-\beta}} = C,$$

où $\psi(t)$ désigne une fonction positive ne dépendant pas de n, C désigne un nombre positif fixe.

La même inégalité a lieu pour $t < \tau$, il suffit seulement de remplacer dans (43) t par τ et inversement.

De la même manière, en tenant compte de (39), (40_1) et (17_1), on obtient cette formule asymptotique pour v_n, dans le cas de $A_n' = 0$,

$$v_n = \frac{B_n'}{\lambda_n}\left(\sin \lambda_n (t-\tau) + \frac{\vartheta_n(t)}{\lambda_n}\right), \tag{44}$$

où la fonction

$$\vartheta_n(t) = -\int_\tau^t \mu(\xi) \sin \lambda_n (\xi - t) \sin \lambda_n (t-\tau)\, d\xi - \frac{1}{\lambda_n^{1-\beta}} \int_\tau^t \mu(\xi) \sin \lambda_n (\xi - t)\, \omega_n(\xi)\, d\xi \tag{45}$$

satisfait, comme dans le cas précédent, à l'inégalité

$$|\vartheta_n(t)| < \int_\tau^t |\mu(\xi)|\, d\xi + \frac{K}{\lambda_1^{1-\beta}} \int_\tau^t |\mu(\xi)|\, |M(\xi)|\, d\xi = \psi(t) <$$

$$< N + \frac{KN^2}{\lambda_1^{1-\beta}} = C,$$

si $t > \tau$.

L'inégalité analogue aura lieu dans le cas, où $t < \tau$; il suffit seulement de remplacer dans les limites des intégrales t par τ et inversement.

Les formules (41) et (44) conduisent, en vertu de (10), aux expressions asymptotiques suivantes pour u_n

$$u_n = \frac{A_n}{z(\tau)} z(\varphi(x)) \left[\cos \lambda_n (\varphi(x) - \tau) + \frac{\vartheta_n(\varphi(x))}{\lambda_n}\right], \quad \text{si } B_n' = 0 \tag{46}$$

$$u_n = \frac{B_n'}{\lambda_n} z(\varphi(x)) \left[\sin \lambda_n (\varphi(x) - \tau) + \frac{\vartheta_n(\varphi(x))}{\lambda_n}\right], \quad \text{si } A_n' = 0, \tag{47}$$

où il faut remplacer B_n' par son expression en B_n qui résulte de l'équation (16).

Les formules asymptotiques (46) et (47), jointes aux inégalités correspondantes (43) et (45), sont précisément celles que nous voulions établir.

Il y a une différence essentielle entre les formules (29) et (34_1) et celles de (46) et (47).

En effet, les inégalités (43) et (45) *ont lieu pour toutes les valeurs de n, plus grandes qu'un nombre fixe n_0 qui ne dépend pas de la valeur donnée de t*, tandis que les inégalités correspondantes (27) et (34) exigent que l'on ait $n \geqq v$, où v représente un entier, défini par l'une des conditions

$$1 - \frac{\int\limits_{\tau}^{t} |\mu(\xi)|\, d\xi}{\lambda_\nu} > 0, \quad \text{si } t > \tau,$$

$$1 - \frac{\int\limits_{t}^{\tau} |\mu(\xi)|\, d\xi}{\lambda_\nu} > 0, \quad \text{si } t < \tau$$

et dépendant, par suite, de la valeur donnée de la variable t.

12. Appliquons les formules générales à certains cas particuliers.

Considérons, en premier lieu, les polynomes u_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) de Hermite-Tchébicheff satisfaisant aux équations

$$u_n'' - at\,u_n' + an\,u_n = 0, \tag{48}$$

a désignant une constante positive.

On sait que pour n pair

$$\begin{aligned} u_n(0) &= (-1)^{\frac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}}\, 1.3.5\ldots(n-1), \\ u_n'(0) &= 0 \end{aligned} \tag{49}$$

et, pour n impair,

$$\begin{aligned} u_n(0) &= 0, \\ u_n'(0) &= (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, 1.3.5\ldots n . a^{\frac{n+1}{2}}. \end{aligned} \tag{50}$$

Chacune des fonctions u_n reste continue pour toutes les valeurs réelles de t, comprises entre $-\infty$ et $+\infty$.

L'équation (48) a précisément la forme de l'équation (9_1) du n° 2, où il faut poser

$$2\Theta(t) = -at, \quad \lambda_n^2 = an.$$

On a donc, dans le cas considéré,

$$\begin{aligned} z &= e^{-\int \Theta(t)\,dt} = e^{\frac{at^2}{4}}, \\ u_n &= e^{\frac{at^2}{4}} v_n \end{aligned} \tag{51}$$

et (voir l'équation (13) du n° 2)

$$v_n'' + an\,v_n = \frac{a}{2}\left(\frac{at^2}{2} - 1\right) v_n. \tag{52}$$

On a donc

$$\mu(t) = \frac{a}{2}\left(\frac{at^2}{2} - 1\right). \tag{53}$$

L'équation (51) donne

$$u_n(0) = v_n(0), \quad u_n'(0) = v_n'(0).$$

On trouve donc, pour n pair, en supposant que $\tau = 0$,

$$A_n' = (-1)^{\frac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}} 1.3.5\ldots(n-1), \quad B_n' = 0 \tag{54}$$

et, pour n impair,

$$A_n' = 0, \quad B_n' = (-1)^{\frac{n-1}{2}} 1.3.5\ldots n.a^{\frac{n+1}{2}}. \tag{55}$$

13. Considérons d'abord le premier cas (n pair).

En se rappelant que

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{at^2}{2}} u_n^2\, dt = 1.2.3\ldots n\, a^n \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$ /n

on trouve, en vertu de (54),

$$\frac{I_n}{A_n'^2} = \frac{1.2.3\ldots n.a^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{a^n(1.3.5\ldots(n-1))^2} = \frac{2.4\ldots(n-2).n}{1.3.5\ldots(n-1)}\sqrt{\frac{2\pi}{a}}.$$ r 1

Or,

$$\frac{2.4\ldots 2k}{1.3.5\ldots 2k-1} < \sqrt{2k+1}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad n = 2k.$$

Par conséquent

$$\frac{I_n}{A_n'^2} < \pi\sqrt{\frac{n+1}{a}} = \frac{\pi}{a}\lambda_n\sqrt{1+\frac{1}{n}} < \frac{\pi\sqrt{2}}{a}\lambda_n$$

pour toutes les valeurs de n, plus grandes que l'unité.

Cette inégalité coïncide avec celle de (α) du n° 9, si l'on pose

$$f(t) = e^{\frac{-at^2}{2}}, \quad K^2 = \frac{\pi\sqrt{2}}{a}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \tag{56}$$

$$a = -\infty, \quad b = +\infty.$$

On peut donc écrire, en tenant compte de (36) (n° 10), (51), (53) et (54),

$$M^2(t) = \frac{a^2}{4}\int_0^t \left(\frac{a\xi^2}{2} - 1\right)^2 d\xi < \frac{ta^2}{4}\left(1 + \frac{a^2 t^4}{4.5}\right).$$

En remarquant que dans le cas considéré

$$z(\tau) = z(0) = 1, \quad \varphi(x) = x = t$$

on obtient, eu égard à (46), cette expression asymptotique pour $u_{2k} = u_n$

$$u_n = (-1)^{\frac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}} 1.3.5\ldots(n-1)\, e^{\frac{ax^2}{4}} \left(\cos x\sqrt{an} + \frac{\vartheta_n(x)}{\sqrt{n}}\right), \tag{57}$$

où, en vertu de (43), $\vartheta_n(x)$ est une fonction satisfaisant à l'inégalité

$$|\vartheta_n(x)| < a\left\{\int_0^x \left(\frac{a\xi^2}{2} + 1\right) d\xi + \frac{\sqrt{\pi a}}{2^{3/4}} \int_0^x \left(\frac{a\xi^2}{2} + 1\right)\sqrt{\xi}\sqrt{1 + \frac{a^2\xi^4}{4.5}}\, d\xi\right\}.$$

En désignant par ε zéro ou l'unité, selon que $x < 1$ ou $x > 1$, on peut écrire

$$\begin{aligned} |\vartheta_n(x)| &< \frac{a(a+2)}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{\pi a}}{2^{3/4}}\sqrt{1 + \frac{a^2}{4.5}}\right) + \varepsilon\frac{a(a+2)}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{\pi a}}{11.2^{3/4}}\sqrt{1 + \frac{a^2}{4.5}x^{\frac{5}{2}}}\right)x^3 \\ &< \varrho(1 + \varepsilon x^5\sqrt{x}), \end{aligned} \tag{58}$$

où l'on a posé

$$\varrho = \frac{a(a+2)}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{\pi a}}{2^{3/4}}\sqrt{1 + \frac{a^2}{4.5}}\right).$$

14. Supposons maintenant que n soit impair.

On a, en vertu de (55),

$$\frac{I_n}{B_n'^2} = \frac{1.2.3\ldots n . a^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{a^{n+1}(1.3.5\ldots n)^2} = \frac{2.4\ldots(n-1)}{a\sqrt{a}.1.3.5\ldots n}\sqrt{2\pi}.$$

Or,

$$\frac{2.4\ldots 2k}{1.3.5\ldots(2k-1)(2k+1)} < \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\sqrt{2k+1}}, \quad n = 2k+1.$$

Par conséquent,

$$\frac{I_n}{B_n'^2} < \frac{\pi}{a\sqrt{a}\sqrt{n}} = \frac{\pi}{a}\lambda_n^{-1} = \frac{\pi}{a\lambda_n^2}\lambda_n.$$

Cette inégalité coïncide avec celle de (α_1), si l'on pose

$$f(t) = e^{\frac{-at^2}{2}}, \quad K^2 = \frac{\pi}{a}, \quad \beta = \frac{1}{2}.$$

La formule (47) devient

$$(59) \qquad u_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} a^{\frac{n}{2}} 1.3.5\ldots(n-2)\sqrt{n}\, e^{\frac{ax^2}{4}} \left(\sin x\sqrt{an} + \frac{\vartheta_n(x)}{\sqrt{n}}\right),$$

où la fonction $\vartheta_n(x)$ satisfait à l'inégalité (58).

Nous avons supposé, dans ce qui précéde, que $x > 0$.

Or, les formules (57) et (59) restent vraies aussi pour $x < 0$.

Pour obtenir la limite supérieure de $|\vartheta_n(x)|$ dans ce dernier cas, il suffit de remplacer dans l'inégalité (58) x par son module.

15. Considérons maintenant les polynomes u_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ de Jacobi, définies par l'équation

$$(60) \qquad (1-x^2)u_n'' - (2\alpha+1)xu_n' + n(n+2\alpha)u_n = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

où α désigne une constante positive.

Supposant que

$$u_n(+1) = +1, \quad u_n(-1) = (-1)^n,$$

on trouve, pour n pair,

$$(61) \qquad u_n(0) = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(2\alpha)\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)}{\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma(n+2\alpha)},$$

$$u_n'(0) = 0$$

et, pour n impair,

$$u_n = 0,$$

$$(62) \qquad u_n' = (-1)^{\frac{n-1}{2}} 2 \frac{\Gamma(2\alpha)\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+\alpha\right)}{\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma(n+2\alpha)},$$

ce qui résulte immédiatement du développement connu

$$\frac{1}{(1-2hx+h^2)^\alpha} = \sum_{u=0}^{\infty} h^n \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(2\alpha)\Gamma(n+1)} u_n(x).$$

L'équation (60) n'est qu'un cas particulier de l'équation (4), où

$$p = 1 - x^2, \quad q = -x(2\alpha + 1), \quad r = 1.$$

Appliquons à l'équation (60) la transformation du n° 2 en introduisant la variable

$$t = -\int dx \sqrt{\frac{r}{p}} = arc \cos x,$$

ou

$$x = \cos t.$$

Les valeurs de t, correspondant à

$$x = -1, \quad x = 0, \quad x = +1,$$

sont

$$t_0 = \pi, \quad \tau = \frac{\pi}{2}, \quad t_1 = 0.$$

Remarquant que dans le cas considéré

(63)
$$\Theta(t) = \alpha \operatorname{cotg} t, \quad z = \frac{1}{\sin^\alpha t}, \quad \mu(t) = \frac{\alpha^2 \cos^2 t - \alpha}{\sin^2 t},$$
$$u_n = \frac{v_n(t)}{\sin^\alpha t},$$

on obtient l'équation suivante (l'équation (13) du n° 2)

$$\frac{d^2 v_n}{dt^2} + n(n + 2\alpha) v_n = \frac{\alpha^2 \cos^2 t - \alpha}{\sin^2 t} v_n$$

ou

$$v_n'' + \lambda_n^2 v = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{\sin^2 t} v_n,$$

où l'on a posé

(64)
$$\lambda_n = n + \alpha.$$

On peut donc prendre pour $\mu(t)$ la fonction suivante

$$\mu(t) = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{\sin^2 t}.$$

16. Appliquons au cas considéré la méthode du n° 10.

Supposons d'abord que n soit pair.

On a, en vertu de (61), (62) et (63)

$$v_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = u_n(0), \quad v_n'\left(\frac{\pi}{2}\right) = u_n'(0) = 0.$$

Il faut donc poser

(65) $$A_n' = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(2\alpha)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma(n+2\alpha)}, \qquad B_n' = 0.$$

Posons ensuite

$$f(x) = (1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}.$$

On a

$$I_n = \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} u_n^2\,dx = \frac{\pi}{2^{2\alpha-1}} \frac{\Gamma^2(2\alpha)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma^2(\alpha)\,\Gamma(n+2\alpha)(n+\alpha)}.$$

Par conséquent,

$$\frac{I_n}{A_n'^2} = \frac{\pi\,\Gamma^2\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma(n+2\alpha)}{2^{2\alpha-1}(n+\alpha)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma^2\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)}.$$

Or,

(66) $$\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+2\alpha)}{2^{2\alpha-1}} = 2^n\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha+\frac{1}{2}\right).$$

On peut donc écrire

$$\frac{I_n}{A_n'^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{2^n\,\Gamma^2\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)} \frac{n+2\alpha-1}{n+\alpha} <$$

$$< \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{n+2\alpha-1}{n+\alpha} \frac{2^n\,\Gamma^2\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma(n+1)}.$$

Cette inégalité a lieu pour toutes les valeurs de n, plus grandes que 2, quel que soit le nombre positif α.

D'autre part, en posant $n=2k$, on trouve

$$\frac{2^n\,\Gamma^2\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma(n+1)} = \frac{2.4\ldots 2k}{1.3\ldots 2k-1}.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{I_n}{A_n'^2} < \frac{\pi}{2} \frac{n+2\alpha-1}{n+\alpha} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+\alpha}} \sqrt{\lambda_n} < \pi \sqrt{\frac{n+1}{n+\alpha}} \sqrt{\lambda_n},$$

car on a toujours

$$\frac{n+2\alpha-1}{n+\alpha}<2.$$

En remarquant encore que

$$\sqrt{\frac{n+1}{n+\alpha}}<\frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \quad \text{si } \alpha<1$$

et

$$\sqrt{\frac{n+1}{n+\alpha}}<1, \quad \text{si } \alpha>1,$$

on trouve

$$\frac{I_n}{A_n'^2}<\pi\mu^2\sqrt{\lambda_n}=K^2\lambda_n^{2\beta},$$

où

$$\beta=\frac{1}{4}, \quad K^2=\pi\mu^2,$$

$$\mu^2=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \text{ si } \alpha<1 \text{ et } \mu^2=1, \text{ si } \alpha>1.$$

L'inégalité précédente montre que la fonction u_n satisfait à la condition (α) du n° 10.

En se rappelant que dans le cas considéré

$$\tau=\frac{\pi}{2}, \; f(\xi)=\sin^{2\alpha-1}\xi, \; p(\xi)=\sin^2\xi, \; z(\xi)=\frac{1}{\sin^{\alpha}\xi}, \; \mu(\xi)=\frac{\alpha(\alpha-1)}{\sin^2\xi},$$

on trouve

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}\frac{\mu^2(\xi)}{f(\xi)\sqrt{p(\xi)}\,z^2(\xi)}d\xi=\alpha^2(\alpha-1)^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}\frac{d\xi}{\sin^4\xi}=\pm\frac{\cos t(1+2\sin^2 t)}{3\sin^3 t}\alpha^2(\alpha-1)^2,$$

où le signe $(+)$ correspond au cas de $t<\frac{\pi}{2}$, le signe $(-)$ au cas de $t>\frac{\pi}{2}$.

On peut donc poser (voir n° 10)

$$M^2(t)=\frac{\alpha^2(\alpha-1)^2}{\sin^3 t},$$

quelle que soit la valeur de t, prise à l'intérieur de l'intervalle $(0, \pi)$.

La formule générale (41) se réduit, en vertu de (64) et (65), à la suivante

$$(67) \quad v_n(t) = \frac{\Gamma(2\alpha)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma(n+2\alpha)}\left[\cos\left((n+\alpha)\,t-\frac{\alpha\pi}{2}\right)+\frac{\vartheta_n(t)}{n+\alpha}\right],$$

où, en vertu de (43),

$$(68) \qquad |\vartheta_n(t)| < \frac{\alpha\,|\alpha-1|}{|\operatorname{tang} t|} + \frac{\mu\,\pi\sqrt{\pi}\,\alpha^2\,|\alpha-1|^2}{(\alpha+2)^{3/4}\sin^{7/2} t}$$

pour toutes les valeurs de t, comprises entre 0 et π.

17. Supposons maintenant que n soit impair.

Dans ce cas, en vertu de (62) et (63),

$$B_n' = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, 2\, \frac{\Gamma(2\alpha)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+\alpha\right)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma(n+2\alpha)}, \quad A_n' = 0,$$

ce qui nous donne [voir l'égalité (66)]

$$\frac{I_n}{B_n'^2} = \frac{\pi}{2^{2\alpha+1}}\, \frac{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma(n+2\alpha)}{(n+\alpha)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}+\alpha\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\,2^n\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)}{4\,(n+\alpha)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+\alpha\right)}.$$

On en tire, en remarquant que

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+\alpha\right)} < 1$$

et en posant $n = 2k+1$,

$$\frac{I_n}{B_n'^2} < \sqrt{\pi}\,\frac{2^n\,\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)}{4(n+\alpha)\,\Gamma(n+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2(n+\alpha)}\,\frac{2.4\ldots 2k}{1.3\ldots(2k-1)(2k+1)} <$$

$$< \frac{\pi}{4\,(n+\alpha)\sqrt{n}} < \frac{\pi}{4\,\lambda_n^2}\sqrt{1+\alpha}\,\sqrt{\lambda_n}\,.$$

Donc la fonction u_n pour n impair satisfait à la condition (α_1) du n^0 10, où il faut poser

$$K^2 = \frac{1}{4}\pi\sqrt{1+\alpha}\,, \qquad \beta = \frac{1}{4}$$

et, comme au n^0 précédent,

$$M^2(t) = \frac{\alpha^2(\alpha-1)^2}{\sin^3 t}\,.$$

La formule (44) conduit à l'équation suivante

$$(69)\quad v_n(t) = 2\,\frac{\Gamma(2\alpha)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+\alpha\right)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma(n+2\alpha)(n+\alpha)}\left[\cos\left((n+\alpha)\,t - \frac{\alpha\pi}{2}\right) + \frac{\vartheta_n(t)}{n+\alpha}\right],$$

où la fonction $\vartheta_n(t)$ satisfait à l'inégalité

$$(70)\qquad |\vartheta_n(t)| < \frac{\alpha\,|\alpha-1|}{|\operatorname{tang} t|} + \frac{\pi\sqrt{\pi}\,(1+\alpha)^{\frac{1}{4}}\,\alpha^2\,|\alpha-1|^2}{2\,(\alpha+2)^{3/4}\sin^{7/2} t}\,.$$

18. On peut simplifier les expressions asymptotiques (67) et (69) de la manière suivante:

Les relations connues

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \sqrt{\pi}\,2^{-n}\,\Gamma(n+1)\,,$$

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+\alpha\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right) = \sqrt{\pi}\,2^{-n-2\alpha+1}\,\Gamma(n+2\alpha)$$

donnent

$$(71)\qquad \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma(n+2\alpha)} = 2^{-2\alpha+1}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+\alpha\right)}\,,$$

$$(72)\qquad \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+\alpha\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma(n+2\alpha)} = 2^{-2\alpha+1}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)} = 2^{-2\alpha}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)}\,n\,.$$

Substituant (71) dans (67) on trouve

$$(73)\quad v_n(t) = \frac{\Gamma(2\alpha)}{2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+\alpha\right)} \left[\cos\left((n+\alpha)\,t - \frac{\alpha\pi}{2}\right) + \frac{\vartheta_n(t)}{n+\alpha}\right]$$

pour n pair.

On obtient ensuite, en tenant compte de (72) et (69),

$$(74)\ v_n(t) = \frac{\Gamma(2\alpha)}{2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)} \frac{n}{n+\alpha} \left[\cos\left((n+\alpha)\,t - \frac{\alpha\pi}{2}\right) + \frac{\vartheta_n(t)}{n+\alpha}\right].$$

Or,

$$\frac{n}{n+\alpha}\left[\cos\left((n+\alpha)\,t - \frac{\alpha\pi}{2}\right) + \frac{\vartheta_n(t)}{n+\alpha}\right] = \cos\left((n+\alpha)\,t - \frac{\alpha\pi}{2}\right) -$$

$$-\frac{\alpha}{n+\alpha}\cos\left((n+\alpha)\,t - \frac{\alpha\pi}{2}\right) + \frac{n}{n+\alpha}\frac{\vartheta_n(t)}{n+\alpha} = \cos\left((n+\alpha)\,t - \frac{\alpha\pi}{2}\right) + \frac{\Theta(t)}{n+\alpha},$$

où l'on a posé

$$\Theta(t) = \alpha\cos\left((n+\alpha)\,t - \frac{\alpha\pi}{2}\right) + \frac{n}{n+\alpha}\vartheta_n(t).$$

L'équation (74) peut donc s'écrire comme il suit

$$(75)\quad v_n(t) = \frac{\Gamma(2\alpha)}{2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)} \left[\cos\left((n+\alpha)\,t - \frac{\alpha\pi}{2}\right) + \frac{\Theta_n(t)}{n+\alpha}\right].$$

Substituant (73) et (75) dans (63) on trouve finalement, pour n pair,

$$(76)\ u_n(\cos t) = \frac{\Gamma(2\alpha)\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)\sin^\alpha t} \left[\cos\left((n+\alpha)\,t - \frac{\alpha\pi}{2}\right) + \frac{\Theta_n(t)}{n+\alpha}\right]$$

et, pour n impair,

$$(77)\ u_n(\cos t) = \frac{\Gamma(2\alpha)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)\sin^\alpha t} \left[\cos\left((n+\alpha)\,t - \frac{\alpha\pi}{2}\right) + \frac{\Theta_n(t)}{n+\alpha}\right]^{1)},$$

---

[1]) Compar. Darboux: „Sur l'approximation des fonctions de très grands nombres etc". Journ. de Liouville, 1878, p. 49.

A. A. Adamoff: „Объ асимптотическомъ выраженiи полиномовъ $J_n^\nu(x)$ и т. д." Извѣстiя С.-Петербург. Политехн. Института, 1906.

où

$$|\Theta_n(t)| < \alpha + |\vartheta_n(t)|,$$

$\vartheta_n(t)$ étant une fonction satisfaisant à l'inégalité (70).

Ces formules étant établies, il suffit de répéter, avec une modification légère, les raisonnements de M. Darboux (loc. cit.), qu'il a appliqués aux polynomes

$$Z_n = F(\alpha + n, -n, \gamma, x),$$

F désignant la série hypergéométrique, pour s'assurer que *toute fonction donnée $f(x)$ se développe en série de polynomes u_n avec les mêmes particularités que dans le cas des séries trigonométriques.*

18. Désignons maintenant par $u_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ les polynomes qui satisfont à l'équation

(78) $$2xu_n'' + (1 - ax)u_n' + anu_n = 0 \qquad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

Nous avons ici un cas particulier de polynomes $V_n^{(\beta)}$, défines par les équations

(79) $$x(V_n^\beta)'' + (\beta - \alpha x)(V_n^\beta)' + \alpha n V_n^\beta = 0,$$

car il suffit de remplacer dans cette équation α par $\frac{a}{2}$, β par $\frac{1}{2}$ pour en déduire l'équation (78).

V_n^β $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ sont les polynomes de Tchébicheff correspondant à la fonction caractéristique

$$p(x) = x^{\beta-1} e^{-\alpha x}. \qquad (\beta > 0, \alpha > 0)$$

Rappelons quelques-unes de leurs propriétés.

Remplaçant dans (74) β par $\beta + 1$, n par $n - 1$, on trouve

$$x(V_{n-1}^{\beta+1})'' + (\beta + 1 - \alpha x)(V_{n-1}^{\beta+1})' + \alpha(n-1)V_{n-1}^{(\beta+1)} = 0.$$

D'autre part, différentiant (74) une fois par rapport à x, on tire

$$x\frac{d^2}{dx^2}(V_n^\beta)' + (\beta + 1 - \alpha x)\frac{d}{dx}(V_n^\beta)' + \alpha(n-1)(V_n^\beta)' = 0.$$

Ces dernières équations montrent que les polynomes $V_{n-1}^{\beta+1}$ et $\frac{dV_n^\beta}{dx}$ ne peuvent différer l'un de l'autre que par un facteur constant C.

On a donc

$$\frac{dV_n^\beta}{dx} = CV_{n-1}^{\beta+1}.$$

Supposant, pour plus de simplicité, que le coefficient à x^n de polynome V_n^β soit égal à l'unité, on trouve

$$\frac{dV_n^\beta}{dx} = n V_{n-1}^{\beta+1} . \tag{80}$$

Posons

$$V_n^\beta = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j .$$

On s'assure aisément que

$$a_j = (-1)^{n-j} \alpha^{-(n-j)} \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{j!} (\beta+j)(\beta+j+1)\dots(\beta+n-1).$$
$$(j=0,\ 1,\ 2, \dots n)$$

On a donc

$$V_n^\beta(0) = a_0 = (-1)^n \alpha^{-n} \beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1).$$

L'équation (79), mise sous la forme

$$\alpha n x^{\beta-1} e^{-\alpha x} V_n^\beta = -\frac{d}{dx}[x^\beta e^{-\alpha x} (V_n^\beta)'] ,$$

donne

$$\alpha n \int_0^\infty x^{\beta-1} e^{-\alpha x} (V_n^\beta)^2 dx = -\int_0^\infty V_n^\beta \frac{d}{dx}\Big[x^\beta e^{-\alpha x} (V_n^\beta)'\Big] dx = \int_0^\infty x^\beta e^{-\alpha x} \Big((V_n^\beta)'\Big)^2 dx ,$$

d'où, en vertu de (80),

$$\alpha \int_0^\infty x^{\beta-1} e^{-\alpha x} (V_n^\beta)^2\, dx = n \int_0^\infty x^\beta e^{-\alpha x} (V_{n-1}^{\beta+1})^2\, dx .$$

On peut donc écrire

$$I_n^\beta = \frac{n}{\alpha} I_{n-1}^{\beta+1} \tag{81}$$

en posant, en général,

$$I_n^\beta = \int_0^\infty x^{\beta-1} e^{-\alpha x} (V_n^\beta)^2\, dx .$$

En remplaçant dans (81) n succesivement par $n-1$, $n-2, \dots, 0$ et β par $\beta+1$, $\beta+2, \dots, \beta+n$, on trouve, par la multiplication des équations ainsi obtenues,

$$I_n^{\beta} = \frac{n!}{\alpha^n} I_0^{\beta+n}.$$

Or,

$$I_0^{\beta+1} = \int_0^\infty x^{\beta+n-1} e^{-\alpha x} (V_0^{n+\beta})^2 \, dx = \int_0^\infty x^{\beta+n-1} e^{-\alpha x} \, dx = \frac{\Gamma(\beta+n)}{\alpha^{\beta+n}},$$

car

$$V_0^{n+\beta}(x) = 1.$$

On a donc

$$I_n^{\beta} = \frac{n!\,\Gamma(\beta+n)}{\alpha^{\beta+2n}} = \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\beta+n)}{\alpha^{\beta+2n}}.$$

Posons maintenant

$$\beta = \frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{a}{2}.$$

On aura

(82) $$u_n^{\frac{1}{2}}(0) = (-1)^n a^{-n}\, 1.3.5\ldots(2n-1),$$

(83) $$I_n^{\frac{1}{2}} = 2^{2n+1} \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{2}\, a^{2n+\frac{1}{2}}} = 4 \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2a}} a^{-2n}\, n\,\Gamma(2n),$$

car

$$2^{2n-1}\,\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2n)}{\Gamma(n)}.$$

19. Remarquons qu'on peut poser $a = 1$, sans restreindre la généralité, car il suffit de remplacer dans (78) la variable x par $\frac{x}{a}$ pour reduire cette équation à la suivante

(84) $$2x\,u_n'' + (1-x)\,u_n' + n\,u_n = 0.$$

Appliquons à cette équation la transformation du n⁰ 2 en y posant

$$p = 2x, \quad q = 1 - x, \quad r = 1.$$

On trouve

$$t = \int dx \sqrt{\frac{r}{p}} = \sqrt{2x}, \quad x = \frac{t^2}{2},$$

(85) $$2\Theta = \frac{2(1-x)-2}{2\sqrt{2x}} = -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} = -\frac{t}{2},$$

$$z(t) = e^{-\int \Theta(t)\,dt} = e^{\frac{t^2}{8}},$$

(86) $$u_n\left(\frac{t^2}{2}\right) = e^{\frac{t^2}{8}} v_n(t).$$

L'équation (84) devient

$$\frac{d^2 v_n}{dt^2} + \sqrt{n}\, v_n = \mu(t)\, v_n,$$

où

$$\mu(t) = \frac{t^2 - 4}{16}.$$

L'équation (86) montre que

(87) $$v_n(0) = u_n(0), \quad v'_n(0) = 0.$$

Considérons le rapport

$$R = \frac{\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} u_n^2(x)\, dx}{A_n'^2} = \sqrt{2}\,\frac{\int\limits_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4}} u_n^2\left(\frac{t^2}{2}\right) dt}{A_n'^2},$$

où

$$A'_n = u_n(0) = (-1)^n\, 1.3.5\ldots(2n-1).$$

On trouve, en vertu de (83),

$$R = 2\sqrt{\pi}\,\frac{2n!}{[1.3.5\ldots(2n-1)]^2} = 2\sqrt{\pi}\,\frac{2^{2n}(n!)^2}{2n!}.$$

De cette égalité on tire à l'aide de formule de Wallis

$$R = 2\pi\sqrt{n}(1+\delta_n) < 4\pi\sqrt{n} = 4\pi\,\lambda_n^{2\beta},$$

où

$$\lambda_n^2 = n, \quad \beta = \frac{1}{2}.$$

Les polynomes u_n satisfont à la condition (α) du n° 10.
Posons en effet, dans les formules générales du n° 10,

(86₁) $$a = 0, \quad b = +\infty, \quad \tau = 0, \quad f(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}, \quad A'_n = u_n(0), \quad \mu(\xi) = \frac{\xi^2 - 4}{16}$$

$$p(x) = x, \quad z(\xi) = e^{\frac{\xi^2}{8}}, \quad \lambda_n^2 = n, \quad \beta = \frac{1}{2}, K^2 = 4\pi,$$

On trouve

$$\int\limits_a^b f(x)\, u_n^2(x)\, dx = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} u_n^2(x)\, dx < A_n'^2 K^2 \lambda_n^{2\beta},$$

et

$$\int_{\tau}^{t} \frac{\mu^2(\xi)}{f(\xi)\, z^2(\xi) \sqrt{p(\xi)}}\, d\xi = \int_0^t \mu^2(\xi)\, d\xi < \frac{1}{16^2}\int_0^t (\xi^2 - 4)^2\, d\xi < \frac{t(t^2+80)}{5.16^2}.$$

On peut donc poser

$$M^2(t) = \frac{t\,(t^4+80)}{5.16^2}. \tag{87}$$

L'équation (41) du n⁰ 11 conduit à cette expression de v_n

$$v_n = A_n'\left(\cos t\sqrt{n} + \frac{\vartheta_n(t)}{\sqrt{n}}\right), \tag{88}$$

où, en vertu de (43) et (87),

$$|\vartheta_n(t)| < \int_0^t \frac{|\xi^2 - 4|}{16}\, d\xi + 2\sqrt{\pi}\int_0^t \frac{|\xi^2 - 4|}{5.16^2}\sqrt{\xi\,(\xi^2+80)}\, d\xi$$

pour toutes les valeurs de n, plus grandes que l'unité.

Substituant (88) dans (86) on trouve cette expression asymptotique pour u_n

$$u_n\left(\frac{t^2}{2}\right) = (-1)^n\, 1.3.5\ldots(2n-1)\, e^{\frac{t^2}{8}}\left(\cos t\sqrt{n} + \frac{\vartheta_n(t)}{\sqrt{n}}\right). \tag{80}$$

19. Nous allons maintenant appliquer les résultats obtenus au problème du développement d'une fonction arbitraire en séries des polynomes, considérés aux n^os^ précédents (**12**—**18**).

Faisons d'abord quelques remarques préliminaires sur ce sujet.

M. Du-Bois-Raymond fût le premier qui a généralisé la méthode de Dirichlet, appliquée par cet illustre géomètre aux développements trigonométriques.

D'après Dirichlet, le problème se ramène, comme on sait, à la recherche de la limite, vers laquelle tend l'intégrale

$$\int_a^b \varphi(\alpha)\, \frac{\sin n\,(\alpha - x)}{\alpha - x}\, dx,$$

lorsque n tend vers l'infini, $\varphi(\alpha)$ désignant une fonction donnée.

M. Du-Bois-Raymond a étudié l'intégrale plus générale de la forme suivante

$$S_n = \int_a^b \varphi(\alpha)\, \psi(x, \alpha, n)\, d\alpha,$$

contenant comme un cas particulier celle de Dirichlet, et il a indiqué certaines hypothèses générales sur la fonction $\varphi(x)$, sous lesquelles on peut trouver la limite de l'intégrale S_n pour $n=\infty$.

Les recherches de Du-Bois-Raymond, dont le bût principal consistait à résoudre le problème de la représentation d'une fonction arbitraire à l'aide des intégrales définies, ont été généralisées ensuite par M. Dini en 1880, qui a appliqué ses recherches au problème du développement des fonctions en séries infinies.

Nous pouvons maintenant, en suivant une voie indiquée par M. Jordan dans son Cours d'Analyse, exposer les résultats principaux de ces recherches sous la forme suivante:

Soit $u_n (n=0, 1, 2, \ldots)$ une suite bien déterminée de fonctions de α et du paramètre n.

Posons

$$S_n = \sum_0^n \frac{u_k(x)}{I_k} \int_a^b f(\alpha)\,\varphi(\alpha)\,u_k(\alpha)\,d\alpha = \sum_0^n \frac{A_k}{I_k} u_k(x),$$

où

$$A = \int_a^b f(\alpha)\,\varphi(\alpha)\,u_k(\alpha)\,d\alpha, \quad I_k = \int_v^b f(\alpha)\,u_k^2(\alpha)\,d\alpha.$$

On peut écrire

$$S_n = \int_a^b \varphi(\alpha)\,\psi(x, \alpha, n)\,d\alpha,$$

si l'on pose

$$\psi(x, \alpha, n) = f(\alpha) \sum_0^n \frac{u_k(x)\,u_k(\alpha)}{I_k}.$$

La somme de la série infinie

$$S = \sum_0^\infty \frac{A_k}{I_k} u_k(x)$$

est égale à la limite, vers laquelle tend l'intégrale S_n, lorsque l'indice n croît indéfiniment.

Le problème se ramène à l'étude des intégrales

$$\int_a^\xi \psi(x, \alpha, n)\,d\alpha, \quad \int_\eta^b \psi(x, \alpha, n)\,d\alpha,$$

ξ désignant un nombre, compris entre a et x, η un nombre, compris entre x et b.

Si le module de chacune de ces intégrales ne surpasse pas un nombre fixe L, indépendant de ξ, η et de n, et si ces intégrales tendent uniformément vers une limite fixe G, lorsque n tend vers l'infini, on aura

$$\lim_{n=\infty} S_n = \lim_{n=\infty} \int_a^x \varphi(\alpha)\, \psi(x,\, \alpha,\, n)\, d\alpha + \lim_{n=\infty} \int_x^b \varphi(\alpha)\, \psi(x,\, \alpha,\, n)\, d\alpha =$$
$$= G\,[\varphi(x+0) + \varphi(x-0)]$$

toutes les fois que la fonction $\varphi(x)$ sera une fonction à variation bornée entre a et b.

Ce théorème conduit immédiatement à une méthode générale pour résoudre plusieurs problèmes du développement d'une fonction arbitraire en séries des fonctions $u_n (n = 0,\ 1,\ 2,)$.

Dans sa Thèse, présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de St.-Pétersbourg, M. A. Adamoff applique cette méthode de Du-Bois-Raymond et de Dini aux polynomes de Hermite et aux polynomes du n⁰ 15 qui présentent un cas particulier de ceux de Jacobi.

Or, je me permets de rappeler, en profitant de l'occasion, que les développements en séries des polynomes de Jacobi ont été étudiés déjà par M. Darboux en 1878, indépendemment des recherches de Mrs Du-Bois-Raymond et Dini, dans son Mémoire: „Sur l'approximation des fonctions de très-grands nombres etc.", cité plusieurs fois.

Il est aisé de comprendre ensuite que la méthode de Darboux s'étend à tous les polynomes, considérés aux nos précédents (12—18). On pourra donc résoudre le problème du développement dans les cas, tout à l'heure mentionnés, en suivant une voie, indiquée par M. Darboux, sans se rapporter à la théorie générale de Mrs Du-Bois-Raymond et Dini.

Il n'est pas inutile de faire quelques remarques sommaires sur ce sujet sans entrer en détails.

20. En entendant par $u_n(x) (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$ une suite quelconque de polynomes de Tchébicheff, on a toujours

$$(91)\quad S_n = \sum_0^n \frac{u_k(x) \int_a^b f(y)\, \varphi(y)\, u_k(y)\, dy}{I_k} = \int_a^b \frac{f(y)\, \varphi(y)}{I_k} \frac{u_{n+1}(x)\, u_n(y) - u_{n+1}(y)\, u_n(x)}{x-y}\, dy$$

C'est une formule, établie, si je ne me trompe pas, pour la première fois par M. Darboux dans son Mémoire, cité plus haut (p. 411 etc.)[1]

---

[1]) Voir aussi Tchébicheff: „О разложеніи въ непрерывную дробь рядовъ, расположенныхъ по нисходящимъ степенямъ перемѣнной". Записки Императорской Академіи Наукъ, № 3, 1892.

Appliquons cette formule aux polynomes $u_n(x)$ de n^{os} 12—18.

Les recherches précédentes montrent que chacun de ces polynomes peut être présenté sous la forme suivante

$$u_n = h_n\left(\alpha_n + \frac{\vartheta_n}{n^q}\right), \tag{92}$$

où q est égal à $\frac{1}{2}$ pour les polynomes de Hermite ainsi que pour ceux du n^0 18, et $q = 1$ pour les polynomes de Jacobi.

Substituant (92) dans (91) on peut écrire

$$S_n = \frac{h_n h_{n+1}}{I_n}\int_a^b f(y)\,\varphi(y)\,\frac{\alpha_{n+1}(x)\,\alpha_n(y) - \alpha_n(x)\,\alpha_{n+1}(y)}{x-y}\,dy + \varepsilon_n. \tag{93}$$

En suivant la méthode de Darboux (loc. cit. p.p. 385 etc.) on peut s'assurer que

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0.$$

On aura donc

$$\lim_{n=\infty} S_n = \lim_{n=\infty} \frac{h_n h_{n+1}}{I_n}\int_a^b f(y)\,\varphi(y)\,\frac{\alpha_{n+1}(x)\,\alpha_n(y) - \alpha_n(x)\,\alpha_{n+1}(y)}{x-y}\,dy.$$

L'étude de cette dernière intégrale se ramène, dans tous les cas qui nous intéressent, à celui de l'intégrale de Dirichlet; il suffit pour cela de remplacer α_n par leurs expressions qui résultent des formules asymptotiques.

Considérons, pour exemple, les polynomes du n^0 18.

En se rappelant que dans ce cas

$$a = 0, \quad b = \infty, \quad f(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}},$$

$$\alpha_n = e^{\frac{x}{4}} \cos\sqrt{2nx} = e^{\frac{t^2}{8}} \cos t\sqrt{n},$$

on trouve

$$S_n = \frac{h_n h_{n+1}}{I_n}\int_0^\infty \frac{e^{\frac{x-y}{4}}}{\sqrt{y}}\,\varphi(y)\,\frac{\cos\sqrt{2x(n+1)}\,.\cos\sqrt{2yn} - \cos\sqrt{2y(n+1)}\cos\sqrt{2xn}}{x-y}\,dy.$$

Or, il est aisé de s'assurer qu'on peut poser, pour les valeurs de n plus grandes que l'unité,

$$\cos\sqrt{2\varphi(n+1)} = \cos\sqrt{2\varphi n} - \frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{2n}}\sin\sqrt{2\varphi n} + \frac{\delta_n(\varphi)}{n},$$

$\delta_n(\varphi)$ désignant une fonction dont le module ne surpasse pas un nombre fixe ne dépendant pas de n.

On a donc

$$\cos\sqrt{2x(n+1)}.\cos\sqrt{2yn}-\sqrt{2y(n+1)}\cos\sqrt{2xn}=$$

$$=\frac{\sqrt{y}\sin\sqrt{2yn}\cos\sqrt{2xn}-\sqrt{x}\sin\sqrt{2xn}\cos\sqrt{2yn}}{\sqrt{2n}}+\frac{\varphi_n(x,\ y)}{n},$$

où l'on a posé

$$\varphi_n(x,\ y)=\delta_n(x)\cos\sqrt{2yn}-\delta_n(y)\cos\sqrt{2xn}.$$

Remarquant ensuite que, en vertu de (83) et (90),

$$\frac{h_n h_{n+1}}{I_n}=(-1)^{2n+1}\frac{[1.3.5\ldots(2n-1)]^2(2n+1)}{\sqrt{2\pi}\ 2n!}=$$

$$=(-1)^{2n+1}(2n+1)\frac{2n!}{2^{2n}(n!)^2}=-\frac{1}{\pi}\sqrt{2n+1}\,(1+\varepsilon_n),$$

ε_n désignant une quantité qui s'annule pour $n=\infty$, on trouve

$$\lim_{n=\infty}S_n=-\lim_{n=\infty}\frac{\sqrt{2n+1}}{\pi\sqrt{2n}}\int_0^\infty\frac{e^{\frac{x-y}{4}}}{\sqrt{y}}\varphi(y)\frac{\psi_n(x,\ y)}{x-y}dy+\lim_{n=\infty}\frac{\sqrt{2n+1}}{\pi n}\int_0^\infty\frac{e^{\frac{x-y}{4}}}{\sqrt{y}}\varphi(y)\frac{\varphi_n(x,\ y)}{x-y}dy$$

où l'on a posé

$$\psi_n(x,\ y)=\sqrt{y}\sin\sqrt{2yn}\cos\sqrt{2xn}-\sqrt{x}\sin\sqrt{2xn}.\cos\sqrt{2yn}.$$

On peut s'assurer que le second terme de cette égalité se réduit à zéro.

On en conclut que

$$\lim_{n=\infty}S_n=-\lim_{n=\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{e^{\frac{x-y}{4}}}{\sqrt{y}}\varphi(y)\frac{\psi_n(x,y)}{x-y}dy.$$

Or

$$\psi_n(x,\ y)=-\sqrt{x}\sin\sqrt{2n}(\sqrt{x}-\sqrt{y})+(\sqrt{y}-\sqrt{x})\sin\sqrt{2yn}.\cos\sqrt{2xn}.$$

L'intégrale du second membre de l'égalité précédente se decompose en deux dont l'une est égale à

$$S_n'=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{e^{\frac{x-y}{4}}}{\sqrt{y}}\varphi(y)\frac{\sin\sqrt{2yn}\cos\sqrt{2xn}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}dy.$$

Cette intégrale tend vers zéro, lorsque n tend vers l'infini, si $\varphi(x)$ *est une fonction à variation bornée entre* 0 *et* $+\infty$.

On a donc

$$\lim_{n=\infty} S_n = \frac{2}{\pi} \lim_{n=\infty} \int_0^\infty \Theta(x, u) \frac{\sin \sqrt{2nx}(1-u)}{1-u} du,$$

où l'on a posé

$$u = \sqrt{\frac{y}{x}}, \quad \Theta(x, y) = \frac{e^{\frac{x(1-u^2)}{4}}}{1+u} \varphi(x, u^2).$$

L'intégrale du second membre de l'égalité précédente est précisément l'intégrale de Dirichlet.

On en conclut immédiatement que

$$(93_1) \qquad \lim_{n=\infty} S_n = \sum_0^\infty \frac{u_n(x) \int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}} u_n(x)\, dx}{\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}} \frac{u_n^2(x)}{\sqrt{x}} dx} = \frac{1}{2}[\varphi(x+0) + \varphi(x-0)].$$

Donc, la série (93_1) *converge uniformément pour toute valeur positive de* x, *si la fonction donnée* $\varphi(x)$ *est une fonction à variation bornée entre* 0 *et* $+\infty$, *et la somme de cette série est égale à*

$$\frac{1}{2}[\varphi(x+0) + \varphi(x-0)].$$

Le théorème analogue a lieu pour les polynomes du n° 15 ainsi que pour les polynomes de Hermite.

La réduction de l'intégrale (93_1) à celle de Dirichlet, ce qui suffit pour achever la démonstration, s'effectue par un procédé tout à fait analogue à ce que nous venons d'indiquer.

21. Revenons à la série

$$(94) \qquad \sum_0^\infty A_n u_n(x)$$

en désignant maintenant par A_n le rapport

$$\frac{\int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, u_n(x)\, dx}{I_n},$$

où $\varphi(x)$ est une fonction donnée, $u_n(x)\,(n=0;\ 1,\ 2,\ldots)$ l'une de suites de polynomes, étudiés plus haut.

Indiquons une transformation de la série (94) moyennant les formules asymptotiques que nous avons établies aux n[os] précédents.

Posons

$$W_n = A_n u_n(x)$$

et désignons par w_n ce qui devient W_n, lorsque on y remplace u_n par son expression approchée $h_n \alpha_n$ qui résulte de la formule générale (92) [voir n⁰ précédent]

$$u_n = h_n\left(\alpha_n + \frac{\vartheta_n}{n^q}\right).$$

On trouve

$$W_n - w_n = \frac{h_n^2}{I_n}\,\frac{\omega_n}{n^q} = \delta_n, \tag{94_1}$$

où

$$w_n = \frac{h_n^2 \alpha_n}{I_n}\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,\alpha_n\,dx, \tag{95}$$

$$\omega_n = \vartheta_n \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\left(\alpha_n + \frac{\vartheta_n}{n^q}\right)dx + \alpha_n \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,\vartheta_n\,dx. \tag{96}$$

Nous allons établir, dans ce qui va suivre, que *les conditions de convergence de la série (94) sont les mêmes que celles de la série approchée*

$$\sum_0^\infty w_n = \sum_0^\infty \frac{h_n^2 \alpha_n}{I_n}\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,\alpha_n\,dx, \tag{97}$$

si la fonction $\varphi(x)$ satisfait à certaines conditions très générales que nous énoncerons plus loin.

Remarquons tout d'abord qu'il est aisé de s'assurer que δ_n tend vers zéro, lorsque n croît indéfiniment, pourvu que les intégrales qui figurent dans l'expression de ω_n aient un sens bien déterminé; il s'ensuit que les termes du développement (94) tendent de plus en plus à se confondre avec ceux de la série (97).

Or, pour démontrer rigoureusement que les conditions de convergence de ces deux séries sont les mêmes, il faut encore établir que la série

$$\sum_0^\infty \delta_n$$

converge absolument et uniformément, ce que nous ferons dans les articles prochains.

22. Bornons nous, pour fixer les idées, au cas des polynomes du n⁰ 18; l'analyse, que nous allons exposer, s'appliquera, avec une modification légère, aux polynomes de Hermite ainsi qu' à ceux de Jacobi.

L'égalité (42) du n⁰ 11 donne

$$(98) \qquad \vartheta_n(t) = \sin\lambda_n t \int_0^t \mu(\xi)\cos^2\lambda_n\xi\, d\xi - \cos\lambda_n t\int_0^t \mu(\xi)\sin\lambda_n\xi\cos\lambda_n\xi\, d\xi - \frac{\beta_n}{\sqrt[4]{n}},$$

où

$$(99) \qquad \beta_n = \int_0^t \mu(\xi)\sin\lambda_n(\xi - t)\,\omega_n(\xi)\,d\xi\,.$$

On trouve, en tenant compte de (86_1),

$$\int_0^t \mu(\xi)\cos^2\lambda_n\xi\, d\xi = \frac{t(t^2-12)}{3.16} + \frac{\sin 2\lambda_n t}{32\lambda_n}(t^2-4) - \frac{t\cos 2\lambda_n t}{32\lambda_n^2} + \frac{\sin 2\lambda_n t}{64\lambda_n^3} =$$

$$= \frac{t(t^2-12)}{6.16} + \Theta_n(t), \qquad \lambda_n = \sqrt{n}\,.$$

Il est aisé de s'assurer que

$$|\Theta_n(t)| < \frac{2t^2+2t+9}{2.64\sqrt{n}} < \frac{t^2+t+9}{64\sqrt{n}}\,.$$

D'autre part,

$$|\Theta_n'(t)| = \left|\int_0^t \mu(\xi)\sin\lambda_n\xi\cos\lambda_n\xi\, d\xi\right| = \frac{1}{64\lambda_n}\left[-4-(t^2-4)\cos 2\lambda_n t + \frac{t\sin 2\lambda_n t}{\lambda_n} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\lambda_n^2}(\cos 2\lambda_n t - 1)\right] < \frac{t^2+t+9}{64\sqrt{n}}\,.$$

On peut donc écrire

$$(100) \qquad \vartheta_n(t) = \sin\lambda_n t\,\frac{t(t^2-12)}{6.16} + \frac{\psi_n(t)}{\sqrt{n}} - \frac{\beta_n}{\sqrt[4]{n}},$$

où l'on a posé

$$\psi_n(t) = \sqrt{n}\,[\sin \lambda_n t\, \Theta_n(t) - \cos \lambda_n t\, \Theta'_n(t)\,].$$

La fonction $\psi_n(t)$ satisfait évidemment à la condition

$$(101) \qquad |\psi_n(t)| < \frac{t^2 + t + 9}{32}.$$

Considérons maintenant l'expression (99) de β_n.

On trouve, comme au n⁰ 11, en tenant compte de (86_1),

$$(102) \qquad |\beta_n| < \frac{\sqrt{\pi}}{5.16.8} \int_0^t |\xi^2 - 4| \sqrt{\xi(\xi^4 + 80)}\, d\xi.$$

Or,

$$\int_0^t |\xi^2 - 4| \sqrt{\xi(\xi^4 + 80)}\, d\xi = \int_0^1 + \varepsilon \int_1^t,$$

où $\varepsilon = 0$ ou 1, selon que t soit < 1 ou > 1.

On peut donc écrire

$$|\beta_n| < \frac{\sqrt{\pi}}{5.16.8}\left[5.9 + \varepsilon.5.9 \int_1^t \xi^{\frac{9}{2}} d\xi\right] < \frac{9\sqrt{\pi}}{8.16}\left[1 + \frac{2}{11} t^{\frac{11}{2}}\right]$$

quelle que soit la valeur de t, prise entre 0 et $+\infty$.

Il est évident que l'expression $\vartheta_n(t)$ (100) peut être présentée sous la forme suivante

$$(103) \qquad \vartheta_n(t) = \sin t\sqrt{n}\, \frac{t(t^2 - 12)}{16} + \frac{q_n(t)}{\sqrt[4]{n}},$$

si l'on pose

$$q_n(t) = \frac{\psi_n(t)}{\sqrt[4]{n}} - \beta_n.$$

La fonction $q_n(t)$ satisfait à l'inégalité

$$(104) \qquad |q_n(t)| < \varrho t^{11/2} + \sigma t^2 + \tau t + h,$$

où l'on peut poser, pour $n > 1$,

$$\varrho = \frac{9\sqrt{\pi}}{128}, \quad \sigma = \tau = \frac{1}{32}, \quad h = \frac{9}{32}\left(1 + \frac{\sqrt{\pi}}{4}\right),$$

ce qui résulte immédiatement des inégalités (101) et (102).

23. Cherchons maintenant une limite supérieure de ω_n, défini par l'équation (96).

Considérons d'abord l'intégrale

$$H = \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,\vartheta_n\,dx$$

qui prend, dans le cas considéré, la forme suivante

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{3\sqrt{2}\,.\,16}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4}}\varphi\left(\frac{t^2}{2}\right) t(t^2-12)\sin t\sqrt{n}\,dt + \frac{1}{\sqrt[4]{n}}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4}}\varphi\left(\frac{t^2}{2}\right) q_n(t)\,dt = \\ &= \int_0^\infty \psi(t)\sin t\sqrt{n}\,dt + \frac{\mu}{\sqrt[4]{n}} = H' + \frac{\mu}{\sqrt[4]{n}} \end{aligned} \tag{105}$$

où l'on a posé

$$\psi(t) = \frac{e^{-\frac{t^2}{4}}\varphi\left(\frac{t^2}{2}\right) t\,(t^2-12)}{3\sqrt{2}\,.\,16}.$$

Supposons que $\varphi(x)$ *soit une fonction à variation bornée entre* 0 *et* $+\infty$.

Il en sera de même de la fonction $\psi(t)$.

La fonction $\psi(t)$ peut se représenter sous la forme suivante

$$\psi(t) = \psi_1(t) - \psi_2(t),$$

où $\psi_1(t)$ et $\psi_2(t)$ sont des fonctions non croissantes, lorsque t croît de zéro à l'infini [1]).

On a donc

$$H' = \int_0^\infty \psi_1(t)\sin t\sqrt{n}\,dt - \int_0^\infty \psi_2(t)\sin t\sqrt{n}\,dt.$$

Le théorème de la moyenne donne

$$H_1 = \int_0^\infty \psi_1(t)\sin t\sqrt{n}\,dt = \psi_1(0)\int_0^\xi \sin t\sqrt{n}\,dt,$$

$$H_2 = \int_0^\infty \psi_2(t)\sin t\sqrt{n}\,dt = \psi_2(0)\int_0^\eta \sin t\sqrt{n}\,dt,$$

ξ et η étant des nombres, compris entre 0 et $+\infty$.

---

[1]) Voir C. Jordan: „Cours d'Analyse“ Paris 1893, T. I, p.p. 54, 55.

Il s'ensuit que

$$|H_1| < \frac{\alpha}{\sqrt{n}}, \quad |H_2| < \frac{\beta}{\sqrt{n}},$$

α et β étant des nombres fixes, et enfin,

$$(106) \qquad |H'| < \frac{A}{\sqrt{n}}, \quad A = \alpha\,|\psi_1(0)| + \beta\,|\psi_2(0)|,$$

A désignant un nombre assignable.

Considérons l'integrale

$$\mu = \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4}} \varphi\left(\frac{t^2}{2}\right) q_n(t)\, dt.$$

Il suffit de supposer que $\varphi(x)$ *soit une fonction bornée dans l'intervalle* $(0, +\infty)$ pour s'assurer, en tenant compte de (104), que l'intégrale μ a un sens bien déterminé.

On en conclut, eu égard à (105) et (106), que

$$(107) \qquad |H| = \left|\int_0^\infty f(x)\,\varphi(x)\,\vartheta_n\, dx\right| < \frac{A}{\sqrt{n}} + \frac{B}{\sqrt[4]{n}},$$

B désignant un nombre fixe.

Considérons enfin l'intégrale

$$G = \int^\infty f(x)\,\varphi(x)\,\alpha_n\, dx = \sqrt{2}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{8}} \varphi(x) \cos t\sqrt{n}\, dt.$$

On trouve, en se rappelant que $\varphi(x)$ est une fonction à variation bornée,

$$(108) \qquad |G| < \frac{C}{\sqrt{n}},$$

G désignant un nombre fixe.

Cela posé, écrivons $\omega_n(t)$ sous la forme

$$\omega_n(t) = \vartheta_n G + \left(\alpha_n + \frac{\vartheta_n}{\sqrt{n}}\right) H.$$

De cette égalité on tire, en vertu de (107) et (108),

$$(109) \qquad |\omega_n(t)| < \frac{\varrho}{\sqrt{n}} + \frac{\sigma}{\sqrt[4]{n}} < \frac{\tau_n}{\sqrt[4]{n}},$$

τ_n désignant une quantité positive, finie pour toute valeur positive de la variable t.

En remarquant enfin que, en vertu de (83) et (90),

$$\frac{h_n^2}{I_n}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{[1.3.5\ldots(2n-1)]^2}{n(2n-1)!}=2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2n!}{2^{2n}(n!)^2}<\frac{\lambda}{\sqrt{n}},$$

λ désignant un nombre fixe, on trouve, en tenant compte de (94_1) et (109),

$$(110) \qquad |\delta_n| < \frac{\lambda\tau_n}{n\sqrt[4]{n}} = \frac{\sigma_n}{n\sqrt[4]{n}},$$

σ_n étant une quantité qui ne surpasse pas un certain nombre fixe Q pour toutes les valeurs de t, prises à l'intérieur d'un intervalle $(0, T)$, T désignant un nombre quelconque positif.

On en conclut que *la série*

$$\sum_0^\infty \delta_n$$

converge absolument et uniformément dans tout intervalle $(0, T)$, *quel que soit le nombre positif* T.

Donc, *la série primitive* (94) *converge sous les mêmes conditions par rapport à la fonction donnée* $\varphi(x)$ *que la série approchée* (97) (voir n° 21), *pourvu que* $\varphi(x)$ *soit une fonction à variation bornée entre* 0 *et* $+\infty$.

Le même théorème a lieu pour les polynomes de Jacobi ainsi que pour les polynomes de Hermite.

Je me permets de ne pas reproduire la démonstration qui est tout à fait analogue à celle que nous venons d'exposer pour les polynomes du n° 18.

Remarquons qu'un cas particulier du théorème général, que nous avons établi, a été énoncé, sans démonstration rigoureuse, par Laplace pour les polynomes de Legendre et puis, en 1864, par Hermite pour les polynomes qui portent son nom.

Nous voyons, de ce qui précède, que ce théorème s'applique, en effet, à tous les polynomes considérés aux n^{os} 11—18.

Nous verrons plus tard qu'il reste vrai dans beaucoup d'autres cas et nous montrerons, outre cela, qu'il peut nous servir non seulement à simplifier les recherches sur la convergence des séries de la forme (94), mais encore à résoudre complétement le problème du développement, c'est-à-dire à déterminer la somme des séries dont il s'agit.

24. Les considérations précédentes montrent que le terme général $A_n u_n(x)$ de la série (94) peut être présenté sous la forme suivante

$$A_n u_n(x) = \frac{h_n^2}{I_n}\alpha_n\int_a^b f(x)\varphi(x)\alpha_n\,dx + \beta_n\varrho_n.$$

La recherche de la convergence de la série (94) se ramène, en vertu du théorème, établi au n⁰ précédent, à celle de convergence de la série

$$(110_1) \qquad \sum_1^{\infty} \frac{h_n^2}{I_n} \alpha_n \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,\alpha_n\,dx\,,$$

où il faut poser:

1) Pour les polynomes de Hermite

$$(111) \qquad f(x) = e^{-\frac{\alpha x^2}{2}},\quad a = -\infty,\quad b = +\infty,\quad I_n = n!\,\alpha^n \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}$$

et

$$(112) \qquad \alpha_n = e^{\frac{\alpha x^2}{4}} \cos x\sqrt{\alpha n}\,,\quad h_n = (-1)^n\,\alpha^{\frac{n}{2}}\,1.3.5\ldots(n-1),$$

si n est un nombre pair,

$$(113) \qquad \alpha_n = e^{\frac{\alpha x^2}{4}} \sin x\sqrt{\alpha n}\,,\quad h_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\,\alpha^{\frac{n+1}{2}}\,1.3.5\ldots(n-2)\sqrt{n}\,,$$

si n est un nombre impair.

2) Pour les polynomes de Jacobi

$$(114) \qquad f(x) = (1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}},\quad a = -1,\quad b = +1,\quad x = \cos t$$

$$(115) \qquad I_n = \frac{\pi}{2^{2\alpha-1}} \frac{\Gamma^2(2\alpha)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma^2(\alpha)\,\Gamma(n+2\alpha)\,(n+\alpha)}\,,$$

$$(116) \qquad \alpha_n = \frac{\cos\left(t\,(n+\alpha) - \frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\sin^{\alpha} t}$$

et

$$(117) \qquad h_n = \frac{\Gamma(2\alpha)\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2^{2\alpha-1}\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+\alpha\right)}$$

pour n pair,

$$(118) \qquad h_n = \frac{\Gamma(2\alpha)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2^{2\alpha-1}\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)}$$

pour n impair.

3) Pour les polynomes du n⁰ 18

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}, \quad a = 0, \quad b = +\infty, \quad x = \frac{t^2}{2}, \tag{119}$$

$$I_n = 4\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\alpha}}\alpha^{-2n} n\,\Gamma(2n), \tag{120}$$

$$\alpha_n = e^{\frac{t^2}{8}}\cos t\sqrt{n}, \quad h_n = (-1)^n \alpha^{-n} 1.3.5\ldots(2n-1), \tag{121}$$

quel que soit le nombre n.

25. Appliquons le théorème du n⁰ 23 aux polynomes de Jacobi. On trouve, en vertu de (115) et (117), pour n pair,

$$\frac{h_n^2}{I_n} = \frac{1}{\pi 2^{2\alpha-1}} \frac{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma(n+2\alpha)(n+\alpha)}{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}+\alpha\right)\Gamma(n+1)} \tag{122}$$

et, en vertu de (115) et (118), pour n impair,

$$\frac{h_n^2}{I_n} = \frac{1}{\pi\, 2^{2\alpha-1}} \frac{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma(n+2\alpha)(n+\alpha)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)\Gamma(n+1)}.$$

Il est aisé de s'assurer que le rapport

$$\frac{h_n^2}{I_n}$$

tend vers $\frac{2}{\pi}$, lorsque n tend vers l'infini.

Supposons, par exemple, que n reste pair [l'égalité (122)]. On trouve, en tenant compte de (72),

$$\frac{h_n^2}{I_n} = \frac{(2n+\alpha)}{\pi n} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+\alpha\right)},$$

d'où, moyennant la formule de Stirling, on tire

$$\frac{h_n^2}{I_n} = \frac{(2n+\alpha)}{\pi n}\left(1+\frac{1}{2\beta_n}\right)^{\beta_n}\left(1-\frac{1}{2\gamma_n}\right)^{\gamma_n}\left(\sqrt{\frac{\beta_n}{\gamma_n}}+\frac{1}{2\sqrt{\gamma_n\beta_n}}\right)(1+\varepsilon_n),$$

où l'on a posé

$$\beta_n = \frac{n}{2} - 1, \quad \gamma_n = \frac{n}{2} + \alpha - \frac{1}{2},$$

ε_n étant une quantité qui s'annule pour $n = \infty$.

L'équation précédente montre que

$$\lim_{n=\infty} \frac{h_n^2}{I_n} = \frac{2}{\pi},$$

car

$$\lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{2\beta_n}\right)^{\beta_n} = \sqrt{e}, \quad \lim_{n=\infty} \left(1 - \frac{1}{2\gamma_n}\right)^{\gamma_n} = \frac{1}{\sqrt{e}}, \quad \lim_{n=\infty} \frac{n+\alpha}{n} = 1, \quad \lim_{n=\infty} \sqrt{\frac{\beta_n}{\gamma_n}} = 1.$$

On démontrera de la même manière que

$$\lim_{n=\infty} \frac{h_n^2}{I_n} = \frac{2}{\pi}$$

lorsque n reste impair.

On en conclut que la série (110_1) peut être remplacée par la suivante

$$\sum_1^\infty \alpha_n \sin^\alpha t \int_{-1}^{+1} \varphi(x) (1 - x^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \alpha_n \, dx =$$

$$= \sum_1^\infty \cos\left(t(n+\alpha) - \frac{\pi\alpha}{2}\right) \int_0^\pi \sin^\alpha \xi \, . \, \varphi(\cos\xi) \cos\left(\xi(n+\alpha) - \frac{\pi\alpha}{2}\right) d\xi.$$

La série (94) converge sous les mêmes conditions par rapport à la fonction $\varphi(x)$ que cette dernière série trigonométrique qui est égale à la différence de deux séries suivantes

$$S_1 = \sum_1^\infty \int_0^\pi \sin^\alpha \xi \, \varphi(\cos\xi) \cos(t - \xi)(n + \alpha) \, d\xi,$$

$$S_2 = \sum_1^\infty \int_0^\pi \sin^\alpha \xi \, \varphi(\cos\xi) \cos[(t + \xi)(n + \alpha) - \pi\alpha] \, d\xi.$$

En appliquant la méthode connue de Dirichlet on s'assure immédiatement que chacune des sommes

$$S_{1n} = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \sin^\alpha \xi \, \varphi(\cos\xi) \cos(t - \xi)(k + \alpha) \, d\xi,$$

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} \sin^{\alpha} \xi \, \varphi(\cos \xi) \cos[(t+\xi)(k+\alpha) - \pi\alpha] \, d\xi$$

tend uniformément vers une limite bien déterminée, *si la fonction donnée* $\varphi(x)$ *est une fonction à variation bornée entre* -1 *et* $+1$.

Donc *la série* (94), *disposée suivant les polynomes de Jacobi, converge uniformément, pourvu que la fonction* $\varphi(x)$ *satisfasse à la condition tout à l'heure énoncée.*

On voit, à cet exemple, que l'emploi du théorème du n⁰ 23 conduit à une démonstration nouvelle d'une proposition, établie par M. Darboux par une méthode tout à fait différente.

26. Faisons encore quelques remarques concernant les polynomes de Hermite ainsi que les polynomes du n⁰ 18.

Nous avons déjà indiqué, en termes générales, une voie, due à M. Darboux, qui peut nous servir à trouver les conditions de la convergence uniforme des séries de la forme (94) pour les polynomes dont il s'agit.

En suivant cette voie on s'assure que *les-dites séries convergent uniformément, si la fonction* $\varphi(x)$, *intégrable entre les limites* 0 *et* $+\infty$ *(le cas des polynomes du n⁰ 18), ou entre les limites* $-\infty$ *et* $+\infty$ *(le cas des polynomes de Hermite), est une fonction à variation bornée.*

Une autre démonstration, un peu différente et détaillée, du théorème analogue pour les polynomes de Hermite paraîtra prochainement dans une thèse, déjà mentionnée plus haut, de M. Adamoff; cette démonstration s'étend sans difficulté au cas des polynomes du n⁰ 18.

Le même théorème peut être établi aussi par la méthode, indiquée au n⁰ 23, qui ramène le problème à la démonstration de convergence de la série approchée (110_1).

Cette série, pour les polynomes du n⁰ 18, se remplace par la suivante

$$\sum_1^{\infty} \frac{\cos t\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{8}} \varphi(\alpha) \cos \alpha\sqrt{n} \, . \, d\alpha, \tag{123}$$

car, dans le cas considéré,

$$\frac{h_n^2}{I_n} = \frac{\sqrt{2}}{4\pi e}\left(1 + \frac{1}{2n-2}\right)^{2n-2} \frac{2n-1}{2n-2} \sqrt{\frac{2n-1}{n}} \frac{1}{\sqrt{n}}(1+\varepsilon_n),$$

ce qui montre, qu'on peut poser, pour n assez grand,

$$\frac{h_n^2}{I_n} = \frac{1}{2\pi\sqrt{n}}(1+\delta_n),$$

δ_n étant une quantité qui s'annule pour $n = \infty$.

Dans le cas des polynomes de Hermite la série (110_1) se réduit à la suivante

$$(124)\quad \sum_1^{\infty}\left(\frac{\cos x\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\varphi(\alpha)\cos\alpha\sqrt{n}\,.\,d\alpha+\frac{\sin x\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\varphi(\alpha)\sin\alpha\sqrt{n}\,.\,d\alpha\right),$$

indiquée déjà par Hermite en 1864.

L'étude de ces séries [(123) et (124)] peut se ramener à celui des intégrales analogues à l'intégrale (93).

27. En me bornant par cette remarque, sans entrer en détails, je m'arrêterai au cas, où les séries (123) et (124) convergent non seulement *uniformément, mais encore absolument.*

Considérons, pour fixer les idées, la série (123).

Posons

$$\alpha=\xi\sqrt{n}\,.$$

On trouve

$$w_n=\frac{\cos t\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{8}}\varphi(\alpha)\cos\alpha\sqrt{n}\,.\,d\alpha=\cos t\sqrt{n}\int_0^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{8}n}\varphi(\xi\sqrt{n})\cos\xi\, n\,.\,d\xi\,,$$

d'où l'on tire, en supposant que $\varphi(x)$ reste positif pour toutes les valeurs positives de x,

$$|w_n|<\int_0^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{8}n}\varphi(\xi\sqrt{n})\,d\xi=u_n>0\,.$$

Considérons la série à termes positifs

$$(125)\qquad u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

Cette série sera convergente, si la quantité

$$r_{n+p}=u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}$$

tend vers zéro pour $n=\infty$, quel que soit l'entier p.

Or,

$$r_{n+p}=\sum_{j=1}^{p}\int_0^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{8}(n+j)}\varphi(\xi\sqrt{n+j})\,d\xi=\int_0^{\infty}\sum_{j=1}^{p} e^{-\frac{\xi^2}{8}(n+j)}\varphi(\xi\sqrt{n+j})\,d\xi\,.$$

Supposons maintenant que la fonction positive $\varphi(x)$ satisfasse encore aux conditions suivantes:
elle est égale à zéro pour les valeurs de ξ, comprises entre 0 et ε, où ε est un nombre positif assez petit, mais fixe; elle est égale à C pour $x=\varepsilon$, et décroît ensuite de C à zéro, lorsque x croît de ε à $+\infty$.

On peut toujours choisir le nombre $n = n_0$ de façon que l'on ait, pour $n \geqq n_0$,

$$e^{-\frac{\xi^2}{8}(n+j)} < \frac{A}{(n_0+j)^2},$$

A désignant un nombre fixe, quelle que soit la valeur de ξ, comprise entre ε et $+\infty$.

Cette condition étant remplie, on aura

$$\sum_1^p e^{-\frac{\xi^2}{8}(n+j)} \varphi(\xi\sqrt{n+j})\, d\xi < A \sum_{j=1}^p \frac{\varphi(\xi\sqrt{n_0+j})}{(n_0+j)^2}$$

et

$$r_{n+p} = \int_\varepsilon^\infty \sum_{j=1}^p e^{-\frac{\xi^2}{8}(n+j)} \varphi(\xi\sqrt{n+j})\, d\xi < A \int_\varepsilon^\infty \sum_{j=1}^p \frac{\varphi(\xi\sqrt{n_0+j})}{(n_0+j)^2}\, d\xi =$$

$$= A \int_0^\infty \sum_{j=1}^p \frac{\varphi(\xi\sqrt{n_0+j})}{(n_0+j)^2}\, d\xi = \varrho_{n_0+p}.$$

Or, quel que soit ξ,

$$\sum_{j=1}^p \frac{\varphi(\xi\sqrt{n_0+j})}{(n_0+j)^2} < \frac{\varphi(\xi\sqrt{n_0})}{n_0}.$$

On a donc

$$\varrho_{n_0+p} < \frac{A}{n_0}\int_0^\infty \varphi(\xi\sqrt{n_0})\, d\xi = \frac{A}{n_0\sqrt{n_0}}\int_0^\infty \varphi(t)\, dt.$$

Il s'ensuit que ϱ_{n_0+p} et, par suite, r_{n+p} tendent vers zéro, lorsque n croît indéfiniment, car l'intégrale

$$\int_0^\infty \varphi(t)\, dt$$

ne surpasse pas une certaine limite fixe.

Donc, la série (125) converge. Il en résulte que la série

$$\sum_{n=1}^\infty w_n = \sum_{n=1}^\infty \cos t\sqrt{n} \int_\varepsilon^\infty e^{-\frac{\xi^2}{8}n} \varphi(\xi\sqrt{n}) \cos \xi n\, d\xi, \tag{126}$$

c'est-à-dire *la série (123), converge absolument et uniformément.*

Supposons maintenant que la fonction $\varphi(x)$, étant égale à zéro pour les valeurs de x, comprises entre 0 et ε, soit une fonction à variation bornée entre ε et $+\infty$.

On a, pour toutes les valeurs de x, plus grandes que ε,

$$\varphi(x) = \psi_1(x) - \psi_2(x),$$

ψ_1 et ψ_2 étant des fonctions positives, bornées et non croissantes.

La série (126) se réduit à la différence de deux séries suivantes

$$\sum_1^\infty \cos t\sqrt{n} \int_\varepsilon^\infty e^{-\frac{\xi^2}{8}n} \psi_1(\xi\sqrt{n}) \cos \xi n . d\xi,$$

$$\sum_1^\infty \cos t\sqrt{n} \int_\varepsilon^\infty e^{-\frac{\xi^2}{8}n} \psi_2(\xi\sqrt{n}) \cos \xi n . d\xi.$$

Chacune de ces séries converge absolument et uniformément.

Il en sera de même de la série (126) ou, ce qui revient au même, de la série (123).

On en conclut, en tenant compte du théorème du n⁰ 23, que *la série de la forme (94), $u_n(x)$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$ désignant les polynomes du n⁰ 18, converge absolument et uniformément, si la fonction $\varphi(x)$, qui reste égale à zéro pour les valeurs de x, comprises entre 0 et ε, ε étant un nombre positif quoique assez petit, mais fixe, est une fonction à variation bornée entre ε et $+\infty$* [1]).

Le même théorème a lieu pour les polynomes de Hermite et se démontre par les raisonnements tout à fait analogues.

J'indiquerai encore un cas général, où les séries de la forme (94) convergent absolument et uniformément.

Je me bornerai, pour fixer les idées, au cas des polynomes du n⁰ 18; les raisonnements, qui vont suivre, s'appliquent presque sans changement aux polynomes de Jacobi et à ceux de Hermite.

Supposons que la fonction $\varphi(x)$ soit continue et admette la dérivée $\varphi'(x)$ qui est une fonction intégrable et à variation bornée entre 0 et $+\infty$.

On a

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{8}} \varphi(\alpha) \cos \alpha\sqrt{n} . d\alpha = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^\infty \frac{d}{d\alpha}\left(e^{-\frac{\alpha^2}{8}} \varphi(\alpha)\right) \sin \alpha\sqrt{n} . d\alpha.$$

---

[1]) On suppose certainement que l'intégrale

$$\int_\varepsilon^\infty \varphi(x)\, dx$$

ait un sens bien déterminé.

Or, en vertu de l'hypothèse faite sur $\varphi(x)$, la fonction

$$\psi(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\left(e^{-\frac{\alpha^2}{8}}\varphi(\alpha)\right)$$

est une fonction à variation bornée entre 0 et $+\infty$.

Il s'ensuit que

$$\left| \int_0^\infty \frac{d}{d\alpha}\left(e^{-\frac{\alpha^2}{8}}\varphi(\alpha)\right) \sin\alpha\sqrt{n} \,.\, d\alpha \right| < \frac{A}{\sqrt{n}},$$

A désignant un nombre assignable.

On a donc

$$\left| \frac{\cos t\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{8}}\varphi(\alpha)\cos\alpha\sqrt{n} \,.\, d\alpha \right| < \frac{A}{n\sqrt{n}},$$

ce qui montre que *la série (123) converge absolument et uniformément.*

On obtient ainsi, en tenant compte du théorème du n° 23, la proposition suivante:

La série infinie de la forme (94), $u_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ désignant les polynomes de Hermite, ou ceux de Jacobi, ou, enfin, les polynomes du n° 18, converge absolument et uniformément, quelle que soit la valeur donnée de la variable x, si la dérivée du premier ordre de la fonction continue $\varphi(x)$ est une fonction intégrable et à variation bornée.

Nous ferons plus loin l'usage des résultats, obtenus aux n°s précédents.

28. La méthode, indiquée aux n°s 2—10, peut être appliquée aussi à la recherche de certaines expressions asymptotiques des fonctions $J_\alpha(x)$ de Bessel pour très-grandes valeurs de la variable x, ce que nous allons montrer dans ce qui va suivre.

Les fonctions $J_\alpha(x)$ satisfont, comme on sait, à l'équation

$$\frac{d^2 J_\alpha(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ_\alpha(x)}{dx} + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right)J_\alpha(x) = 0. \tag{127}$$

Posons

$$x = nt,$$

n désignant un paramètre arbitraire, t une variable nouvelle.

L'équation (127) devient

$$\frac{d^2 J_\alpha(nt)}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dJ_\alpha(nt)}{dt} + \left(n^2 - \frac{\alpha^2}{t^2}\right)J_\alpha(nt) = 0.$$

Considérons la fonction $J_\alpha(nt)$ comme une fonction de deux arguments t et n et appliquons au cas considéré la transformation du n° 2.

Posant

$$J_\alpha(nt) = \frac{v_n(t)}{\sqrt{t}} \tag{128}$$

on obtient cette équation pour $v_n(t)$

$$v_n''(t) + n^2 v_n(t) + \frac{1-4\alpha^2}{4t^2} v_n(t) = 0 \tag{129}$$

qui a la forme de l'équation (13) du n° 2, si l'on y pose

$$\lambda_n^2 = n^2, \quad \mu(t) = \frac{4\alpha^2 - 1}{4t^2}.$$

Supposons que t se varie entre 0 et 1 et posons, dans la formule (17_1) du n° 3,

$$A_n' = v(1), \quad B_n' = v_n'(1), \quad \tau = 1.$$

On trouve, eu égard à (128),

$$\sqrt{t}\, J_\alpha(nt) = v_n(1) \cos n(t-1) + \frac{v_n'(1)}{n} \sin n(t-1) + \frac{1-4\alpha^2}{4n} \int_1^t \frac{J_\alpha(n\xi)}{\xi\sqrt{\xi}} \sin n\,(\xi - \ldots \tag{130}$$

la formule qui a lieu pour toutes les valeurs du paramètre n.

29. Désignons maintenant par h une constante quelconque réelle et différente de zéro, par ξ_n la n'ième racine de l'équation transcendente de Dini

$$\xi \frac{dJ_\alpha(\xi)}{d\xi} - (h+\alpha) J_\alpha(\xi) = 0, \quad \alpha > -\frac{1}{2}. \tag{131}$$

On sait que cette équation admet une infinité des racines réelles et positives qui croissent indéfiniment, lorsque l'indice n tend vers l'infini.

Posons dans (130)

$$n = \xi_n.$$

On trouve, en vertu de (128),

$$v_n(1) = J_\alpha(\xi_n).$$

En remarquant ensuite que

$$\frac{v_n'(t)}{n\sqrt{t}} - \frac{v_n(t)}{2nt\sqrt{t}} = \frac{dJ_\alpha(\xi)}{d\xi}, \quad \xi = nt, \quad n = \xi_n$$

et en tenant compte de (131), on obtient

$$\frac{v_n'(1)}{n} = \frac{1 + 2(h+\alpha)}{2\xi_n} J_\alpha(\xi_n).$$

L'équation (130) devient

$$(132)\qquad \sqrt{t}\,J_\alpha(\xi_n t) = J_\alpha(\xi_n)\left[\cos\xi_n(t-1) + \frac{1+2(h+\alpha)}{2\xi_n}\sin\xi_n(t-1)\right] +$$

$$+\frac{1-4\alpha^2}{4\xi_n}\int_1^t \frac{J_n(\xi_n\xi)}{\xi\sqrt{\xi}}\sin\xi_n(\xi-t)\,d\xi.$$

Or,

$$\left(\int_1^t \frac{J_\alpha(\xi_n\xi)}{\xi\sqrt{\xi}}\sin\xi_n(\xi-t)\,d\xi\right)^2 < \int_t^1 \xi J_\alpha^2(\xi_n\xi)\,d\xi\,.\int_t^1 \frac{\sin^2\xi_n(\xi-t)}{\xi^4}\,d\xi < \frac{1}{3t^3}\int_0^1 \xi J_\alpha^2(\xi_n\xi)\,d\xi.$$

D'autre part, on a toujours, quel que soit le nombre λ,

$$\int_0^1 \xi J_\alpha^2(\lambda\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}\left[J_\alpha^2(\lambda) - J_{\alpha+1}(\lambda)\,J_{\alpha-1}(\lambda)\right].$$

En remplaçant λ par ξ_n et en tenant compte de (131), on trouve

$$\int_0^1 \xi J_\alpha^2(\xi_n\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}\left(1+\frac{h(h+2\alpha)}{\xi_n^2}\right)J_\alpha^2(\xi_n) < AJ_\alpha^2(\xi_n),$$

A désignant un nombre fixe [1]).

On peut donc écrire

$$\int_1^t \frac{J_\alpha(\xi_n\xi)}{\xi\sqrt{\xi}}\sin\xi_n(\xi-t)\,dt = \vartheta_n\frac{A}{\sqrt{3}}\,\frac{J_\alpha(\xi_n)}{t\sqrt{t}},$$

où ϑ_n désigne une fonction de t satisfaisant à la condition

$$|\vartheta_n| < 1.$$

L'équation (132) devient alors

$$(133)\qquad \sqrt{t}\,J_\alpha(\xi_n t) = J_\alpha(\xi_n)\left[\cos\xi_n(t-1) + \frac{\omega_n(t)}{\xi_n}\right],$$

où l'on a posé

$$\omega_n(t) = \frac{1+2(h+\alpha)}{2}\sin\xi_n(t-1) + \vartheta_n\frac{A(1-4\alpha^2)}{4\sqrt{3}\,t\sqrt{t}}.$$

---

[1]) Rappelons que les nombres ξ_n $(n=1,\,2,\ldots)$ restent positifs et croissent en même temps que l'indice n.

La fonction $\omega_n(t)$ satisfait à l'inégalité suivante

$$|\omega_n(t)| < \frac{|1+2(h+\alpha)|}{2} + \frac{|1-4\alpha^2|A}{4\sqrt{3}\,t\sqrt{t}}$$

pour toutes les valeurs de t, comprises entre 0 et 1, et pour toutes les valeurs de n, plus grandes que l'unité.

Cette inégalité peut être remplacée par la suivante, plus simple,

$$(134) \qquad |\omega_n(t)| < \frac{\lambda}{t\sqrt{t}},$$

λ désignant un nombre fixe, car t reste toujours inférieur à l'unité.

30. Substituons maintenant (133) dans (132).

On obtient

$$(135) \quad \int_1^t \frac{J_\alpha(\xi_n \xi)}{\xi\sqrt{\xi}} \sin \xi_n(\xi - t)\, d\xi = J_\alpha(\xi_n) \left\{ \int_1^t \frac{\cos \xi_n(\xi-1) \sin \xi_n(\xi-t)}{\xi^2} d\xi + \frac{1}{\xi_n} \int_1^t \frac{\omega_n(\xi) \sin \xi_n(\xi - t)}{\xi^2} \right.$$

Considérons l'intégrale

$$I = \int_1^t \frac{\cos \xi_n(\xi-1)\sin \xi_n(\xi-t)}{\xi^2} d\xi = \frac{1}{2}\int_1^t \frac{\sin \xi_n(2\xi - t - 1)}{\xi^2} d\xi - \frac{\sin \xi_n(t-1)}{2} \int_1^t \frac{d\xi}{\xi^2}.$$

Le théorème de la moyenne donne

$$I_1 = \int_1^t \frac{\sin \xi_n(2\xi - t - 1)}{\xi^2} d\xi = \frac{1}{t'^2} \int_1^{t'} \sin \xi_n (2\xi - t - 1)\, d\xi,$$

où

$$1 > t' > t.$$

L'intégrale I_1 satisfait donc à l'inégalité

$$|I_1| < \frac{1}{\xi_n t^2}.$$

On peut donc écrire

$$(136) \qquad I = \frac{\mu_n(t)}{\xi_n} - \frac{t-1}{2t} \sin \xi_n (t-1),$$

où $\mu_n(t)$ est une fonction de t satisfaisant à la condition

$$(137) \qquad |\mu_n(t)| < \frac{1}{2t^2} < \frac{1}{2t^2\sqrt{t}}$$

pour les valeurs de t, plus petites que l'unité.

Remarquant maintenant que

$$\left|\int_1^t \frac{\omega_n(\xi)\sin\xi_n(\xi-t)}{\xi^2}\,d\xi\right| < \int_t^1 \frac{|\omega_n(\xi)|}{\xi^2}\,d\xi,$$

d'où, en vertu de (134),

$$(138)\qquad \left|\int_1^t \frac{\omega_n(\xi)\sin\xi_n(\xi-t)}{\xi^2}\,d\xi\right| < \frac{\mu}{t^2\sqrt{t}},$$

μ désignant un nombre fixe, on obtient, en tenant compte de (135) et (136),

$$(139)\qquad \int_1^t \frac{J_\alpha(\xi_n\xi)}{\xi\sqrt{\xi}}\sin\xi_n(\xi-t)\,d\xi = J_\alpha(\xi_n)\left[-\frac{t-1}{2t}\sin\xi_n(t-1)+\frac{\vartheta'_n(t)}{\xi_n}\right],$$

où, en vertu de (137) et (138),

$$|\vartheta'_n(t)| < \frac{\lambda}{t^2\sqrt{t}},$$

λ désignant un nombre fixe.

Substituant maintenant (139) dans (132) on trouve cette expression asymptotique pour $J_\alpha(\xi_n t)$:

$$140)\qquad \sqrt{t}\,J_\alpha(\xi_n t) = J_\alpha(\xi_n)\left[\cos\xi_n(t-1)+\frac{\sin\xi_n(t-1)}{\xi_n}\left(\beta+\frac{\beta_1}{t}\right)+\frac{\vartheta_n(t)}{\xi_n^2}\right],$$

où

$$(141)\qquad \beta = \frac{3+4\alpha^2}{8}+h+\alpha,\quad \beta_1 = \frac{1-4\alpha^2}{8},\quad |\vartheta_n(t)| < \frac{\gamma}{t^2\sqrt{t}},$$

γ désignant un nombre fixe.

31. Montrons que la méthode du n⁰ 23, étant appliquée à certaines séries procédant suivant les fonctions de Bessel, permet de déterminer les conditions générales de leur convergence.

Nous allons considérer le développement de Dini de la forme

$$(142)\qquad \sum_0^\infty \frac{J_\alpha(\xi_n t)\int_0^1 xf(x)J_\alpha(\xi_n x)\,dx}{\int_0^1 xJ_\alpha^2(\xi_n x)\,dx} = \sum_0^\infty \frac{\xi_n^2 J_\alpha(\xi_n t)}{\left(h(h+2\alpha)+\xi_n^2\right)J_\alpha^2(\xi_n)}\int_0^1 xf(x)J_\alpha(\xi_n x)\,dx,$$

ξ_n désignant les racines de l'équation (131).

Substituant l'expression (140) de $J_\alpha(\xi_n x)$ dans le terme général de cette série, on trouve

$$\sqrt{t}\,\frac{J_\alpha(\xi_n t)}{J_\alpha^2(\xi_n)}\int_0^1 x f(x) J_\alpha(\xi_n x)\,dx = \cos\xi_n(t-1)\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\cos\xi_n(x-1)\,dx +$$

(143) $$+\frac{\sin\xi_n(t-1)}{\xi_n}\left(\beta+\frac{\beta_1}{t}\right)\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\cos\xi_n(x-1)\,dx +$$

$$+\frac{\beta}{\xi_n}\cos\xi_n(t-1)\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\sin\xi_n(x-1)\,dx + \beta_1\frac{\cos\xi_n(t-1)}{\xi_n}\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\sin\xi_n(x-1)\,dx + \frac{K_n}{\xi_n^2},$$

où l'on a posé

(144) $$K_n = a_n\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\sin\xi_n(x-1)\,d\xi + b_n\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\cos\xi_n(x-1)\,d\xi +$$
$$+ c_n\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\sin\xi_n(x-1)\,dx + h_n\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\,\vartheta_n(x)\,dx,$$

a_n, b_n, c_n et h_n désignant les fonctions de t dont les modules ne surpassent pas une certaine limite fixe, quelle que soit la valeur de t, prise entre 0 et 1.

Supposons que $f(x)$ est une fonction à variation bornée entre 0 et 1. On aura, d'après le théorème connu,

(145) $$\left|\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\cos\xi_n(x-1)\,dx\right| < \frac{A}{\xi_n},$$
$$\left|\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\sin\xi_n(x-1)\,dx\right| < \frac{A}{\xi_n},$$

A désignant une constante positive.

Considérons l'intégrale

(146) $$\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\,\vartheta_n(x)\,dx.$$

Supposons que la fonction $f(x)$ satisfasse encore à la condition suivante: il existe un nombre assez petit, mais fixe, ε_0 tel qu'on ait

$$|f(x)| < Bx^{1+\mu},$$

pour toutes les valeurs de x, comprises entre 0 et ε_0, B et $\mu < 1$ étant des nombres fixes.

Cette condition étant remplie, on trouve, eu égard à (141),

$$\left| \int_{\varepsilon'}^{\varepsilon} \sqrt{x} f(x)\, \vartheta_n(x)\, dx \right| < B\gamma \int_{\varepsilon'}^{\varepsilon} x^{\mu-1}\, dx < \frac{B\gamma}{\mu}(\varepsilon^{\mu} - \varepsilon'^{\mu}),$$

ε et ε' étant deux nombres positifs, plus petits que ε_0.

Il s'ensuit que l'intégrale (146) a un sens bien déterminé.

En remarquant ensuite qu'en vertu de l'hypothèse, faite sur $f(x)$, la fonction

$$\psi(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x}}$$

est une fonction à variation bornée dans l'intervalle (0, 1), on trouve

$$(147) \qquad \left| \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} \sin \xi_n (x-1)\, dx \right| < \frac{A}{\xi_n}.$$

Les inégalités (145) et (147) montrent que, pour toute valeur donnée de la variable t, comprise entre 0 et 1,

$$(148) \qquad |K_n| < Q,$$

Q étant un nombre fixe, ne dépendant pas de n.

Les mêmes inégalités et l'inégalité (148) conduisent à l'équation suivante [voir l'équation (143)]

$$(148_1) \quad \sqrt{t}\, \frac{J_\alpha(\xi_n t)}{J_\alpha^2(\xi_n)} \int_0^1 x f(x) J_\alpha(\xi_n x)\, dx = \cos \xi_n (t-1) \int_0^1 \sqrt{x} f(x) \cos \xi_n (x-1)\, dx + \frac{\varphi(t)}{\xi_n^2},$$

où $\varphi(t)$ est une fonction dont le module ne surpasse pas un certain nombre fixe.

On en conclut que la série (142) converge en même temps que la série

$$(149) \qquad \sum_1^{\infty} \frac{\xi_n^2}{\xi_n^2 + h(h+2\alpha)} \cos \xi_n (t-1) \int_0^1 \sqrt{x} f(x) \cos \xi_n (x-1)\, dx,$$

si la fonction $f(x)$ satisfait aux conditions énoncées plus haut, car la série

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{\xi_n^2}$$

converge.

Cela résulte de ce que les racines positives de l'équation (131) de Dini se rapprochent, à partir d'une valeur de n assez grande, de plus en plus à

$$\left(2n+1+\frac{2\alpha+1}{2}\right)\frac{\pi}{2}.$$

Il est évident que la série (149) peut être remplacée par la suivante

$$(150) \qquad \sum_{1}^{\infty}\cos\xi_n(t-1)\int_0^1\sqrt{x}f(x)\cos\xi_n(x-1)\,dx,$$

car on a, pour n assez grand,

$$\frac{\xi_n^2}{\xi_n^2+h(h+2\alpha)}=1+\frac{\alpha_n}{\xi_n^2},$$

où α_n est une quantité dont le module ne surpasse pas un certain nombre fixe, ne dépendant pas de n.

Il est aisé de s'assurer enfin que les conditions de convergence de la série (150) sont les mêmes que celles de la série trigonométrique

$$(151) \qquad \sum_{1}^{\infty}\cos(n\pi+\delta)(t-1)\int_0^1\sqrt{x}f(x)\cos(n\pi+\delta)(x-1)\,dx.$$

Considérons, pour fixer les idées, le cas le plus simple, où la constante h est égale à $-\alpha$.

L'équation (131) devient

$$\frac{dJ_\alpha}{d\xi}=0.$$

On sait que, pour les valeurs de n assez grandes, les racines ξ_n de cette équation peuvent se présenter sous la forme suivante

$$\xi_n=n\pi+\frac{2\alpha+1}{4}\pi+\varepsilon_n=n\pi+\delta+\varepsilon_n,$$

ε_n désignant une quantité telle que

$$|\sin\varepsilon_n|<\frac{A}{\xi_n}<\frac{B}{n},$$

B désignant un nombre fixe.

Cela résulte de la formule asymptotique, etablie par Mrs Hankel et Dini, pour la fonction $J_\alpha(x)$.

Moyennant la méthode connue de Dirichlet on s'assure sans peine que la série (151) converge uniformément, si la fonction $f(x)$ est une fonction à variation bornée entre 0 et 1.

Les mêmes raisonnements s'appliquent au cas général, lorsque la constante h dans l'équation (131) a une valeur quelconque, différente de zéro.

L'analyse précédente conduit à la proposition suivante:

La série (142) converge uniformément, pourvu que la fonction $f(x)$ à variation bornée entre 0 et 1 satisfasse encore à la condition suivante: il existe un nombre positif ε_0, quoique assez petit mais fixe, tel qu'on ait

$$|f(x)| < Bx^{1+\mu}$$

pour les valeurs de x, comprises entre 0 et ε_0, B et $\mu < 1$ étant des nombres fixes.

32. Avant d'aller plus loin faisons une digression à la théorie générale des fonctions que j'ai appellées *fonctions fondamentales* dans mon Mémoire: „Théorie générale des fonctions fondamentales“ (Annales de Toulouse, 1905).

En nous bornant au cas d'une seule variable réelle x, désignons par

$$(152) \qquad V_0(x),\ V_1(x),\ V_2(x), \ldots,\ V_n(x), \ldots$$

une suite de fonctions fondamentales („Eigenfunctionen“ de M. D. Hilbert) [1]), correspondant à la fonction génératrice $G(x, \xi)$ („Kern“ de M. Hilbert), symétrique en x et ξ.

Les fonctions $V_k(x)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ satisfont aux conditions

$$V_k(x) = \lambda_k \int_a^b p(\xi)\, G(x, \xi)\, V_k(\xi)\, d\xi,$$

où λ_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ sont les nombres, caractéristiques pour les fonctions $V_k(x)$ („Eigenwerthe“ de M. Hilbert), $p(\xi)$ est une fonction donnée, continue et positive dans l'intervalle (a, b).

Considérons le cas le plus simple, où les nombres λ_k restent positifs et croissent indéfiniment, lorsque l'indice k tend vers l'infini.

Supposons que les fonctions (152) forment un groupe, auquel s'applique le théorème général du n⁰ 13 du Chap. II de mon Mémoire, cité au début de ce n⁰.

J'énoncerai ce théorème, en l'appliquant au cas d'une seule variable, comme il suit:

---

[1]) Voir D. Hilbert: „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen“. Göttingen Nachrichten, 1904, 1905.

Quelle que soit la fonction $f(x)$, bornée et intégrable dans l'intervalle (a, b), quelle que soit une autre fonction $\varphi(x)$, pouvant devenir infinie aux environs de certains points isolés de l'intervalle (a_1, b_1), intérieur à l'intervalle donné (a, b), mais telle que les integrales

$$\int_{a_1}^{b_1} pf\varphi\, dx\,, \quad \int_{a_1}^{b_1} p\varphi\, V_k dx\,, \quad \int_{a_1}^{b_1} p\varphi^2 dx$$

aient un sens bien déterminé, on a toujours le développement suivant:

$$\int_{a_1}^{b_1} pf\varphi\, dx = \sum_0^\infty A_k B_k\,, \quad A_k = \frac{\int_a^b pf\, V_k dx}{\int_a^b p\, V_k^2 dx}\,, \quad B_k = \int_{a_1}^{b_1} p\varphi\, V_k dx. \tag{153}$$

Toutes les fonctions, étudiées plus haut: polynomes de Hermite et de Jacobi, ceux du n⁰ 18, fonctions de Bessel appartiennent à la classe des fonctions fondamentales, auxquelles s'applique le théorème que je viens d'énoncer, comme je l'ai déjà montré au n⁰ 8 de mon Mémoire: „Sur certaines égalités générales etc", publié dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de St-Pétersbourg en 1904 (p. 16).

33. De ce théorème nous déduirons un autre qui aura une application importante au problème du développement d'une fonction arbitraire en séries infinies.

Posons dans (153)

$$\varphi = \frac{\psi}{p}, \quad a_1 = x_0 - \eta\,, \quad b = x_0 + \eta\,,$$

x_0 désignant une valeur quelconque de x, prise arbitrairement dans l'intervalle (a, b), η désignant un nombre positif qu'on peut prendre si petit que l'on veut, ψ une fonction continue dans l'intervalle (a, b).

On trouve

$$\frac{1}{2\eta}\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \psi f(x)\, dx = \sum \frac{A_k}{2\eta}\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \psi\, V_k(x)\, dx\,[1]. \tag{154}$$

Supposons que la fonction $f(x)$ soit choisie de façon que la série

$$\sum A_k V_k(x) \tag{155}$$

converge uniformément dans l'intervalle (a, b); la série (154) le sera aussi.

---

[1]) Nous ommettons, pour simplifier l'écriture, les limites 0 et $+\infty$ de la somme Σ.

En remplaçant dans (154) x_0 par x, x par ξ et en intégrant de nouveau entre $x_0 - \eta$ et $x_0 + \eta$, on obtient

$$(156) \qquad \frac{1}{4\eta^2}\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} dx \int_{x-\eta}^{x+\eta} \psi f(\xi)\, d\xi = \sum \frac{A_k}{4\eta^2}\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} dx \int_{x-\eta}^{x+\eta} \psi\, V_k(\xi)\, d\xi,$$

la série du second membre étant uniformément convergente.

Supposons maintenant que chaque terme $A_k V_k(x)$ de la série (155) puisse se présenter sous la forme suivante

$$A_k V_k(x) = W_k(x) + \alpha_k w_k(x),$$

où W_k et w_k sont des fonctions continues dont la dernière satisfait à l'inégalité

$$|w_k'(x)| < Q,$$

Q désignant une quantité positive ne dépendant pas de k, α_k sont des constantes telles que la série

$$\sum |\alpha_k|$$

converge.

Ces conditions étant remplies, on trouve, pour η assez petit,

$$\left|\frac{\alpha_k}{2\eta}\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \psi w_k(x)\, dx - \alpha_k w_k(x_0)\, \psi(x_0)\right| = \left|\frac{\alpha_k}{2\eta}\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \varepsilon_n\, dx\right| < \varepsilon\, |\alpha_n|,$$

ε étant un nombre positif qui s'annule pour $\eta = 0$.

On en conclut que

$$\lim_{\eta=0} \frac{1}{2\eta}\sum \alpha_k \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \psi w_k(x)\, dx = \sum \alpha_k w_k(x_0)\, \psi(x_0)$$

quelle que soit la valeur de x_0, prise dans l'intervalle (a, b).

On aura de même

$$\lim_{\eta=0} \frac{1}{4\eta^2}\sum \alpha_k \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} dx \int_{x-\eta}^{x+\eta} \psi w_k(\xi)\, d\xi = \sum \alpha_k w_k(x_0)\, \psi(x_0).$$

Supposons enfin que les fonctions $W_k(x)$ soient choisies de façon que l'on ait

$$\lim_{\eta=0} \frac{1}{4\eta^2}\sum \int_{x_0+\eta}^{x_0+\eta} dx \int_{x-\eta}^{x+\eta} \psi\, W_k(\xi)\, d\xi = \sum W_k(x_0)\, \psi(x_0).$$

Ces conditions étant remplies, on trouve, eu égard à (156),

$$(157)\quad \psi(x_0)\Big[\sum W_k(x_0)+\sum \alpha_k w_k(x_0)\Big]=\sum A_k V_k(x_0)\psi(x_0)=\lim_{\eta=0}\frac{1}{4\eta^2}\int\limits_{x_0-\eta}^{x_0+\eta}dx\int\limits_{x-\eta}^{x+\eta}\psi f(\xi)\,d\xi.$$

Or, pour chaque point $x = x_0$ de l'intervalle (a, b), où les expressions

$$f(x_0+0) \text{ et } f(x_0-0)$$

de la fonction intégrable $f(x)$ ont des valeurs déterminées, la limite (pour $\eta = 0$) du second membre de l'égalité précédente est égale à

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}\,\psi(x_0),$$

comme je l'ai déjà montré dans mon Mémoire: „Sur la théorie des séries trigonométriques", publié dans le Bulletin de l'Académie de Cracovie en 1903 (Novembre).

On trouve donc, sous les hypothèses faites sur la série (155) ainsi que sur la fonction $f(x)$,

$$\sum A_k V_k(x_0)=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

Faisons encore la remarque suivante.

Si les constantes α_k et les fonctions $w_k(x)$ satisfont aux conditions, indiquées plus haut, on a toujours, quel que soit l'entier s,

$$\lim_{\eta=0}\frac{1}{(2\eta)^s}\sum \alpha_k\int\limits_{x_0-\eta}^{x_0+\eta}dx_1\int\limits_{x_1-\eta}^{x_1+\eta}dx_2\ldots\int\limits_{x_{s-1}-\eta}^{x_{s-1}+\eta}w_k(x_s)\,\psi(x_s)\,dx_s=\sum \alpha_k w_k(x_0)\,\psi(x_0).$$

On en conclut, comme dans le cas précédent, que la somme de la série

$$\sum A_k V_k(x_0)$$

sera égale à

$$\lim_{\eta=0}\frac{1}{(2\eta)^s}\int\limits_{x_0-\eta}^{x_0+\eta}dx_1\int\limits_{x_1-\eta}^{x_1+\eta}dx_2\ldots\int\limits_{x_{s-1}-\eta}^{x_{s-1}+\eta}\psi(x_s)\,f(x_s)\,dx_s=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}\,\psi(x_0)$$

toutes les fois que la série

$$\sum W_k(x)$$

soit telle que

$$\lim_{\eta=0} \frac{1}{(2\eta)^s} \sum \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} dx_1 \int_{x_1-\eta}^{x_1+\eta} dx_2 \ldots \int_{x_{s-1}-\eta}^{x_{s-1}+\eta} \psi\, W_k(x_s)\, dx_s = \sum W_k(x_0)\, \psi(x_0).$$

Nous ferons l'usage de cette remarque plus loin.

34. Les recherches précédentes nous inspirent une méthode nouvelle pour résoudre le problème du développement d'une fonction donnée en séries procédant suivant les fonctions fondamentales. Cette méthode s'applique, comme nous verrons, à plusieurs suites de fonctions souvent employées dans l'Analyse.

J'exposerai d'abord les principes de cette méthode sous la forme générale en me réservant d'indiquer plus tard ses applications à certains cas particuliers les plus intéressants.

Désignons, comme précédemment, par

$$V_0(x),\ V_1(x),\ V_2(x), \ldots,\ V_k(x), \ldots$$

une suite de fonctions fondamentales qui satisfont, comme on sait, aux conditions

$$\int_a^b p(x)\, V_n(x)\, V_m(x)\, dx = 0, \quad \text{si } n \gtrless m,$$ [1]

a et b étant les limites de l'intervalle, où l'on définie les fonctions $V_k(x)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, $p(x)$ est une fonction positive ne s'annulant pas dans l'intervalle (a, b).

Faisons les hypothèses suivantes:

1) Le théorème général, énoncé au début du n° 32, s'applique aux fonctions $V_k(x)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

2) Chacune de ces fonctions $V_n(x)$ peut se représenter, au moins pour les valeurs de n, plus grandes qu'un nombre fixe ν, sous la forme suivante

(158) $$V_n(x) = \varphi(t)\,[\beta_n \cos(\lambda_n t + \tau) + \vartheta_n]$$ [2],

où t est une fonction de x, continue et bien déterminée dans l'intervalle (a, b), $\varphi(t)$ est une fonction de t jouissant les mêmes propriétés, β_n et τ sont des constantes, ϑ_n est une fonction de t qui s'annule pour $n = \infty$, λ_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ sont les nombres positifs indéfiniment croissants avec n.

---

[1] On dit souvent que les fonctions $V_k(x)$ forment un système orthogonal.

[2] Ou, plus généralement,

$$V_n(x) = \varphi(t)\,[\alpha_n \cos \lambda_n t + \beta_n \cos \lambda_n t + \vartheta_n].$$

Toutes les fonctions, étudiées plus haut [les polynomes de Hermite et de Jacobi, ceux du n⁰ 18, les fonctions de Bessel], satisfont, comme nous l'avons vu, aux conditions tout à l'heure énoncées.

Envisageons la série

$$(159) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} A_k V_k(x), \quad A_k = \frac{\int_a^b p(x) f(x) V_k(x)\, dx}{\int_a^b p V_k^2(x)\, dx},$$

$f(x)$ désignant une fonction arbitraire.

Le terme général $A_k V_k$ de cette série se représentera, en vertu de (158), sous la forme suivante

$$(160) \qquad A_k V_k(x) = \varphi(t) B_k \cos(\lambda_k t + \tau) + \alpha_n w_n(x),$$

où

$$B_k = \frac{\beta_n^2 \int_\alpha^\beta \psi(t) f(\theta_1(t)) \cos(\lambda_n t + \tau)\, dt}{\int_a^b p(x) V_k^2(x)\, dx},$$

α et β désignant les valeurs de t correspondant aux valeurs limites a et b de x, $\psi(t)$ et $\theta_1(t) = x$ étant des fonctions de t, continues dans l'intervalle (α, β), α_n étant des constantes.

Faisons maintenant les suppositions suivantes:

3) Les fonctions $w_n(x)$ satisfont aux inégalités

$$|w_n'(x)| < Q,$$

Q désignant un nombre fixe ne dépendant pas de n.

4) La série

$$\sum_0^{\infty} |\alpha_n|$$

converge.

Ces conditions étant rémplies, la série (159) sera convergente sous les mêmes conditions par rapport à la fonction donnée $f(x)$ que la série

$$\sum_0^{\infty} B_k \cos(\lambda_k t + \tau).$$

Supposons enfin que 5) la fonction $f(x)$ satisfasse aux certaines conditions, que nous appellerons, en général, *conditions (A)*, telles que la série

$$\sum_{0}^{\infty} B_k \cos(\lambda_k t + \tau) \tag{161}$$

converge dans l'intervalle (α, β) [correspondant à l'intervalle (a, b) de la variable x].

Les hypothèses énoncées étant remplies, on s'assure tout d'abord que la série (159) converge dans l'intervalle (a, b), pourvu que la fonction $f(x)$ satisfasse aux conditions (A), et que les propriétés de convergence de la série primitive (159) sont les mêmes que celles de la série approchée (161).

35. Posons maintenant

$$f(x) = \sum_{0}^{n} A_k V_k(x) + R_n(x). \tag{162}$$

L'hypothèse 1) du n⁰ précédent étant remplie, on peut toujours trouver un nombre $n = n_0$ tel qu'on ait, pour $n \geqq n_0$,

$$\int_a^b R_n^2 \, dx < \varepsilon, \tag{163}$$

ε désignant un nombre positif donné à l'avance; cela nous conduit, comme au n⁰ précédent, à l'équation suivante

$$\frac{1}{2\eta} \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \psi(x) f(x) \, dx = \sum_{0}^{\infty} \frac{A_k}{2\eta} \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \psi(x) V_k(x) \, dx.$$

Introduisons une nouvelle variable t en posant

$$t = \Theta(x), \quad x = \Theta_1(t),$$

$\Theta(x)$ et $\Theta_1(t)$ étant des fonctions continues avec leurs dérivées du premier ordre dans les intervalles (a, b) et (α, β).

L'équation (162) devient, en vertu de (160),

$$f[\Theta_1(t)] = \sum_{0}^{n} B_k \varphi(t) \cos(\lambda_k t + \tau) + \sum_{0}^{n} \alpha_k w_k [\Theta_1(t)] + R_n[\Theta_1(t)] \text{ [1]},$$

[1] Remarquons, pour éviter tout malentendu, que nous introduisons ici, pour simplifier l'écriture, une notation symbolique en écrivant simplement

$$\sum_{0}^{n} B_k \varphi(t) \cos(\lambda_k t + \tau) + \sum_{0}^{n} \alpha_n w_n [\Theta_1(t)]$$

au lieu de

d'où l'on tire, en divisant par $\varphi(t)$ et en intégrant le résultat entre les limites α_1 et β_1, α_1 et $\beta_1 > \alpha_1$ étant des nombres quelconques, pris à l'intérieur de l'intervalle (α, β),

$$(163_1)\quad \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{f[\Theta_1(t)]}{\varphi(t)}\,dt = \sum_0^n B_k \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \cos(\lambda_k t + \tau)\,dt + \sum_0^n \alpha_k \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{w_k[\Theta_1(t)]}{\varphi(t)}\,dt + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{R_n[\Theta_1(t)]}{\varphi(t)}\,dt.$$

Or,

$$\left|\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{R_n[\Theta_1(t)]}{\varphi(t)}\,dt\right| = \left|\int_{a_1}^{b_1} \frac{R_n(x)\,\Theta'(x)}{\varphi[\Theta(x)]}\,dx\right| < \left\{\int_{a_1}^{b_1}\left(\frac{\Theta'(x)}{\varphi[\Theta(x)]}\right)^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\int_a^b R_n^2(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{2}},$$

a_1 et b_1 étant les valeurs de x correspondantes à $t = \alpha_1$ et $t = \beta_1$.

Supposant que l'intégrale

$$\int_a^b \left[\frac{\Theta'(x)}{\varphi[\Theta(x)]}\right]^2 dx$$

ait une valeur bien déterminée M, on en conclut, eu égard à (163), que

$$(163_2)\qquad \left|\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{R_n[\Theta_1(t)]}{\varphi(t)}\,dt\right| < M\sqrt{\varepsilon},$$

ce qui nous conduit à l'égalité suivante

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{f[\Theta_1(t)]}{\varphi(t)}\,dt = \sum_0^\infty B_k \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \cos(\lambda_k t + \tau)\,dt + \sum_0^\infty \alpha_k \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{w_k[\Theta_1(t)]}{\varphi(t)}\,dt.$$

Prenons un point quelconque $x = x_0$ à l'intérieur de l'intervalle (a, b) et soit t_0 la valeur correspondante de t.

Posons

$$\alpha_1 = t_0 - \eta, \quad \beta_1 = t_0 + \eta,$$

η désignant un nombre positif assez petit, donné à l'avance.

$$\sum_0^\nu A_k V_k = \sum_\nu^n B_k \varphi(t)\cos(\lambda_k t + \tau) + \sum_\nu^n \alpha_k w_k[\Theta_1(t)],$$

ν désignant l'entier, introduit dans l'hypothèse 2) du n⁰ précédent.

Nous allons employer cette notation dans toutes les recherches qui vont suivre, car cela ne peut présenter aucun inconvénient.

En remarquant que

$$\frac{1}{2\eta}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}\cos(\lambda_k t+\tau)\,dt=\frac{\sin\lambda_k\eta}{\lambda_k\eta}\cos(\lambda_k t_0+\tau),$$

on trouve

$$(164)\quad \frac{1}{2\eta}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}\frac{f[\Theta_1(t)]}{\varphi(t)}dt=\sum_0^\infty B_k\frac{\sin\lambda_k\eta}{\lambda_k\eta}\cos(\lambda_k t_0+\tau)+\sum_0^\infty\frac{\alpha_k}{2\eta}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}\frac{w_k[\Theta_1(t)]}{\varphi(t)}dt.$$

Il est aisé de s'assurer que la série

$$(165)\qquad \sum_0^\infty B_k\frac{\sin\lambda_k\eta}{\lambda_k\eta}\cos(\lambda_k t+\tau)$$

converge uniformément dans l'intervalle (a, b), quel que soit le nombre donné η.

Remplaçons dans l'équation (163_1) n par $n+p$, p désignant un entier quelconque, et retranchons le résultat ainsi obtenu de cette équation. On obtient

$$r_n=\sum_{n+1}^{n+p}B_k\frac{\sin\lambda_k\eta}{\lambda_k\eta}\cos(\lambda_k t_0+\tau)=-\sum_{n+1}^{n+p}\frac{\alpha_k}{2\eta}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}\frac{w_k[\Theta_1(t)]}{\varphi(t)}dt+\frac{1}{2\eta}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}\frac{R_n-R_{n+p}}{\varphi(t)}dt.$$

La série $\sum\limits_0^\infty \alpha_k w_k(x)$ étant absolument convergente dans l'intervalle (a, b), on trouve, pour les valeurs de n, plus grandes qu'un entier n_0, convenablement choisi,

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p}\frac{\alpha_k}{2\eta}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}\frac{w_k[\Theta_1(t)]}{\varphi(t)}dt\right|<\varepsilon,$$

ε désignant un nombre positif, donné à l'avance.

D'autre part, en vertu de (163_2),

$$\left|\frac{1}{2\eta}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}\frac{R_n-R_{n+p}}{\varphi(t)}dt\right|<\frac{M\sqrt{\varepsilon}}{\eta}.$$

Il s'ensuit que

$$|r_n|<\varepsilon+\frac{M}{\eta}\sqrt{\varepsilon}=\delta,$$

δ désignant un nombre positif arbitraire, ne dépendant pas de t_0.

Donc, *la série (165) converge uniformément dans l'intervalle* (α, β).
Cette proposition nous permet d'écrire

$$(164_1)\quad \begin{aligned} \frac{1}{(2\eta)^s}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} dt_1 \int_{t_1-\eta}^{t_1+\eta} dt_2 \cdots \int_{t_{s-1}-\eta}^{t_{s-1}+\eta} \frac{f[\Theta_1(t_s)]}{\varphi(t_s)}\, dt_s = \sum_0^\infty B_k \frac{\sin^s \lambda_k \eta}{(\lambda_k \eta)^s} \cos(\lambda_k t_0 + \tau) + \\ + \sum_0^\infty \frac{\alpha_k}{(2\eta)^s} \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} dt_1 \int_{t_1-\eta}^{t_1+\eta} dt_2 \cdots \int_{t_{s-1}-\eta}^{t_{s-1}+\eta} \frac{w_k[\Theta_1(t_s)]}{\varphi(t_s)}\, dt_s . \end{aligned}$$

Or, il est aisé de s'assurer, comme nous l'avons déjà indiqué au n° 33, que, dans les hypothèses faites plus haut,

$$\lim_{\eta=0} \sum \frac{\alpha_k}{(2\eta)^s} \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} dt_1 \int_{t_1-\eta}^{t_1+\eta} dt_2 \cdots \int_{t_{s-1}-\eta}^{t_{s-1}+\eta} \frac{w_k[\Theta_1(t_s)]}{\varphi(t_s)}\, dt_s = \sum \frac{\alpha_k w_k(x_0)}{\varphi(t_0)} ,$$

$$\lim_{\eta=0} \frac{1}{(2\eta)^s} \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} dt_1 \int_{t_1-\eta}^{t_1+\eta} dt_2 \cdots \int_{t_{s-1}-\eta}^{t_{s-1}+\eta} \frac{f[\Theta_1(t)]}{\varphi(t_s)}\, dt_s = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2\varphi(t_0)} .$$

On a donc

$$(166)\quad \lim_{\eta=0} \sum_0^\infty B_k\, \varphi(t_0) \left(\frac{\sin \lambda_k \eta}{\lambda_k \eta}\right)^s \cos(\lambda_k t_0 + \tau) + \sum_0^\infty \alpha_k w_k(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} .$$

36. Cherchons maintenant la limite, vers laquelle tend la série

$$(167)\quad \sum_0^\infty B_k \left(\frac{\sin \lambda_k \eta}{\lambda_k \eta}\right)^s \cos(\lambda_k t_0 + \tau) = \sum_0^\infty C_k \left(\frac{\sin \lambda_k \eta}{\lambda_k \eta}\right)^s$$

lorsque η tend vers zéro.

Nous nous bornerons au cas le plus simple, où les nombres λ_k se représentent sous la forme suivante

$$(168)\quad \lambda_k = a k^\beta ,$$

a et β étant des nombres fixes.

En se rappelant que, d'après la supposition, la série (161) converge, désignons sa somme par S, et posons, en suivant une voie, indiquée par

Riemann dans son Mémoire connu: „Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe",

$$\sum_{0}^{n-1} C_k = S + \varepsilon_n,$$

d'où

$$C_n = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n.$$

Substituant ces expressions de C_n dans (167), on obtient

$$(169)\qquad \sum_{0}^{\infty} C_k \left(\frac{\sin \lambda_k \eta}{\lambda_k \eta}\right)^s = S + \sum_{1}^{\infty} \varepsilon_k \left\{ \left(\frac{\sin \lambda_{k-1} \eta}{\lambda_{k-1} \eta}\right)^s - \left(\frac{\sin \lambda_k \eta}{\lambda_k \eta}\right)^s \right\}.$$

Désignons par η un nombre positif, donné à l'avance.

On peut toujours choisir, le nombre η étant assez petit un entier m assez grand, satisfaisant à l'inégalité

$$(170)\qquad \lambda_m \eta = am^\beta \eta < \pi$$

et tel qu'on ait, pour $k \geqq m$,

$$(171)\qquad \varepsilon_k < \varepsilon.$$

Désignons enfin par p un entier, plus grand que m, défini par les conditions

$$p < \left(\frac{\pi}{a\eta}\right)^{\frac{1}{\beta}} < p + 1,$$

qui donnent

$$(172)\qquad \eta \lambda_p = ap^\beta \eta < \pi, \quad 2p > (p+1) > \left(\frac{\pi}{a\eta}\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

d'où

$$(173)\qquad a\eta p^\beta > \frac{\pi}{2^\beta}.$$

Cela posé, décomposons la série du second membre de l'équation (169) en trois sommes suivantes

$$\sum_{1}^{m} + \sum_{m+1}^{p} + \sum_{p+1}^{\infty}.$$

Il est évident que la première somme, composée d'un nombre fini de termes, tend vers zéro en même temps que η. On trouve donc, en choisissant convenablement le nombre η,

$$(174)\qquad \left|\sum_{1}^{m}\right| < \varepsilon.$$

En remarquant ensuite que le rapport

$$\frac{\sin x}{x}$$

représente une fonction décroissante, pourvu que $x < \pi$, on en conclut que la différence

$$\left(\frac{\sin \lambda_{k-1}\eta}{\lambda_{k-1}\eta}\right)^s - \left(\frac{\sin \lambda_k \eta}{\lambda_k \eta}\right)^s$$

reste positive pour les valeurs de k, comprises entre $m+1$ et p, car, en vertu de (170) et (172),

$$\lambda_m \eta < \lambda_{m+1}\eta < \ldots < \lambda_p \eta < \pi.$$

On trouve donc, eu égard à (171),

$$\left|\sum_{m+1}^{p}\right| < \varepsilon \left\{\left(\frac{\sin \lambda_m \eta}{\lambda_m \eta}\right)^s - \left(\frac{\sin \lambda_p \eta}{\lambda_p \eta}\right)^s\right\} < \varepsilon.$$

Considérons enfin la troisième somme

$$\sum_{p+1}^{\infty} \varepsilon_k \left\{\left(\frac{\sin \lambda_{k-1}\eta}{\lambda_{k-1}\eta}\right)^s - \left(\frac{\sin \lambda_k \eta}{\lambda_k \eta}\right)^s\right\}.$$

Écrivons avec Riemann le terme général sous la forme

$$\varepsilon_k (\sin \lambda_{k-1}\eta)^s \left\{\frac{1}{(\lambda_{k-1}\eta)^s} - \frac{1}{(\lambda_k \eta)^s}\right\} + \frac{\varepsilon_k}{(\lambda_k \eta)^s}\left\{(\sin \lambda_{k-1}\eta)^s - (\sin \lambda_k \eta)^s\right\}.$$

Il est évident que [voir les inégalités (171) et (173)]

$$(175) \qquad \sum_{p+1}^{\infty} \varepsilon_k (\sin \lambda_{k-1}\eta)^s \left\{\frac{1}{(\lambda_{k-1}\eta)^s} - \frac{1}{(\lambda_k \eta)^s}\right\} < \frac{\varepsilon}{(\lambda_p \eta)^s} < \frac{\varepsilon 2^{\beta s}}{\pi^s} = \varepsilon M.$$

D'autre part,

$$|(\sin \lambda_{k-1}\eta)^s - (\sin \lambda_k \eta)^s| < s\,|\sin \lambda_{k-1}\eta - \sin \lambda_k \eta| < 2s \left|\sin \frac{\lambda_{k-1} - \lambda_k}{2}\eta\right| <$$
$$< s(\lambda_k - \lambda_{k-1})\eta.$$

Or, en vertu de (168),

$$\lambda_k - \lambda_{k-1} = a(k^\beta - (k-1)^\beta) < a\beta\, 2^{\beta+1} k^{\beta-1}.$$

On peut donc écrire

$$\left|\frac{\varepsilon_k}{(\lambda_k\eta)^s}\left\{(\sin\lambda_{k-1}\eta)^s-(\sin\lambda_k\eta)^s\right\}\right|<\varepsilon\, s\beta\,\frac{2^{\beta+1}}{(a\eta)^{s-1}\,k^{\beta(s-1)-1+2}}<$$

$$<\varepsilon\,\frac{Q}{(a\eta)^{s-1}\,p^{\beta(s-1)-1}}\,\frac{1}{k^2}$$

pour toutes les valeurs de k, plus grandes que p.

Cela nous conduit à l'inégalité suivante

$$\left|\sum_{p+1}^{\infty}\frac{\varepsilon_k}{(\lambda_k\eta)^s}\left\{(\sin\lambda_{k-1}\eta)^s-(\sin\lambda_k\eta)^s\right\}\right|<\varepsilon\frac{Q}{(a\eta)^{s-1}\,p^{\beta(s-1)-1}}\sum_{p+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\varepsilon\frac{Q}{(ap^{\beta}\eta)^{s-1}},$$

ou, en vertu de (173)

(176) $$\left|\sum_{p+1}^{\infty}\right|<\varepsilon\,\frac{2^{\beta(s-1)}\,Q}{\pi^{s-1}}=\varepsilon N.$$

On suppose, sans doute, que l'entier s, qui restait arbitraire jusqu'à présent, soit assujeti à la condition

(176_1) $$\beta(s-1)-1>0,$$

ce qui nous permet de poser

$$s=E\left(1+\frac{1}{\beta}\right)+1.$$

Le nombre s étant ainsi choisi, on trouve, en vertu de (174), (175) et (176),

$$\sum_{1}^{\infty}\varepsilon_k\left\{\left(\frac{\sin\lambda_{k-1}\eta}{\lambda_{k-1}\eta}\right)^s-\left(\frac{\sin\lambda_k\eta}{\lambda_k\eta}\right)^s\right\}<\varepsilon(1+M+N)=\delta.$$

Cette inégalité montre que

$$\lim_{\eta=0}\sum_{1}^{\infty}\varepsilon_k\left\{\left(\frac{\sin\lambda_{k-1}\eta}{\lambda_{k-1}\eta}\right)^s-\left(\frac{\sin\lambda_k\eta}{\lambda_k\eta}\right)^s\right\}=0,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{\eta=0}\sum_{0}^{\infty}B_k\left(\frac{\sin\lambda_k\eta}{\lambda_k\eta}\right)^s\cos(\lambda_k t_0+\tau)=\sum_{0}^{\infty}B_k\cos(\lambda_k t_0+\tau)$$

et, enfin, en vertu de (166),

$$\sum_{0}^{\infty} A_k V_k(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

37. *L'analyse précédente conduit à un théorème général que j'énoncerai comme il suit:*

(A). Soit $f(x)$ une fonction, bornée et intégrable dans un certain intervalle donné (a, b).

Soit $V_k(x)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ une suite de fonctions, définies dans l'intervalle (a, b) et formant un système orthogonal, auxquelles s'applique le théorème du n⁰ 32.

Supposons que les fonctions $V_k(x)$ admettent la représentation asymptotique de la forme (l'hypothèse 2) du n⁰ 34)

$$V_k(x) = \varphi(t)\,[\beta_k \cos(\lambda_k t+\tau)+\vartheta_k]\ ^{1)}, \tag{177}$$

qui permet de réduire le terme général $A_k V_k(x)$ de la série

$$\sum_{0}^{\infty} A_k V_k(x), \quad A_k = \frac{\int_a^b p(x) f(x) V_k(x)\,dx}{\int_a^b p(x) V_k^2(x)\,dx} \tag{178}$$

à la forme suivante (voir n⁰ 34)

$$A_k V_k(x) = \varphi(t) B_k \cos(\lambda_k t+\tau) + \alpha_k w_k(x), \tag{178$_2$}$$

où $w_k(x)$ est une fonction admettant la dérivée du premier ordre dont le module ne surpasse pas une certaine limite fixe Q, α_k sont des constantes telles que la série

$$\sum_{0}^{\infty} |\alpha_k|$$

converge.

Quant aux nombres λ_k, nous supposons qu'ils soient positifs et se représentent sous la forme suivante

$$\lambda_k = a k^{\beta}, \tag{179}$$

a et β étant deux nombres fixes.

---

[1]) Ou, plus généralement,

$$V_k(x) = \varphi(t)\,[\alpha_k \cos \lambda_k t + \beta_k \sin \lambda_k t + \vartheta_k]. \tag{177$_1$}$$

Ces conditions étant remplies la somme de la série (177) est égale à l'expression

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} \tag{180}$$

pour tout point x_0 de l'intervalle (a, b), où la série approchée

$$\varphi(t)\sum_0^{\infty} B_k \cos(\lambda_k t+\tau), \tag{181}$$

ou, ce qui revient au même, la série primitive (178) converge, bien que cette convergence ne soit pas uniforme.

De ce théorème résulte encore le suivant:

(B). Si la série approchée (181) converge uniformément dans l'intervalle (α, β), correspondant à l'intervalle donné (a, b) de la variable x, la série primitive (178) est une série uniformément convergente et sa somme est égale à

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

en tout point x de l'intervalle (a, b).

38. Nous avons considéré jusqu'à présent le cas, où les expressions asymptotiques des fonctions $V_k(x)$ se représentent sous la forme (177) ou (177_1).

Il est aisé de comprendre, en se rappelant l'analyse qui nous a conduit aux expressions correspondantes pour les polynomes de Hermite, de Jacobi etc., que ces expressions ne représentent autre chose que la série (18_1) [ou celle de (31)] [1]), arrêtée à second terme.

Elles nous donnent donc les valeurs approchées des fonctions $V_k(x)$ [pour les valeurs de k assez grandes] dans la première approximation.

Cette première approximation est suffisante, comme nous l'avons déjà vu, pour en déduire certaines propriétés de plusieurs développements des fonctions arbitraires en séries.

Or, parmi les diverses questions de cette espèce se rencontrent telles qui exigent l'emploi des approximations de l'ordre plus élevé.

Revenant aux notations des articles 2—8, nous pouvons dire que la valeur approchée de la fonction $u_n(x)$, ou, ce qui revient au même, de la fonction $v_n(t)$, correspondant à l'approximation de l'ordre donné q, est égale à la somme de q premiers termes de la série (18_1) [ou celle de (31)].

Quant aux expressions asymptotiques de $v_n(t)$ correspondant à l'approximation de l'ordre donné, on en déduit de la manière suivante:

---

[1]) Voir n^{os} 7 et 8.

Soit

$$v_n(t) = h_n \left[\alpha_n^{(q-1)} + \frac{\vartheta_n^{(q-1)}}{\lambda_n^{q-1}} \right] \tag{182}$$

l'expression asymptotique correspondant à l'approximation de l'ordre $(q-1)$, α_n^{q-1} désignant une certaine fonction de t, $\vartheta_n^{(q-1)}$ une autre fonction de t, satisfaisant à l'inégalité

$$|\vartheta_n^{(q-1)}| < \psi^{(q-1)}(t), \tag{183}$$

$\psi^{(q-1)}(t)$ étant une fonction positive et continue pour toutes les valeurs de t de l'intervalle (α_1, β_1), intérieur de l'intervalle donné (α, β).

Pour déduire la formule asymptotique correspondant à l'aproximation de l'ordre q, il suffit de substituer (182) dans la formule générale (17_1) du n⁰ 3 [1]), ce qui nous donne, en vertu de (10),

$$u_n(x) = u_n[\Theta_1(t)] = h_n \left[\alpha_n^{(q)} + \frac{\vartheta_n^{(q)}}{\lambda_n^q} \right], \tag{184}$$

où l'on a posé

$$\alpha_n^{(q)} = z(t)\left(\cos\lambda_n(t-\tau) - \frac{1}{\lambda_n}\int_\tau^t \mu(\xi)\,\alpha_n^{(q-1)}(\xi)\sin\lambda_n(\xi - t)\,d\xi\right),$$

$$\vartheta_n^{(q)} = -z(t)\int_\tau^t \mu(\xi)\,\vartheta_n^{(q-1)}(\xi)\sin\lambda_n(\xi-t)\,d\xi. \tag{185}$$

En prenant pour le point de départ la formule asymptotique correspondant à $q=1$, nous obtiendrons successivement, en répétant le procédé que nous venons d'indiquer, les formules asymptotiques correspondant aux approximations de l'ordre $2, 3, \ldots, q$.

Quant à la limite sepérieure de la fonction $\vartheta_n^{(q)}$, on trouve, en vertu de (183) et (185),

$$|\vartheta_n^{(q)}| < z(t)\left|\int_\tau^t |\mu(\xi)|\,\psi^{(q-1)}(t)\,dt\right| = \psi^{(q)}(t),$$

$\psi^{(q)}(t)$ étant une fonction positive.

Substituant (184) dans le terme général $A_k u_k$ de la série $\sum A_k u_k$ (ou $\sum A_k V_k$ conformément aux notations précédentes), on trouve

$$A_k u_k = \frac{h_k^2}{I_k}\alpha_k^{(q)}\int_a^b p f \alpha_k^{(q)}\,dx + \frac{h_k^2}{I_k}\frac{\omega_k^{(q)}}{\lambda_k^q},$$

[1]) Nous nous bornons, pour plus de simplicité au cas, où dans la formule (17_1) $A_n' = h_n$, $B_n' = 0$.

où, comme au n⁰ 21,

$$(185_1) \qquad \omega_k^{(q)} = \vartheta_k^{(q)} \int_a^b pf\left(\alpha_k^{(q)} + \frac{\vartheta_k^{(q)}}{\lambda_k^q}\right) dx + \alpha_k^{(q)} \int_a^b pf\,\vartheta_k^{(q)}\, dx\ ^{1)}.$$

Supposons que le module de

$$\frac{h_k^2}{I_k}\,\omega_k^{(q)}$$

ne surpasse pas une certaine limite fixe Θ, ne dépendant pas de k, et que le nombre q soit choisi de façon que la série

$$\sum \frac{1}{\lambda_k^q}$$

converge.

Dans ce cas *la série*

$$\sum \frac{h_k^2}{I_k}\frac{\omega_k^{(q)}}{\lambda_k^q}$$

converge absolument.

On en conclut que *les conditions de convergence de la série*

$$\sum A_k u_k = \sum A_k V_k(x)$$

sont les mêmes que celles de la série approchée

$$(186) \qquad \sum \frac{h_k^2}{I_k}\alpha_k^{(q)} \int_a^b pf\,\alpha_k^{(q)}\, dx.$$

Nous avons ici une analogie complète avec le cas, étudié plus haut (nos 21 et 22), où nous n'avons considéré que l'approximation du premier ordre.

Quant aux *conditions de convergence de la série approchée (186) correspondant à l'approximation d'ordre* q, nous remarquerons que *dans beaucoup de cas elles sont les mêmes que celles de la série approchée de la première approximation.*

L'emploi des séries approchées, correspondant aux approximations de l'ordre plus élevé, permet quelquefois de résoudre certaines questions dont la solution présente quelques difficultés dans la première approximation.

---

1) Voir l'équation (96) du n⁰ 21. On remplace ici f par p, φ par f, n par k, ϑ_n par $\vartheta_k^{(q)}$, α_n par $\alpha_k^{(q)}$.

Telle est, par exemple, la démonstration du théoreme (A) dans plusieurs cas particuliers, comme nous le verrons plus loin.

39. Expliquons ces remarques générales par quelques exemples particuliers.

Considérons les polynomes de Jacobi du n⁰ 15.

Supposons, pour fixer les idées, que n soit pair et que $t > \frac{\pi}{2}$.

La formule (75) peut s'écrire

$$v_n(t) = h_n \left[\cos \lambda_n \left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\vartheta_n}{\lambda_n}\right], \quad \lambda_n = n + \alpha.$$

Substituant cette expression dans (17_1), on trouve

$$v_n(t) = h_n \left[\cos \lambda_n \left(t - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2\lambda_n} \operatorname{cotg} t \,.\, \sin \lambda_n \left(t - \frac{\pi}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2\lambda_n} \int_{\frac{\pi}{2}}^{t} \frac{\sin \lambda_n \left(2\xi - t - \frac{\pi}{2}\right)}{\sin^2 \xi} d\xi - \frac{\alpha(\alpha-1)}{\lambda_n^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{t} \frac{\sin \lambda_n (\xi - t)\, \vartheta_n(\xi)}{\sin^2 \xi} d\xi \right].$$

Or, le théorème de la moyenne donne

$$\left| \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{t} \frac{\sin \lambda_n \left(2\xi - t - \frac{\pi}{2}\right)}{\sin^2 \xi} d\xi \right| = \left| \frac{\sin \lambda_n \left(t' - \frac{\pi}{2}\right) \sin \lambda_n (t' - t)}{\lambda_n} \right| < \frac{1}{\lambda_n},$$

t' désignant un nombre, compris entre $\frac{\pi}{2}$ et t.

D'autre part, en vertu de (70) (n⁰ 17),

$$K = \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{t} \frac{\sin \lambda_n (\xi - t)\, \vartheta_n(\xi)}{\sin^2 \xi} \right| < \beta \int_{\frac{\pi}{2}}^{t} \frac{d\xi}{\sin^{7/2} \xi} - \gamma \int_{\frac{\pi}{2}}^{t} \frac{d\xi}{\sin^2 \xi \operatorname{tang} \xi},$$

β et γ étant des nombres positifs.

On a donc

$$K < -\frac{2\beta}{5} \frac{\cos t}{\sin^{5/2} t} - \frac{6\beta}{5} \frac{\cos t}{\sqrt{\sin t}} + \frac{\gamma}{2} \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} \overset{1)}{<} \frac{16\beta + 5\gamma}{10} \frac{1}{\sin^{5/2} t} = \frac{\sigma}{\sin^{5/2} t}$$

---

[1]) Cela résulte de la formule

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} \frac{d\xi}{\sin^{7/2} \xi} = -\frac{2}{5} \frac{\cos t}{\sin^{5/2} t} - \frac{6}{5} \frac{\cos t}{\sqrt{\sin t}} - \frac{3}{5} \int_{\frac{\pi}{2}}^{t} \sqrt{\sin x}\, dx.$$

On peut donc écrire

$$v_n(t) = h_n\left[\cos\lambda_n\left(t-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2\lambda_n}\operatorname{cotg} t.\sin\lambda_n\left(t-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\vartheta_n^{(2)}}{\lambda_n^2}\right],$$

où la fonction $\vartheta_n^{(2)}$ satisfait à l'inégalité

$$(187) \qquad |\vartheta_n^{(2)}(t)| < \frac{\mu}{\sin^{5/2} t} \quad \text{pour} \quad \frac{\pi}{2} < t < \pi,$$

μ designant un nombre fixe.

La même inégalité reste vraie aussi pour les valeurs de t, comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Supposons maintenant que n soit impair.

En se rappelant que dans le cas considéré

$$v_n(t) = h'_n\left[\sin\lambda_n\left(t-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\vartheta_n}{\lambda_n}\right]$$

et en répétant les raisonnements précédents, on trouve

$$v_n(t) = h'_n\left[\sin\lambda_n\left(t-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2\lambda_n}\operatorname{cotg} t.\cos\lambda_n\left(t-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\vartheta_n^{(2)}}{\lambda_n^2}\right],$$

où $\vartheta_n^{(2)}$ satisfait, comme précédemment, à l'inégalité (187).

Substituant ses expressions de $v_n(t)$ dans l'équation

$$u_n(\cos t) = \frac{v_n(t)}{\sin^\alpha t}$$

on obtient enfin, pour n pair,

$$(189) \quad u_n(t) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} h_n}{\sin^\alpha t}\left[\cos\left((n+\alpha)t - \frac{\alpha\pi}{2}\right) - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2(n+\alpha)}\operatorname{cotg} t.\sin\left((n+\alpha)t - \frac{\alpha\pi}{2}\right) + \frac{\vartheta_n^{(2)}(t)}{(n+\alpha)^2}\right]$$

et, pour n impair,

$$(190) \quad u_n(t) = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}} h'_n}{\sin^\alpha t}\left[\cos\left((n+\alpha)t - \frac{\alpha\pi}{2}\right) - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2(n+\alpha)}\operatorname{cotg} t.\sin\left((n+\alpha)t - \frac{\alpha\pi}{2}\right) + \frac{\vartheta_n^{(2)}(t)}{(n+\alpha)^2}\right],$$

les expressions asymptotiques pour les polynomes de Jacobi correspondant à l'approximation du second ordre.

La série approchée (186) correspondant aux formules (189) et (190) prend la forme suivante

$$
(191)\quad \frac{1}{\sin^\alpha t}\sum \frac{h_{2k}^2}{I_{2k}}\left\{\cos\left((2k+\alpha)t-\frac{\alpha\pi}{2}\right)-\frac{\alpha(\alpha-1)}{2(2k+\alpha)}\operatorname{cotg} t.\sin\left((2k+\alpha)t-\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right\}B_{2k}+
$$

$$
+\frac{1}{\sin^\alpha t}\sum \frac{h'^2_{2k+1}}{I_{2k+1}}\left\{\cos\left((2k+1+\alpha)t-\frac{\alpha\pi}{2}\right)-\frac{\alpha(\alpha-1)}{2(2k+1+\alpha)}\operatorname{cotg} t.\sin\left((2k+1+\alpha)t-\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right\}B_{2k+1}
$$

où

$$
B_{2k}=\int_0^\pi f(\cos t)\sin^\alpha t\left\{\cos\left((2k+\alpha)t-\frac{\alpha\pi}{2}\right)-\frac{\alpha(\alpha-1)}{2(2k+\alpha)}\operatorname{cotg} t.\sin\left((2k+\alpha)t-\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right\}dt,
$$

$$
B_{2k+1}=\int_0^\pi f(\cos t)\sin^\alpha t\left\{\cos\left((2k+1+\alpha)t-\frac{\alpha\pi}{2}\right)-\frac{\alpha(\alpha-1)}{2(2k+1+\alpha)}\operatorname{cotg} t.\sin\left((2k+1+\alpha)t-\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right\}dt.
$$

En se rappelant les recherches du n^0 23, on s'assure aisément que *les conditions de convergence de la série (191) sont les mêmes que celles de la série approchée correspondant à l'approximation du premier ordre.*

Écrivons le terme général de la série $\sum A_k u_k$ sous la forme suivante

$$
A_k u_k=\frac{h_k^2}{I_k}\alpha_k^{(2)}\int_0^\pi \sin^\alpha t\, f(\cos t)\,\alpha_k^{(2)}(t)\,dt+\frac{h_k^2}{I_k}\frac{\omega_k^{(2)}}{(k+\alpha)^2}.
$$

En tenant compte de ce que le rapport

$$
\frac{h_k^2}{I_k}
$$

tend vers une limite fixe, lorsque n croît indéfiniment (voir n^0 25), on peut affirmer que la série

$$
(192)\qquad \sum\frac{h_k^2}{I_k}\frac{\omega_k^{(2)}}{(k+\alpha)^2}
$$

converge, pourvu que les fonctions $\omega_k^{(2)}$ satisfassent à la condition

$$
(193)\qquad |\omega_k^{(2)}|<Q,
$$

Q désignant un nombre fixe.

L'égalité (185_1) montre que cette dernière condition sera remplie, si les intégrales

$$
\int_{-1}^{+1} p f \alpha_k^{(2)}\,dx \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{+1} p f \vartheta_k^{(2)}\,dx
$$

restent finies, quel que soit l'indice k.

Il est évident que la première de ces intégrales a toujours un sens bien déterminé, quelle que soit la fonction $f(x)$ bornée et intégrable dans l'intervalle $(-1, +1)$ [1]).

Quant à la seconde, elle se représente sous la forme

$$\int_0^\pi \sin^\alpha t\, f(\cos t)\, \vartheta_k^{(2)}\, dt, \tag{194}$$

d'où l'on tire, en tenant compte de (187),

$$\left| \int_0^\pi \sin^\alpha t\, f(\cos t)\, \vartheta_k^{(2)}\, dt \right| < \mu \int_0^\pi \sin^{\alpha-\frac{5}{2}} t \,.\, f(\cos t)\, dt.$$

Il s'ensuit que le module de l'intégrale (194) ne surpasse pas une limite fixe, pourvu que

$$\alpha - \frac{5}{2} > -1, \quad \alpha > \frac{3}{2},$$

quelle que soit la fonction $f(x)$, bornée et intégrable dans l'intervalle $(-1, +1)$.

On en conclut que l'inégalité (193) aura lieu toujours, quelle que soit la fonction $f(x)$ bornée et intégrable, au moins si la constante α est plus grande que $\frac{3}{2}$.

Donc la série (192) converge et *la série primitive $\sum A_k u_k(x)$ converge sous les mêmes conditions que la série (191), quelle que soit la fonction $f(x)$ bornée et intégrable dans l'intervalle $(-1, +1)$.*

40. Appliquons maintenant le théorème du n⁰ 32 aux cas considéré, ce qui est possible, comme je l'ai montré dans mon Mémoire: „Sur certaines égalités communes etc“, cité plus haut.

Posons, en général,

$$\frac{h_n^2}{I_n} B_n = C_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

On peut écrire

$$\sum A_n u_n = \sum C_n \alpha_n^{(2)} + \sum \alpha_n w_n(t),$$

---

[1]) Il est aisé de s'assurer que cette intégrale tend vers zéro, lorsque k tend vers l'infini.

où l'on a posé

$$\alpha_n^{(2)} = \frac{1}{\sin^\alpha t}\left\{\cos\left((n+\alpha)t - \frac{\alpha\pi}{2}\right) - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2(n+\alpha)}\operatorname{cotg} t \,.\, \sin\left((n+\alpha)t - \frac{\alpha\pi}{2}\right)\right\},$$

$$a_n = \frac{1}{(n+\alpha)^2}, \quad w_n(t) = \frac{h_n^2\,\omega_n^{(2)}}{I_n}.$$

En répétant les raisonnements du n° 35, nous obtiendrons l'égalité suivante

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \sin^{\alpha+1} t \,.\, f(\cos t)\,dt = \sum C_n \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \sin t \,.\, \cos\left((n+\alpha)t - \frac{\alpha\pi}{2}\right)dt -$$

$$- \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\sum \frac{C_n}{n+\alpha}\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \cos t \,.\, \sin\left((n+\alpha)t - \frac{\alpha\pi}{2}\right)dt + \sum a_n \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \sin^{\alpha+1} t \,.\, w_n(t)\,dt,$$

α_1 et β_1 ayant la même signification qu'au n° 35, ou

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \sin^{\alpha+1} t \,.\, f(\cos t)\,dt = \sum P_n \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \sin\left((n+\alpha+1)t - \frac{\alpha\pi}{2}\right)dt -$$

$$- \sum Q_n \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \sin\left((n+\alpha-1)t - \frac{\alpha\pi}{2}\right)dt + \sum a_n \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \sin^{\alpha+1} t \,.\, w_n(t)\,dt,$$

$$P_n = \frac{C_n}{2}\left(1 - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2(n+\alpha)}\right), \quad Q_n = \frac{C_n}{2}\left(1 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2(n+\alpha)}\right).$$

Posant ensuite

$$\alpha_1 = t_0 - \eta, \quad \beta_1 = t_0 + \eta,$$

on obtient, comme au n° 35,

$$\frac{1}{2\eta}\int_{{}_0-\eta}^{t_0+\eta} \sin^{\alpha+1} t \,.\, f[\cos t]\,dt = -\sum P_n \cos\left((n+\alpha+1)t - \frac{\alpha\pi}{2}\right)\frac{\sin \eta\mu_n}{\eta\mu_n} +$$

$$+ \sum Q_n \sin\left((n+\alpha-1)t - \frac{\alpha\pi}{2}\right)\frac{\sin \eta\sigma_n}{\eta\sigma_n} + \sum \frac{a_n}{2\eta}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} \sin^{\alpha+1} t \,.\, w_n(t)\,dt.$$

Supposons que $f(x)$ *soit une fonction à variation bornée entre* -1 *et* $+1$.

Il est aisé de s'assurer, que dans ce cas

$$|w_n(t)| < \frac{A}{n}, \quad |w'_n(t)| < B,$$

A et B étant des nombres fixes.

On a donc

$$\lim_{\eta=0} \sum \frac{\alpha_n}{2\eta} \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} \sin^{\alpha+1} t \cdot w_n(t)\, dt = \sum \alpha_n \sin^{\alpha+1} t_0 \cdot w_n(t_0).$$

Cette égalité étant établie, on trouve ensuite, en répétant les raisonnements du n⁰ 35,

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} = \sum C_n \alpha_n^{(2)} + \sum \alpha_n w_n(t_0) = \sum A_k u_k(x_0).$$

En se rappelant que, sous la supposition faite sur $f(x)$, la série approchée

$$\sum C_n \alpha_n^{(2)}$$

converge uniformément dans l'intervalle $(-1, +1)$, on obtient le théorème suivant:

La série

$$(194_1) \qquad \sum A_k u_k(x), \quad A_k = \frac{\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} f(x)\, u_k(x)\, dx}{\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} u_k^2(x)\, dx},$$

$u_k(x)$ étant les polynomes de Jacobi, correspondant au paramètre α plus grand que $3/2$, converge uniformément dans l'intervalle $(-1, +1)$ et la somme de cette série est égale à

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

en tout point x de l'intervalle considéré, si la fonction $f(x)$ est une fonction à variation bornée entre -1 et $+1$.

La restriction

$$\alpha > \frac{3}{2},$$

introduite par l'analyse précédente, n'a rien d'essentiel et le théorème reste vrai pour toutes les valeurs positives du paramètre α.

Laissant de côté les recherches générales sur ce sujet, je me bornerai seulement par la remarque suivante:

Quel que soit le nombre positif α, la série (194_1) converge uniformément, pourvu que $f(x)$ satisfasse aux conditions du théorème tout à l'heure enoncé, ce qui résulte des recherches du n⁰ 25.

Supposons encore que $f(x)$ reste continue au voisinage d'un point quelconque x_0 de l'intervalle $(-1, +1)$.

Cette condition étant remplie, le théorème du n⁰ 11 de mon Mémoire: „Sur certaines égalités générales etc." s'applique à la série (194_1) et conduit au théorème suivant:

La série (194_1), $u_k(x)$ étant les polynomes de Jacobi (n⁰ 15), a $f(x)$ pour somme en tout point x de l'intervalle $(-1, +1)$ aux environs duquel la fonction à variation bornée $f(x)$ reste continue.

41. Envisageons maintenant les polynomes de Hermite et ceux du n⁰ 18.

Il suffit de considérer l'un de ces cas, car l'analyse s'étend sans aucune difficulté à l'autre.

Etudions, pour fixer les idées, les polynomes du n⁰ 18.

Reprenons l'expression asymptotique, établie plus haut et correspondant à l'approximation du premier ordre.

On peut écrire (la formule (88) du n⁰ 18)

$$v_n = h_n\left(\cos t\sqrt{n} + \frac{\vartheta_n}{\sqrt{n}}\right), \quad h_n = (-1)^n\, 1.3.5\ldots(2n-1),$$

où, comme nous l'avons démontré,

$$|\vartheta_n| < \alpha_1 t^{\frac{11}{2}} + \alpha_2 t^3 + \alpha_3 t^2 + \alpha_4 t + \alpha_5,$$

α_j étant des constantes positives.

Appliquant au cas considéré la méthode, indiquée au n⁰ 38, on obtient cette expression asymptotique, correspondant à l'approximation du second ordre, de la fonction u_n:

$$u_n\left(\frac{t^2}{2}\right) = h_n\left[\alpha_n^{(2)} + \frac{\vartheta_n^{(2)}}{n}\right] e^{\frac{t^2}{8}}, \tag{195}$$

où

$$\alpha_n^{(2)} = \cos t\sqrt{n} + \frac{t(t^2-12)}{96\sqrt{n}}\sin t\sqrt{n}, \tag{196}$$

$\vartheta_n^{(2)}$ est une fonction satisfaisant à la condition

(197) $$|\vartheta_n^{(2)}| < \beta_1 t^{\frac{17}{2}} + \beta_2 t^{\frac{13}{2}} + \beta_3 t^6 + \beta_4 t^5 + \beta_5 t^4 + \beta_6 t^3 + \beta_7 t^2 + \beta_8 t,$$

β_j étant des nombres positifs.

Substituant (195) dans la série $\sum A_k u_k(x)$, on trouve

(198) $$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum A_k u_k(x) = e^{\frac{t^2}{8}} \sum \frac{h_k^2}{I_k} \alpha_k^{(2)} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{8}} f\left(\frac{t^2}{2}\right) \alpha_k^{(2)} \, dt + \sum \frac{h_k^2}{I_k} \frac{\omega_k^{(2)}}{k} e^{\frac{t^2}{8}},$$

$\omega_k^{(2)}$ étant une fonction, définie par la formule générale (185_1), où il faut poser

$$q = 2, \quad \lambda_k = \sqrt{k}, \quad a = 0, \quad b = +\infty, \quad p = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}, \quad x = \frac{t^2}{2},$$

et remplacer $\alpha_k^{(2)}$ par son expression (196).

En se rappelant que, pour les valeurs de k assez grandes (voir n^0 23),

$$\frac{h_k^2}{I_k} < \frac{\lambda}{\sqrt{k}},$$

on s'assure, que *la série*

$$\sum \frac{h_k^2}{I_k} \frac{\omega_k^{(2)}}{k} e^{\frac{t^2}{8}}$$

converge absolument, pourvu que

$$|\omega_k^{(2)}| < Q,$$

Q désignant un nombre fixe.

Cette condition sera remplie [voir la formule (185_1)], si les intégrales

$$\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{8}} f\left(\frac{t^2}{2}\right) \alpha_n^{(2)} \, dt \quad \text{et} \quad \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{8}} f\left(\frac{t^2}{2}\right) \vartheta_n^{(2)} \, dt$$

restent finies, ce qui aura lieu, en particulier, *si la fonction $f(x)$ est une fonction bornée pour toutes les valeurs positives de la variable x.*

Pour s'en assurer, il suffit de rappeler les formules (196) et (197).

Donc *les conditions de convergence de la série (198) sont les mêmes que celles de la série approchée*

(199) $$e^{\frac{t^2}{8}} \sum \frac{h_k^2}{I_k} \alpha_k^{(2)} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{8}} f\left(\frac{t^2}{2}\right) \alpha_k^{(2)} \, dt,$$

quelle que soit la fonction $f(x)$, bornée dans l'intervalle $(0, +\infty)$.

42. Supposons maintenant que la série (198) converge au voisinage d'un point quelconque t_0 de l'intervalle $(0, +\infty)$. Il en sera de même de la série approchée (199) qui peut se représenter sous la forme

$$(200)\quad S = e^{\frac{t^2}{8}}\left\{\sum B_k \cos t\sqrt{k} + \varphi(t)\sum \frac{\sin t\sqrt{k}}{\sqrt{k}} B_k + \sum \frac{\cos t\sqrt{k}}{\sqrt{k}} C_k + \varphi(t) \sum \frac{\sin t\sqrt{k}}{k} C_k\right\},$$

où

$$(200_1)\quad B_k = \frac{h_k^2}{I_k}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{8}} f\left(\frac{t^2}{2}\right)\cos t\sqrt{k}\,dt, \quad C_k = \frac{h_k^2}{I_k}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{8}} f\left(\frac{t^2}{2}\right)\varphi(t)\sin t\sqrt{k}\,.\,dt,$$

$$(201)\quad \varphi(t) = \frac{t(t^2-12)}{96}.$$

Posant

$$\frac{1}{\sqrt{2}} f\left(\frac{t^2}{2}\right) = S_n + e^{\frac{t^2}{8}}\sum_0^n \frac{h_k^2}{I_k}\frac{\omega_k^{(2)}}{k} + R_n \text{ [1]}$$

et en tenant compte de ce que le théorème du n⁰ 32 s'applique à tous les polynomes de Tchébicheff, auxquels appartiennent les polynomes considérés, on trouve, en répétant les raisonnements du n⁰ 35,

$$\frac{1}{2\sqrt{2}\eta}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} e^{-\frac{t^2}{8}} f\left(\frac{t^2}{2}\right) dt = \sum\left(\frac{B_k}{2\eta}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}\cos t\sqrt{k}\,.\,dt + \frac{B_k}{2\eta\sqrt{k}}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}\varphi(t)\sin t\sqrt{k}\,.\,dt\right) +$$

$$+\sum\left(\frac{C_k}{2\eta\sqrt{k}}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}\cos t\sqrt{k}\,.\,dt + \frac{C_k}{2\eta k}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}\varphi(t)\sin t\sqrt{k}\,.\,dt\right) + \frac{1}{2\eta}\sum\frac{h_k^2}{I_k k}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}\omega_k^{(2)}\,dt.$$

De cette égalité nous tirerons, en intégrant encore $s-1$ fois par rapport à t, l'égalité de la forme (164_1).

En remarquant que dans le cas considéré

$$\lambda_k = \sqrt{k} = k^\beta, \quad \beta = \frac{1}{2},$$

on s'assure qu'on peut prendre pour s le nombre 3, car cette supposition satisfait à la condition (176_1).

---

[1] S_n désigne la somme de n premiers termes de la série S.

On obtient ainsi

$$(202)\qquad \frac{1}{(2\eta)^3\sqrt{2}}\int\limits_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}dt\int\limits_{t-\eta}^{t+\eta}dt_1\int\limits_{t_1-\eta}^{t_1+\eta}e^{-\frac{t^2}{8}}f\left(\frac{t^2}{2}\right)dt=$$

$$=\sum\left(\frac{B_k}{(2\eta)^3}\int\limits_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}dt\int\limits_{t-\eta}^{t+\eta}dt_1\int\limits_{t_1-\eta}^{t_1+\eta}\cos t\sqrt{k}.\,dt+\frac{B_k}{(2\eta)^3\sqrt{k}}\int\limits_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}dt\int\limits_{t-\eta}^{t+\eta}dt_1\int\limits_{t_1-\eta}^{t_1+\eta}\varphi(t)\sin t\sqrt{k}.\,dt\right)+$$

$$+\sum\left(\frac{C_k}{(2\eta)^3\sqrt{k}}\int\limits_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}dt\int\limits_{t-\eta}^{t+\eta}dt_1\int\limits_{t_1-\eta}^{t_1+\eta}\cos t\sqrt{k}.\,dt+\frac{C_k}{(2\eta)^3 k}\int\limits_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}dt\int\limits_{t-\eta}^{t+\eta}dt_1\int\limits_{t_1-\eta}^{t_1+\eta}\varphi(t)\sin t\sqrt{k}.\,dt\right)+$$

$$+\frac{1}{(2\eta)^3}\sum\frac{h_k^2}{I_k k}\int\limits_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}dt\int\limits_{t-\eta}^{t+\eta}dt_1\int\limits_{t_1-\eta}^{t_1+\eta}\omega_k^{(2)}\,dt.$$

Supposons, pour plus de simplicité, que $f(x)$ *soit une fonction à variation bornée.*

Considérons d'abord la série

$$(203)\qquad \sum\frac{C_k}{(2\eta)^3 k}\int\limits_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}dt\int\limits_{t-\eta}^{t+\eta}dt_1\int\limits_{t_1-\eta}^{t_1+\eta}\varphi(t)\sin t\sqrt{k}.\,dt.$$

En se rappelant que pour les valeurs de k assez grandes

$$\frac{h_k^2}{I_k}<\frac{\lambda}{\sqrt{k}},$$

on trouve, eu égard à l'expression (200_1) de C_k,

$$(204)\qquad |C_k|<\frac{\beta}{k},$$

β étant un nombre fixe.

Cherchons la limite, vers laquelle tend la série

$$S_1=\sum\frac{C_k}{2\eta k}\int\limits_{t_1-\eta}^{t_1+\eta}\varphi(t)\sin t\sqrt{k}.\,dt,$$

lorsque η tend vers zéro.

On a, pour toutes les valeurs de t, comprises entre $t_1-\eta$ et $t_1+\eta$

$$\varphi(t)\sin t\sqrt{k}=\varphi(t_1)\sin t_1\sqrt{k}+\eta\sqrt{k}\,\Theta,$$

où Θ est une fonction, dont le module ne surpasse pas une certaine limite fixe A.

Il s'ensuit que

$$S_1 = \sum \frac{C_k}{k} \varphi(t_1) \sin t_1 \sqrt{k} + \sum \frac{C_k}{\sqrt{k}} \eta \frac{1}{2\eta} \int_{t_1-\eta}^{t_1+\eta} \Theta\, dt.$$

Or, en vertu de (204),

$$\left| \eta \sum \frac{C_k}{\sqrt{k}} \frac{1}{2\eta} \int_{t_1-\eta}^{t_1+\eta} \Theta\, dt \right| < \eta \beta A \sum \frac{1}{k\sqrt{k}}.$$

On voit donc que

$$\lim_{\eta=0} \sum \frac{C_k}{\sqrt{k}} \eta \frac{1}{2\eta} \int_{t_1-\eta}^{t_1+\eta} \Theta\, dt = 0$$

et que

$$\lim_{\eta=0} S_1 = \sum \frac{C_k}{k} \varphi(t_1) \sin t_1 \sqrt{k}.$$

Par conséquent,

$$\text{(205)} \quad \lim_{\eta=0} \sum \frac{C_k}{(2\eta)^3 k} \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} dt \int_{t-\eta}^{t+\eta} dt_1 \int_{t_1-\eta}^{t_1+\eta} \varphi(t) \sin t \sqrt{k} . dt = \sum \frac{C_k}{k} \varphi(t_0) \sin t_0 \sqrt{k}.$$

Cette égalité étant établie on s'assure sans peine que

$$\text{(206)} \qquad \lim_{\eta=0} \frac{1}{(2\eta)^3} \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} dt \int_{t-\eta}^{t+\eta} dt_1 \int_{t_1-\eta}^{t_1+\eta} \omega_k^{(2)}\, dt = \sum \frac{h_k^2}{I_k k} \omega_k^{(2)}(t_0).$$

En effet, il est aisé de comprendre que le terme général

$$\frac{h_k^2}{I_k k} \omega_k^{(2)}$$

se représente sous la forme

$$D_k \psi(t) \frac{\cos t \sqrt{k}}{k} + E_k \Theta(t) \frac{\sin t \sqrt{k}}{k\sqrt{k}} + \frac{h_k^2}{I_k k \sqrt{k}} \omega_k^{(3)}, \text{ [1]}$$

où $\omega_k^{(3)}$ est une fonction satisfaisant à la condition

$$| \omega_k^{(3)}(t) - \omega_k^{(3)}(t_1) | < A\eta \sqrt{k},$$

A désignant un nombre fixe.

[1] D_k et E_k sont des constantes.

Ces remarques suffisent pour faire comprendre l'exactitude de l'égalité (206).

43. Considérons la série

$$S_2 = \sum \frac{B_k}{2\eta \sqrt{k}} \int_{t_1-\eta}^{t_1+\eta} \varphi(t) \sin t\sqrt{k} . dt ,$$

où B_k sont des constantes satisfaisant à la condition [voir l'équation (200_1)]

$$|B_k| < \frac{\beta}{k}, \tag{207}$$

pour les valeurs de n assez grandes.

On trouve, en effectuant l'intégration,

$$\frac{1}{2\eta}\int_{t-\eta}^{t+\eta} \varphi(t) \sin t\sqrt{k}\, dt = \varphi \sin t\sqrt{k}\, \frac{\sin \eta\sqrt{k}}{\eta\sqrt{k}} +$$

$$+ \frac{\cos t\sqrt{k}}{\sqrt{k}}\left(\frac{\varphi'''}{k} - \varphi'\right)\left(\cos\eta\sqrt{k} - \frac{\sin\eta\sqrt{k}}{\eta\sqrt{k}}\right) + \sin t\sqrt{k}\,\frac{\varphi''}{k}\left(\cos\eta\sqrt{k} - \frac{\sin\eta\sqrt{k}}{\eta\sqrt{k}}\right) +$$

$$+ \frac{\eta^2}{2}\varphi''\sin t\sqrt{k}\,\frac{\sin\eta\sqrt{k}}{\eta\sqrt{k}} + \frac{\eta^2}{2}\varphi'''\left(\frac{\sin\eta\sqrt{k}}{\eta\sqrt{k}} - \frac{\cos\eta\sqrt{k}}{3}\right)\frac{\cos t\sqrt{k}}{\sqrt{k}} .$$

En remarquant que

$$\left| \cos\eta\sqrt{k} - \frac{\sin\eta\sqrt{k}}{\eta\sqrt{k}} \right| < \eta\sqrt{k} . \Theta ,$$

Θ étant un nombre fixe, on en conclut, en tenant compte de (207) et (201), que

$$\left| \sum \frac{B_k}{k}\left(\frac{\varphi'''}{k} - \varphi'\right)\left(\cos\eta\sqrt{k} - \frac{\sin\eta\sqrt{k}}{\eta\sqrt{k}}\right)\cos t\sqrt{k} \right| < \eta \sum \frac{A}{k\sqrt{k}} .$$

Donc la série entre les crochêttes tend vers zéro pour $\eta = 0$.

On démontrera de la même manière que

$$\lim_{\eta=0} \sum \frac{B_k}{k\sqrt{k}}\varphi''\left(\cos\eta\sqrt{k} - \frac{\sin\eta\sqrt{k}}{\eta\sqrt{k}}\right)\sin t\sqrt{k} = 0 ,$$

et, a fortiori,

$$\lim_{\eta=0} \frac{\eta^2}{2} \sum \frac{B_k}{\sqrt{k}} \left\{ \varphi''\sin t\sqrt{k}\,\frac{\sin\eta\sqrt{k}}{\eta\sqrt{k}} + \varphi'''\,\frac{\cos t\sqrt{k}}{\sqrt{k}}\left(\frac{\sin\eta\sqrt{k}}{\eta\sqrt{k}} - \frac{\cos\eta\sqrt{k}}{3}\right)\right\} = 0 .$$

On trouve donc

$$\lim_{\eta=0}\sum \frac{B_k}{2\eta\sqrt{k}}\int_{t-\eta}^{t+\eta}\varphi(t)\sin t\sqrt{k}\,dt = \lim_{\eta=0}\sum \frac{B_k}{\sqrt{k}}\varphi(t)\sin t\sqrt{k}\,\frac{\sin\eta\sqrt{k}}{\eta\sqrt{k}}.$$

Cette égalité étant établie, on en tire ensuite

$$(208)\qquad \lim_{\eta=0}\sum \frac{B_k}{(2\eta)^3\sqrt{k}}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}dt\int_{t-\eta}^{t+\eta}dt_1\int_{t_1-\eta}^{t_1+\eta}\varphi(t)\sin t\sqrt{k}\,.\,dt =$$

$$= \lim_{\eta=0}\sum \frac{B_k}{(2\eta)^3\sqrt{k}}\varphi(t_0)\sin t_0\sqrt{k}\left(\frac{\sin\eta\sqrt{k}}{\eta\sqrt{k}}\right)^3$$

et, enfin, en se rappelant les raisonnements du n^0 36,

$$(208_1)\ \lim_{\eta=0}\sum \frac{B_k}{(2\eta)^3\sqrt{k}}\varphi(t_0)\sin t_0\sqrt{k}\left(\frac{\sin\eta\sqrt{k}}{\eta\sqrt{k}}\right)^3 = \sum \frac{B_k}{(2\eta)^3\sqrt{k}}\varphi(t_0)\sin t_0\sqrt{k}\,.$$

Les égalités (200), (202), (205), (206), (208) et (208_1) conduisent à la suivante

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} = \sqrt{2}\Big(S+\sum \frac{h_k^2}{I_k k}\,\omega_k^2\Big) = \sum A_k u_k(x_0),$$

x_0 désignant la valeur de x correspondant à $t=t_0$.

On obtient ainsi le théorème suivant:

La somme de la série

$$(209)\qquad \sum A_k u_k(x),\quad A_k = \frac{\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}\frac{f(x)}{\sqrt{x}}u_k(x)\,dx}{\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}u_k^2\,dx},$$

$u_k(x)$ désignant les polynomes du n^0 18, $f(x)$ une fonction à variation bornée entre 0 et $+\infty$, est égale à

$$(210)\qquad \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

en tout point de l'intervalle $(0, +\infty)$, où cette série converge [1]).

[1]) Nous avons supposé, pour simplifier les raisonnements, que $f(x)$ soit une fonction à variation bornée, mais on pourra déduire les équations (205), (206) et (208) sous

Or, on sait que la série (209) converge uniformément pour les valeurs positives de x, si $f(x)$ est une fonction à variation bornée.

On peut donc énoncer la proposition suivante:

La série (209) converge uniformément dans l'intervalle $(0, +\infty)$, *si* $f(x)$ *est une fonction à variation bornée, et la somme de cette série est égale à l'expression (210) en tout point* x_0 *de cet intervalle.*

Si la fonction $f(x)$ *reste continue et satisfait aux conditions du n⁰ 27, la série (209) converge non seulement uniformément, mais encore absolument, et sa somme est égale à* $f(x)$.

44. La même analyse s'applique, avec des modifications légères, à la série

$$(211) \qquad \sum A_k u_k, \quad A_k = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha x^2}{2}} f(x)\, u_k(x)\, dx}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha x^2}{2}} u_k^2\, dx},$$

u_k désignant les polynomes de Hermite.

En répétant les raisonnements de n^os 41—44, on obtient le théorème suivant que j'énoncerai sans démonstration:

La série (211), $u_k(x)$ *étant les polynomes de Hermite, converge uniformément, pourvu que* $f(x)$ *soit une fonction à variation bornée, et la somme de cette série est égale à*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

en tout point de l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

45. Considérons maintenant la série de Dini (142) [n⁰ 31].

Supposons que *la fonction* $f(x)$ *satisfasse aux conditions du théorème, énoncé à la fin du n⁰ 31.*

Les fonctions $J_\alpha(\xi_k t)$ de Bessel satisfont à l'hypothèse 1) du n⁰ 34, comme je l'ai montré autrefois dans mon Mémoire: „Sur certaines égalités générales etc", cité plus haut.

D'autre part, l'égalité (133) du n⁰ 30 montre que l'expression asymptotique des fonctions de Bessel a précisément la forme (177_1), où il faut poser

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad \lambda_k = \xi_k,$$

$$\alpha_k = J_\alpha(\xi_k) \cos \xi_k, \quad \beta_k = J_\alpha(\xi_k) \sin \xi_k.$$

---

la seule supposition que la série approchée converge et la fonction $f(x)$ soit bornée et intégrable dans l'intervalle $(0, +\infty)$.

On en pourra déduire une propriété de la série (209), analogue à celle des séries trigonométriques, établie par Riemann, mais nous n'insistons pas sur ce point.

Le terme général $A_k V_k(x)$ de la série

$$\sum A_k V_k(x),$$

où

$$V_k(x) = J_\alpha(\xi_k t),$$

se représente, en vertu de (142) et (143) [n⁰ 31], sous la forme

$$A_k V_k(x) = \frac{1}{\sqrt{t}}\left[\alpha_k \cos \xi_k (t-1) + \beta_k \sin \xi_k (t-1) + \frac{K_k}{\xi_k^2}\right],$$

où l'on a posé

$$\alpha_k = \frac{\xi_k^2}{\xi_k^2 + h(h+2\alpha)}\left\{\int_0^1 \sqrt{x} f(x) \cos \xi_k (x-1)\, dx + \frac{\beta}{\xi_k}\int_0^1 \sqrt{x} f(x) \sin \xi_k (x-1)\, dx + \frac{\beta_k}{\xi_k}\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} \sin \xi_k (x-1)\, dx\right\},$$

$$\beta_k = \frac{\xi_k}{\xi_k^2 + h(h+2\alpha)}\left(\beta + \frac{\beta_1}{t}\right)\int_0^1 \sqrt{x} f(x) \cos \xi_k (x-1)\, dx,$$

K_k désignant une fonction définie par l'équation (144).

Il importe de remarquer que K_k satisfait non seulement à l'inégalité (148) (n⁰ 31), mais encore aux suivantes

$$|K_k| < \frac{A}{\xi_k}, \quad |K_k'| < B,$$

A et B étant des nombres fixes.

Il est aisé de voir, en effet, que $\vartheta_k(x)$ [voir l'équation (140) du n⁰ 30] a la forme suivante

$$\vartheta_k(x) = \varrho_k \cos \xi_k (x-1) + \sigma_k \sin \xi_k (x-1),$$

ϱ_k et σ_k désignant des fonctions continues de t.

En se rappelant ensuite que, d'après la supposition faite, $f(x)$ et $\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}$ sont les fonctions à variation bornée, on en tire, en tenant compte de l'expression (144) de K_k, les inégalités précédentes.

Quant aux nombres $\xi_k = \lambda_k$, ils se représentent comme il suit

$$\lambda_k = \xi_k = k\pi + \delta + \varepsilon_k, \quad |\sin \varepsilon_k| < \frac{B}{k}.$$

Toutes les conditions du théorème (B) du n⁰ 37 sont satisfaites.

Nous avons supposé au n⁰ 35 que

$$\lambda_k = ak^\beta.$$

Or, il est évident que les raisonnements de ce n⁰ s'appliquent aussi bien au cas considéré, où λ_k est égal à $k\pi + \delta + \varepsilon_k$.

On obtient donc immédiatement, en se rappelant les recherches du n⁰ 31 et employant les raisonnements, analogues à ceux de nᵒˢ 42 et 43, le théorème suivant:

Soit $f(x)$ une fonction donnée jouissant les propriétés suivantes:

1) Il existe un nombre positif ε_0 assez petit, mais fixe, tel que l'on ait

$$|f(x)| < Ax^{1+\mu},$$

A et $\mu < 1$ etant des nombres fixes, pour toutes les valeurs positives de x, plus petites que ε_0.

2) La fonction $f(x)$ est une fonction à variation bornée entre 0 et 1.

Ces conditions étant remplies, la série de Dini

$$\sum_0^{\infty} \frac{\xi_n^2 J_\alpha(\xi_n t)}{[\xi_n^2 + h(h+2\alpha)] J_\alpha^2(\xi_n)} \int_0^1 x f(x) J_\alpha(\xi_n x)\, dx$$

converge uniformément dans l'intervalle $(0, 1)$ et sa somme est égale à

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

en tout point x, intérieur à l'intervalle $(0, 1)$.

46. Considérons enfin une classe très étendue de fonctions

$$V_n(x), \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

définies par l'équation (compar. n⁰ 1)

$$\frac{d}{dx}\left(k \frac{dV_n}{dx}\right) + (g\lambda_n^2 - l)\, V_n = 0 \tag{212}$$

jointe aux conditions aux limites

$$\begin{aligned} V_n'(a) - h\, V_n(a) &= 0, \\ V_n'(b) + H\, V_n(b) &= 0, \end{aligned} \tag{213}$$

k, g et l étant des fonctions positives de x, h et H deux constantes positives.

L'existence des nombres positifs λ_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ et des fonctions correspondantes $V_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ à été établie, pour la première fois, par Sturm-Liouville en 1836 (Journal de Liouville, T. I).

Ils ont essayé aussi de résoudre le probléme du développement d'une fonction arbitraire en séries des fonctions $V_k(x)$ que nous appellerons dès à présent „fonctions de Sturm-Liouville“.

Liouville a consacré à ce sujet trois Mémoires qui méritent une attention particulière.

Quoiqu'il n'ait pas réussi à résoudre le problème en toute rigueur, néanmoins il a imaginé une méthode remarquable, susceptible d'une généralisation essentielle, comme nous l'avons déjà remarqué au commencement de ce Mémoire (n^0 1).

Les recherches de Liouville ont été développées ensuite par M. A. Kneser [1]), qui a résolu le problème, dont il s'agit, moyennant la méthode de Du-Bois-Raymond et Dini dont nous avons exposé les principes au n^0 19.

Remarquons, en profitant de l'occasion, que la méthode de M. Kneser, fondée en partie sur les recherches de Liouville, impose certaines restrictions sur les fonctions k, g et l, à savoir: elle exige que ces fonctions soient continues avec ses dérivées de quatre premiers ordres, mais, pourtant, elle résout le problème sous la seule supposition générale que la fonction développable $f(x)$ soit une fonction à variation bornée.

Je me suis occupé moi-même à ce problème et j'ai proposé, en 1896—97 [2]), une méthode tout à fait différente qui permet de résoudre le problème sous les suppositions moins générales par rapport à la fonction $f(x)$.

J'ai repris, l'année courante [3]), ce problème et j'ai montré que ma méthode s'applique toutes les fois que $f(x)$ sera une fonction continue admettant la dérivée du premier ordre qui n'est que bornée et intégrable.

Or, ma méthode conduit, d'un autre côté, au résultat plus général que celle de M. Kneser, car elle n'exige pas l'existence des dérivées de quatre premiers ordres des fonctions k, g et l et résout le problème sous la seule supposition que ces fonctions restent continues dans un certain intervalle.

Outre les recherches déjà méntionnées, je rappellerai encore les derniers travaux de M[rs] Kneser et Schmidt [4]), où ils considèrent le problème à un nouveau point de vue en y appliquant la théorie des équations intégrales (Integralgleichungen) de M[rs] S. Freedholm et D. Hilbert.

---

[1]) A. Kneser: „Untersuchung über die Darstellung willkürlicher Functionen in der mathematischen Physik". Mathemat. Annalen, Bd. 58.

Idem: „Beiträge zur Theorie der Sturm-Liouvilleschen Darstellung willkürlicher Functionen". Ibid. Bd. 60.

[2]) W. Stekloff: „Problème de refroidissement d'une barre hétérogène". Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, T. III, série 2.

[3]) Idem: „Sur un problème d'Analyse intimement lié avec le problème de refroidissement d'une barre hétérogène". Comptes Rendus, 8 avr., 1907.

[4]) A. Kneser: „Die Theorie der Integralgleichnungen und die Darstellung willkürlicher Functionen in der mathematischen Physik". Mathemat. Annalen, Bd. 63.

Schmidt: „Entwicklung willkürlicher Functionen nach Systemen vorgeschribener". Göttingen, 1905, et Mathemat. Annalen, Bd. 63.

Bien qu'on puisse maintenant considérer le problème en question comme résolu par diverses méthodes différentes, néanmoins je me permets de le traiter encore une fois comme l'un des exemples les plus importants de l'application de la méthode dont nous avons exposé les principes aux n^{os} 32—39.

47. Formons tout d'abord l'expression asymptotique de la fonction $V_n(x)$ moyennant la transformation du n^0 2, qui ne présente qu'une généralisation de celle de Liouville, appliquée par cet illustre géomètre en 1837 à l'équation (212).

Nous pouvons donc emprunter les résultats déjà obtenus par Liouville dans son Mémoire: „Sur le développement des fonctions en séries dont divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre contenant un paramètre variable" (Journal de Liouville, T. II, p. 16 etc.), sans répéter le calcul.

Supposant que k, g et l admettent les dérivées de deux premiers ordres, posons

$$t = \int_a^x \sqrt{\frac{g}{k}}\, dx,$$

$$V_n(x) = z(t) . u_n(z),$$

où

$$z = \frac{1}{\sqrt[4]{gk}}.$$

L'équation (212) devient

$$u_n'' + \lambda_n^2 u_n = \mu u_n, \tag{214}$$

où

$$\mu = \frac{1}{z\sqrt{gk}}\left(lz\sqrt{\frac{k}{g}} - \frac{d\sqrt{gk}}{dt}\frac{dz}{dt} - \frac{d^2z}{dt^2}\sqrt{gk}\right).$$

Les conditions (213) prendront la forme

$$\begin{aligned} &\frac{du_n}{dt} - h' u_n = 0 \qquad \text{pour } t = 0 \\ &\frac{du_n}{dt} + H' u_n = 0 \qquad \text{pour } t = T, \end{aligned} \tag{215}$$

h' et H' étant des constantes différentes de h et H, $t = 0$ et $t = T$ étant les valeurs de la variable t correspondant à $x = a$ et $x = b$.

L'équation (214) a précisément la forme de celle de (13) du n^0 2.

Supposant que

$$u_n(0) = 1,$$

ce qui est toujours possible, on tire de (17_1), moyennant la première des équations (215),

$$(216) \qquad u_n = \cos \lambda_n t + \frac{h}{\lambda_n} \sin \lambda_n t - \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \mu(\xi)\, u_n(\xi) \sin \lambda_n (\xi - t)\, d\xi ,$$

où nous avons écrit, pour simplifier l'écriture, h au lieu de h'.

C'est la formule déduite par Liouville dans son Mémoire, cité plus haut.

Quant aux nombres λ_n, caractéristiques pour les fonctions V_k, ils sont des racines positives d'une équation transcendente et se représentent sous la forme

$$(217) \qquad \lambda_n = \frac{n\pi}{T} + \frac{B_n}{n},$$

B_n étant des constantes dont le module reste toujours inférieur à un nombre fixe B.

La formule (216) montre que le module de u_n ne surpasse pas une certaine limite fixe A (comp. n⁰ 5).

Soit $f(x)$ une fonction arbitraire.

Posons, avec Liouville (voir aussi A. Kneser, Mathem. Ann. Bd. 58, s. 121),

$$\varphi(t) = f(x) \sqrt[4]{gk}.$$

La série

$$(218) \qquad \sum \frac{V_n(x) \int_a^b g f(x) V_n(x)\, dx}{\int_a^b g V_n^2(x)\, dx} = \sum A_n V_n(x)$$

devient

$$(219) \qquad \frac{1}{\sqrt[4]{gk}} \sum \frac{u_n \int_0^T u_n(\xi) \varphi(\xi)\, d\xi}{\int_0^T u_n^2(\xi)\, d\xi}.$$

Les fonctions $u_n(t)$ satisfont aux conditions

$$\int_0^T u_n(\xi)\, u_m(\xi)\, d\xi = 0, \quad \text{si } n \gtrless m,$$

c'est à dire elles forment un système orthogonal.

Remarquons enfin que la constante, définie par l'intégrale

$$\int_0^T u_n^2(\xi)\, d\xi,$$

peut se représenter sous la forme

(220)
$$\int_0^T u_n^2(\xi)\,d\xi = \frac{T}{2} + \frac{K_n}{\lambda_n},$$

où K_n sont des constantes dont le module ne surpasse pas un nombre fixe K.

Tous les résultats, que nous venons d'indiquer sans démonstration, le lecteur trouvera dans les Mémoires de Liouville, mentionnés plus haut (Voir aussi A. Kneser, Mathem. Annalen, Bd. 58).

48. Ecrivons l'équation (216) sous la forme

(221)
$$u_n = \cos\lambda_n t + \frac{\vartheta_n(t)}{\lambda_n},$$

où, évidemment,
$$|\vartheta_n(t)| < A,$$

A désignant un nombre fixe.

Substituant cette expression dans (216) on obtient

(222)
$$u_n = \cos\lambda_n t + \frac{\psi(t)\sin\lambda_n t}{\lambda_n} + \frac{\vartheta_n^{(2)}(t)}{\lambda_n^2},$$

où l'on a posé

$$\vartheta_n^{(2)}(t) = -\frac{\lambda_n}{2}\int_0^t \mu(\xi)\sin\lambda_n(2\xi - t)\,d\xi - \int_0^t \mu(\xi)\sin\lambda_n(\xi - t)\,\vartheta_n(\xi)\,d\xi,$$

(223)
$$\psi(t) = h + \frac{1}{2}\int_0^t \mu(\xi)\,d\xi.$$

Supposons que k, l *et* g *ainsi que ses dérivées de deux premiers ordres soient les fonctions à variation bornée entre* 0 *et* T.

Ces conditions étant remplies, on trouve

(224)
$$|\vartheta_n^{(2)}(t)| < Q,$$

Q étant un nombre fixe.

Il est évident ensuite que $\vartheta_n^{(2)}(t)$ admet la dérivée du premier ordre qui satisfait à la condition

(225)
$$|(\vartheta_n^{(2)}(t))'| < \lambda_n Q_1,$$

Q_1 désignant un nombre fixe.

La formule (221) représente l'expression asymptotique de u_n correspondant à l'approximation du premier ordre, celle de (222)—l'expression asymptotique correspondant à l'approximation du second ordre.

49. Posons maintenant, comme au n^0 35,

$$f(x) = \sum_0^n A_n V_n(x) + R_n,$$

d'où, en vertu de (218) et (219),

$$\varphi(t) = \sum_0^n \frac{u_n \int_0^T u_n(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi}{\int_0^T u_n^2(\xi)\,d\xi} + R_n \sqrt[4]{gk}\,.$$

J'ai démontré dans mon Mémoire: „Sur certaines égalités générales, communes etc" que le théorème du n⁰ 32 s'applique aux fonctions fondamentales $V_n(x)\,(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

On a donc, pour les valeurs de n assez grandes,

$$\int_a^b g R_n^2\,dx < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif donné à l'avance.

Cette inégalité étant établie, on trouve, comme au n⁰ 35,

$$\frac{1}{(2\eta)^2}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} dt \int_{t-\eta}^{t+\eta} \varphi(t)\,dt = \sum_0^\infty \frac{A_n}{(2\eta)^2}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} dt \int_{t-\eta}^{t+\eta} u_n(t)\,dt, \tag{226}$$

où l'on a posé maintenant

$$A_n = \frac{\int_0^T \varphi(\xi)\,u_n(\xi)\,d\xi}{\int_0^T u_n^2(\xi)\,d\xi}.$$

50. Cela posé, substituons (221) dans la série

$$\sum A_n u_n(x). \tag{227}$$

Le terme général $A_n u_n(x)$ prendra, en vertu de (220), la forme

$$A_n u_n(x) = \left(\cos\lambda_n t + \frac{\vartheta_n}{\lambda_n}\right)\int_0^T \varphi(\xi)\left(\cos\lambda_n\xi + \frac{\vartheta_n}{\lambda_n}\right)d\xi \cdot \frac{1}{\frac{T}{2} + \frac{K_n}{\lambda_n}}.$$

Supposons que *$f(x)$ et, par suite, $\varphi(t)$ soit une fonction à variation bornée entre 0 et T.*

Cette condition étant remplie, on trouve

$$A_n u_n(x) = \frac{2}{T}\cos\lambda_n t \int_0^T \varphi(\xi)\cos\lambda_n\xi\,d\xi + \frac{\alpha_n}{\lambda_n^2},$$

α_n étant une fonction de t dont le module ne surpasse pas une certaine limite fixe [1]).

On en conclut que *la série (227) converge sous les mêmes conditions que la série approchée*

$$\frac{2}{T}\sum_0^\infty \cos\lambda_n t \int_0^T \varphi(\xi)\cos\lambda_n \xi\, d\xi .$$

Or, cette série, en vertu de (217), converge en même temps que la série trigonométrique

$$\frac{2}{T}\sum_0^\infty \cos\frac{n\pi}{T}t \int_0^T \varphi(\xi)\cos\frac{n\pi}{T}\xi\, d\xi ,$$

qui converge uniformément, pourvu que $\varphi(\xi)$ soit une fonction à variation bornée.

Donc *la série (227) et, par suite, la série (218) converge toutes les fois que la fonction $f(x)$ sera une fonction à variation bornée entre a et b.*

C'est un théorème, analogue à celui de M. Kneser, établi dans son Mémoire, cité plus haut (Mathem. Annal. Bd. 60).

51. Il ne nous reste qu'à déterminer la somme de la série (227).

L'équation

$$A_n = \int_0^T \varphi(\xi)\left(\cos\lambda_n\xi + \frac{\vartheta_n(\xi)}{\lambda_n}\right) d\xi \frac{1}{\frac{T}{2}+\frac{K_n}{\lambda_n}}$$

montre que

(228) $$|A_n| < \frac{A}{\lambda_n}$$

pour les valeurs de n, plus grandes qu'un entier fixe ν.

Substituant maintenant dans la série (227) au lieu de u_n son expression asymptotique (222), on trouve

$$\sum A_n u_n = \sum A_n \cos\lambda_n \mathrm{t} + \sum\frac{A_n}{\lambda_n}\psi(t)\sin\lambda_n t + \sum\frac{A_n}{\lambda_n^2}\vartheta_n^{(2)}(t).$$

Il est évident que chacune de deux dernières séries du second membre de cette égalité converge absolument, car, en vertu de (224) et (228),

[1]) Voir A. Kneser, Mathemat. Annalen, Bd. 58, p. 125.

$$\left| \frac{A_n}{\lambda_n} \psi(t) \sin \lambda_n t \right| < \frac{AQ}{\lambda_n^2},$$

$$\left| \frac{A_n}{\lambda_n^2} \vartheta_n^{(2)}(t) \right| < \frac{AQ}{\lambda_n^3},$$

Q désignant un nombre fixe.

Considérons la différence

$$D = \sum \frac{A_n}{2\eta\, \lambda_n^2} \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} \vartheta_n^{(2)}(t)\, dt - \sum \frac{A_n}{\lambda_n^2} \vartheta_n^{(2)}(t_0).$$

En remarquant que

$$\vartheta_n^{(2)}(t) - \vartheta_n^{(2)}(t_0) = (t - t_0)\,[\vartheta_n^{(2)}(t + \theta\, t_0)]'$$

on trouve, eu égard à (225),

$$|\,\vartheta_n^{(2)}(t) - \vartheta_n^{(2)}(t_0)\,| < 2\eta\, \lambda_n\, Q_1$$

pour toutes les valeurs de t, comprises entre $t_0 - \eta$ et $t_0 + \eta$.

On a donc, en tenant compte de (228),

$$|\,D\,| < 2\eta\, A Q_1 \sum \frac{1}{\lambda_n^2}.$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{\eta=0} D = 0,$$

car la série

$$\sum \frac{1}{\lambda_n^2}$$

converge.

On voit donc que

$$\lim_{\eta=0} \sum \frac{A_n}{2\eta\, \lambda_n^2} \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} \vartheta_n^{(2)}(t)\, dt = \sum \frac{A_n}{\lambda_n^2} \vartheta_n^{(2)}(t_0).$$

On en conclut ensuite que

$$(229) \qquad \lim_{\eta=0} \sum \frac{A_n}{(2\eta)^2\, \lambda_n^2} \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} dt \int_{t-\eta}^{t+\eta} \vartheta_n^{(2)}(t)\, dt = \sum \frac{A_n}{\lambda_n^2} \vartheta_n^{(2)}(t_0).$$

52. Supposons maintenant que *les fonctions k, l et g admettent les dérivées de trois premiers ordres, continues dans l'intervalle (a, b).*

La fonction $\psi(t)$ admettra les dérivées de deux premiers ordres, continues entre 0 et T [voir l'égalité (223)].

L'intégration par parties donne

$$\frac{1}{2\eta}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}\psi(t)\sin\lambda_n t\,dt=\frac{1}{2\lambda_n\eta}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}\psi'\cos\lambda_n t\,dt-\frac{\psi(t)\cos\lambda_n t}{2\lambda_n\eta}\Bigg|_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}.$$

On peut donc écrire

$$(230)\qquad \sum\frac{A_n}{2\eta\lambda_n}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}\psi(t)\sin\lambda_n t\,dt=\sum\frac{A_n}{2\eta\lambda_n^2}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}\psi'\cos\lambda_n t\,dt-$$
$$-\sum\frac{A_n}{2\eta\lambda_n^2}\psi(t)\cos\lambda_n t\Bigg|_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}.$$

Considérons la différence

$$D_1=\sum\frac{A_n}{2\eta\lambda_n^2}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}\psi'\cos\lambda_n t\,dt-\sum\frac{A_n}{\lambda_n^2}\psi'(t_0)\cos\lambda_n t_0.$$

L'égalité

$$\psi'\cos\lambda_n t-\psi'(t_0)\cos\lambda_n t_0=(t-t_0)\frac{d}{dt}(\psi'\cos\lambda_n t)\Bigg|_{t=t+\theta t_0}$$

montre que, pour toutes les valeurs de t, comprises entre $t_0-\eta$ et $t_0+\eta$,

$$|\psi'\cos\lambda_n t-\psi'(t_0)\cos\lambda_n t_0|<2\eta\lambda_n K,$$

K désignant un nombre fixe.

Il s'ensuit que

$$|D_1|<2\eta AK\sum\frac{1}{\lambda_n^2},$$

c'est à dire

$$(231)\qquad \lim_{\eta=0}\sum\frac{A_n}{2\eta\lambda_n^2}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}\psi'\cos\lambda_n t\,dt=\sum\frac{A_n}{\lambda_n^2}\psi'(t_0)\cos\lambda_n t_0.$$

53. Cherchons la limite, vers laquelle tend la somme

$$\sum\frac{A_n}{2\eta\lambda_n^2}\psi(t)\cos\lambda_n t\Bigg|_{t_0-\eta}^{t_0+\eta},$$

lorsque η tend vers zéro.

Il est aisé de s'assurer que

$$\frac{1}{2\eta}\psi(t)\cos\lambda_n t\Bigg|_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} = -\psi(t_0)\sin\lambda_n t_0\frac{\sin\lambda_n\eta}{\eta} + \psi'(t_0)\cos\lambda_n t_0 . \cos\lambda_n\eta +$$

$$+\frac{\eta}{4}\Big(\psi''(t_0+\Theta\eta)\cos\lambda_n(t_0+\eta) - \psi''(t_0-\Theta_1\eta)\cos\lambda_n(t_0-\eta)\Big).$$

Θ et Θ_1 désignant deux constantes positives, plus petites que l'unité.

On a, en tenant compte de (228) et de l'hypothèse, faite sur ψ,

$$|S| = \left|\sum\frac{A_n}{\lambda_n^2}\frac{\eta}{4}\Big(\psi''(t_0+\Theta\eta)\cos\lambda_n(t_0+\eta) - \psi''(t_0-\Theta_1\eta)\cos\lambda_n(t_0-\eta)\Big)\right| <$$

$$< \eta MA\sum\frac{1}{\lambda_n^3},$$

d'où l'on conclut que

(232) $$\lim_{\eta=0} S = 0.$$

Formons la différence

$$D_2 = \sum\frac{A_n}{\lambda_n^2}\psi'(t_0)\cos\lambda_n t_0 . \cos\lambda_n\eta - \sum\frac{A_n}{\lambda_n^2}\psi'(t_0)\cos\lambda_n t_0 .$$

En remarquant que

$$\left|1-\cos\lambda_n\eta\right| = \left|2\sin^2\frac{\lambda_n\eta}{2}\right| < \lambda_n\eta$$

on obtient l'inégalité suivante

$$|D_2| < \eta A\,|\psi'(t_0)|\sum\frac{1}{\lambda_n^2},$$

c'est à dire

(233) $$\lim_{\eta=0}\sum\frac{A_n}{\lambda_n^2}\psi'(t_0)\cos\lambda_n t_0 . \cos\lambda_n\eta = \sum\frac{A_n}{\lambda_n^2}\psi'(t_0)\cos\lambda_n t_0 .$$

On a donc, en vertu de (232) et (233),

$$\lim_{\eta=0}\sum\frac{A_n}{2\eta\lambda_n^2}\psi(t)\cos\lambda_n t\Bigg|_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} = -\lim_{\eta=0}\sum\frac{A_n}{\lambda_n}\psi(t_0)\sin\lambda_n t_0\frac{\sin\lambda_n\eta}{\lambda_n\eta} +$$

$$+\sum\frac{A_n}{\lambda_n^2}\psi'(t_0)\cos\lambda_n t_0$$

et, puis, en vertu de (230) et (231),

$$\lim_{\eta=0}\sum\frac{A_n}{2\eta\,\lambda_n}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}\psi(t)\sin\lambda_n t\,dt=\lim_{\eta=0}\sum\frac{A_n}{\lambda_n}\psi(t_0)\sin\lambda_n t_0\frac{\sin\lambda_n\eta}{\lambda_n\eta}.$$

Cette égalité étant établie, on s'assure ensuite que

$$\lim_{\eta=0}\sum\frac{A_n}{(2\eta)^2\lambda_n}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}dt\int_{t-\eta}^{t+\eta}\psi(t)\sin\lambda_n t\,dt=\lim_{\eta=0}\sum\frac{A_n}{\lambda_n}\psi(t_0)\sin\lambda_n t_0\left(\frac{\sin\lambda_n\eta}{\lambda_n\eta}\right)^2.$$

54. Cette égalité et celle de (229), combinées avec l'égalité évidente

$$\lim_{\eta=0}\sum\frac{A_n}{(2\eta)^2}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}dt\int_{t-\eta}^{t+\eta}\cos\lambda_n t\,dt=\lim_{\eta=0}\sum A_n\cos\lambda_n t_0\left(\frac{\sin\lambda_n\eta}{\lambda_n\eta}\right)^2,$$

conduisent au résultat suivant

$$(234)\quad\begin{aligned}\lim_{\eta=0}\sum\frac{A_n}{(2\eta)^2}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}dt\int_{t-\eta}^{t+\eta}u_n(t)\,dt&=\lim_{\eta=0}\sum A_n\cos\lambda_n t_0\left(\frac{\sin\lambda_n\eta}{\lambda_n\eta}\right)^2+\\&+\lim_{\eta=0}\sum\frac{A_n}{\lambda_n}\psi(t_0)\sin\lambda_n t_0\left(\frac{\sin\lambda_n\eta}{\lambda_n\eta}\right)^2+\sum\frac{A_n}{\lambda_n^2}\vartheta_n^{(2)}(t).\end{aligned}$$

Il est aisé de voir, en se rappelant l'expression (217) de λ_n, que la méthode du n⁰ 36 s'applique au cas considéré.

On a donc

$$\lim_{\eta=0}\sum A_n\cos\lambda_n t_0\left(\frac{\sin\lambda_n\eta}{\lambda_n\eta}\right)^2=\sum A_n\cos\lambda_n t_0,$$

$$\lim_{\eta=0}\sum\frac{A_n}{\lambda_n}\psi(t_0)\sin\lambda_n t_0\left(\frac{\sin\lambda_n\eta}{\lambda_n\eta}\right)^2=\sum\frac{A_n}{\lambda_n}\psi(t_0)\sin\lambda_n t_0,$$

car chacune des séries de secondes membres de ces égalités converge, pourvu que $\varphi(t)$ soit une fonction à variation bornée, ce que nous avons supposé.

Ces égalités et celles de (234) et (226) conduisent à la suivante

$$\lim_{\eta=0}\frac{1}{(2\eta)^2}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}dt\int_{t-\eta}^{t+\eta}\varphi(t)\,dt=\frac{\varphi(t_0+0)+\varphi(t_0-0)}{2}=\sum A_n u_n(t),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}=\sum_0^\infty V_n(x_0)\frac{\int_a^b g f(x) V_n(x)\,dx}{\int_a^b g V_n^2(x)\,dx}.$$

Cette égalité a lieu pour tout point x_0, intérieur à l'intervalle (a, b).

Le théorème suivant est donc démontré:

Soit $V_n(x)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ une suite de fonctions de Sturm-Liouville, définies par les équations

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dV_n}{dx}\right)+(g\lambda_n^2-l)\,V_n=0, \qquad a<x<b$$

$$V_n'(a)-h\,V_n(a)=0, \qquad V_n'(b)+H\,V_n(b)=0,$$

où k, g et l sont des fonctions positives, dont les deux premières ne s'annulent pas dans l'intervalle (a, b), continues et à variation bornée admettant les dérivées de trois premiers ordres jouissant les mêmes propriétés, h et H sont des constantes positives, λ_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ désignent les constantes positives, caractéristiques pour les fonctions $V_n(x)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$.

La série

$$\sum_0^\infty V_n(x)\frac{\int_a^b g(x) f(x) V_n(x)\,dx}{\int_a^b g(x) V_n^2(x)\,dx}$$

converge uniformément dans l'intervalle (a, b) et la somme de cette série est égale à

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

en tout point x de l'intervalle considéré.

55. Je terminerai mes recherches par les remarques suivantes:

La méthode indiquée plus haut s'applique bien à plusieurs autres suites de fonctions qui peuvent servir de développement à une fonction arbitraire; signalons, pour exemple, les fonctions de Lamé, le cas général des polynomes de Jacobi satisfaisant à l'équation

$$(235)\quad (1-x^2)u_n''+[\alpha_1-\beta_1-(\alpha_1+\beta_1)x]u_n'+n(n-1+\alpha_1+\beta_1)u_n=0,$$

α_1 et β_1 étant des constantes positives et, enfin, les polynomes de Tchébischeff, définis par l'équation

$$(236)\qquad x u_n''+(\alpha-\beta x)\,u_n'+n u_n=0.$$

C'est seulement pour simplifier le caclul que nous nous sommes bornés aux cas particuliers en supposant que

$$\alpha_1 = \beta_1 = \alpha + \frac{1}{2} \tag{237}$$

dans le premier et

$$\beta = \frac{1}{2} \tag{238}$$

dans le second cas.

Or, il n'est pas difficile de comprendre que les raisonnements précédents, convenablement généralisés, peuvent être étendus aussi aux cas généraux, où α et β ont des valeurs positives quelconques.

Les théorèmes de nos 40 et 43, établis dans les suppositions particulières (237) et (238), *s'appliquent bien au cas général des polynomes* u_n, *définis par les équations (235) et (236).*

Remarquons enfin qu'on peut considérer tous les résultats, obtenus dans ce Mémoire comme des exemples nouveaux de l'application du théorème général, énoncé au n° 32 et démontré en 1904 dans mon Mémoire: „Sur certaines égalités générales, communes aux plusieurs suites de fonctions souvent employées dans l'Analyse".

On voit, de ce qui précède, que *ce théorème permet de résoudre plusieurs problèmes sur le développement des fonctions arbitraires en séries avec le même degré de généralité que dans le cas classique des séries trigonométriques.*

Errata.

Pages	Lignes		Au lieu de:	lisez:
1	6	en remontant	u''_u	u''_n
„	2	en remontant	verifiant	vérifiant
4	11		mèthode	méthode
11	12		une moyenne	un moyen
19	11		I_u	I_n
	3	en remontant	n⁰ 9	n⁰ 10
26	10		18.	18_1.
27	7	en remontant	$\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)$	$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+\alpha\right)$
30	11	en remontant	19.	19_1.
32	2		$\frac{t(t^2+80)}{5.16^2}$	$\frac{t(t^4+80)}{5.16^2}$
„	8		$\sqrt{\xi(\xi^2+80)}$	$\sqrt{\xi(\xi^4+80)}$
„	12		(80)	(90)
33	17		$\int_v^b f(\alpha)\, u_k^2(\alpha)\, d\alpha$	$\int_a^b f(\alpha)\, u_k^2(\alpha)\, d\alpha$
41	6		$e^{-\frac{t^2}{4}}$	$e^{-\frac{t^2}{8}}$
„	9		$e^{-\frac{t^2}{4}}$	$e^{-\frac{t^2}{8}}$
42	7		$e^{-\frac{t^2}{4}}$	$e^{-\frac{t^2}{8}}$
43	9	en remontant	nos 11—18.	nos 12—18.
50	16	en remontant	positif quoique	positif, quoique
55	12	en remontant	140)	(140)
61	10	en remontant	ε_n	ε_k
„	„	„	α_n	α_k
64	9		$\alpha_n\, w_n(x)$	$\alpha_k\, w_k(x)$
„	11		$\beta_n^2 \int_\alpha^\beta \psi(t) f(\theta_1(t)) \cos(\lambda_n t+\tau)\, dt$	$\beta_k^2 \int_\alpha^\beta \psi(t) f(\theta_1(t)) \cos(\lambda_k t+\tau)\, dt$
„	14		α_n	α_k
„	17		$w'_n(x)$	$w'_k(x)$
„	20		α_n	α_k
66	4	en remontant	$\sum_0^{\nu} A_k V_k =$	$\sum_0^{\nu} A_k V_k +$

Remarque complémentaire au Mémoire: „Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions, définies par les équations différentielles etc.";

par M. W. Stekloff.

Dans mon Mémoire: „Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions etc.", inséré aux n^os 3, 4 et 5 (T. X) de ces „Communications", s'est glissée une inadvertance que je vais corriger dans cette Note.

Si l'on veut maintenir le mot „uniformément" dans l'énoncé des théorèmes de n^os

$$(A)\left\{\begin{array}{l}20\ (\text{p. } 37),\ 25 \text{ et } 26\ (\text{p. } 47),\ 32\ (\text{p. } 59),\ 37\ (\text{p. } 73),\ 40\ (\text{p. } 81),\\ 43 \text{ et } 44\ (\text{p. } 89),\ 45\ (\text{p. } 91) \text{ et } 55\ (\text{p. } 102),\end{array}\right.$$

il faut imposer cette condition restrictive sur les fonctions arbitraires $\varphi(x)$ et $f(x)$ qui y figurent:

En tout point x de l'intervalle correspondant de la variable réelle x les expressions

$$f(x+h) \text{ et } f(x-h), \tag{1}$$

h désignant une quantité positive, tendent uniformément vers les limites bien déterminées

$$f(x+0) \text{ et } f(x-0),$$

c'est à dire, le nombre positif ε (ne dépendant pas de x) étant donné à l'avance, on peut toujours trouver un autre nombre positif δ (aussi indépendant de x) tel qu'on ait

$$\left.\begin{array}{l}|f(x+h)-f(x+0)|<\varepsilon,\\ |f(x-h)-f(x-0)|<\varepsilon\end{array}\right. \quad \text{pour } h<\delta,$$

quelle que soit la valeur de x, prise dans l'intervalle considéré.

Cette condition est nécessaire pour l'uniformité de convergence de diverses séries qui se rencontrent dans les théorèmes (A).

D'autre part, il est évident que les raisonnements du Mémoire en question ne dépendent nullement de la supposition, que je viens d'énoncer, et restent toujours vrais, pourvu que les expressions (1) tendent, quoique non uniformément, vers des limites déterminées.

Pour obtenir les résultats correspondant à ce cas général, il suffit seulement de supprimer, dans l'énoncé des théorèmes (A), le mot: „uniformément" qui n'est glissé d'ailleurs que par une inadvertance.

О преобразованіи ультраэллиптическихъ интеграловъ перваго класса формы

$$\int \frac{\mathbf{Cy+D}}{\sqrt{\mathbf{R(y)}}}\mathbf{dy} = \int \frac{\mathbf{Ax+B}}{\sqrt{\mathbf{R(x)}}}\mathbf{dx}.$$

Д. Мордухай-Болтовского.

§ 1. Задача объ умноженіи эллиптическихъ интеграловъ состоитъ въ разысканіи условій, при которыхъ возможно удовлетворить уравненію

$$\int \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} = \triangle \int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}, \tag{1}$$

гдѣ $\triangle$ заданное постоянное число, $R(x)$ полиномъ 4-й степени, алгебраической функціей y отъ x и въ томъ случаѣ, когда условія эти удовлетворены, въ опредѣленіи этой функціи y.

Называя уравненіе (1) въ предположеніи, что y алгебраическая функція отъ x, *приведеніемъ*, а уравненіе, связующее y съ x *подстановкой*, мы можемъ формулировать эту задачу слѣдующимъ образомъ: *Найти уравненія, при которыхъ возможно приведеніе* (1) *и въ случаѣ, если оно возможно, найти отвѣчающую ему подстановку.*

Естественнымъ обобщеніемъ этой задачи на случай интеграловъ ультраэллиптическихъ перваго класса будетъ задача объ условіяхъ приведенія:

$$\sum_{i=1}^{i=2} \int \frac{Cy_i + D}{\sqrt{R(y_i)}} dy_i = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{R(x)}} dx, \tag{2}$$

гдѣ A, B, C, D вполнѣ заданныя или связанныя заданными уравненіями постоянныя, $R(x)$ полиномъ 6-й степени, и объ опредѣленіи въ въ томъ случаѣ, когда оно возможно, y_1 и y_2 въ алгебраическихъ функціяхъ отъ x.

Другой болѣе спеціальной формой обобщенія будетъ задача о *разысканіи условій, при которыхъ возможно приведеніе*:

$$\int \frac{Cy+D}{\sqrt{R(y)}}\,dy = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{R(x)}}\,dx \tag{3}$$

и въ томъ случаѣ, когда оно возможно, опредѣленіи отвѣчающей ему подстановки.

Вторая форма получается изъ первой, если положить $y_2 = \text{const}$ или $y_1 = y_2$.

Можно найти безконечное множество приведеній типа (3).

Въ самомъ дѣлѣ, если мы возьмемъ ультраэллиптическій интегралъ

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{R(x)}}\,dx,$$

приводящійся къ эллиптическимъ

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{Q(\xi)}},$$

то приведеніе

$$\int \frac{d\eta}{\sqrt{Q(\eta)}} = \triangle \int \frac{d\xi}{\sqrt{Q(\xi)}},$$

гдѣ $\triangle$ какое угодно раціональное число, дастъ:

$$\int \frac{Ay+B}{\sqrt{R(y)}}\,dy = \triangle \int \frac{Ax+B}{\sqrt{R(x)}}\,dx. \tag{4}$$

Интегралъ [1])

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^3+\alpha x^2+\beta)(x^3+px+q)}}$$

при

$$4p\alpha + 12q = 3\beta \ (*)$$

приводится къ эллиптическому интегралу. Поэтому существуетъ y, алгебраическая функція отъ x, удовлетворяющая уравненію

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(y^3+\alpha y^2+\beta)(y^3+px+q)}} = \triangle \int \frac{dx}{\sqrt{(x^3+\alpha x^2+\beta)(x^2+px+q)}},$$

гдѣ $\triangle$ раціональное число, p, q, α, β связаны соотношеніемъ (*).

---

[1]) *Goursat.* Sur la reduction des intégrales hyperelliptiques. Bulletin de Société Mathématique de France, t. XIII, p. 155.

Можно найти приведенія типа (4), въ которыхъ $\triangle$ число ирраціональное мнимое. Полагая въ приведеніи:

$$\int \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^3}} = \alpha \int \frac{d\xi}{\sqrt{1+\xi^3}} \quad \eta = \alpha\xi$$

α первообразный корень двучленнаго уравненія

$$\alpha^3 = 1$$

и

$$\xi = 1 + x^2, \quad \eta = 1 + y^2,$$

имѣемъ:

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{y^6 + 3y^4 + 3y^2 + 2}} = \alpha \int \frac{xdx}{\sqrt{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 2}}.$$

§ 2. Теперь перейдемъ къ изслѣдованію приведенія (3), но только въ предположеніи, что

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{R(x)}} \alpha x$$

не приводится къ эллиптическому интегралу. Мы докажемъ, что *при этомъ предположеніи должны имѣть*

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta},$$

гдѣ α, β. γ, δ *постоянныя.*

Эту теорему мы выведемъ, какъ слѣдствіе болѣе общей теоремы, относящейся къ *одночленнымъ приведеніямъ Абелевыхъ интеграловъ къ Абелевымъ интеграламъ*

$$\int F(x, y)dx = \int \Phi(\xi, \eta)d\xi \tag{6}$$

Только въ томъ случаѣ, когда интегралъ $\int\Phi(\xi, \eta)d\xi$ Абелевъ интегралъ перваго рода и перваго порядка (въ частномъ случаѣ эллиптическій) можно высказать теорему, что *если приведеніе* (6) *возможно, то въ немъ всегда можно предполагать:*

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha(x, y) \\ \eta &= \beta(x, y) \end{aligned} \tag{7}$$

гдѣ $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ *раціональныя функціи отъ* (x, y) [1]).

---

[1]) *Appell* et *Goursat.* Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales. 1895. p. 369. *Koenigsberger.* Ueber die Reduction Abelscher Integrale auf niedere Integralformen speciell auf elliptische Integrale. Journ. de Crelle 89. 1880, s. 89 и другія его сочиненія.

Называя систему уравненій (7) *подстановкой, отвѣчающей приведенію* (6), мы можемъ сказать, что *при приведеніи Абелева интеграла къ эллиптическому, перваго рода, мы можемъ всегда предполагать подстановку раціональной.* Когда $\int \Phi(\xi, \eta) d\xi$ Абелевъ интегралъ высшаго порядка, то подстановка не должна быть обязательно раціональной. Такъ мы имѣемъ, напримѣръ,

$$\int \frac{y^2 dy}{\sqrt{(1-y^6)(1-k^2y^6)}} = \frac{2}{3} \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4)(1-k^2x^4)}},$$

если положить $y^3 = x^2$, $y = \sqrt[3]{x^2}$.

Замѣтимъ, что въ этомъ примѣрѣ интегралы

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{(1-x^4)(1-k^2x^4)}}$$

подстановкой $z = x^2$,

$$\int \frac{y^2 dy}{\sqrt{(1-y^6)(1-k^2y^6)}}$$

$z = y^3$ подстановкой приводятся къ эллиптическому интегралу

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

Это свойство не является случайностью, но представляетъ слѣдствіе слѣдующей общей теоремы:

Приведеніе (6) *или возможно при помощи раціональной подстановки* (7) *или же предполагаетъ приведеніе:*

$$\int \Phi(\xi, \eta) d\xi = \int \Psi(\zeta, \omega) d\zeta \tag{8}$$

интеграла $\int \Phi(\xi, \eta) d\xi$ *къ интегралу порядка при помощи раціональнаго преобразованія* [1]).

Если $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{R(x)}} dx$ не приводится къ эллиптическому интегралу, то должны по этой теоремѣ имѣть:

$$y = \alpha(x, \sqrt{R(x)})$$
$$\sqrt{R(y)} = \beta(x, \sqrt{R(x)})$$

откуда имѣемъ:

$$\int \frac{Ey+F}{\sqrt{R(y)}} dy = \int \Phi(x, \sqrt{R(x)}) dx$$

---

[1]) Доказана въ работѣ: „О приведеніи Абелевыхъ интеграловъ къ нисшимъ трансцендентнымъ". Ч. 2, кн. III, стр. 276. Извѣстія Варшав. Политехническаго Института за 1905 г.

$\int \Phi(x, \sqrt{R(x)}dx$, какъ интегралъ перваго рода равенъ

$$\int \frac{Gx + H}{\sqrt{R(x)}} dx.$$

Приведенiе (3) и приведенiе:

$$\int \frac{Ey + F}{\sqrt{R(y)}} dy = \int \frac{Gx + H}{\sqrt{R(x)}} dx \tag{9}$$

даютъ

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{R(y)}} = \int \frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{R(x)}} dx$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} = \int \frac{\gamma x + \delta}{\sqrt{R(x)}} dx \tag{10}$$

откуда получаемъ:

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}. \tag{11}$$

Кромѣ этого будемъ имѣть:

$$(\gamma x + \delta)^3 \sqrt{R(y)} = (\alpha\delta - \beta\gamma) \sqrt{R(x)}$$

откуда слѣдуетъ, что

$$\frac{\alpha a_i + \beta}{\gamma a_i + \beta} = a_k, \tag{12}$$

если черезъ a_i и a_k обозначитъ корни полинома $R(x)$. Обратно подстановка (5) при условiи, что корни $R(x)$ связаны соотношенiями (12) приводитъ

$$\int \frac{Cy + D}{\sqrt{R(y)}} dy \text{ къ } \int \frac{Ax + B}{\sqrt{R(x)}} dx$$

Располагая попарно (a_i, a_k), получаемыя преобразованiемъ (12) другъ изъ друга, мы будемъ имѣть возможныя комбинацiи, опредѣляемыя слѣдующими 8 таблицами

(6)	
a_1	a_2
a_2	a_3
a_3	a_4
a_4	a_5
a_5	a_6
a_6	a_1

$$\begin{array}{|cc|cc|cc|}
\multicolumn{2}{|c|}{(5.1)} & \multicolumn{2}{c|}{(4.2)} & \multicolumn{2}{c|}{(3.3)} \\
a_1 & a_2 & a_1 & a_2 & a_1 & a_2 \\
a_2 & a_3 & a_2 & a_3 & a_2 & a_3 \\
a_3 & a_4 & a_3 & a_4 & a_3 & a_1 \\
a_4 & a_5 & a_4 & a_1 & a_4 & a_5 \\
a_5 & a_1 & a_5 & a_6 & a_5 & a_6 \\
a_6 & a_6 & a_6 & a_5 & a_6 & a_4
\end{array}$$

$$\begin{array}{|cc|cc|cc|}
\multicolumn{2}{|c|}{(4.1.1)} & \multicolumn{2}{c|}{(3.2.1)} & \multicolumn{2}{c|}{(2.2.2)} \\
a_1 & a_2 & a_1 & a_2 & a_1 & a_2 \\
a_2 & a_3 & a_2 & a_3 & a_2 & a_1 \\
a_3 & a_4 & a_3 & a_1 & a_3 & a_4 \\
a_4 & a_1 & a_4 & a_5 & a_4 & a_3 \\
a_5 & a_5 & a_5 & a_4 & a_5 & a_6 \\
a_6 & a_6 & a_6 & a_6 & a_6 & a_5
\end{array}$$

$$\begin{array}{|cc|}
\multicolumn{2}{|c|}{(2.2.1.1)} \\
a_1 & a_2 \\
a_2 & a_1 \\
a_3 & a_4 \\
a_4 & a_3 \\
a_5 & a_5 \\
a_6 & a_6
\end{array}$$

При составленіи этихъ таблицъ слѣдуетъ имѣть въ виду, что не можетъ быть соотвѣтствій

$$\begin{array}{|cc|}
a_i & a_i \\
a_{i+1} & a_{i+1} \\
\multicolumn{2}{|c|}{\dots\dots\dots} \\
a_{i+k} & a_{i+k}
\end{array}$$

гдѣ $k > 1$, ибо тогда, такъ какъ уравненіе:

$$\frac{\alpha a_i + \beta}{\gamma a_i + \delta} = a_i$$

имѣетъ только два корня, получили бы $a_i = a_j$ и интегралъ

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{R(x)}}\, dx$$

не былъ бы интеграломъ перваго порядка.

Преобразованіемъ

$$x = \frac{a\xi + b}{c\xi + d}$$
$$y = \frac{a\eta + b}{c\eta + d} \tag{13}$$

мы можемъ привести приведенія (10) и (11) къ слѣдующимъ:

$$\int \frac{d\eta}{\sqrt{\Theta(\eta)}} = \int \frac{\alpha\xi + \beta}{\sqrt{\Theta(\xi)}}\, d\xi$$
$$\int \frac{\eta d\eta}{\sqrt{\Theta(\eta)}} = \int \frac{\gamma\xi + \delta}{\sqrt{\Theta(\xi)}}\, d\xi \tag{14}$$

гдѣ $\Theta(\xi) = \xi(1 - \xi)(1 - \varkappa^2\xi)(1 - \lambda^2\xi)(1 - \mu^2\xi)$ причемъ *таблицу (6)* замѣнить слѣдующей

$$\begin{vmatrix} 0 & \infty \\ \infty & 1 \\ 1 & a \\ a & b \\ b & c \\ c & 0 \end{vmatrix}$$

$$a = \frac{1}{\varkappa^2},\ b = \frac{1}{\lambda^2},\ c = \frac{1}{\mu^2},$$

что даетъ слѣдующія уравненія:

$$\frac{\beta}{\delta} = \infty,\ \frac{\alpha}{\gamma} = 1,\ \frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta} = \frac{1}{\varkappa^2},\ \frac{\alpha + \beta\varkappa^2}{\gamma + \delta\varkappa^2} = \frac{1}{\lambda^2},\ \frac{\alpha + \beta\lambda^2}{\gamma + \delta\lambda^2} = \frac{1}{\mu^2},\ \frac{\alpha + \beta\mu^2}{\gamma + \delta\mu^2} = 0,$$

откуда получаемъ *для* $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 *вполнѣ опредѣленныя значенія*

$$\chi^2 = \frac{3}{2},\ \lambda^2 = 2,\ \mu^2 = 3.$$

$$\eta = \frac{3\xi - 1}{3\xi}$$

$\varkappa^2$, λ^2, μ^2 *связаны соотношеніемъ*:

$$\varkappa^2\lambda^2 = \mu^2. \tag{15}$$

Согласно Якоби [1]) въ этомъ случаѣ *интегралъ*

$$J = \int \frac{\alpha\xi + \beta}{\sqrt{\Theta(\xi)}}\, d\xi$$

приводится къ суммѣ двухъ эллиптическихъ интеграловъ.

---

[1]) *Jacobi.* Journal de Crelle, t. 8. Упомянутая выше статья Гурса стр. 133.

Въ самомъ дѣлѣ

$$J = pJ' + qJ'', \tag{16}$$

гдѣ

$$p = \frac{\beta\mu + \alpha}{2\mu}, \quad q = \frac{\beta\mu - \alpha}{2\mu}$$

$$J' = \int \frac{(1 + \mu\xi)d\xi}{\sqrt{\xi(1-\xi)(1-\varkappa^2\xi)(1-\lambda^2\xi)(1-\mu^2\xi)}}$$

$$J'' = \int \frac{(1 - \mu\xi)d\xi}{\sqrt{\xi(1-\xi)(1-\varkappa^2\xi)(1-\lambda^2\xi)(1-\mu^2\xi)}}.$$

Выраженіе для J' преобразовываемъ слѣдующимъ образомъ:

$$J' = \int \frac{(1-\mu\xi)(1+\mu\xi)d\xi}{\sqrt{(1-2\mu\xi+\mu^2\xi^2)\,[1-(\mu^2+1)\xi+\mu^2\xi^2]\,[1-(\varkappa^2+\lambda^2)\xi+\mu^2\xi^2]\xi}} =$$

$$= \int \frac{\dfrac{1-\mu^2\xi^2}{\xi^2}}{\sqrt{\left(\mu^2\xi+\dfrac{1}{\xi}-2\mu\right)\left[\mu^2\xi+\dfrac{1}{\xi}-(\mu^2+1)\right]\left[\mu^2\xi+\dfrac{1}{\xi}-(\varkappa^2+\lambda^2)\right]}}\,d\xi.$$

Подстановкой

$$\zeta = \frac{1+\mu^2\xi^2}{2\mu\xi}$$

интегралъ J' приводится къ эллиптическому интегралу

$$J' = -\frac{1}{\sqrt{2\mu}} \int \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta-1)(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)}},$$

гдѣ

$$\alpha = \frac{\mu^2+1}{2\mu}$$

$$\beta = \frac{\varkappa^2+\lambda^2}{2\mu}.$$

Такимъ же образомъ интегралъ J'' приводится къ эллиптическому интегралу:

$$\int \frac{\alpha\xi+\beta}{\sqrt{\Theta(\xi)}}\,d\xi = p' \int \frac{d\zeta}{\sqrt{H_1(\zeta)}} + q' \int \frac{d\zeta}{\sqrt{H_2(\zeta)}},$$

гдѣ

$$p' = -\frac{p}{\sqrt{2\mu}}, \quad q' = -\frac{q}{\sqrt{2\mu}}$$

постоянныя

$$H_1(\zeta) = (\zeta - 1)(\zeta - \alpha)(\zeta - \beta)$$

$$H_2(\zeta) = (\zeta + 1)(\zeta - \alpha)(\zeta - \beta)$$

$$\zeta = \frac{1 + \mu^2\xi^2}{2\mu\xi}.$$

Переходя отъ

$$\int \frac{\alpha\xi + \beta}{\sqrt{\Theta(\xi)}} d\xi$$

получаемъ слѣдующій результатъ:

Интегралы

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{R(x)}} dx$$

отвѣчающіе таблицѣ (6) приводящія къ суммѣ двухъ эллиптическихъ интеграловъ

$$p\int \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta - 1)(\zeta - \alpha)(\zeta - \beta)}} + q\int \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta + 1)(\zeta - \alpha)(\zeta - \beta)}} \tag{17}$$

подстановкой:

$$\zeta = \frac{ax^2 + bx + c}{cx^2 + fx + g} \tag{18}$$

Таблица (*5.1*) преобразовывается въ таблицу

0	1
1	a
a	b
b	c
c	0
∞	∞

$$\frac{\beta}{\delta} = 1, \ \frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta} = \frac{1}{\varkappa^2}, \ \frac{\alpha + \beta\varkappa^2}{\gamma + \delta\varkappa^2} = \frac{1}{\lambda^2}, \ \frac{\alpha + \beta\lambda^2}{\gamma + \delta\lambda^2} = \frac{1}{\mu^2}, \ \frac{\alpha + \beta\mu^2}{\gamma + \delta\mu^2} = 0, \ \frac{\alpha}{\gamma} = \infty,$$

откуда опять получаемъ *для* $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 *вполнѣ опредѣленныя значенія*:

$$\mu^2 = \omega, \ \lambda^2 = \frac{\omega^2}{\omega - 1}, \ \varkappa^2 = \frac{1}{1 - \omega}, \ \eta = -\omega\xi + 1,$$

гдѣ ω корень уравненія:

$$\frac{\omega^5 + 1}{\omega + 1} = \omega^4 - \omega^3 + \omega^2 - \omega + 1 = 0.$$

При помощи тѣхъ же подстановокъ (13) таблицу (5.1) можно привести къ виду:

$$\begin{array}{|cc|}
1 & \omega \\
\omega & a \\
a & b \\
b & c \\
c & 0 \\
\infty & \infty
\end{array}$$

гдѣ ω не нуль, а какое угодно напередъ назначенное число, отличное отъ 1 и ∞.

Положимъ, что ω первообразный корень двучленнаго уравненія:

$$\omega^5 = 1 .$$

Такъ какъ тогда $\frac{\alpha}{\gamma} = \infty$, $\gamma = 0$, то можемъ имѣть рядъ уравненій:

$$p + q = \omega,\ p\omega + q = a,\ pa + q = b,\ pb + q = c,\ pc + q = 1, \qquad (19)$$

откуда умножая 5-е на 1, $4 - p$, $3 - p^2$, $2 - p^3$ и $1 - p^4$, складывая и сокращая, получимъ:

$$q(p^4 + p^3 + p^2 + p + 1) = 1 - p^5$$

или

$$(p^4 + p^3 + p^2 + p + 1)(p + q - 1) = 0,$$

а такъ какъ

$$p + q = \omega \neq 1,$$

то

$$p^4 + p^3 + p^2 + p + 1 = 0$$

и

$$p = \omega^i,$$

гдѣ i равно одному изъ чиселъ 1, 2, 3, 4. Мы покажемъ, что $i = 1$. Подставляя вмѣсто $p - \omega^i$, а вмѣсто $q = \omega - \omega^i$ въ уравненіе (19), получаемъ по исключеніи a, b, c уравненіе

$$\omega^{4i+1} + \omega^{4i} - \omega^{3i+1} + \omega^{3i} - \omega^{2i+1} + \omega^{2i} - \omega^{i+1} + \omega^i - \omega = 1$$

или, имѣя въ виду, что

$$\omega^{4i} + \omega^{3i} + \omega^{2i} + \omega^i + 1 = 0$$

$$\omega^{4i+1} = 1 ,$$

откуда

$$4i + 1 \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ 5),$$

а потому

$$i = 1 .$$

Слѣдовательно $p=\omega$, $q=\omega$ и уравненія (19) даютъ $a=\omega^2$, $b=\omega^3$, $c=\omega^4$.

Интегралы

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{R(x)}}\,dx,$$

отвѣчающіе таблицѣ (5.1), приводятся при помощи подстановки:

$$\zeta=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$$

къ интегралу:

$$\int \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^5-1}}. \tag{20}$$

Таблица (4.2) преобразуется въ таблицу:

∞	a
a	b
b	c
c	∞
0	1
1	0

$$\frac{\beta}{\delta}=1,\ \frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}=0,\ \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{1}{\varkappa^2},\ \frac{\alpha+\beta\varkappa^2}{\gamma+\delta\varkappa^2}=\frac{1}{\lambda^2},\ \frac{\alpha+\beta\lambda^2}{\gamma+\delta\lambda^2}=\frac{1}{\mu^2},\ \frac{\alpha+\beta\mu^2}{\gamma+\delta\mu^2}=\infty,$$

откуда $\varkappa^2=\mu^2$, чего быть не можетъ, если

$$\int \frac{\alpha\xi+\beta}{\sqrt{\Theta(\xi)}}\,d\xi$$

перваго рода.

Таблица (4.2) не даетъ вовсе приведенія (3).

Таблица *(3.3)* или

1	a
a	0
0	1
∞	b
b	c
c	∞

даетъ уравненія:

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}=\frac{1}{\varkappa^2},\ \frac{\alpha+\beta\varkappa^2}{\gamma+\delta\varkappa^2}=0,\ \frac{\beta}{\delta}=1,\ \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{1}{\lambda^2},\ \frac{\alpha+\beta\lambda^2}{\gamma+\delta\lambda^2}=\frac{1}{\mu^2},\ \frac{\alpha+\beta\mu^2}{\gamma+\delta\mu^2}=\infty,$$

откуда для $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 *получаемъ два условныхъ уравненія:*

$$\varkappa^2 = \frac{\lambda^2+1}{\lambda^4+1}, \quad \mu^2 = \frac{\lambda^2(\lambda^2+1)}{\lambda^4+1}, \quad \eta = \frac{\mu^2\xi - \lambda^2}{\lambda^2\mu^2(1-\mu^2\xi)},$$

гдѣ λ остается произвольнымъ.

Здѣсь опять $\varkappa^2\lambda^2 = \mu^2$ и интегралъ

$$\int \frac{\alpha\xi+\beta}{\sqrt{\Theta(\xi)}}\, d\zeta$$

приводится къ суммѣ эллиптическихъ интеграловъ (17).

Тоже имѣетъ мѣсто для таблицъ *(4.1.1) и (2.2.2)*, изъ которыхъ первая или

$$\left|\begin{array}{cc} 1 & a \\ a & b \\ b & c \\ c & 1 \\ 0 & 0 \\ \infty & \infty \end{array}\right|$$

даетъ уравненія:

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta} = \frac{1}{\varkappa^2}, \quad \frac{\alpha+\beta\varkappa^2}{\gamma+\delta\varkappa^2} = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \frac{\alpha+\beta\lambda^2}{\gamma+\delta\lambda^2} = \frac{1}{\mu^2}, \quad \frac{\alpha+\beta\mu^2}{\gamma+\delta\mu^2} = 1, \quad \frac{\beta}{\delta} = 0, \quad \frac{\alpha}{\gamma} = \infty,$$

опредѣляющія для $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 *два условныхъ уравненія:*

$$\lambda^2 = \frac{1}{\varkappa^4}, \quad \mu^2 = \frac{1}{\varkappa^2}, \quad \eta = \frac{\xi}{\varkappa^2}, \quad \varkappa^2\lambda^2 = \mu^2$$

$\varkappa$ произвольно, а вторая или

$$\left|\begin{array}{cc} \infty & 0 \\ 0 & \infty \\ 1 & a \\ a & 1 \\ b & c \\ c & b \end{array}\right|$$

даетъ уравненія:

$$\frac{\alpha}{\gamma} = 0, \quad \frac{\beta}{\delta} = \infty, \quad \frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta} = \frac{1}{\varkappa^2}, \quad \frac{\alpha+\beta\varkappa^2}{\gamma+\delta\varkappa^2} = 1, \quad \frac{\alpha+\beta\lambda^2}{\gamma+\delta\lambda^2} = \frac{1}{\mu^2}, \quad \frac{\alpha+\beta\mu^2}{\gamma+\delta\mu^2} = \frac{1}{\lambda^2},$$

дающія для $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 *одно условное уравненіе:*

$$\varkappa^2 = \lambda^2\mu^2$$

$$\eta = \frac{1}{\varkappa^2\xi},$$

гдѣ λ, μ остаются произвольными.

Таблицы (3.2.1) и (2.2.1.1) не даютъ вовсе приведенія типа (3), ибо первая или

$$\left|\begin{array}{cc} a & b \\ b & c \\ c & a \\ 0 & \infty \\ \infty & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right|$$

даетъ:

$$\frac{\alpha+\beta\varkappa^2}{\gamma+\delta\varkappa^2}=\frac{1}{\lambda^2},\ \frac{\alpha+\beta\lambda^2}{\gamma+\delta\lambda^2}=\frac{1}{\mu^2},\ \frac{\alpha+\beta\mu^2}{\gamma+\delta\mu^2}=\frac{1}{\varkappa^2},\ \frac{\beta}{\delta}=\infty,\ \frac{\alpha}{\gamma}=1,\ \frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}=0,$$

откуда $\varkappa^2=\lambda^2=\mu^2=1$; вторая или

$$\left|\begin{array}{cc} 1 & a \\ a & 1 \\ b & c \\ c & b \\ 0 & 0 \\ \infty & \infty \end{array}\right|$$

даетъ:

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}=\frac{1}{\varkappa^2},\ \frac{\alpha+\beta\varkappa^2}{\gamma+\delta\varkappa^2}=1,\ \frac{\alpha+\beta\lambda^2}{\gamma+\delta\lambda^2}=\frac{1}{\mu^2},\ \frac{\alpha+\beta\mu^2}{\gamma+\beta\mu^2}=\frac{1}{\lambda^2},\ \frac{\beta}{\delta}=0,\ \frac{\alpha}{\gamma}=\infty,$$

откуда $\varkappa^2=1$, $\lambda^2=\mu^2$.

Результаты, нами полученные, можно слѣдующимъ образомъ формулировать:

Приведеніе:

$$\int\frac{Cy+D}{\sqrt{R(y)}}\,dy=\int\frac{Ax+B}{\sqrt{R(x)}}\,dx \qquad (3)$$

возможно только тогда, когда

$$\int\frac{Ax+B}{\sqrt{R(x)}}\,dx$$

принадлежитъ къ одному изъ слѣдующихъ типовъ:

1) *Къ интеграламъ, приводящимся къ эллиптическимъ*

$$\int\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}},$$

2) *приводящимся къ суммѣ двухъ эллиптическихъ интеграловъ:*

$$p\int\frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta-1)(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)}}+q\int\frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta+1)(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)}}$$

подстановкой:

$$\zeta=\frac{ax^2+bx+c}{cx^2+fx+g},$$

3) *приводящимся къ интегралу*

$$\int\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(\zeta^5-1)}}$$

при помощи подстановки

$$\zeta=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}.$$

Совершенно такимъ же образомъ изслѣдуемъ частный случай приведенія (3)

$$\int\frac{dy}{\sqrt{R(y)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}. \tag{20}$$

Такъ какъ здѣсь $\gamma=0$, то подстановка (5) замѣняется еще болѣе простой

$$y=\alpha x+\beta \tag{22}$$

гдѣ, какъ легко видѣть $\alpha^2=1$. Легко видѣть, что въ этомъ случаѣ интегралъ

$$\int\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

долженъ обязательно принадлежать къ первому изъ вышеупомянутыхъ типовъ.

Полагая

$$y=\frac{a\eta+b}{c\eta+\partial},\quad x=\frac{a\xi+b}{c\xi+\partial}$$

мы обобщаемъ этотъ результатъ на случай приведенія:

$$\int\frac{Ay+B}{\sqrt{R(y)}}\,dy=\int\frac{Ax+B}{\sqrt{R(x)}}\,dx \tag{23}$$

и мы можемъ этотъ результатъ формулировать еще слѣдующимъ образомъ.

Дифференціальное уравненіе перваго порядка

$$\frac{Ay+B}{\sqrt{R(y)}}\,dy=\frac{Ax+B}{\sqrt{R(x)}}\,dx,$$

гдѣ $R(x)=a_0x^6+a_1x^5+a_2x^4+a_3x^3+a_4x^2+a_5x+a_6$ *имѣетъ алгебраическое рѣшеніе иное, чѣмъ* $y=x$, *въ томъ и только въ томъ случаѣ, когда интегралъ*

$$\int\frac{Ax+B}{\sqrt{R(x)}}\,dx$$

приводится къ эллиптическому интегралу.

Варшава.
17 марта 1905 г.

А. Н. Коркинъ.

(19-го февраля 1837 г.—19-го августа 1908 г.).

(Некрологъ [1]).

19-го августа 1908 года скончался на 72 году жизни, почетный членъ Харьковскаго Математическаго Общества, заслуженный профессоръ Императорскаго С.-Петербургскаго университета, Александръ Николаевичъ Коркинъ. Ученые труды А. Н. Коркина создали ему репутацію выдающагося, первокласснаго ученаго, а 48-лѣтняя профессорская дѣятельность—огромную массу учениковъ. Многіе изъ нихъ занимаютъ профессорскія каѳедры и преподавательскія мѣста въ различныхъ городахъ Россіи, многихъ уже нѣтъ на свѣтѣ. Два поколѣнія обязаны А. Н. Коркину своимъ математическимъ образованіемъ; во многихъ семьяхъ отцы и дѣти считаютъ себя учениками А. Н. Коркина и съ благодарностью вспоминаютъ образцовыя лекціи своего учителя.

1. А. Н. Коркинъ родился 19-го февраля 1837 года, въ деревнѣ, находящейся въ 6—7 верстахъ отъ большого села Шуйскаго, Тотемскаго уѣзда, Вологодской губерніи. Отецъ его былъ зажиточный крестьянинъ, занимавшійся торговлей и имѣвшій казенный подрядъ на поставку соли. А. Н. Коркину было три года, когда семья его переселилась въ село Шуйское, а 8-ми лѣтнимъ мальчикомъ онъ былъ отданъ на воспитаніе учителю математики Вологодской гимназіи, А. И. Иваницкому. Иваницкій былъ ученикомъ академика и профессора В. Я. Буняковскаго и, по отзыву А. Н. Коркина, отличный преподаватель. Жена Иваницкаго, образованная женщина, учила А. Н. Коркина иностраннымъ языкамъ, французскому и нѣмецкому, а самъ Иваницкій приготовилъ его къ поступленію во 2-й классъ Вологодской гимназіи, куда онъ и попалъ, имѣя неполныхъ 11 лѣтъ отъ роду.

Въ 1849 году умеръ отецъ А. Н. Коркина, потерявъ передъ этимъ почти все состояніе и оставилъ вдову и 12-ти лѣтняго сына почти безъ

---

[1]) Нижеслѣдующій очеркъ есть извлеченіе изъ некролога А. Н. Коркина, напечатаннаго въ „Журналѣ М. Н. П.“ ноябрь 1908 г.

С. М. О.

всякихъ средствъ. Мать А. Н. скончалась въ 1888 году, 79-ти лѣтъ отъ роду, проживая безвыѣздно въ селѣ Шуйскомъ. А. Н. Коркинъ ежегодно, на каникулярное время, уже будучи профессоромъ и извѣстнымъ ученымъ, ѣздилъ въ село Шуйское, пока жива была его мать.

Блестящія способности А. Н. Коркина обнаружились уже во время его пребыванія въ гимназіи. Уроки онъ училъ, по словамъ его сестры, Н. Н. Астафьевой, на ходу, по дорогѣ изъ гимназіи домой; кончилъ курсъ съ золотой медалью, не имѣя еще и 17 лѣтъ отъ роду. За молодостью лѣтъ не могъ прямо поступить въ университетъ, куда стремился, и поѣхалъ въ Ярославль, намѣреваясь учиться въ Демидовскомъ лицеѣ. Пробывъ тамъ около полгода, и найдя, вѣроятно, безполезнымъ дальнѣйшее тамъ пребываніе, вернулся въ село Шуйское, гдѣ и прожилъ до поступленія въ С.-Петербургскій университетъ, въ 1854 году, на математическій разрядъ физико-математическаго факультета. Въ то время этотъ факультетъ былъ богатъ огромными научными силами. В. Я. Буняковскій, П. Л. Чебышевъ, І. И. Сомовъ, А. Н. Савичъ, Э. Х. Ленцъ— вотъ тѣ имена знаменитыхъ профессоровъ, подъ руководствомъ которыхъ природныя дарованія А. Н. Коркина развились въ полной мѣрѣ. Въ 1856 году онъ представилъ факультету диссертацію на заданную тему „О наибольшихъ и наименьшихъ величинахъ“ и получилъ за это сочиненіе золотую медаль. По рекомендаціи профессора В. Я. Буняковскаго, работа студента А. Н. Коркина была напечатана въ „Студенческомъ сборникѣ“, выпускъ 1-й, 1857 года.

Во время пребыванія студентомъ университета средствами къ жизни А. Н. Коркину служили: стипендія, дававшая ему 7 рублей въ мѣсяцъ, и частные уроки.

Въ 1858 году онъ кончилъ курсъ со степенью кандидата и опредѣлился на службу по военно-учебнымъ заведеніямъ учителемъ математики въ первомъ кадетскомъ корпусѣ.

Такимъ образомъ, въ нынѣшнемъ 1908 году исполнилось бы пятидесятилѣтіе его службы, до котораго онъ не дожилъ одинъ или два мѣсяца.

Въ 1860 году А. Н. Коркинъ выдержалъ магистерскій экзаменъ и въ томъ-же году защитилъ диссертацію на степень магистра. Въ это-же время открылась вакансія по каѳедрѣ математики за выходомъ изъ университета В. Я. Буняковскаго. Былъ объявленъ конкурсъ, и факультетъ пригласилъ А. Н. Коркина и магистра Шперлинга, поручивъ первому чтеніе лекцій по сферической тригонометріи, аналитической геометріи и интегрированію функцій, а второму по высшей алгебрѣ и начертательной геометріи. Получивъ занятія въ университетѣ, А. Н. Коркинъ оставилъ службу въ первомъ кадетскомъ корпусѣ.

По окончаніи конкурса А. Н. Коркинъ былъ опредѣленъ адъюнктомъ по каѳедрѣ чистой математики приказомъ Министра Народнаго Просвѣщенія отъ 12-го іюля 1861 года.

Въ 1862 году университетъ былъ закрытъ вслѣдствіе студенческихъ волненій. А. Н. Коркинъ вмѣстѣ съ другими профессорами и преподавателями университета былъ причисленъ къ Министерству съ сохраненіемъ содержанія и правъ по учебной части.

Высочайшимъ приказомъ отъ 12-го мая 1862 года А. Н. Коркинъ былъ командированъ съ ученою цѣлью заграницу на два года.

Въ продолженіе этого времени онъ слушалъ въ Парижѣ лекціи Ляме, Ліувилля, Бертрана и другихъ французскихъ математиковъ. Точно также, находясь въ Берлинѣ, познакомился съ преподаваніемъ и направленіемъ научныхъ занятій нѣмецкихъ математиковъ. Изъ всѣхъ этихъ нѣмецкихъ математиковъ, А. Н. Коркинъ выше всѣхъ цѣнилъ Куммера и съ большою похвалою всегда отзывался о его лекціяхъ. Занимаясь въ это время интегрированіемъ уравненій въ частныхъ производныхъ и теоріею чиселъ, А. Н. подготовилъ какъ свою докторскую диссертацію, такъ и почву для послѣдующихъ работъ по теоріи чиселъ.

Возвратясь въ С.-Петербургъ въ 1864 году, онъ занялъ свою должность при университетѣ, будучи переименованъ изъ адъюнктовъ въ штатные доценты на основаніи общаго устава Россійскихъ университетовъ.

Въ 1867 году онъ представилъ факультету свою докторскую диссертацію подъ заглавіемъ: *О совокупныхъ уравненіяхъ съ частными производными перваго порядка и нѣкоторыхъ вопросахъ механики,* защитивъ которую въ началѣ 1868 г. и былъ удостоенъ степени доктора математики.

Въ 1868 году онъ былъ избранъ совѣтомъ и утвержденъ Министромъ Народнаго Просвѣщенія въ званіи экстраординарнаго профессора по каѳедрѣ математики.

Въ 1873 году, по случаю освободившихся на факультетѣ каѳедръ, онъ былъ избранъ ординарнымъ профессоромъ. Въ 1886 году утвержденъ въ званіи заслуженнаго профессора, а въ 1888 году, по выслугѣ 30 лѣтъ, оставленъ на службѣ въ званіи профессора, причемъ перешелъ за штатъ, но чтеніе лекцій продолжалъ до весны 1908 года.

Во время своей профессорской дѣятельности въ университетѣ, А. Н. Коркинъ читалъ лекціи послѣдовательно почти по всѣмъ математическимъ предметамъ, а именно: по сферической тригонометріи, начертательной геометріи, аналитической геометріи, высшей алгебрѣ, дифференціальному исчисленію и его приложеніямъ къ геометріи, интегрированію функцій, интегрированію уравненій и варіаціонному исчисленію. Кромѣ университета А. Н. Коркинъ читалъ еще въ теченіе 30 слишкомъ лѣтъ, дифференціальное и интегральное исчисленіе въ Николаевской Морской Академіи.

Затѣмъ, весьма короткое время, въ самомъ началѣ своей дѣятельности, А. Н. Коркинъ читалъ лекціи въ С.-Петербургскомъ Технологическомъ Институтѣ.

2. Ученая дѣятельность А. Н. Коркина выразилась въ опубликованіи нижеслѣдующихъ трудовъ:

1. Объ опредѣленіи произвольныхъ функцій въ интегралахъ линейныхъ уравненій съ частными производными. 1860 г. (Литографировано).

2. О совокупныхъ уравненіяхъ съ частными производными перваго порядка и нѣкоторыхъ вопросахъ механики. 1867. (65 стр.+VI, in 4⁰).

3. Sur les équations simultanées aux différences partielles du premier ordre. (Comptes rendus des séances de l'Institut de France. 1869. 4 p. in 4⁰).

4. Sur les intégrales des équations du mouvement d'un point matériel. (Mathematische Annalen. Band II. 1870. 27 p. in 8⁰).

5. Sur le théorème de Poisson et son réciproque (Mélanges mathématiques et astronomiques tirés du Bulletin de l'Académie des sciences de St.-Petersbourg. T. IV. 1872, 6 p. in 8⁰).

6. Sur les formes quadratiques positives quaternaires. Совмѣстно съ Е. И. Золотаревымъ. (Math. Annalen. Band V. 1872. 3 p. in 8⁰).

7. Sur les formes quadratiques. Совмѣстно съ Е. И. Золотаревымъ. (Math. Annalen. Band VI. 1873. 24 p. in 8⁰).

8. Sur un certain minimum. Совмѣстно съ Е. И. Золотаревымъ (Nouvelles Annales de Mathématiques. 1873).

9. Sur les formes quadratiques positives. Совмѣстно съ Е. И. Золотаревымъ. (Mathematische Annalen. Band XI. 1877. 51 p. in 8⁰).

10. О частныхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ второго порядка. (Записка, составленная по поводу университетскаго акта 8-го февраля 1878 года. Приложеніе къ протоколамъ. 39 стр. in 8⁰).

11. Sur l'impossibilité de résoudre l'équation

$$X^n + Y^n + Z^n = 0$$

en fonctions entières (Comptes rendus de l'Inst. de France T. XC. 1880). Та-же замѣтка на русскомъ языкѣ помѣщена въ X томѣ „Московскаго Математическаго Сборника" за 1882 годъ. Въ томъ же томѣ помѣщена замѣтка „Объ одномъ опредѣленномъ интегралѣ", съ указаніемъ, что она извлечена изъ письма А. Н. къ Н. В. Бугаеву.

12. Sur un problème d'interpolation (Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, 2-me serie. T. VI 1882).

13. О кривизнѣ поверхностей. (Сообщенія математическаго общества при Харьковскомъ университетѣ. 1887. 8 стр. in 8^0).

14. Sur les cartes géographiques. (Math. Annalen. Band. XXXV. 1890. 17 p. in 8^0).

15. Sur les équations différentielles ordinaires du premier ordre. (Math. Annalen. Band 48. 48 p. in 8^0).

16. Etudes des multiplicateurs des équations différentielles du premier ordre. St.-Pétersbourg. 1903. 171 p. in 8^0).

Та-же работа въ переводѣ Г. С. Зернова на русскій языкъ, съ нѣкоторыми дополненіями автора, помѣщена въ XXIV томѣ Московскаго математическаго сборника за 1904 г.

17. „По поводу статьи В. П. Ермакова подъ заглавіемъ: Дифференціальныя уравненія перваго порядка, имѣющія данный интегральный множитель факторіальной формы. (Сообщенія математическаго общества при Харьковскомъ университетѣ. 2 серія, т. IX. 1905 г.).

18. Sur un théorème de M. Tchébychef (Comptes rendus. T. XCVI, 1883 г.

19. Sur les équations différentielles ordinaires du premier ordre. Двѣ статьи въ Comptes rendus. T. CXII и CXIII 1896 г.

Кромѣ того, въ бумагахъ А. Н. Коркина оказалась приготовленная къ печати статья на французскомъ языкѣ подъ заглавіемъ:

„Sur la distribution des nombres entiers suivant le module premier et les congruences binômes, avec une table des racines primitives et des caractères qui s'y rapportent pour les nombres premiers inférieurs à 4000“.

Работы А. Н. Коркина, какъ видно изъ вышеприведеннаго списка, относятся главнымъ образомъ къ двумъ отдѣламъ математики: интегрированію уравненій и теоріи чиселъ.

Работа № 1 есть магистерская диссертація А. Н. Коркина; она была налитографирована въ небольшомъ числѣ экземпляровъ. Находящійся въ библіотекѣ С.-Петербургскаго университета экземпляръ есть собственноручная рукопись автора, написанная литографскими чернилами. Въ ней изложены математическія методы, относящіяся къ различнымъ вопросамъ математической физики, изобрѣтенныя Фурье и Пуассономъ.

Работа № 2 есть докторская диссертація А. Н. Коркина. Она состоитъ изъ двухъ главъ: въ первой излагается новая метода интегрированія системы совокупныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ извѣстная въ настоящее время подъ названіемъ методы Коркина, во второй показаны приложенія къ нѣкоторымъ вопросамъ механики. Метода Коркина существенно отличается отъ методы Якоби, изложенной въ его знаменитомъ посмертномъ мемуарѣ, въ LX томѣ журнала Крелля за 1861 годъ (Nova methodus и т. д.). Сущность методы Коркина состоитъ въ слѣдующемъ: найдя полный интегралъ одного изъ уравненій данной системы, допускающей общее всѣмъ уравненіямъ рѣшеніе, Коркинъ указываетъ нѣкоторое преобразованіе данной системы въ другую, въ которой число уравненій и независимыхъ перемѣнныхъ на единицу меньше, чѣмъ въ данной системѣ; при этомъ новая система будетъ такова, что къ ней можно будетъ приложить такое-же преобразованіе, какое было примѣнено къ первоначальной. Вслѣдствіе этого, путемъ послѣдовательныхъ преобразованій, можно будетъ перейти окончательно къ одному уравненію, интегрированіемъ котораго и рѣшается вопросъ. Для приложеній, во II главѣ своего сочиненія, Коркинъ выбираетъ вопросъ, съ котораго, какъ самъ онъ говоритъ въ предисловіи, началась теорія интегрированія частныхъ совокупныхъ уравненій, а именно, вопросъ о нахожденіи интеграловъ, общихъ многимъ задачамъ о движеніи точки. Въ вопросахъ этого рода, разсматриваемыхъ Коркинымъ, силы зависятъ не только отъ координатъ движущейся точки, но и отъ скоростей. Къ такимъ вопросамъ не примѣнимъ способъ Бертрана, впервые рѣшившаго подобный вопросъ съ существеннымъ ограниченіемъ, что силы не зависятъ отъ времени и скоростей, а только отъ координатъ точки. Коркинъ даетъ свой, вполнѣ общій, способъ для изслѣдованія подобныхъ вопросовъ.

Работы №№ 3 и 4, представляютъ собою изложеніе на французскомъ языкѣ главныхъ результатовъ докторской диссертаціи Коркина. Первая изъ этихъ работъ есть сжатое изложеніе его методы интегрированія совокупныхъ уравненій съ частными производными, вторая—изложеніе, съ нѣкоторыми измѣненіями, содержанія второй главы диссертаціи.

Работа № 5, относится къ тому-же отдѣлу математики, какъ и предыдущія. Въ ней дано доказательство одной теоремы, обнимающей собою, какъ знаменитую теорему Пуассона, дающую возможность по двумъ независимымъ интеграламъ канонической системы дифференціальныхъ уравненій (или равносильнаго ей уравненія въ частныхъ производныхъ) составить третій, такъ и теорему, обратную ей. Эта обратная теорема доказана Коркинымъ впервые.

Изъ слѣдующихъ работъ Коркина къ интегрированію уравненій въ частныхъ производныхъ относятся работы №№ 10 и 14.

Въ работѣ № 10 Коркинъ занимается интегрированіемъ уравненій 2-го порядка Амперовскаго типа, къ которымъ прилагается извѣстная метода Монжа. Метода Монжа, какъ извѣстно, даетъ общій интегралъ съ произвольными функціями, но ничего не даетъ для опредѣленія этихъ произвольныхъ функцій по даннымъ начальнымъ и предѣльнымъ условіямъ, которымъ долженъ удовлетворять искомый интегралъ, чтобы получилось опредѣленное рѣшеніе предложенной задачи. Это опредѣленіе произвольныхъ функцій часто представляетъ не меньшія трудности, чѣмъ самое интегрированіе. Коркинъ даетъ способы для этого опредѣленія при начальныхъ и предѣльныхъ условіяхъ весьма общей формы. Для приложеній онъ разсматриваетъ задачу о проведеніи минимальной поверхности черезъ данную кривую, при данномъ направленіи нормали къ поверхности въ каждой ея точкѣ, и получаетъ выраженія координатъ каждой точки поверхности черезъ данныя величины. Формулы эти, впрочемъ, уже раньше получены были Шварцемъ инымъ путемъ, но не были извѣстны Коркину.

Въ работѣ № 14. „Sur les cartes géographiques“ Коркинъ занимается вопросомъ о такъ-называемыхъ эквивалентныхъ проекціяхъ картъ, т. е. проекціяхъ, сохраняющихъ площади. О. Бонне, въ мемуарѣ „Sur la théorie mathématique des cartes géographiques“ (Journal de Liouville T. XVII. 1852 г.), занимался вопросомъ объ эквивалентномъ изображеніи сферы на плоскости, при условіи перпендикулярности меридіановъ и параллелей и свелъ вопросъ къ интегрированію нѣкотораго уравненія въ частныхъ производныхъ. Интегрированіе этого уравненія не было выполнено ни Бонне, ни кѣмъ либо другимъ, и вопросъ остался нерѣшеннымъ. Коркинъ принимается за этотъ вопросъ, обобщаетъ его, замѣнивъ сферу какою угодно поверхностью вращенія и даетъ полное его рѣшеніе.

Изъ сдѣланнаго обзора видно, что въ вопросахъ, относящихся къ уравненіямъ въ частныхъ производныхъ Коркинъ обогатилъ науку многими важными результатами.

Не менѣе, если не болѣе, цѣнными являются его работы по теоріи чиселъ. Сюда прежде всего относятся работы №№ 6, 7 и 9, о квадратичныхъ формахъ, сдѣланныя имъ въ сотрудничествѣ съ его близкимъ другомъ, безвременно умершимъ Е. И. Золотаревымъ.

Совмѣстная семилѣтняя (1871—1877 г.) работа такихъ двухъ сильныхъ математиковъ, какъ Коркинъ и Золотаревъ, не могла не увѣнчаться успѣхомъ. Всѣ эти упомянутыя работы имѣютъ главною цѣлью разысканіе точнаго высшаго предѣла наименьшихъ значеній положительныхъ квадратичныхъ формъ даннаго опредѣлителя. Это разысканіе представляетъ значительныя трудности и, до работъ Коркина и Золотарева, точные предѣлы наименьшихъ значеній были извѣстны лишь для бинарныхъ и тройничныхъ формъ. Въ первой изъ упомянутыхъ работъ, замѣткѣ, публикованной въ 1872 году, авторы даютъ точный высшій предѣлъ наименьшихъ значеній формъ съ четырьмя перемѣнными. Въ слѣдующемъ 1873 году они публикуютъ большой мемуаръ „Sur les formes quadratiques", въ которомъ излагаютъ изслѣдованія, относящіяся къ формамъ съ какимъ угодно числомъ n перемѣнныхъ и даютъ высшіе предѣлы наименьшихъ значеній этихъ формъ, причемъ оказывается, что найденные предѣлы будутъ *точными* для $n=2$, 3 и 4, а при $n \geqq 5$ не могутъ быть точными. Наконецъ, въ 1877 г. появляется послѣдняя и самая большая изъ ихъ работъ по теоріи квадратичныхъ формъ, въ которой, какъ окончательный результатъ, дается точный высшій предѣлъ наименьшихъ значеній формъ съ пятью перемѣнными.

Работы Коркина и Золотарева по теоріи квадратичныхъ формъ обратили на себя вниманіе ученыхъ и, въ особенности, знаменитаго французскаго математика Эрмита. Эрмитъ лучше всѣхъ другихъ могъ оцѣнить успѣхъ, достигнутый русскими математиками, такъ какъ самъ много занимался подобными вопросами и зналъ, какія трудности они представляютъ. Работы А. Н. Коркина и Золотарева непосредственно примыкаютъ къ работамъ Эрмита въ той же области и, можно сказать, были навѣяны ими.

Совмѣстно съ Золотаревымъ написана А. Н. Коркинымъ еще небольшая статья, помѣченная въ спискѣ № 8. Въ ней дается весьма изящное рѣшеніе нижеслѣдующаго вопроса:

„Найти ту изъ всѣхъ цѣлыхъ функцій $f(x)$ данной степени n, съ даннымъ коеффиціентомъ при x^n, для которой

$$\int_0^1 [f(x)]\,dx,$$

гдѣ $[f(x)]$ обозначаетъ абсолютное значеніе $f(x)$, будетъ имѣть наименьшее значеніе". Рѣшеніе основано на одномъ свойствѣ алгебраическихъ непрерывныхъ дробей, подмѣченномъ авторами, и изложено вполнѣ элементарно.

Маленькая замѣтка № 11 вызвана замѣткою г. R. Liouville въ 89 томѣ Comptes rendus, въ которой авторъ доказываетъ невозможность найти такія три цѣлыя функціи X, Y, Z отъ одной перемѣнной, чтобы $X^n+Y^n+Z^n=0$, при $n>2$. Коркинъ даетъ свое доказательство, болѣе простое, чѣмъ доказательство R. Liouville.

Замѣтка въ одну страницу, подъ названіемъ „объ одномъ опредѣленномъ интегралѣ", помѣщенная въ X томѣ Математическаго Сборника, заключаетъ въ себѣ указаніе одного интереснаго тождества, изъ котораго вытекаетъ извѣстная теорема Чебышева объ интегралѣ отъ произведенія двухъ монотонныхъ функцій.

Въ статьѣ № 18 Коркинъ сообщаетъ письмомъ на имя Эрмита то же самое тождество.

Статья № 12, извлеченіе изъ письма Коркина къ Эрмиту, заключаетъ въ себѣ разысканіе общаго выраженія нѣкоторой функціи, опредѣляемой для всѣхъ цѣлыхъ положительныхъ значеній перемѣннаго, какъ результатъ повторенія данной операціи надъ данною функціею. Эта статья находится въ связи съ работою профессора В. П. Ермакова о сходимости рядовъ.

Въ статьѣ № 13 Коркинъ даетъ остроумное доказательство извѣстной теоремы Гаусса о кривизнѣ поверхностей (выраженіе этой кривизны черезъ коеффиціенты въ выраженіи линейнаго элемента поверхности) при помощи преобразованія перемѣнныхъ.

Работы №№ 15 и 16 относятся къ послѣднему періоду ученой дѣятельности Коркина и къ отдѣлу математики, по которому раньше онъ ничего не писалъ, а именно къ интегрированію обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій.

Въ предисловіи къ первой изъ этихъ работъ Коркинъ высказываетъ свой взглядъ на направленіе работъ современныхъ математиковъ въ этой области. Онъ говоритъ: „Dans ces derniers temps on a essayé d'appliquer aux équations différentielles la théorie des fonctions d'une variable complexe, résultant elle même de l'étude des fonctions algébriques et leurs intégrales. Mais, avec la grande généralité de ses théorèmes, elle a aussi une imperfection essentielle: à savoir le défaut des méthodes pour le calcul des fonctions inconnues. Or, ce calcul est la véritable intégration d'une équation, et le but définitif de son analyse. Pour avancer dans l'intégration des équations différentielles la seule théorie des fonction ne suffira donc pas; à cet effet il faut y associer des considérations, qui lui sont complètement étrangères.

Je pense donc, qu'ayant pour but le calcul des inconnues nous n'avons jusqu'à présent d'autre moyen que de suivre la marche des anciens géomètres, c'est à dire, en nous bornant à l'étude attentive des équations particulières, rechercher de nouvelles équations intégrables; et cela d'autant plus, que des cas particuliers très simples, traités convenablement, peuvent conduire à des conclusions très générales“.

Самыми плодотворными методами въ данной области Коркинъ считалъ методы великаго математика Эйлера.

Работы Коркина представляютъ собою развитіе этихъ методъ. Главный вопросъ, который онъ здѣсь ставитъ и рѣшаетъ, состоитъ въ разысканіи всѣхъ уравненій вида

$$M(y)\,dx + N(y)\,dy = O$$

гдѣ $M(y)$ и $N(y)$ цѣлыя функціи отъ y, коеффиціенты которыхъ какія угодно функціи отъ x, имѣющихъ общій интегралъ слѣдующей формы:

$$(y-v_1)^{m_1}(y-v_2)^{m_2}\ldots.(y-v_n)^{m_n}=C$$

гдѣ $m_1, m_2, \ldots. m_n$ данныя постоянныя, C произвольная постоянная, и $v_1, v_2, \ldots. v_n$ различныя между собою функціи отъ x. Полиномы $M(y)$ и $N(y)$ подлежатъ нѣкоторымъ ограниченіямъ, налагаемымъ на нихъ съ цѣлью сохранить аналогію изслѣдуемаго уравненія съ однимъ частнымъ случаемъ, разсмотрѣннымъ Эйлеромъ.

Въ обширной работѣ № 16, публикованной въ видѣ отдѣльной брошюры на французскомъ языкѣ, и переведенной затѣмъ на русскій для помѣщенія въ Московскомъ математическомъ сборникѣ, Коркинъ занимается вопросами того-же рода, какъ и въ предыдущей, но болѣе общаго характера.

Замѣтка № 17 есть статья полемическаго характера, въ которой авторъ опровергаетъ попытку профессора В. П. Ермакова упростить изложеніе результатовъ, полученныхъ Коркинымъ въ работѣ № 16.

Первая изъ статей, помѣченныхъ № 19 есть предварительное сообщеніе о работѣ Коркина, напечатанной потомъ въ 48 томѣ Mathematische Annalen, подъ тѣмъ же заглавіемъ.

Эта статья вызвала замѣчанія г. Painlevé, напечатанныя въ томъ же CXII томѣ Comptes rendus. Вторая статья (№ 19) есть отвѣтъ на статью г. Painlevé, въ которомъ Коркинъ опровергаетъ утвержденіе автора, будто результаты Коркина вытекаютъ изъ работъ его, Painlevé.

Посмертный мемуаръ А. Н. Коркина, заглавіе котораго приведено выше заключаетъ въ себѣ: 1) обобщенія теоремъ Чебышева объ опредѣленіи первообразныхъ корней простыхъ чиселъ извѣстной формы; 2) рядъ предложеній, относящихся къ двучленнымъ сравненіямъ съ простымъ модулемъ и 3) обширную таблицу, заключающую въ себѣ первообразные корни для модулей, не превосходящихъ 4000, и нѣкоторыя другія числа, названныя Коркинымъ *характерами*, служащія для рѣшенія двучленныхъ сравненій.

Эта работа будетъ напечатана на французскомъ языкѣ въ собраніи сочиненій А. Н. Коркина и въ переводѣ на русскій языкъ въ Московскомъ Математическомъ Сборникѣ.

Въ черновыхъ тетрадяхъ А. Н. Коркина находятся еще различныя замѣтки по разнымъ вопросамъ математики; къ сожалѣнію, не всѣ математическія его рукописи находятся въ настоящее время въ нашемъ распоряженіи и мы не можемъ теперь дать отчетъ о томъ, что въ нихъ заключается. Ученая дѣятельность А. Н. Коркина не прекращалась до самыхъ послѣднихъ лѣтъ его жизни. Физическія его силы были уже сильно подорваны болѣзнями и преклоннымъ возрастомъ, но умственныя силы и свѣжую память онъ сохранилъ до самаго конца.

3. Преподавательская дѣятельность Коркина продолжалась почти 50 лѣтъ, съ перерывомъ въ теченіе двухъ лѣтъ заграничной командировки. Лекціи Коркинъ читалъ чрезвычайно просто и ясно; не понимать его могли только тѣ, кто вообще ничего понимать не въ состояніи. Теоремы онъ формулировалъ всегда очень точно, каждый теоретическій выводъ, каждую методу пояснялъ примѣрами, подробно продѣлывалъ всѣ выкладки, и послѣ каждой почти лекціи диктовалъ примѣры для упражненія, давая студентамъ матеріалъ для домашней работы. Записывать за нимъ было очень легко, а потому, въ литографированныхъ лекціяхъ по его предмету никакой надобности не было. Въ первые годы своей преподавательской дѣятельности Коркинъ читалъ лекціи свободно, предоставляя студентамъ самимъ редактировать записанное на лекціи, но затѣмъ, уже много лѣтъ тому назадъ, пришелъ къ заключенію, что лекціи слѣдуетъ диктовать, такъ-какъ удостовѣрился, что редакція, сдѣланная самими слушателями, требуетъ весьма многихъ исправленій.

Начавъ съ диктовки главныхъ результатовъ и теоремъ, доказываемыхъ на лекціи, Коркинъ распространилъ потомъ ту-же манеру на изложеніе самаго хода доказательствъ. Весьма удобная для средняго слушателя, эта манера была нѣсколько утомительна для хорошаго, мысль котораго работала быстрѣе, чѣмъ рука, записывающая слова диктующаго профессора. Нѣкоторые изъ слушателей Коркина разсказывали мнѣ, что въ послѣднее время, диктуя лекцію, онъ часто заглядывалъ въ тетради записывавшихъ и диктовалъ даже знаки препинанія. Въ этомъ была, несомнѣнно, нѣкоторая доля утрировки, объясняемая недовѣріемъ къ умѣнію слушателей правильно и грамотно изложить слышанное, недовѣріе, имѣвшее, къ сожалѣнію, нѣкоторое основаніе.

Въ изложеніе читаемыхъ имъ предметовъ, особенно по интегрированію уравненій, которое, онъ читалъ слишкомъ 30 лѣтъ, Коркинъ влагалъ значительную долю творчества. Всякій, кто знакомъ съ лекціями Коркина по интегрированію уравненій, знаетъ, что ни въ какомъ изъ печатныхъ курсовъ по этому предмету, не только на русскомъ, но и на иностранныхъ языкахъ, нельзя найти того изложенія, котораго держался Коркинъ. Въ особенности оригинально и превосходно обработана у него статья о совокупныхъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ и уравненіяхъ въ частныхъ производныхъ.

Особенною интенсивностью отличалась преподавательская дѣятельность Коркина въ періодъ времени отъ начала 70-хъ до конца 80-хъ годовъ. Кромѣ обязательныхъ лекцій въ университетѣ и морской академіи, онъ читалъ необязательныя лекціи въ университетѣ и, избранному кругу небольшого числа слушателей, у себя на дому. Предметомъ этихъ лекцій было интегрированіе уравненій въ частныхъ производныхъ, предметъ, который онъ, вмѣстѣ съ теоріей чиселъ, избралъ для собственныхъ ученыхъ трудовъ. У нѣкоторыхъ изъ его слушателей сохранились записки по домашнимъ лекціямъ Коркина, представляющимъ образцы ученаго, оригинальнаго и яснаго изложенія одного изъ труднѣйшихъ отдѣловъ Анализа.

Не однѣми лекціями ограничивалась преподавательская дѣятельность Коркина. Черпая изъ своихъ обширныхъ познаній по различнымъ отдѣламъ математики, онъ имѣлъ въ запасѣ различныя, иногда очень трудныя задачи, которыя и предлагалъ для рѣшенія лучшимъ изъ своихъ учениковъ, давая имъ такимъ образомъ возможность испытать свои силы и, въ случаѣ успѣха, почерпнуть запасъ энергіи для дальнѣйшихъ научныхъ занятій [1]). Вообще, отношеніе Коркина къ его ученикамъ, или, какъ онъ всегда ихъ называлъ, „слушателямъ", исполнено было самаго большого участія. Какъ только онъ замѣчалъ въ комъ нибудь изъ своихъ учениковъ дѣйствительныя способности къ научнымъ занятіямъ, онъ всячески его поощрялъ, и, сближаясь съ нимъ на научномъ поприщѣ, нерѣдко сближался съ нимъ и какъ человѣкъ.

Въ послѣдніе годы, преклонный возрастъ и подорванное здоровье, заставили Коркина значительно сократить преподавательскую дѣятельность. Лекціи въ морской академіи онъ совсѣмъ прекратилъ въ 1900 г., а въ университетѣ оставилъ за собою всего четыре лекціи въ недѣлю. Но „Коркинскія субботы" остались до самаго послѣдняго времени открытыми для всѣхъ, кому нужно было съ нимъ бесѣдовать по математикѣ и получить отъ него ученый совѣтъ.

4. Познанія Коркина въ математической литературѣ, особенно классической, были глубоки и обширны. Безсмертныя творенія Гаусса, Эйлера, Лагранжа, Лежандра, Лапласа, Монжа, Фурье, Пуассона, Якоби, Абеля, Дирихле были имъ изучены съ тою основательностью, которую онъ вкладывалъ во всякое дѣло, за которое брался, и, благодаря необыкновенно развитой памяти, сдѣлались прочнымъ достояніемъ его ума.

---

[1]) Нѣкоторыя изъ такихъ задачъ помѣщены въ „Intermédiaire des mathématiciens" T. I. 1894 г.

Работы Бура, О. Бонне, Ліувилля и другихъ французскихъ математиковъ первой половины прошлаго столѣтія также хорошо были ему извѣстны. Къ направленію, принятому математикою во вторую половину XIX столѣтія, въ Германіи и отчасти во Франціи, подъ вліяніемъ Вейерштрасса и Римана, Коркинъ относился весьма отрицательно и работами математиковъ этой школы не интересовался. Склонный нѣсколько къ преувеличеніямъ, въ ту и другую сторону, при оцѣнкѣ ученыхъ работъ, онъ называлъ вышеупомянутое направленіе „декаденствомъ". Изъ современныхъ ему математиковъ онъ высоко ставилъ Эрмита, работы его изучалъ, и мемуаръ Эрмита „Sur la fonction exponentielle". заключающій въ себѣ доказательство трансцендентности числа *e* (основанія натуральныхъ логариѳмовъ) называлъ классическимъ. Математическая эрудиція Коркина обнаруживалась весьма ясно на диспутахъ; посѣтители математическихъ диспутовъ помнятъ, что въ качествѣ офиціальнаго или неофиціальнаго оппонента, Коркинъ высказывалъ, по поводу защищаемыхъ диспутантами работъ, всегда очень содержательныя и цѣнныя и почти всегда неотразимыя замѣчанія. Къ самымъ публичнымъ диспутамъ, впрочемъ, Коркинъ относился довольно отрицательно, считая ихъ простою формальностью.

Изъ другихъ областей знанія, не составлявшихъ предмета его спеціальности, Коркинъ всегда интересовался астрономіей и обладалъ въ ней солидными познаніями, не говоря уже объ аналитической механикѣ, которую онъ разсматривалъ, какъ часть математики, и зналъ великолѣпно. Въ астрономіи его привлекала не одна теоретическая сторона, но и практическая: онъ любилъ наблюдать и посвящалъ иногда часы досуга астрономическимъ наблюденіямъ.

Французскимъ языкомъ Коркинъ владѣлъ превосходно и на этомъ языкѣ написалъ большую часть своихъ работъ. На нѣмецкомъ читалъ совершенно свободно, могъ и объясняться безъ затрудненія, но предпочиталъ пользоваться, гдѣ только возможно, французскимъ. Латинскимъ языкомъ владѣлъ столь хорошо, что не только свободно читалъ математическія произведенія, написанныя на этомъ языкѣ ученыхъ, но даже такія произведенія, какъ Оды Горація. Лучшія произведенія древнихъ писателей, римскихъ и греческихъ, онъ почти всѣ прочиталъ въ переводѣ на французскій языкъ, и прочиталъ внимательно, т. е. такъ, какъ нужно читать все, что желаютъ удержать въ памяти. Конечно, это условіе необходимое, но не достаточное: нужно, чтобы и память была развита, а у Коркина она была развита изумительно. Онъ не только помнилъ все, что было имъ „внимательно прочитано", но отказывался даже вѣрить другимъ, когда они ему говорили, что забыли то, что ими было нѣкогда хорошо изучено. „Вѣрно худо и невнимательно читали, а то бы не забыли, это невозможно“, говорилъ онъ въ этихъ случаяхъ.

Благодаря знакомству съ древними авторами Коркинъ зналъ и исторію грековъ и римлянъ; я не могу судить, насколько это знаніе было многосторонне, но знаю, что съ фактической стороны и здѣсь у него были незаурядныя познанія. Въ новой исторіи онъ хорошо зналъ исторію французской революціи 1789 года, о которой много читалъ.

Медицинскія книги онъ тоже могъ читать, хорошо изучивъ главныя основы анатоміи и физіологіи человѣка. Его познанія въ медицинѣ сослужили ему вѣрную, но печальную службу: благодаря имъ онъ ясно отдалъ себѣ отчетъ въ неизлѣчимости своей послѣдней болѣзни (нефритъ) и сказалъ своимъ близкимъ о неизбѣжности смертельнаго ея исхода.

Образъ жизни А. Н. Коркинъ велъ самый скромный. Обстановка его квартиры была самая простая; никакихъ предметовъ роскоши у него не было. Единственною цѣнною вещью его была, хотя не обширная, но избранная библіотека, заключавшая въ себѣ нѣкоторые весьма рѣдкіе экземпляры, какъ напримѣръ, полное собраніе мемуаровъ Пуассона, Application de l'Analyse à la Géométrie Монжа и др.

За границу, сколько мнѣ извѣстно, ѣздилъ одинъ или два раза (не считая двухъ лѣтъ командировки въ началѣ своей дѣятельности) и жилъ въ маленькой Тюрингенской деревушкѣ. Послѣдніе 10—15 лѣтъ каникулярное время проводилъ въ Гатчинѣ, нанимая комнату въ гостинницѣ. Тамъ онъ и захворалъ нынѣшнимъ лѣтомъ, въ іюлѣ вернулся на городскую квартиру, слегъ въ постель и скончался 19-го августа 1908 г. отъ нефрита.

К. Поссе.

Общія изслѣдованія, относящіяся къ интегрированію въ конечномъ видѣ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка.

Статья II.

Д. Мордухай-Болтовского.

---

§ 1. Настоящая работа представляетъ продолженіе другой нашей работы, помѣщенной въ „Сообщеніяхъ Харьковскаго Математическаго Общества“ подъ тѣмъ же названіемъ, въ которой нами рѣшался вопросъ *о формѣ общаго интеграла алгебраическаго дифференціальнаго уравненія перваго порядка, выражаемаго въ конечномъ видѣ*

Мы намѣрены теперь показать, какъ можно, пользуясь полученными въ упомянутой статьѣ результатами, рѣшить другую задачу, относящуюся къ дифференціальнымъ уравненіямъ перваго порядка, задачу о розысканіи формы *общаго рѣшенія y уравненія*

$$f(x,\ y,\ y')=0\,, \tag{1}$$

выражаемаго въ конечномъ видѣ.

Въ отличіе отъ первой статьи, гдѣ мы уравненіе (1) предполагали неприводимымъ въ области раціональныхъ функцій $(x\,,\ y)$ т. е. f не разложимымъ на множители съ раціональными относительно $(x\,,\ y)$ коэффиціентами, мы будемъ теперь предполагать f раціональной относительно y, но не x и неприводимость уравненія (1) понимать въ смыслѣ *неразложимости f на множители, раціональные относительно* $(y\,,\ y')$. Понимая подъ f раціональную функцію отъ величинъ, заключенныхъ въ скобки, уравненіе (1) можемъ писать въ видѣ:

$$f(x\,,\ \xi\,,\ y\,,\ y')=0\,, \tag{2}$$

гдѣ ξ опредѣляется алгебраическимъ уравненіемъ:

$$\pi(x\,,\ \xi)=0\,, \tag{3}$$

и предполагать уравненіе (2) неприводимымъ въ области раціональныхъ функцій $(x\,,\ \xi\,,\ y)$.

Получаемая нами формула для общаго рѣшенія уравненія (2), выражаемаго въ конечномъ видѣ имѣетъ тоже значеніе для интегрированія въ конечномъ видѣ алгебраическихъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, какое имѣетъ при интегрированіи въ конечномъ видѣ алгебраическихъ функцій упомянутая въ первой статьѣ формула Абеля—Льювиля.

Мы получаемъ слѣдующій результатъ, представляющій другой видъ обобщенія теоремы Фукса [1]).

Если общее рѣшеніе неприводимаго алгебраическаго дифференціальнаго уравненія перваго порядка

$$f(x, \xi, y, y') = 0, \tag{2}$$

выражается въ конечномъ видѣ, то y получается исключеніемъ $\triangle$ изъ одной изъ слѣдующихъ системъ.

I система

$$f(x, \xi, y, \triangle) = 0 \tag{4}$$

$$\Phi(x, \xi, y, \triangle) = C. \tag{5}$$

Рѣшеніе алгебраическое.

II система

$$f(x, \xi, y, \triangle) = 0 \tag{4}$$

$$\Phi(x, \xi, y, \triangle)\sqrt[n]{G(x, \xi)} = C + \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \lg \prod_{i=0}^{k=n-1} \psi_k^{\alpha^{-i}}\left[x, \xi, \alpha^i \sqrt[n]{G(x, \xi)}\right] \tag{6}$$

Рѣшеніе логариѳмическаго типа.

III система

$$f(x, \xi, y, \triangle) = 0 \tag{4}$$

$$\Phi(x, \xi, y, \triangle)\sqrt[n]{G(x, \xi)} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{i=n-1} \alpha^{-i} C^{\alpha i} e^{\omega(x, \xi, \alpha^i \sqrt[n]{G(x, \xi)})} \prod\limits_{k=1}^{k=n-1} \psi_k^{\lambda k}\left[x, \xi, \alpha^i \sqrt[n]{G(x, \xi)}\right]}{n} \tag{7}$$

Рѣшеніе показательно-степеннаго типа.

Во всѣхъ этихъ системахъ:

Φ раціональная функція $(x, \xi, y, \triangle)$,

ψ_k. ω раціональныя функціи $[x, \xi, \sqrt[n]{G(x, \xi)}]$

$G(x, \xi)$ раціональная функція (x, ξ),

λ_k постоянная, C произвольно-постоянное,

n цѣлое число, α первообразный корень двучленнаго уравненія $\alpha^n = 1$.

Такимъ образомъ обѣ наши статьи открываютъ большое поле изслѣдованій, относящихся къ интегрированію въ конечномъ видѣ уравненій перваго порядка,—онѣ даютъ

---

1) *Fuchs.* Sitzungsber. der Berliner Akademie, 11 Dec. 1884. S. 1171.

общія основныя формы для:

1) интеграла, выражаемаго въ конечномъ видѣ (1 статья);
2) рѣшенія, выражаемаго въ конечномъ видѣ (2 статья).

I. Задача объ *интегрированіи* въ конечномъ видѣ дифференціальнаго уравненія перваго порядка приводится къ двумъ задачамъ.

1) Разысканіе частнаго интеграла вида

$$\omega = H_0(x,\ y,\ t) + \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \lg H_k(x,\ y,\ t)$$

уравненія въ частныхъ производныхъ:

$$\varphi(x,\ y,\ t)\frac{\partial\omega}{\partial x} + \psi(x,\ y,\ t)\frac{\partial\omega}{\partial y} = \chi(x,\ y,\ t),$$

гдѣ t опредѣляется въ $(x,\ y)$ алгебраическимъ уравненіемъ.

2) Задача объ интегрированіи въ конечномъ видѣ алгебраической функціи вида:

$$\sqrt[n]{G(x,\ y,\ t)}\,[M(x,\ y,\ t)\,dx + N(x,\ y,\ t)\,dy]$$

или трансцендентной вида:

$$e^{\Theta(x,\ y,\ t)}\,[H_0(x,\ u,\ t)]^{\lambda_0}[H_1(x,\ y,\ t)]^{\lambda_1}\ldots[H_m(x,\ u,\ t)]^{\lambda_m}$$
$$[M(x,\ y,\ t)\,dx + N(x,\ y,\ t)\,dy]$$

H_0, H_k, φ, ψ, G, M, N, Θ означаютъ раціональныя функціи $(x,\ y,\ t)$.

II. Задача о *разысканіи рѣшенія* въ конечномъ видѣ, т. е. объ опредѣленіи y въ конечномъ видѣ сводится тоже къ двумъ задачамъ:

1) Разысканіе алгебраической подстановки

$$\gamma = \Phi(x,\ \xi,\ y,\ \triangle)\sqrt[n]{G(x,\ \xi)}$$

или трансцендентной:

$$\gamma = \log \prod_{j=0}^{j=n-1} \Phi^{\alpha^{-j}}(x,\ \xi,\ y,\ \triangle,\ \alpha^j\sqrt[n]{G(x,\ \xi)})$$

при помощи которыхъ уравненіе (2) приводится къ уравненію

$$\frac{d\gamma}{dx} = \varphi(x,\ \xi)\sqrt[n]{G(x,\ \xi)}\ ,$$

гдѣ φ, G раціональныя функціи $(x,\ \xi)$.

С. М. О.

2) Опредѣленіе въ конечномъ видѣ Абелева интеграла

$$\int \varphi(x, \xi) \sqrt[n]{G(x, \xi)}\, d\xi$$

т. е. задача интегрированія въ конечномъ видѣ, которой посвящены извѣстныя изслѣдованія Абеля, Чебышева и т. д.

Всѣ эти задачи требуютъ особаго изслѣдованія и мы обращаемъ на нихъ вниманіе математиковъ, заинтересованныхъ этой областью изслѣдованія. Для объизслѣдованія этихъ вопросовъ не достаточно силъ одного лица.

§ 2. Принимая Льювиллевскую классификацію трансцендентныхъ въ томъ видѣ, какъ она изложена въ началѣ нашей первой статьи, будемъ имѣть при условіи, что рѣшеніе y выражается въ конечномъ видѣ трансцендентной q-го класса

$$y = \pi(x, \theta_1, \theta_2 \ldots \theta_p, \eta_1, \eta_2 \ldots \eta_q) \tag{8}$$

гдѣ π алгебраическая функція основныхъ трансцендентныхъ q-го класса

$$\theta_i = \lg \alpha_i(x)$$

$$\eta_i = e^{\beta_i(x)} \text{ или } [\gamma_i(x)]^{\lambda_i}$$

(гдѣ $\alpha_i(x)$, $\beta_i(x)$, $\gamma_i(x)$ трансцендентныя $\overline{q-1}$-го класса) и трансцендентныхъ нисшихъ классовъ, причемъ, если π дано въ приготовленномъ видѣ, между θ, η и нисшими трансцендентными, входящими въ π, не существуетъ алгебраическихъ зависимостей

$$N(x, \theta_1, \theta_2 \ldots \theta_p, \eta_1, \eta_2 \ldots \eta_q) = 0 \tag{9}$$

т. е. всякое такое равенство удовлетворяется тождественно при всякихъ значеніяхъ θ_i, η_i.

Легко видѣть, что уравненіе (2) можетъ быть еще представлено въ слѣдующемъ видѣ:

$$M(x, \xi, y, t)\, dx + N(x, \xi, y, t)\, dy = 0 \tag{10}$$

гдѣ M, N раціональныя функціи отъ (x, ξ, y, t), t опредѣляется алгебраическимъ уравненіемъ:

$$F(x, \xi, y, t) = 0 \tag{11}$$

неприводимымъ въ области раціональныхъ функцій отъ y и на ряду съ рѣшеніемъ (11) уравненіе (2) удовлетворяется еще рѣшеніемъ

$$y = \pi(x, \theta_1 + \mu_1, \theta_2 + \mu_2 \ldots \theta_p + \mu_p, v_1 \eta_1, v_2 \eta_2 \ldots v_q \eta_q) \tag{12}$$

гдѣ μ_i, v_i произвольныя постоянныя.

Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$y = \pi(x, \theta), \tag{13}$$

гдѣ π алгебраическая функція трансцендентной

$$\theta = \lg \alpha(x),$$

и другихъ трансцендентныхъ будемъ имѣть

$$y' = \frac{\partial \pi(x, \theta)}{\partial x} + \frac{\partial \pi(x, \theta)}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dx} = \frac{\partial \pi}{\partial x} + \frac{\partial \pi}{\partial \theta} \frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)} \tag{14}$$

$$y' = \pi_1(x, \theta) \tag{13'}$$

гдѣ π_1 алгебраическая функція θ и другихъ трансцендентныхъ q-го класса и трансцендентныхъ нисшихъ классовъ. Въ самомъ дѣлѣ $y' = \dfrac{d\pi}{dx}$ выражается алгебраически черезъ основныя трансцендентныя q-го класса $\theta_1, \theta_2 \ldots \eta_1, \eta_2 \ldots$ ихъ производныя $\dfrac{d\theta_1}{dx}, \dfrac{d\theta_2}{dx} \ldots \dfrac{d\eta_1}{dx}, \dfrac{d\eta_2}{dx} \ldots$ и трансцендентныя нисшихъ классовъ. Но производныя $\dfrac{d\theta_1}{dx}, \dfrac{d\theta_2}{dx} \ldots \dfrac{d\eta_1}{dx}, \dfrac{d\eta_2}{dx} \ldots$ на основаніи выраженій θ_i, η_i выражаются алгебраически въ $\theta_1, \theta_2 \ldots \eta_1, \eta_2 \ldots$ и трансцендентныхъ нисшихъ классовъ и ихъ производныхъ. Производныя же трансцендентныхъ нисшихъ классовъ легко выразимы алгебраически черезъ эти трансцендентныя и трансцендентныя еще болѣе нисшихъ классовъ.

Кромѣ того

$$M(x, y, t) = P(x, \theta)$$
$$N(x, y, t) = Q(x, \theta),$$

гдѣ P, Q алгебраическія функціи θ и другихъ трансцендентныхъ, входящихъ въ π, откуда на основаніи уравненія (10)

$$P(x, \theta) + Q(x, \theta)\pi_1(x, \theta) = 0 \tag{15}$$

Это равенство должно быть тождествомъ т. е. должно удовлетворяться по замѣнѣ θ какой угодно функціей, въ частности $\theta + \mu$, такъ что

$$P(x, \theta + \mu) + Q(x, \theta + \mu)\, \pi_1(x, \theta + \mu) = 0. \tag{16}$$

А, такъ какъ

$$P(x, \theta+\mu) = M[x, \xi, \pi(x, \theta+\mu), S(x, \theta+\mu)]$$

$$Q(x, \theta+\mu) = N[x, \xi, \pi(x, \theta+\mu), S(x, \theta+\mu)],$$

если

$$t = S(x, \theta),$$

а на основанiи уравненiй (14) (13')

$$\pi_1(x, \theta+\mu) = \frac{d\pi(x, \theta+\mu)}{dx},$$

то

$$M[x, \xi, \pi(x, \theta+\mu), S(x, \theta+\mu)] +$$

$$+ N[x, \xi, \pi(x, \theta+\mu), S(x, \theta+\mu)] \frac{d\pi(x, \theta+\mu)}{dx} = 0$$

т. е.

$$y_1 = \pi(x, \theta+\mu)$$

тоже рѣшенiе уравненiя (10) или (2).

Такимъ же образомъ, полагая

$$y = \pi(x, \eta) \tag{17}$$

$$\eta = e^{\beta(x)} \quad \text{или} \quad [\gamma(x)]^\lambda$$

имѣемъ

$$y' = \frac{\partial\pi}{\partial x} + \frac{\partial\pi}{\partial\eta}\frac{d\eta}{dx} = \frac{\partial\pi}{dx} + \frac{\partial\pi}{\partial\eta}\eta\delta(x) = \pi_1(x, \eta) \tag{18}$$

гдѣ

$$\delta(x) = \beta'(x) \quad \text{или} \quad \frac{\lambda\gamma'(x)}{\gamma(x)} \tag{19}$$

Равенство

$$P(x, \eta) + Q(x, \eta)\pi_1(x, \eta) = 0 \tag{20}$$

удовлетворяется по замѣнѣ η на $\nu\eta$, гдѣ ν постоянное, откуда

$$P(x, \nu\eta) + \psi(x, \nu\eta)\pi_1(x, \nu\eta) = 0 \tag{21}$$

а, такъ какъ

$$P(x, \nu\eta) = M[x, \xi, \pi(x, \nu\eta), S(x, \nu\eta)]$$

$$\varphi(x, \nu\eta) = N[x, \xi, \pi(x, \nu\eta), S(x, \nu\eta)],$$

если

$$t = S(x, \eta)$$

а, на основанiи (18) и (19) также

$$\pi_1(x, \nu\eta) = \frac{d\pi(x, \nu\eta)}{dx},$$

то

$$M[x,\ \xi.\ \pi(x,\ \nu\eta),\ S(x,\ \nu\eta)] +$$
$$N[x,\ \xi,\ \pi(x,\ \nu\eta),\ S(x,\ \nu\eta)]\,\frac{d\pi(x,\ \nu\eta)}{dx} = 0$$

т. е.

$$y_1 = \pi(x,\ \nu\eta)$$

тоже рѣшенія уравненія (10) или (2).

§ 3 [1]). Функція y, опредѣляемая уравненіемъ:

$$y = \pi(x,\ \theta_1 + \mu_1,\ \theta_2 + \mu_2 \ldots \theta_p + \mu_p,\ \nu_1\eta_1,\ \nu_2\eta_2 \ldots \nu_q\eta_q) \qquad (12)$$

только тогда можетъ быть общимъ рѣшеніемъ дифференціальнаго уравненія (10), если всѣ произвольныя постоянныя сведутся къ одной т. е. мы должны имѣть:

$$\pi^{(1)} = \pi(x,\ \theta_1 + \mu_1,\ \theta_2 + \mu_2 \ldots \theta_p + \mu_p,\ \nu_1\eta_1,\ \nu_2\eta_2 \ldots \nu_q\eta_q) = \Phi(\alpha) \qquad (22)$$

гдѣ Φ функція отъ произвольной постоянной α, къ которой сводится всѣ произвольныя постоянныя μ_i и ν_i.

Дифференцируя по μ_i и μ_k, имѣемъ

$$\frac{\partial\pi^{(1)}}{\partial\mu_i} = \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\,\frac{\partial\alpha}{\partial\mu_i}$$

$$\frac{\partial\pi^{(1)}}{\partial\mu_k} = \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\,\frac{\partial\alpha}{\partial\mu_k}$$

Исключая отсюда $\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}$, получаемъ

$$\frac{\partial\pi^{(1)}}{\partial\mu_i} + A_{ik}\,\frac{\partial\pi^{(1)}}{\partial\mu_k} = 0\,, \qquad (23)$$

гдѣ A_{ik} постоянныя.

Такимъ же образомъ имѣемъ

$$\frac{\partial\pi^{(1)}}{\partial\nu_i} + B_{ik}\,\frac{\partial\pi^{(1)}}{\partial\mu_k} = 0 \qquad (24)$$

$$\frac{\partial\pi^{(1)}}{\partial\nu_i} + C_{ik}\,\frac{\partial\pi^{(1)}}{\partial\nu_k} = 0. \qquad (25)$$

---

[1]) Метода, которую мы примѣняемъ въ §§ 3, 4, основывается на идеяхъ В. П. Максимовича, положенныхъ въ основаніе его изслѣдованій, относящихся къ интегрированію дифференціальныхъ уравненій 1-го порядка въ квадратурахъ: *В. П. Максимовичъ*. Разысканіе общихъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, интегрирующихся въ конечномъ видѣ. Казань 1885 г.

Замѣчая теперь, что

$$\frac{\partial \pi^{(1)}}{\partial \mu_i} = \frac{\partial \pi^{(1)}}{\partial \theta_i} = \frac{\partial \pi^{(1)}}{\partial (\theta_i + \mu_i)}$$

$$\frac{1}{\eta_i} \frac{\partial \pi^{(1)}}{\partial v_i} = \frac{1}{v_i} \frac{\partial \pi^{(1)}}{\partial \eta_i} = \frac{\partial \pi^{(1)}}{\partial (v_i \eta_i)}$$

будемъ имѣть

$$\frac{\partial \pi^{(1)}}{\partial \theta_i} + A_{ik} \frac{\partial \pi^{(1)}}{\partial \theta_k} = 0 \qquad (26^{(1)})$$

$$\eta_i \frac{\partial \pi^{(1)}}{\partial \eta_i} + B_{ik}^{(1)} \frac{\partial \pi^{(1)}}{\partial \theta_k} = 0 \qquad (27^{(1)})$$

$$B_{ik}^{(1)} = v_i B_{ik}$$

$$\eta_i \frac{\partial \pi^{(1)}}{\partial \eta_i} + C_{ik}^{(1)} \frac{\partial \pi^{(1)}}{\partial \eta_k} = 0 \qquad (28^{(1)})$$

$$C_{ik}^{(1)} = v_i C_{ik}$$

а, полагая при этомъ

$$\mu_i = 0\,, \quad v_k = 1\,, \quad \pi^{(1)} = \pi$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \theta_i} + A_{ik} \frac{\partial \pi}{\partial \theta_k} = 0 \qquad (26)$$

$$\eta_i \frac{\partial \pi}{\partial \eta_i} + B_{ik} \frac{\partial \pi}{\partial \theta_k} = 0 \qquad (27)$$

$$\eta_i \frac{\partial \pi}{\partial \eta_i} + C_{ik}\, \eta_k \frac{\partial \pi}{\partial \eta_k} = 0 \qquad (28)$$

Эти послѣднія уравненія представляютъ тождества относительно θ_i, η_i, такъ какъ въ противномъ случаѣ между θ_i, η_i существовали бы алгебраическія соотношенія типа (9). Отсюда слѣдуетъ, что при всякихъ значеніяхъ θ_i и η_i

$$d\pi = \frac{\partial \pi}{\partial \theta_k} \left[\sum_{i=1}^{i=p} A_{ik}\, d\theta_i + \sum_{i=1}^{i=q} B_{ik}\, \eta_i^{-1}\, d\eta_i \right] + \frac{\partial \pi}{\partial x}\, dx$$

или

$$d\pi = G\, d\varepsilon + \frac{\partial \pi}{\partial x}\, dx \qquad (30)$$

гдѣ

$$G = \frac{\partial \pi}{\partial \theta_k}$$

ε имѣетъ одно изъ слѣдующихъ значеній

(I) $$\varepsilon = \zeta\,,$$

если въ π не входитъ η_i

(II) $$\varepsilon = \log \vartheta\,,$$

если въ π не входятъ θ_i,

(III) $$\varepsilon = \zeta + \log \vartheta\,,$$

если въ y не входятъ какъ η_i, такъ и θ_i

$$\vartheta = C\eta_1^{B_{1k}}\eta_2^{B_{2k}}\ldots\eta_q^{B_{qk}} \tag{31}$$

$$\zeta = \sum_{i=1}^{i=p} A_{ik}\,\theta_i + C \tag{32}$$

гдѣ C не зависятъ отъ η_i и θ_i т. е. суть трансцендентныя нисшаго класса.

Выражая одну изъ величинъ θ_i, η_i напримѣръ θ_q (или η_q) черезъ остальныя и ε и обозначая получаемое такимъ образомъ выраженіе y черезъ $\pi^{(\varepsilon)}$ будемъ имѣть:

$$d\pi = \frac{\partial\pi^{(\varepsilon)}}{\partial\varepsilon}\,d\varepsilon + \sum_{i=1}^{i=p-1}\frac{\partial\pi^{(\varepsilon)}}{\partial\theta_i}\,d\theta_i + \sum_{i=1}^{i=q-1}\frac{\partial\pi^{(\varepsilon)}}{\partial\eta_i}\,d\eta_i + \frac{\partial\pi^{(\varepsilon)}}{\partial\varkappa}\,d\varkappa + \frac{\partial\pi^{(\varepsilon)}}{\partial x}\,dx\,,$$

гдѣ $\varkappa$ равно θ_p или η_q.

Это выраженіе должно равняться при всякихъ значеніяхъ θ_i, η_i (или что тоже, при всякихъ значеніяхъ ε, $\theta_1, \theta_2\ldots\theta_{q-1}$, $\eta_1, \eta_2\ldots\eta_{q-1}$, $\varkappa$) выраженію (30), такъ что

$$\frac{\partial\pi^{(\varepsilon)}}{\partial\varepsilon}\,d\varepsilon + \sum_{i=1}^{i=p-1}\frac{\partial\pi^{(\varepsilon)}}{\partial\theta_i}\,d\theta_i + \sum_{i=1}^{i=q-1}\frac{\partial\pi^{(\varepsilon)}}{\partial\eta_i}\,d\eta_i + \frac{\partial\pi^{(\varepsilon)}}{\partial\varkappa}\,d\varkappa + \frac{\partial\pi^{(\varepsilon)}}{\partial x}\,dx = G\,d\varepsilon + \frac{\partial\pi}{\partial x}\,dx$$

$\pi^{(\varepsilon)}$ получается изъ π замѣной θ_p или η_q его выраженіемъ въ

$$\varepsilon\,,\ \theta_1\,,\ \theta_2\ldots\theta_{p-1}\,,\ \eta_1\,,\ \eta_2\ldots\eta_{q-1}\,,\ \varkappa$$

получаемымъ при помощи одного изъ слѣдующихъ уравненій:

$$\sum_{i=1}^{i=p} A_{ik}\theta_i = \varepsilon \qquad \sum_{i=1}^{i=q} B_{ik}\lg\eta_i = \varepsilon$$

$$\sum_{i=1}^{i=p} A_{ik}\theta_i + \sum_{i=1}^{i=q} B_{ik}\lg\eta_i = \varepsilon\,,$$

изъ которыхъ каждое не содержитъ x.

Поэтому

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} = \frac{\partial \pi^{(\varepsilon)}}{\partial x}$$

и уравненіе (32) даетъ при всѣхъ значеніяхъ ε, θ_1, $\theta_2 \ldots \theta_{p-1}$, η_1, $\eta_2 \ldots \eta_{q-1}$ $\varkappa$.

$$\frac{\partial \pi^{(\varepsilon)}}{\partial \varepsilon} d\varepsilon + \sum_{i=1}^{i=p-1} \frac{\partial \pi^{(\varepsilon)}}{\partial \theta_i} d\theta_i + \sum_{i=1}^{i=q-1} \frac{\partial \pi^{(\varepsilon)}}{\partial \eta_i} d\eta_i = G d\varepsilon\,,$$

откуда

$$\underset{i=1,\,2\ldots p-1}{\frac{\partial \pi^{(\varepsilon)}}{\partial \theta_i} = 0} \qquad \underset{i=1,\,2\ldots q-1}{\frac{\partial \pi^{(\varepsilon)}}{\partial \eta_i} = 0} \qquad \frac{\partial \pi^{(\varepsilon)}}{\partial \varkappa} = 0 \qquad \frac{\partial \pi^{(\varepsilon)}}{\partial \varepsilon} = G$$

Поэтому

$$\pi^{(\varepsilon)} = H(\varepsilon)$$

представляетъ функцію отъ одного ε. Если въ H вмѣсто ε подставить его выраженіе въ θ_i, η_i, то H обращается въ

$$\pi(x,\ \theta_1,\ \theta_2 \ldots \theta_p,\ \eta_1,\ \eta_2 \ldots \eta_q)$$

т. е. въ алгебраическую функцію (θ_i, η_i).

Положимъ что въ π входятъ θ_i.

Если въ H положить

$$\theta_2 = \theta_3 = \ldots \theta_p = 0$$

$$\eta_1 = \eta_2 = \ldots \eta_q = 1\,,$$

то получаемъ алгебраическую функцію отъ θ_1, такъ какъ

$$\Big[H(\varepsilon)\Big]_{\substack{\theta_2=\theta_3=\ldots\theta_p=0 \\ \eta_1=\eta_2=\ldots\eta_q=1}} = H(A_1\theta_1) = \pi(x,\ \theta_1,\ 0,\ 0 \ldots 0,\ 1,\ 1 \ldots 1)$$

Но $H(\varepsilon)$ получается изъ $H(A_1\theta_1)$ простой замѣной $A_1\theta_1$ на ε или θ_1 на $\frac{\varepsilon}{A_1}$.

Поэтому
$$H(\varepsilon) = \pi\left(x\,,\ \frac{\varepsilon}{A_1}\,,\ 0\,,\ 0 \ldots 0\,,\ 1\,,\ 1 \ldots 1\right)$$

будетъ алгебраической функціей отъ ε. Вмѣстѣ съ θ_i въ π не могутъ входить также η_i.

Въ самомъ дѣлѣ, полагая въ противномъ случаѣ

$$\theta_1 = \theta_2 = \ldots \theta_p = 0$$

$$\eta_2 = \eta_3 = \ldots \eta_q = 1$$

имѣли бы

$$\Big[N(\varepsilon)\Big]_{\substack{\theta_1=\theta_2=\ldots\theta_p=0\\ \eta_2=\eta_3=\ldots\eta_q=1}} = H(\lg\eta_1) = \pi(x,\ 0,\ 0\ldots0,\ \eta_1,\ 1,\ 1\ldots1)$$

отсюда слѣдовало бы, что $\lg\eta_1$ алгебраическая функція η_1, чего, конечно быть не можетъ.

Такимъ образомъ въ π можетъ входить только одна изъ категоріи функцій

$$\theta_i \text{ или } \eta_i.$$

Поэтому возможны только случаи

(I) $$\varepsilon = \zeta$$

(II) $$\varepsilon = \lg\vartheta$$

При этомъ въ первомъ случаѣ H алгебраическая функція отъ ε.

Если въ π входятъ η_i, то

$$y = H(\lg\vartheta),$$

гдѣ функція H такова, что

$$\Big[H(\lg\vartheta)\Big]_{\substack{\theta_1=\theta_2=\ldots\theta_p=0\\ \eta_2=\eta_3=\ldots\eta_q=1}} = H(\lg\eta_1) = \pi(x,\ 0,\ 0\ldots0\ \eta_1,\ 1\ldots1)$$

Такъ какъ $H(\lg\vartheta)$ получается изъ $H(\lg\eta_1)$ простой замѣной η, на ϑ, то

$$H(\lg\vartheta) = \pi(x,\ 0,\ 0\ldots0,\ \vartheta,\ 1,\ 1\ldots1)$$

представляетъ алгебраическую функцію отъ $\vartheta = e^{\varepsilon}$.

Оба результата можно соединить въ слѣдующей формѣ

$$y = \Omega(x,\ \omega) \tag{33}$$

гдѣ Ω алгебраическая функція трансцендентной q-го класса: ω и трансцендентныхъ нисшихъ классовъ.

ω равно ϑ или ζ; конечно можно также положить $\omega = C\vartheta$ (31′) и $\omega = \zeta + C$ (32′), полагая въ (31′) $C = [\chi_0]^{\lambda_0}$, гдѣ λ_0 раціональное число, χ_0 трансцендентная класса $< q$, а въ (32′) $C = \lambda_0 \lg\chi_0$ [1]) и мы можемъ высказать полученный результатъ въ слѣдующей формѣ:

---

[1]) Въ самомъ дѣлѣ, если y представляетъ алгебраическую функцію ω и нисшихъ трансцендентныхъ, то $y = \Omega\left(x,\ \frac{C\omega}{C}\right)$ будетъ алгебраической функціей $\omega_1 = C\omega$ и нисшихъ трансцендентныхъ, въ числѣ которыхъ C.

Если общее рѣшеніе y *уравненія*

$$M(x, \xi, x, t)\,dx + N(x, \xi, y, t)\,dy = 0 \qquad (10)$$

выражается въ конечномъ видѣ, то y *представляетъ алгебраическую функцію отъ одного изъ выраженій*

$$\vartheta = e^{\varphi}[\chi_0]^{\lambda_0}[\chi_1]^{\lambda_1}\ldots[\chi_q]^{\lambda_q} \qquad (34)$$

гдѣ λ_0 *раціональное,* λ_i *ирраціональныя числа,* φ, ω, χ_i *трансцендентныя нисшихъ, чѣмъ* y, *классовъ, или*

$$\zeta = \varphi + \sum_{i=0}^{i=p}\lambda_i \lg \chi_i \qquad (35)$$

и трансцендентныхъ нисшихъ классовъ. При этомъ въ обоихъ случаяхъ можно предполагать между λ_i отсутствіе линейныхъ соотношеній съ раціональными коэффиціентами

$$\sum_{i=1}^{i=p}\alpha_i\lambda_i = \alpha \qquad (36)$$

ибо въ противномъ случаѣ возможно было бы приведеніе ϑ и ζ, а потому и всего выраженія $y = \pi(x, \theta_1, \theta_2 \ldots \theta_p, \eta_1, \eta_2 \ldots \eta_q)$ къ меньшему числу трансцендентныхъ.

§ 4. Теперь той-же методой докажемъ, что въ выраженіяхъ ϑ и ζ функціи φ, ω, χ_i алгебраическія т. е. *рѣшеніе* y *алгебраическаго дифференціальнаго уравненія перваго порядка представляетъ трансцендентную 1-го класса или функцію алгебраическую.*

Положимъ съ этой цѣлью $q > 1$:

$$\theta_i = \lg \alpha_i(x, \theta),\ \eta_i = e^{\beta_i(x, \theta)} \text{ или } [\gamma_i(x, \theta)]^{\lambda_i}$$

гдѣ θ основная трансцендентная т. е.

$$\theta = \lg \alpha^{(1)}(x),\quad e^{\beta^{(1)}(x, \theta)} \text{ или } [\gamma^{(1)}(x, \theta)]^{\lambda^{(1)}}$$

нисшаго класса. Предположимъ сперва, что θ входитъ въ Ω только неявно черезъ ω.

Замѣтимъ, что уравненіе

$$y = \Omega(x, \omega), \qquad (33)$$

гдѣ Ω алгебраическая функція ω и нисшихъ трансцендентныхъ даетъ

$$y' = \frac{\partial\Omega}{\partial x} + \frac{\partial\Omega}{\partial\omega}\frac{d\omega}{dx} = \Omega_1(x, \omega, \omega') \qquad (37)$$

въ алгебраической функціи (ω, ω') и трансцендентныхъ нисшихъ классовъ, такъ какъ $\frac{\partial \Omega}{\partial x}$, $\frac{\partial \Omega}{\partial \omega}$ алгебраическія функціи этихъ величинъ. Исключеніе y, y' изъ уравненій (2) (33) и (37) даетъ для ω алгебраическое относительно ω и ω' уравненіе перваго порядка:

$$h(x, \omega, \omega') = 0 \tag{38}$$

Полагая сперва:

(I)
$$\omega = \vartheta = e^{\varphi}[\chi_0]^{\lambda_0}[\chi_1]^{\lambda_1} \dots [\chi_q]^{\lambda_q} \tag{39}$$

$$\varphi = \beta(x, \theta), \quad \chi_i = \gamma_i(x, \theta), \quad \theta = \lg \alpha^{(1)}(x)$$

имѣемъ

$$\omega' = \omega \left[\varphi' + \sum_{i=0}^{i=q} \lambda_i \frac{\chi_i'}{\chi_i}\right] \tag{40}$$

а, такъ какъ

$$\varphi' = \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dx} = \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial \theta}\frac{\alpha^{(1)\prime}(x)}{\alpha^{(1)}(x)} = \varrho(x, \theta) \tag{41}$$

$$\chi_i' = \frac{\partial \chi_i}{\partial x} + \frac{\partial \chi_i}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dx} = \frac{\partial \chi_i}{\partial x} + \frac{\partial \chi_i}{\partial \theta}\frac{\alpha^{(1)\prime}(x)}{\alpha^{(1)}(x)} = \tau(x, \theta) \tag{42}$$

алгебраическія функціи отъ θ и другихъ трансцендентныхъ того же и нисшихъ классовъ, то и

$$\omega' = \omega\, \Phi(x, \theta) \tag{43}$$

будетъ алгебраической функціей (ω, θ).

Уравненіе (38), которое можно представить въ видѣ

$$K(x, \theta, \omega)\, dx + L(x, \theta, \omega)\, d\omega = 0 \tag{44}$$

гдѣ K алгебраическія функціи ω, θ и другихъ нисшихъ, чѣмъ ω, трансцендентныхъ, даетъ по подстановкѣ вмѣсто ω' его значенія (43):

$$K(x, \theta, \omega) + L(x, \theta, \omega)\, \omega\, \Phi(x, \theta) = 0 \tag{45}$$

алгебраическое соотношеніе между (ω, θ), остающееся въ силѣ по замѣнѣ ω какой угодно величиной.

При всякомъ значеніи ω оно приводится къ алгебраическому соотношенію между θ и другими трансцендентными того же или нисшихъ классовъ, остающееся въ силѣ по замѣнѣ θ какой угодно величиной.

Итакъ въ (45) можно замѣнить ω и θ какими угодно функціями.

Можно, напримѣръ замѣнить θ на $\theta+\mu$, ω на результатъ подстановки $\theta+\mu$ въ выраженіи ω вмѣсто θ т. е.

$$\omega^{(1)}=e^{\beta(x,\,\theta+\mu)}[\gamma_0(x,\,\theta+\mu)]^{\lambda_0}\ldots\ [\gamma_q(x,\,\theta+\mu)]^{\lambda_q}$$

Такъ какъ согласно уравненіямъ (41) и (42)

$$\varrho(x,\,\theta+\mu)=\frac{d\beta(x,\,\theta+\mu)}{dx}$$

$$\tau(x,\,\theta+\mu)=\frac{d\gamma(x,\,\theta+\mu)}{dx}$$

то

$$\omega^{(1)\prime}=\omega^{(1)}\,\Phi(x,\,\theta+\mu) \qquad (43^{(1)})$$

Отсюда слѣдуетъ, что уравненіе (38) или (44) имѣетъ своимъ рѣшеніемъ на ряду съ ω еще $\omega^{(1)}$. Но согласно § 2 уравненіе

$$f(x,\,\xi,\,y,\,y')=0 \qquad (3)$$

должно имѣть на ряду съ рѣшеніями

$$y=\Omega(x,\,\omega)$$

$$y=\Omega(x,\,\omega^{(1)})$$

еще рѣшенія

$$y=\Omega(x,\,\alpha\omega)$$

$$y=\Omega(x,\,\alpha\omega^{(1)})=\Omega^{(1)},$$

гдѣ α произвольная постоянная.

Произвольныя постоянныя α и μ, входящія въ $\omega^{(1)}$ должны сливаться въ одну произвольную постоянную, поэтому

$$A\,\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial(\alpha\omega^{(1)})}\,\omega^{(1)}+\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial(\alpha\omega^{(1)})}\,\alpha\,\frac{\partial\omega^{(1)}}{\partial\mu}=0, \qquad (44)$$

гдѣ A постоянное.

Замѣтимъ, что на основаніи уравненія (39)

$$\frac{\partial\omega^{(1)}}{\partial\mu}=\omega^{(1)}\left[\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial\mu}+\sum_{i=0}^{i=q}\lambda_i\frac{1}{\chi_i^{(1)}}\frac{d\chi_i^{(1)}}{\partial\mu}\right]=\omega^{(1)}\,\Phi(x,\,\theta+\mu), \qquad (45)$$

если для краткости положить

$$\varphi^{(1)}=\beta(x,\,\theta+\mu),\quad \chi_i^{(1)}=\gamma(x,\,\theta+\mu),$$

гдѣ $\Phi(x,\,\theta+\mu)$ алгебраическая функція $\theta+\mu$.

Полагая $\mu=0$ и имѣя въ виду, что

$$\frac{\partial\omega^{(1)}}{\partial\mu}=\frac{\partial\omega^{(1)}}{\partial\theta}=\frac{\partial\omega^{(1)}}{\partial(\theta+\mu)}$$

имѣемъ по сокращеніи на

$$\omega\frac{\partial\Omega}{\partial(\alpha\omega)}$$

$$\Phi(x\,,\;\theta)=-\frac{A}{\alpha}$$

или такъ какъ

$$\left[\frac{\partial\omega^{(1)}}{\partial\mu}\right]_{\mu=0}=\frac{\partial\omega}{\partial\theta}=\omega\Phi(x\,,\;\theta),$$

то

$$\frac{\partial\omega}{\partial\theta}=-\frac{A\omega}{\alpha} \tag{46}$$

Уравненіе это, какъ алгебраическое относительно θ, такъ какъ

$$\frac{\partial\omega}{\partial\theta}=\omega\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}+\sum_{i=1}^{i=q}\frac{\lambda_i}{\chi_i}\frac{\partial\chi_i}{\partial\theta}\right]$$

и отсюда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}+\sum_{i=1}^{i=q}\frac{\lambda_i}{\chi_i}\frac{\partial\chi_i}{\partial\theta}=-A$$

имѣетъ мѣсто при всякомъ значеніи θ; оно даетъ

$$\omega=Ce^{-\frac{A\theta}{\alpha}}$$

гдѣ C не содержитъ θ, а только другія трансцендентныя. Но

$$e^{-\frac{A\theta}{\alpha}}=[\alpha^{(1)}(x)]^{-\frac{A}{\alpha}}$$

трансцендентная q—1-го класса

Поэтому ω, а потому и y не будетъ содержать противно условію трансцендентныхъ q-го класса, содержащихъ θ.

Полагая

(II) $$\omega=\zeta=\sum_{i=0}^{i=p}\lambda_i\lg\chi_i \tag{47}$$

$$\theta=\lg\alpha^{(1)}(x)$$

имѣемъ

$$\omega'=\varphi'+\sum_{i=0}^{i=p}\lambda_i\frac{\chi_i'}{\chi_i} \tag{48}$$

φ', ψ' опредѣляются уравненіемъ (41) и (42)

$$\omega' = \Phi(x, \theta)$$

Φ алгебраическая функція θ, откуда

$$K(x, \theta, \omega) + L(x, \theta, \omega)\,\Phi(x, \theta) = 0; \tag{49}$$

примемъ вмѣстѣ съ тѣмъ:

$$K(x, \theta+\mu, \omega^{(1)}) + L(x, \theta+\mu, \omega^{(1)})\,\Phi(x, \theta+\mu) = 0 \tag{$49^{(1)}$}$$

гдѣ $\omega^{(1)}$ результатъ подстановки $\theta + \mu$ въ ω вмѣсто θ.

Съ рѣшеніемъ $\Omega(x, \omega^{(1)})$ имѣемъ еще рѣшеніе $\Omega(x, \omega^{(1)}+\beta)$, гдѣ β произвольная постоянная, которая вмѣстѣ съ μ должна слиться въ одну, для чего необходимо, чтобы

$$\frac{\partial\Omega}{\partial(\omega^{(1)}+\beta)}\frac{\partial\omega^{(1)}}{\partial\mu} + A\,\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial(\omega^{(1)}+\beta)} = 0$$

$$\Omega^{(1)} = \Omega(x, \omega^{(1)}+\beta),$$

гдѣ A постоянное.

Имѣя въ виду, что

$$\frac{\partial\omega^{(1)}}{\partial\mu} = \frac{\partial\omega^{(1)}}{\partial\theta} = \frac{\partial\omega^{(1)}}{\partial(\theta+\mu)} = \Phi(x, \theta+\mu)$$

$$\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial(\omega^{(1)}+\beta)} = \frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial\omega^{(1)}}$$

получаемъ по сокращеніи на $\dfrac{\partial\Omega}{\partial\omega}$: при $\beta = 0$, $\mu = 0$

$$\frac{\partial\omega}{\partial\theta} = -A,$$

откуда

$$\omega = -A\theta + C,$$

гдѣ C не зависитъ отъ θ, а только отъ другихъ трансцендентныхъ того же или низшихъ классовъ т. е. θ можетъ входить въ ω только алгебраически.

Полагая $\omega = \vartheta$

(III) $$\varphi = \beta(x, \eta) \quad \gamma_i = \gamma_i(x, \eta)$$

гдѣ

$$\eta = e^{\beta^{(1)}(x)} \quad \text{или} \quad [\gamma^{(1)}(x)]^{\lambda^{(1)}}$$

получаемъ для ω' опять уравненія (45), но при этомъ φ', χ_i' опредѣляются вмѣсто (41), (42) уравненіями:

$$\varphi' = \frac{\partial\beta}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial\eta}\frac{d\eta}{dx} = \frac{\partial\beta}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial\eta}\delta(x) = \varrho(x\,,\ \eta) \tag{50}$$

$$\chi_i' = \frac{\partial\chi_i}{\partial x} + \frac{\partial\chi_i}{\partial x}\frac{d\eta}{dx} = \frac{\partial\chi_i}{\partial x} + \frac{\partial\chi_i}{\partial\eta}\delta(x) = \tau(x\,,\ \eta) \tag{51}$$

гдѣ

$$\delta(x) = \eta\beta^{(1)\prime}(x) \quad \text{или} \quad \lambda\eta\,\frac{\gamma^{(1)\prime}(x)}{\gamma^{(1)}(x)}$$

будетъ алгебраической функціей η, а

$$\omega' = \omega\,\Phi(x\,,\ \eta)$$

алгебраической функціей $(\omega\,,\ \eta)$

Уравненіе

$$K(x,\ \eta,\ \omega) + L(x,\ \eta,\ \omega)\,\omega\,\Phi(x,\ \eta) = 0 \tag{52}$$

остается въ силѣ по замѣнѣ η на $v\eta$, а ω на $\omega^{(1)}$, результатъ подстановки $v\eta$ вмѣсто η.

Отсюда легко видѣть на основаніи уравненія (50) и (51), что уравненіе (10) будетъ имѣть интегралъ

$$y = \Omega(x,\ \alpha\omega^{(1)}),$$

причемъ должны имѣть

$$\frac{\partial\Omega}{\partial(\alpha\omega^{(1)})}\,\alpha\,\frac{\partial\omega^{(1)}}{\partial v} + A\,\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial(\alpha\omega^{(1)})}\,\omega^{(1)} = 0$$

$$\Omega^{(1)} = \Omega(\alpha\omega^{(1)})$$

откуда, замѣчая, что

$$\frac{\partial\omega^{(1)}}{\partial v} = \frac{\eta}{v}\,\frac{\partial\omega^{(1)}}{\partial\eta} = \eta\omega^{(1)}\,\Phi(x,\ v\eta)$$

полагая $\alpha = 1$, $v = 1$ и сокращая на $\omega\dfrac{\partial\Omega}{\partial\omega}$ имѣемъ

$$\eta\alpha\,\frac{\partial\omega}{\partial\eta} + A\omega = 0$$

откуда

$$\omega = C.(\eta)^{-\frac{A}{\alpha}}$$

гдѣ C не содержитъ η.

Такъ какъ

$$(\eta)^{-\frac{A}{\alpha}}$$

представляетъ трансцендентную q—1-го класса, то для ω мы получаемъ, противно условію, выраженіе, не содержащее тѣхъ основныхъ трансцендентныхъ q-го класса, въ которыя входитъ η. Наконецъ остается случай, когда

$$\omega = \zeta$$

$$\varphi = \beta(x, \eta) \quad \gamma_i = \gamma_i(x, \eta)$$

гдѣ

$$\eta = e^{\beta_i(x)} \text{ или } [\gamma^{(1)}(x)]^{\lambda^{(1)}}$$

Уравненіе

$$K(x, \eta, \omega) + L(x, \eta, \omega) \, \Phi(x, \eta) = 0 \tag{53}$$

получаемое для этого случая, остается въ силѣ по замѣнѣ η на $v\eta$, ω на $\omega^{(1)}$, откуда какъ выше, выводимъ, что

$$y = \Omega(x, \omega^{(1)} + \beta)$$

тоже рѣшеніе уравненія (10), а изъ уравненія

$$\frac{\partial \Omega^{(1)}}{\partial(\omega^{(1)} + \beta)} \frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial v} + A \frac{\partial \Omega^{(1)}}{\partial(\omega^{(1)} + \beta)} = 0 \tag{54}$$

представляющаго условіе сліянія произвольныхъ постоянныхъ v и β, гдѣ

$$\frac{\partial \omega^{(1}}{\partial v} = \frac{\eta}{v} \frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial \eta} = \eta \Phi(x, v\eta)$$

получаемъ при $v = 1$, $\beta = 0$:

$$\eta \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = -A$$

откуда

$$\omega = -A \lg \eta + B$$

гдѣ B не содержитъ η т. е.

$$\omega = -A \lg \beta_i(x) + B$$

или

$$\omega = -A \lg \gamma_i(x) + B$$

откуда слѣдуетъ, что ω не содержитъ основныхъ трансцендентныхъ q-го класса, содержащихъ η.

Итакъ доказано, что α_i, β_i, γ_i или φ_i: χ_i не могутъ быть алгебраическими функціями отъ трансцендентныхъ θ, η.

Слѣдовательно въ ω, а потому и въ Ω не входятъ трансцендентныя θ, η. Въ нашемъ доказательствѣ мы ограничивались случаемъ, когда θ входитъ въ $\Omega(x, \omega)$ только черезъ ω.

Но случай, когда $y = \Omega(x, \theta, \omega)$ легко сводится къ уже изслѣдованному случаю.

Дѣйствительно, уравненіе (44) замѣняется тогда слѣдующимъ болѣе сложнымъ:

$$A\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial(\alpha\omega^{(1)})}\omega^{(1)} + \frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial(\alpha\omega^{(1)})}\alpha\frac{\partial\omega^{(1)}}{\partial\mu} + \frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial\theta} = 0 \qquad (44')$$

дающимъ при $\alpha = 1$, $\mu = 0$

$$\left(A_0\omega + \frac{\partial\omega}{\partial\theta}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial\omega} + \frac{\partial\Omega}{\partial\theta} = 0$$

(A_0 значеніе A при $\alpha = 1$, $\mu = 0$) или

$$\omega\psi(\theta)\frac{\partial\Omega}{\partial\omega} + \frac{\partial\Omega}{\partial\theta} = 0,$$

гдѣ $\psi(\theta)$ алгебраическая функція отъ θ.

Это уравненіе въ частныхъ производныхъ даетъ:

$$\Omega = H\left(\omega e^{-\int\psi(\theta)\,d\theta}\right),$$

гдѣ H должно быть, какъ Ω, знакомъ алгебраической функціи.

Такъ какъ Ω при $\omega = \text{const.}$ алгебраическая функція отъ θ, то $H\left(\text{const.}\, e^{-\int\psi(\theta)\,d\theta}\right)$ а потому $e^{-\int\psi(\theta)\,d\theta}$ приводятся къ $\Phi(\theta)$, алгебраической функціи отъ θ.

$$y = H[\omega\Phi(\theta)]$$

$\omega\Phi(\theta)$, какъ ω, имѣетъ видъ (39), и мы можемъ $\omega\Phi(\theta)$ принять за ω. Тогда для y будемъ имѣть выраженіе, не содержащее уже θ явнымъ образомъ.

Такимъ же образомъ для другихъ случаевъ II, III, IV получаемъ уравненія въ частныхъ производныхъ:

$$\text{(II)} \qquad \psi(\theta)\frac{\partial\Omega}{\partial\omega} + \frac{\partial\Omega}{\partial\theta} = 0$$

$$\text{(III)} \qquad \psi(\eta)\frac{\partial\Omega}{\partial\omega}\omega + \frac{\partial\Omega}{\partial\eta} = 0,$$

$$\text{(IV)} \qquad \psi(\eta)\frac{\partial\Omega}{\partial\omega} + \frac{\partial\Omega}{\partial\eta} = 0,$$

дающія

$$\text{(II)} \qquad y = H[\omega + \Phi(\theta)]$$

$$\text{(III)} \qquad y = H[\omega\Phi(\eta)]$$

$$\text{(IV)} \qquad y = H[\omega + \Phi(\eta)]$$

Принимая выраженія

$$\omega + \Phi(\theta), \quad \omega\Phi(\eta), \quad \omega + \Phi(\eta)$$

за ω, получаемъ выраженія y, не содержащія θ явнымъ образомъ.

Такимъ образомъ: *Если общее рѣшеніе алгебраическаго уравненія*

$$M(x, \xi, y, t)\,dx + N(x, \xi, y, t)\,dy = 0 \tag{10}$$

выражается въ конечномъ видѣ, то y представляетъ алгебраическую функцію отъ одного изъ выраженій

$$\vartheta = e^{\varphi}[\chi_0]^{\lambda_0}[\chi_1]^{\lambda_1}\ldots[\chi_q]^{\lambda_q} \tag{34}$$

или

$$\zeta = \varphi + \sum_{i=0}^{i=p} \lambda_i \lg \chi_i, \tag{35}$$

гдѣ λ_i постоянныя, φ_i, χ алгебраическія функціи отъ x.

Очевидно и частное рѣшеніе имѣетъ тотъ же видъ, такъ какъ получается придавая въ $\Omega(\alpha\vartheta)$ и $\Omega(\zeta + \beta)$ постояннымъ α и β частныя значенія.

Особенное рѣшеніе получается исключеніемъ α и β изъ системъ уравненій

$$\Omega(\alpha\vartheta) = 0 \qquad \frac{\partial\Omega(\alpha\vartheta)}{\partial\alpha} = 0$$

или

$$\Omega(\zeta + \beta) = 0 \qquad \frac{\partial\Omega(\zeta+\beta)}{\partial\beta} = 0$$

или что тоже исключеніемъ ω изъ системы

$$\Omega(\omega) = 0 \qquad \frac{\partial\Omega(\omega)}{\partial\omega} = 0 \tag{55}$$

и представляетъ функцію алгебраическую.

Изъ полученнаго выраженія для

$$y = \Omega(x, \alpha\omega)$$

слѣдуетъ, что

I) *Между двумя частными интегралами и независимымъ перемѣннымъ должна существовать алгебраическая зависимость*

Полагая $x = x_0$ имѣемъ

$$y_0 = \Omega(\alpha\vartheta_0) \qquad (a_0)$$

или

$$y_0 = \Omega(\zeta_0 + \beta) \qquad (b_0)$$

гдѣ y_0, ϑ_0 значенія y и ϑ при $x = x_0$

Но

$$y = \Omega(\alpha\vartheta) \qquad (a)$$

или

$$y = \Omega(\zeta + \beta) \qquad (b)$$

Опредѣляя изъ уравненія (a_0) α и подставляя въ уравненіе (a) или опредѣляя изъ уравненія (b_0) β и подставляя въ уравненіе (b), получаемъ, что y выражается алгебраически черезъ y_0 (и вообще трансцендентно черезъ x_0 и x).

II) *Между общимъ интеграломъ y и произвольнымъ постояннымъ y_0 должна существовать алгебраическая зависимость.*

Эти два свойства можно назвать: *первымъ и вторымъ основными свойствами интегрируемаго въ конечномъ видѣ дифференціальнаго уравненія 1-го порядка.*

Всѣ рѣшаемыя въ конечномъ видѣ алгебраическія дифференціальныя уравненія мы можемъ раздѣлить на три класса:

I классъ.

Алгебраически интегрируемыя дифференціальныя уравненія.

II классъ.

Интегрируемыя при помощи только показательныхъ и степенныхъ функцій. Форма общаго рѣшенія:

$$y = \Omega(x,\ \alpha\vartheta)$$

III классъ.

Интегрируемыя при помощи только логариѳмическихъ функцій. Форма общаго рѣшенія:

$$y = \Omega(x,\ \zeta + \beta)$$

Примѣръ 1.

Уравненіе

$$ay' + y = \frac{x}{y^2}$$

съ общимъ рѣшеніемъ

$$\sqrt[3]{\frac{Ce^{-\frac{3x}{a}} + 3x - a}{3}}$$

и частнымъ

$$y=\sqrt[3]{\frac{3x-a}{3}}$$

принадлежитъ ко второму классу

Примѣръ 2.

Уравненіе

$$y^2-2xy'-y'^2=0$$

съ алгебраическимъ общимъ рѣшеніемъ

$$(3xy+2x^3+C)^2-4(y+x^2)^4=0$$

принадлежитъ къ первому классу

Примѣръ 3.

Уравненіе

$$y'^2-2xy'-1=0$$

съ общимъ рѣшеніемъ

$$y=\frac{x^2}{2}\pm\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}\pm\frac{1}{2}\lg(x+\sqrt{x^2+1})+C$$

третьяго класса.

Примѣръ 4.

Уравненіе

$$y'+y^2=\frac{a}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^2}$$

согласно Эйлеру [1]) имѣетъ общимъ интеграломъ:

$$e^{-\omega}\frac{2(\alpha+\beta x+\gamma x^2)y+n-\beta-2\gamma x}{2(\alpha+\beta x+\gamma x^2)y-n-\beta-2\gamma x}=C,$$

гдѣ

$$n=\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma+4a}$$

$$\omega=n\int\frac{dx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=\frac{n\gamma}{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}\lg\frac{2\gamma x+\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\gamma x+\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}$$

откуда получаемъ общее рѣшеніе въ слѣдующемъ видѣ:

$$y=\frac{2(\alpha+\beta x+\gamma x^2)-n-\beta-2\gamma x}{2(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}Ce^{\omega}+\frac{2\gamma x+n-\beta}{2(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}$$

---

[1]) Commentarii Academiae Petropolitanae t. VIII. 1760 г. *Euleri*. De integratione aequationum differentialium стр. 9.

Оно будетъ принадлежать ко второму классу и имѣть частное алгебраическое рѣшеніе ($C=0$)

$$y=\frac{2\gamma x+n+\beta}{2(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}$$

отмѣченное Эйлеромъ.

Примѣръ 5.

Уравненіе:

$$y'^2+(x+\frac{1}{2}x^3)y'-(1+x^2)y-\frac{1}{16}x^4=0$$

Откуда общее рѣшеніе:

$$y=-3x^2+2x\sqrt{1+x^2}\lg(x+\sqrt{1+x^2})+$$
$$+\lg^2(x+\sqrt{1+x^2})+2Cx\sqrt{1+x^2}+C^2$$

выражается при помощи логариѳмовъ и уравненіе третьяго класса.

Особенное рѣшеніе

$$16y+4x^2+x^4=0$$

алгебраическое.

§ 5. Всѣ разсужденія § 3 относятся къ случаю, когда *общее рѣшеніе выражается въ конечномъ видѣ.*

Возьмемъ теперь случай, когда *частное рѣшеніе выражается въ конечномъ видѣ при условіи, что общее рѣшеніе не выражается въ конечномъ видѣ.*

Въ этомъ случаѣ интегралъ

$$y=\pi(x,\ \theta_1+\mu_1,\ \theta_2+\mu_2\ldots\theta_p+\mu_p,\ v_1\eta_1,\ v_2\eta_2\ldots v_q\eta_q) \tag{42}$$

который вмѣстѣ съ даннымъ (согласно § 2)

$$y=\pi(x,\ \theta_1,\ \theta_2\ldots\theta_p,\ \eta_1,\ \eta_2\ldots\eta_q)$$

долженъ удовлетворять дифференціальному уравненію:

$$f(x,\ \xi,\ y,\ y')=0 \tag{2}$$

содержитъ произвольныя постоянныя, сводящіяся къ одной, и y, опредѣляемое уравненіемъ (12), представляетъ интегралъ уравненія (2). Для того, чтобы послѣднее не имѣло мѣста, изъ выраженія (12) всѣ μ_i должны исчезнуть т. е. должны имѣть

$$\frac{\partial\pi^{(1)}}{\partial\mu_i}=0 \qquad \frac{\partial\pi^{(1)}}{\partial v_i}=0$$

откуда

$$\frac{\partial\pi}{\partial\theta_i}=0 \qquad \frac{\partial\pi}{\partial\eta_i}=0$$

и π сводится къ алгебраической функціи отъ x.

Если частное рѣшеніе алгебраическаго дифференціальнаго уравненія перваго порядка выражается въ конечномъ видѣ, а общее не выражается, то частное рѣшеніе необходимо должно быть алгебраическимъ.

Особенное рѣшеніе, какъ совмѣстное рѣшеніе уравненій:

$$f(x\,,\,\xi\,,\,y\,,\,\triangle)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial\triangle}=0\quad \frac{\partial f}{\partial x}+\triangle\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

должно быть всегда алгебраическимъ, независимо отъ того, выражается ли въ конечномъ видѣ общее рѣшеніе или нѣтъ.

§ 6. Первое основное свойство уравненій, рѣшаемыхъ въ конечномъ видѣ, связуетъ наши изслѣдованія съ работами Кенигсбергера [1]), относящимися къ классу уравненій перваго порядка, обладающимъ этимъ свойствомъ. Второе свойство даетъ возможность воспользоваться изслѣдованіями Пенлевэ [2]), относящимися къ уравненіямъ перваго порядка особаго класса. А, именно, алгебраическая зависимость между y и y_0 (значеніемъ y при $x=a$) является характернымъ свойствомъ уравненій, обладающихъ общимъ рѣшеніемъ съ конечнымъ опредѣленнымъ числомъ значеній около подвижныхъ (т. е. зависящихъ отъ y_0) критическихъ точекъ. Пенлевэ изслѣдуетъ условія, чтобы заданное уравненіе принадлежало къ такому классу уравненій, и даетъ методы дли опредѣленія въ иныхъ случаяхъ при наличности этихъ условій общаго рѣшенія уравненія. Въ этихъ случаяхъ изслѣдованія Пенлевэ даютъ также рѣшеніе изслѣдуемой нами задачи интегрированія въ конечномъ видѣ уравненія перваго порядка.

Оставляя покуда изслѣдованіе интересной связи нашихъ изслѣдованій съ работами Пенлевэ, мы выбираемъ болѣе простой способъ изслѣдованія, независимый отъ результатовъ Пенлевэ и опирающійся на результаты нашей предыдущей работы, относящейся къ дифференціальнымъ уравненіямъ перваго порядка.

Замѣтимъ прежде всего, что, если общее рѣшеніе y выражается въ конечномъ видѣ, то опредѣляя изъ уравненій

$$y=\Omega\,(\alpha\vartheta)$$

$$y=\Omega\,(\zeta+\beta)$$

---

[1]) *L. Koenigsberger.* Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen. Leipzig 1882 s. 50.

[2]) *Painlevé.* Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles. Paris 1897.

Тоже въ Annales de l'Eçole Normale t. 13 (1891):

Painlevé. Sur les équations différentielles du premier ordre.

произвольныя постоянныя α и β въ алгебраическихъ функціяхъ отъ (x, y, ζ) или (x, y, ϑ) получаемъ общій интегралъ уравненія (10):

$$M(x, \xi, y, t)\,dx + N(x, \xi, y, t)\,dy = 0 \tag{10}$$

въ конечномъ видѣ.

Но, согласно доказанному въ первой статьѣ, этотъ интегралъ можетъ быть всегда приведенъ къ слѣдующему виду:

$$\Phi(x, y, t)\sqrt[n]{G(x, y, t)} + \\ + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg \prod_{j=0}^{j=n-1} \psi_k^{\alpha^{-j}}[x, y, t, \alpha^j \sqrt[n]{G(x, y, t)}] = C \tag{55}$$

гдѣ Φ, G раціональныя функціи (x, y, t), ψ_k раціональная функція (x, y, t) и

$$\sqrt[n]{G(x, y, t)},$$

C_k постоянныя, α первообразный корень двучленнаго уравненія:

$$\alpha^n = 1. \tag{56}$$

Замѣняя въ § 3 первой статьи условія неприводимости въ области раціональныхъ функцій:

$$(x, y)$$

условіями неприводимости въ области раціональныхъ функцій:

$$(x, y, \xi),$$

мы получаемъ уравненіе (45 первой статьи)

$$\int(Mdx + Ndy) = \varphi(x, y, t) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg \psi_k(x, y, t) \tag{57}$$

но съ условіемъ, что φ, ψ раціональныя функціи не только (x, y, t) но и ξ, такъ что

$$\int(Mdx + Ndy) = \varphi(x, y, \xi, t) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg \psi_k(x, y, \xi, t) \tag{58}$$

если φ, ψ раціональныя функціи величинъ, заключенныхъ въ скобки.

Уравненіе (66 первой статьи) замѣняется тогда слѣдующимъ

$$u = \int e^{H(x, \xi, y, t)} \prod_{k=1}^{k=m} [H_k(x, \xi, y, t)]^{\lambda_k} [M(x, \xi, y, t)\,dx + N(x, \xi, y, t)\,dy] \tag{59}$$

Уравненія (67) и (68) слѣдующими:

Изъ ур. (59) слѣдуетъ согласно § 5 первой статьи:

$$U = e^{H(x,\,\xi,\,y,\,t)} \prod_{k=1}^{k=q} [H_k(x\,,\ \xi\,,\ y\,,\ t)]^{\lambda_k} \sqrt[n]{G(x, \xi, y, t)}$$

или

$$U = \Phi[x\,,\ \xi,\ y,\ t, \sqrt[n]{G(x,\ \xi,\ y,\ t)}] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg \psi_k [x\,,\ \xi,\ y\,,\ t, \sqrt[n]{G(x,\ \xi,\ y,\ t)}]$$

что даетъ вмѣсто (55) слѣдующее выраженіе для интеграла:

$$\Phi(x\,,\ \xi\,,\ y\,,\ t) \sqrt[n]{G(x\,,\ \xi\,,\ y\,,\ t)} +$$
$$\sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg \prod_{j=0}^{j=n-1} \psi_k^{\alpha-j} [x\,,\ \xi,\ y,\ t\,,\ \alpha^j \sqrt[n]{G(x\,,\ \xi\,,\ y,\ t)}] = C \tag{60}$$

гдѣ Φ, G раціональныя функціи $(x\,,\ \xi\,,\ y\,,\ t)$, ψ_k раціональная функція $(x\,,\ \xi\,,\ y\,,\ t)$ и

$$\sqrt[n]{G(x\,,\ \xi\,,\ y,\ t)}$$

C_k постоянныя, α первообразный корень уравненія (56).

Такимъ же образомъ преобразуется и болѣе общая форма интеграла (68 формула I-ой статьи), которую можемъ написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\Phi(x,\ \xi,\ y,\ t) \sqrt[n]{G(x\ \xi\ y\ t)} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg \psi_k [x\,,\ \xi,\ y,\ t, \sqrt[n]{G(x,\ \xi,\ y,\ t)}] = C \tag{61}$$

причемъ между C_k мы можемъ предполагать отсутствіе линейныхъ соотношеній

$$\sum_{k=1}^{k=m} a_k C_k = a \tag{62}$$

съ раціональными коэффиціентами.

§ 7. Положимъ теперь, что заданное уравненіе принадлежитъ ко второму классу, такъ что

$$y = \pi(x\,,\ \alpha\vartheta) \tag{63}$$

Положимъ далѣе, что общій интегралъ выражается въ алгебраическо-логариѳмической формѣ:

$$\Phi(x\,,\ y) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg \psi_k (x\,,\ y) = C \tag{64}$$

гдѣ между C_k нѣтъ линейныхъ соотношеній (62). Подставляя въ это уравненіе y въ ϑ изъ уравненія (63), получаемъ уравненіе, опредѣляющее ϑ:

$$P^{(1)}(x\ \alpha\vartheta) = 0\,, \tag{65}$$

гдѣ

$$P^{(1)}(x\,,\ \alpha\vartheta) = A(x\,,\ \alpha\vartheta) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg B_k(x\,,\ \alpha\vartheta) - C \tag{66'}$$

гдѣ A, B_k алгебраическія функціи $(x\,,\alpha\vartheta)$ ϑ, какъ и y можетъ содержать одну произвольную постоянную.

Для того, чтобы α и C въ $P^{(1)}(x\,,\ \alpha\vartheta)$ сливались въ одну произвольную постоянную необходимо, чтобы

$$\frac{\partial P^{(1)}}{\partial \alpha} + D\frac{\partial P^{(1)}}{\partial C} = 0 \tag{67}$$

гдѣ D постоянное или

$$\frac{\partial P^{(1)}}{\partial \alpha} = D\,,$$

а, такъ какъ

$$\frac{\partial P^{(1)}}{\partial \alpha} = \vartheta\,\frac{\partial P^{(1)}}{\partial(\alpha\vartheta)}\,,$$

то

$$\vartheta\,\frac{\partial P^{(1)}}{\partial(\alpha\vartheta)} = D\,,$$

а при $\alpha = 1$.

$$\vartheta\,\frac{\partial P}{\partial \vartheta} = D\,, \tag{68}$$

если

$$P(x\,,\,\vartheta) = A(x\,,\,\vartheta) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg B_k(x\,,\ \vartheta) - C \tag{66}$$

Изъ уравненія (68) слѣдуетъ слѣдующее тождество:

$$P(x\,,\ \vartheta) = D\lg\vartheta + E$$

или

$$A(x\,,\,\vartheta) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg B_1(x\ \vartheta) - C = D\lg\vartheta + E \tag{69}$$

гдѣ D постоянное, E не зависитъ отъ ϑ, а потому и отъ y.

Разсматривая B_k, какъ функцію отъ ϑ, для всякаго нуля и полюса $\vartheta = \omega$, отличнаго отъ $\vartheta = 0$, должны имѣть тождественно при всякомъ ϑ

$$\sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg (\vartheta - \omega)^{\gamma_k} = 0,$$

гдѣ γ_k раціональныя числа, откуда получаемъ

$$\sum_{k=1}^{k=m} C_k \gamma_k = 0$$

т. е. соотношеніе типа (62).

Такимъ образомъ $B_k(x, \vartheta)$ могутъ имѣть нулями и полюсами только $\vartheta = 0$.

Поэтому

$$B_k(x, \vartheta) = \vartheta^{\gamma_k} \pi_k(x), \tag{70}$$

гдѣ $\pi_k(x)$ не зависятъ отъ ϑ и какъ $B_k(x, \vartheta)$ алгебраическія функціи отъ x. Что же касается до $A(x, \vartheta)$, то, разлагая эту функцію около полюсовъ, убѣждаемся въ томъ, что главныя части разложеній тождественно равны нулю, $A(x, \vartheta)$ сохраняетъ на плоскости конечное значеніе и

$$A(x, \vartheta) = \varrho(x) \tag{71}$$

Но, если A и B_k вида (70) и (71), то

$$\Phi(x, y) = \Phi(x)$$

не зависитъ отъ y, а

$$\psi_k^{a_k}(x, y) = \psi_k(x) \pi(x, y),$$

гдѣ $\psi_k(x)$ функція отъ x, a_k постоянныя.

Если общій интегралъ дифференціальнаго уравненія перваго порядка и второго класса представляется въ алгебраическо-логариѳмической формѣ:

$$\Phi(x, y) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg \psi_k(x, y) = C \tag{72}$$

гдѣ между C_k не существуетъ линейныхъ соотношеній съ раціональными коэффиціентами, то алгебраическій членъ:

$$\Phi(x, y) = \Phi(x) \tag{73}$$

не зависитъ отъ y, *а степени функцій, стоящихъ подъ знаками логариѳмовъ, находятся между собой въ отношеніяхъ.*

$$\frac{\psi_k^{a_k}(x, y)}{\psi^{a_1}(x, y)} = \pi_k(x) \tag{74}$$

независящихъ отъ x.

§ 8. Положимъ теперь, что заданное уравненіе принадлежитъ ко второму классу, т. е.

$$y = \pi(x, \zeta + \beta) \tag{75}$$

Тогда уравненіе (67) замѣняется уравненіемъ

$$\frac{\partial P^{(1)}}{\partial \beta} - D \frac{\partial P^{(1)}}{\partial C} = 0 \tag{76}$$

гдѣ

$$P^{(1)}(x, \zeta + \beta) = A(x, \zeta + \beta) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg B_k(x, \zeta + \beta) - C \tag{77}$$

результатъ подстановки въ лѣвую часть уравненія (64) вмѣсто y его выраженія (75). Уравненіе же (76) даетъ:

$$\frac{\partial P^{(1)}}{\partial \beta} = D,$$

а, такъ какъ

$$\frac{\partial P^{(1)}}{\partial \beta} = \frac{\partial P^{(1)}}{\partial (\zeta + \beta)}$$

то при $\beta = 0$

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} = D \tag{78}$$

$$P = D\zeta + E,$$

гдѣ D постоянное, F не зависитъ отъ ζ, и потому и отъ y, или

$$A(x, \zeta) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg B_k(x, \zeta) = D\zeta + E \tag{79}$$

Какъ въ предыдущемъ параграфѣ выводили, что $B_k(x, \zeta)$ не зависятъ отъ ζ, $A(x, \zeta)$, имѣя тѣ же полюса, что $D\zeta$ съ тѣми же главными частями разложенія, отличаются отъ $D\zeta$ только на величины, независящія отъ ζ.

Отсюда слѣдуетъ:

Если общій интегралъ дифференціальнаго уравненія 3-го класса имѣетъ алгебраическо-логариѳмическую форму:

$$\Phi(x, y) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg \psi_k(x, y) = C \tag{72}$$

гдѣ между C_k не существуетъ линейныхъ соотношеній съ раціональными коэффиціентами, то функціи, стоящія подъ знаками логариѳмовъ, не зависятъ отъ y.

§ 9. Возвращаясь къ доказанной формѣ (61) общаго интеграла, выражаемаго въ конечномъ видѣ, на основаніи доказаннаго въ § 7, мы имѣемъ, что въ случаѣ уравненія второго класса, функціи

$$\pi_k[x, \xi, y, t, \sqrt[n]{G(x, \xi, y, t)}] = \frac{\psi_k^{a_k}[x, \xi, y, t, \sqrt[n]{G(x, \xi, y, t)}]}{\psi_1^{a_1}[x, \xi, y, t, \sqrt[n]{G(x, \xi, y, t)}]} \tag{80}$$

не должны зависѣть отъ (y, t).

Здѣсь слѣдуетъ различать два случая:

I) *G зависитъ отъ (y, t).*

II) *G не зависитъ отъ (y, t).*

I) Въ первомъ случаѣ, полагая

$$\alpha t + \beta \sqrt[n]{G(x, \xi, y, t)} = w, \tag{82}$$

гдѣ α, β надлежаще выбранныя постоянныя, имѣемъ

$$\pi_k[x, \xi, y, t, \sqrt[n]{G(x, \xi, y, t)}] = \pi_k(x, \xi, y, w),$$

гдѣ π_k, какъ и вездѣ ниже, означаетъ раціональную функцію величинъ, заключенныхъ въ скобки.

Далѣе, такъ какъ $\pi_k(x, \xi, y, w)$ не зависятъ отъ (y, t), а потому и отъ w, то

$$\pi_k(x, \xi, y, w) = \pi_k(x, \xi, y, w_j) = \frac{\sum_{j=1}^{j=q} \pi_k(x, \xi, y, w_j)}{q},$$

гдѣ w_j корни неприводимаго уравненія, опредѣляющаго w. Отсюда $\pi_k(x, \xi, y, w) = \pi_k(x, \xi, y)$ раціональная функція (x, ξ, y). Полагая же вмѣсто y какое либо постоянное, черезъ что $\pi_k(x, \xi, y, w)$ какъ не зависящее отъ ζ не мѣняется, имѣемъ, что

$$\pi_k(x, \xi, y, w) = \pi_k(x, \xi), \quad \varrho(x, \xi, y, w) = \varrho(x, \xi)$$
$$\varrho(x, \xi, y, w) = \Phi[x, \xi, y, t, \sqrt[n]{G(x, \xi, y, t)}]\ ^{1)}$$

раціональныя функціи (x, ξ).

Но легко теперь видѣть, что этотъ случай не можетъ имѣть мѣста при уравненіяхъ второго класса безъ того, чтобы общій интегралъ не представлялся бы въ слѣдующей болѣе простой формѣ:

$$\lg \Phi(x, \xi, y, t) + \omega(x, \xi) + \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \lg \pi_k(x, \xi) = C \tag{83}$$

гдѣ Φ раціональная функція отъ (x, ξ, y, t), ω, π_k раціональныя функціи (x, ξ), λ_k постоянныя. Въ самомъ дѣлѣ на основаніи доказаннаго выше имѣемъ [2]), замѣняя въ выраженіи (61) ψ_k черезъ $\pi_k(x, \xi)$ по формулѣ (80):

$$\begin{gathered}\lg \Phi[x, \xi, y, t, \sqrt[n]{G(x, \xi, y, t)}] + \varrho(x, \xi) + \\ + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg \pi_k(x\ \xi) = C,\end{gathered} \tag{84}$$

переходя же отъ этой формы общаго интеграла къ другимъ, отвѣчающимъ $\alpha^j \sqrt[n]{G(x, \xi, y, t)}$

$$\begin{gathered}\lg \Phi[x, \xi, y, t, \alpha^j \sqrt[n]{G(x, \xi, y, t)}] + \varrho(x, \xi) + \\ + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg \pi_k(x, \xi) = C_j\end{gathered} \tag{84$_j$}$$

гдѣ, согласно доказанному въ первой статьѣ

$$C_j = \alpha^j C_1$$

Складывая почленно уравненія (84$_j$) получаемъ

$$\begin{gathered}\lg \prod_{j=0}^{j=n-1} \Phi[x, \xi, y, t, \alpha^j \sqrt[n]{G(x, \xi, y, t)}] + \\ + n\varrho(x, \xi) + n\sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg \pi_k(x, \xi) = \sum_{j=0}^{j=n-1} C_1 \alpha^j\end{gathered}$$

---

[1]) Здѣсь Φ имѣетъ другое значеніе чѣмъ выше.

[2]) Замѣняя изъ уравненія (80) $\lg \psi_k(x, \xi, y, t, \sqrt[n]{G})$ черезъ $\lg \pi_k(x, \xi, y, t, \sqrt[n]{G})$ и $\lg \psi_1(x, \xi, y, t, \sqrt[n]{G})$.

или

$$\lg \Phi(x, \xi, y, t) + \varrho(x, \xi) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg \pi_k(x, \xi) = 0 \qquad (85)$$

гдѣ Φ раціональная функція.

Уравненіе это даетъ не общее, а частное рѣшеніе. Но согласно § 6 изъ него получаемъ общее простой замѣной $\lg \pi_k(x, \xi)$ на $\lg \pi_k(x, \xi) + C^{(k)}$, гдѣ $C^{(k)}$, произвольное постоянное. Въ самомъ дѣлѣ уравненіе (85) даетъ

$$y = \pi(x, \eta_1, \eta_2 \ldots \eta_k),$$

гдѣ π алгебраическая функція $(x, \eta_1, \eta_2 \ldots \eta_m)$ и гдѣ $\eta_i = [\pi(x, \xi)]^{C_k}$ можно замѣнить $v_i \eta_i$ гдѣ v_i произвольное постоянное, а это равносильно замѣнѣ въ (85) $\lg \pi_k(x, \xi)$ на $\lg \pi_k(x, \xi) + \dfrac{\lg v_i}{C_k}$

II) Итакъ общее рѣшеніе опредѣляется уравненіями типа:

$$\lg \Phi(x, \xi, y, t) + \varrho(x, \xi) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg \pi_k(x \; \xi) = C \qquad (83)$$

II) Если G не зависитъ отъ (y, t), то, какъ выше, убѣждаемся обозначая черезъ G, π_k, ϱ раціональныя функціи величинъ, заключенныхъ въ скобки:

$$G(x, \xi, y, t) = \frac{\sum_{j=1}^{1=q} G(x, \xi, y, t_j)}{q} = G(x, \xi, y) = G(x, \xi)$$

$$\pi_k(x, \xi, y, t, \sqrt[n]{G(x, \xi)}) = \frac{\sum_{j=1}^{1=q} \pi_k[x, \xi, y, t, \sqrt[n]{G(x, \xi)}]}{q} =$$

$$= \pi_k[x, \xi, y, \sqrt[n]{G(x, \xi)}] = \pi_k[x, \xi, \sqrt[n]{G(x, \xi)}]$$

и точно такимъ же образомъ:

$$\varrho[x, \xi, y, t, \sqrt[n]{G(x, \xi)}) = \varrho[x, \xi, \sqrt[n]{G(x, \xi)}]$$

и поэтому общій интегралъ получаемъ въ формѣ:

$$\lg \Phi[x, \xi, \sqrt[n]{G(x, \xi)}, y, t] + \varrho[x, \xi, \sqrt[n]{G(x, \xi)}] + \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \lg \pi_k[x, \xi, \sqrt[n]{G(x, \xi)}] = C \qquad (86)$$

подъ которую, какъ частный случай подходитъ форма (83).

Изъ уравненія (86) получаемъ:

$$\Phi[x,\ \xi,\ \sqrt[n]{G(x,\ \xi)},\ y,\ t] =$$
$$= C'_0 e^{\rho[x,\ \xi,\ \sqrt[n]{G(x,\ \xi)}]} \prod_{k=1}^{k=m} \Big[\pi_k[x,\ \xi,\ \sqrt[n]{G(x,\ \xi)}]\Big]^{\lambda_k} \qquad (87)$$

Переходя къ формамъ интеграловъ, отвѣчающихъ $\alpha^j \sqrt[n]{G(x,\ \xi)}$ будемъ имѣть также

$$\Phi[x,\ \xi,\ \alpha^j \sqrt[n]{G(x,\ \xi)},\ y,\ t] =$$
$$= C'_j e^{\rho[x,\ \xi,\ \alpha^j \sqrt[n]{G(x,\ \xi)}]} \prod_{k=1}^{k=m} \Big[\pi_k[x,\ \xi,\ \alpha^j \sqrt[n]{G(x,\ \xi)}]\Big]^{\lambda_k} \qquad (87_j)$$

Умножая уравненія (87_j) на α^{-j} и почленно складывая, получаемъ, имѣя въ виду, что, согласно первой статьѣ

$$C'_j = C'^{\alpha^{-j}}_0$$

$$\Phi(x,\ \xi,\ y,\ t \sqrt[n]{G(x,\ \xi)} =$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{j=n-1} C_0^{\alpha^{-j}} \alpha^{-j} e^{\rho[x,\ \xi,\ \alpha^j \sqrt[n]{G(x,\ \xi)}]} \prod_{k=1}^{k=m} \pi^{\lambda_k}[x,\ \xi,\ \alpha^j \sqrt[n]{G(x,\ \xi)}] \qquad (88)$$

Такимъ образомъ мы получаемъ общую форму для рѣшенія дифференціальнаго уравненія перваго порядка и второго класса.

Полученный результатъ можетъ быть еще слѣдующимъ образомъ формулированъ:

$$\lg \Phi[x,\ \xi,\ y,\ t,\ \alpha^j \sqrt[n]{G(x,\ \xi)}] + \varrho[x,\ \xi,\ \alpha^j \sqrt[n]{G(x,\ \xi)}] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \lg \pi_k[x,\ \xi,\ \alpha^j \sqrt[n]{G(x,\ \xi)}] = C_j \qquad (84_j)$$

Умножая на α^{-j} и складывая почленно, имѣемъ

$$\lg \prod_{j=0}^{j=n-1} \Phi^{\alpha^{-j}}[x,\ \xi,\ y,\ t,\ \alpha^j \sqrt[n]{G(x,\ \xi)}] = \varrho(x,\ \xi) \sqrt[n]{G(x,\ \xi)} +$$
$$+ \sum_{k=0}^{k=m} \lambda_k \lg \prod_{j=0}^{j=n-1} \pi_k^{\alpha^{-j}}[x,\ \xi,\ \alpha^j \sqrt[n]{G(x,\ \xi)}] + C. \qquad (89)$$

гдѣ ϱ и π означаютъ раціональныя функціи величинъ, заключенныхъ въ скобки.

Полагая

$$\gamma = \lg \prod_{j=0}^{j=n-1} \Phi^{\alpha^{-j}}[x, \xi, y, t, \alpha^{-j}\sqrt[n]{G(x, \xi)}] \tag{90}$$

будемъ имѣть:

$$\frac{d\gamma}{dx} = \varphi(x, \xi)\sqrt[n]{G(x, \xi)} \tag{91}$$

гдѣ $\varphi(x, \xi)$ раціональная функція.

Итакъ, *если дифференціальное уравненіе перваго порядка разрѣшается съ помощью однихъ алгебраическихъ, степенныхъ и показательныхъ функцій, т. е. принадлежитъ ко второму классу, то подстановкой:*

$$\gamma = \lg \prod_{j=0}^{j=n-1} \Phi^{\alpha^{-j}}[x, \xi, y, t, \alpha^{j}\sqrt[n]{G(x, \xi)}], \tag{92}$$

дифференціальное уравненіе приводится къ квадратурѣ

$$\frac{d\gamma}{dx} = \varphi(x, \xi)\sqrt[n]{G(x, \xi)} \tag{93}$$

Абелевъ интегралъ

$$\gamma = \int \varphi(x, \xi)\sqrt[n]{G(x, \xi)}\, dx, \tag{94}$$

которымъ опредѣляется γ, принадлежитъ къ типу Абелевыхъ интеграловъ, впервые изслѣдованныхъ Кенигсбергеромъ [1]), а затѣмъ нами въ нашей диссертаціи [2]). Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$G(x, \xi) = z^r$$

$$\pi(x, \xi) = 0,$$

и, исключая ξ имѣемъ

$$\Phi(x, z) = 0$$

$$\xi = \omega(x, z),$$

гдѣ ω раціональная функція; имѣемъ

$$\gamma = \int F(x, y^n)\, y^r\, dx \tag{95}$$

---

[1]) *L. Koenigsberger.* Ueber die Reduction Abelscher Integrale auf niedere Integralformen. Journal de Crelle. 89. 1880 s. 89 и другія статьи.

[2]) *Д. Мордухай-Болтовской.* О приведеніи Абелевыхъ интеграловъ къ нисшимъ трансцендентнымъ ч. I. гл. III, ч. II. гл. II. В.

гдѣ $y = z^{\frac{1}{n}}$ опредѣляется уравненіемъ

$$\Phi(x\,,\ y^n) = 0 \tag{96}$$

Это и есть обычная форма *однозначныхъ интеграловъ Кенигсбергера*, въ которой мы вели ихъ изслѣдованіе.

Уравненіе (86) вмѣстѣ съ тѣмъ даетъ преобразованіе заданнаго уравненія (10) при помощи подстановки

$$\gamma = \Phi[x\,,\ \xi\,, \sqrt[n]{G(x, \xi)}\,,\ y\,,\ t] \tag{97}$$

въ уравненіе

$$\frac{d\gamma}{dx} = \varphi\,[x\,,\ \xi\,, \sqrt[n]{G(x, \xi)}]\,\gamma \tag{98}$$

Дифференціальное уравненіе перваго порядка второго класса преобразуется алгебраической подстановкой типа:

$$\gamma = \Phi[x\,,\ \xi\,, \sqrt[n]{G(x, \xi)}\,,\ y\,,\ t]\,,$$

гдѣ Φ *означаетъ раціональную функцію*

$$[x,\ \xi, \sqrt[n]{G(x, \xi)},\ y,\ t]$$

въ линейное уравненіе перваго порядка безъ послѣдняго члена.

Примѣръ.

Уравненіе

$$4y'^2(1+x)^2 - 4yy'(1+x) - xy^2 - 1 = 0 \tag{99}$$

или, что тоже, уравненіе

$$2(1+x)\,dy - (y+t)\,dx = 0$$

гдѣ

$$t^2 = (1+x)\,y^2 + 1 \tag{100}$$

имѣетъ общій интегралъ опредѣляемый уравненіемъ:

$$y\sqrt{1+x} = \frac{Ce^{\sqrt{1+x}} - C^{-1}e^{-\sqrt{1+x}}}{2} \tag{101}$$

Здѣсь

$$G(x\,,\ \xi) = G(x) = 1 + x$$

$$n = 2\,,\quad \alpha = -1$$

Изъ уравненія (101) имѣемъ:

$$Ce^{\sqrt{1+x}} = y\sqrt{1+x} \pm \sqrt{y^2(1+x)+1}\,,$$

а такъ какъ на основаніи уравненія (100)

$$t = \pm\sqrt{y^2(1+x)+1}\,,$$

$$y\sqrt{1+x} + t = Ce^{\sqrt{1+x}}$$

$$\lg(t + y\sqrt{1+x}) + \lg\frac{1}{\sqrt{1+x}} = C\,.$$

Уравненіе (99) при помощи трансцендентной подстановки

$$\gamma = \lg\,\frac{t + y\sqrt{1+x}}{t - y\sqrt{1+x}}$$

преобразуется въ уравненіе

$$\frac{d\gamma}{dx} = 0\,,$$

а при помощи алгебраической подстановки

$$\gamma = t + y\sqrt{1+x}$$

въ линейное уравненіе:

$$\frac{d\gamma}{dx} + \frac{\gamma x}{2(1+x)} = 0$$

§ 10. Теперь разсмотримъ случай уравненій третьяго класса.

На основаніи § 8 мы имѣемъ, что

$$\psi_k[x\,,\ \xi\,,\ y\,,\ t\,,\ \sqrt[n]{G(x,\ \xi,\ y,\ t)}]$$

не зависитъ отъ $(y\,,\ t)$.

Различая опять два случая, когда

I) *G зависитъ и* **II)** *не зависитъ отъ* $(y\,,\ t)$,

убѣждаемся, что въ первомъ случаѣ интегралъ дифференціальнаго уравненія перваго порядка будетъ вида:

$$\Phi[x\,,\ \xi\,,\ y\,,\ t, \sqrt[n]{G(x, \xi, y, t)}] + \varrho(x,\ \xi) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg \pi_k(x,\ \xi) = C \quad (102)$$

Переходя къ другимъ формамъ интеграла, отвѣчающимъ

$$\overset{j}{\alpha}\sqrt[n]{G(x,\ \xi,\ y,\ t)}$$

имѣемъ:

$$\Phi[x, \xi, y, t, \overset{j}{\alpha}\sqrt[n]{G(x, \xi, y, t)}] + \varrho(x, \xi) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg \pi_k(x,\ \xi) = C_j \quad (102_j)$$

умножая на α^{-j} и почленно складывая, получаемъ алгебраическій интегралъ вида:

$$\Phi(x, \xi, y, t)\sqrt[n]{G(x, \xi, y, t)} = C \tag{103}$$

чего быть не можетъ, ибо взятое уравненіе по предположенію 3-го, а не 1-го класса.

Въ случаѣ G не зависящаго отъ (y, t), какъ въ § 8, получаемъ:

$$\Phi[x, \xi, \sqrt[n]{G(x, \xi)}, y, t] = \varrho[x, \xi, \sqrt[n]{G(x, \xi)}] + \\ + \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \lg \pi_k [x, \xi \sqrt[n]{G(x, \xi)}] + C \tag{104}$$

и кромѣ того

$$\Phi[x, \xi, \alpha^j \sqrt[n]{G(x, \xi)}, y, t] = \varrho[x, \xi, \alpha^j \sqrt[n]{G(x, \xi)}] + \\ + \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \lg \pi_k [x, \xi, \alpha^j \sqrt[n]{G(x, \xi)}] + C \tag{104_j}$$

Умножая на α^{-j} и почленно складывая получаемъ:

$$\Phi(x, \xi, y, t)\sqrt[n]{G(x, \xi)} = \varrho(x, \xi)\sqrt[n]{G(x, \xi)} + \\ + \sum_{k=1}^{\gamma=m} \lambda_k \lg \prod_{j=0}^{j=n-1} \pi_k^{\alpha^{-j}} [x, \xi, \alpha^j \sqrt[n]{G(x, \xi)}] + C \tag{105}$$

это—*общая форма для рѣшенія дифференціальнаго уравненія перваго порядка 3-го класса.*

Изъ уравненія (105) слѣдуетъ, что, *если дифференціальное уравненіе перваго порядка рѣшается при помощи однихъ алгебраическихъ и логариѳмическихъ функцій, а потому принадлежитъ къ третьему классу, то это уравненіе алгебраической подстановкой типа:*

$$\gamma = \Phi[x, \xi, t, \sqrt[n]{G(x, \xi)}] \tag{106}$$

гдѣ Φ означаетъ раціональную функцію величинъ, заключенныхъ въ скобки, приводится къ квадратурѣ:

$$\frac{d\gamma}{dx} = \varphi(x, \xi)\sqrt[n]{G(x, \xi)} \tag{107}$$

гдѣ φ раціональная функція (x, ξ).

Примѣръ. Дифференціальное уравненіе:

$$x + y^2 - 6(1-x)yy' + \frac{3(1-x)^2}{x} = 0 \tag{108}$$

легко приводимое къ виду

$$(1 + 2yy')\sqrt[3]{1-x} - \frac{(x+y^2)}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}} = \frac{\sqrt[3]{1-x}}{x}$$

имѣетъ интегралъ

$$(x+y^2)\sqrt[3]{1-x} = C +$$

$$+ 3\sqrt[3]{1-x} - \lg(\sqrt[3]{1-x} - 1)(\alpha\sqrt[3]{1-x} - 1)^{\alpha^{-1}}(\alpha^2\sqrt[3]{1-x} - 1)^{\alpha^{-2}}$$

гдѣ

$$\alpha = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \qquad i = \sqrt{-1}$$

откуда слѣдуетъ, что уравненіе (108) алгебраической подстановкой

$$\gamma = (x+y^2)\sqrt[3]{1-x}$$

приводится къ

$$\frac{d\gamma}{dx} = \frac{\sqrt[3]{1-x}}{x}$$

здѣсь

$$n = 3, \qquad G(x, \xi) = G(x) = \sqrt[3]{1-x}$$

§ 11. Замѣчая, что алгебраическое рѣшеніе т. е. рѣшеніе уравненія перваго класса опредѣляется уравненіемъ типа:

$$\Phi(x, \xi, y, t) = C, \tag{109}$$

а потому

$$\gamma = \Phi(x, \xi, y, t)\sqrt[n]{G(x, \xi)}$$

$$G(x, \xi) = 1$$

мы можемъ слѣдующимъ образомъ резюмировать полученные результаты.

I) *Если рѣшеніе уравненія перваго порядка выражается въ конечномъ видѣ, то это уравненіе одной изъ подстановокъ*

$$\gamma = \Phi(x, \xi, y, t)\sqrt[n]{G(x, \xi)} \tag{109}$$

или

$$\gamma = \lg\prod_{j=0}^{j=n-1}\Phi^{\alpha^{-j}}[x, \xi, y, t, \alpha^j\sqrt[n]{G(x, \xi)}] \tag{110}$$

гдѣ Φ, G *раціональныя функція величинъ, заключенныхъ въ скобки, приводится къ уравненію*

$$\frac{d\gamma}{dx}=\varphi(x, \xi)\sqrt[n]{G(x, \xi)}$$

φ, G *раціональныя функціи* (x, ξ).

II) *Если общее рѣшеніе дифференціальнаго уравненія перваго порядка выражается въ конечномъ видѣ, то это уравненіе алгебраической падстановкой:*

$$\gamma=\Phi[x, \xi, y. t, \sqrt[n]{G(x, \xi)}] \tag{111}$$

гдѣ Φ *раціональная функція*

$$[x, \xi, y, t, \sqrt[n]{G(x, \xi)}]$$

преобразуется въ линейное уравненіе перваго порядка

$$\frac{d\gamma}{dx}+\varphi[x, \xi, \sqrt[n]{G(x, \xi)}]\,y=\psi(x, \xi, \sqrt[n]{G(x, \xi)}] . \tag{112}$$

съ коэффиціентами, раціональными относительно:

$$[x, \xi, \sqrt[n]{G(x, \xi)}],$$

гдѣ G *раціональная функція* (x, ξ).

Дифференціальное уравненіе перваго порядка мы брали въ формѣ:

$$M(x, \xi, y, t)\,dx+N(x, \xi, y, t)=0, \tag{10}$$

гдѣ M, N раціональныя функціи (x, ξ, y, t), t опредѣляется уравненіемъ

$$F(x, \xi, y, t)=0 \tag{11}$$

неприводимымъ въ области раціональныхъ функцій (x, ξ, y), а ξ уравненіемъ

$$\pi(x, \xi)=0, \tag{3}$$

неприводимымъ въ области раціональныхъ функцій x.

Отъ формы (10) легко перейти къ обычной

$$f(x, \xi, y, y')=0 \tag{2}$$

полагая $f=\triangle$, гдѣ $\triangle$ опредѣляется уравненіемъ

$$f(x, \xi, y, \triangle)=0. \tag{4}$$

Добавленіе къ статьѣ I-й.

(Д. Д. Мордухай-Болтовского).

Во избѣжаніе неясности въ § 4 I-й статьи слѣдуетъ имѣть въ виду, что $H(\theta, m)$ мы можемъ предполагать не зависящимъ не только отъ θ, но и отъ x, такъ что въ уравненіяхъ (22) и (26) C постоянныя.

Въ самомъ дѣлѣ въ противномъ случаѣ, если бы

$$H(\theta, m) + H_1(\theta_1, m)$$

была алгебраической функціей отъ трансцендентной θ_1, то имѣли бы

$$H_1(\theta_1, m) = \alpha,$$

гдѣ α рѣшеніе уравненія (54), и изъ приведенныхъ выше разсужденій слѣдовало бы, что θ_1 можно замѣнить постоянной. Такимъ образомъ $H(\theta, m)$ можетъ быть только алгебраической функціей, но тогда уравненіе (54) имѣетъ алгебраическое рѣшеніе, а уравненіе (6) алгебраическій интегралъ и потому алгебраическій интегрирующій множитель μ и для $\lg\mu$ мы очевидно имѣемъ форму (29).

Къ вопросу объ особенныхъ элементахъ коннекса.

II. Порядокъ и классъ сопряженнаго коннекса. Вліяніе на нихъ основныхъ точекъ и прямыхъ и собственно-особенныхъ элементовъ.

Д. М. Синцова.

1. Въ статьѣ подъ приведеннымъ заглавіемъ, напечатанной въ Извѣстіяхъ Казанскаго Физико-Математическаго Общества (2) т. XI стр. 71—102, установлены основанія классификаціи особенныхъ элементовъ коннекса на плоскости, основанныя на разсмотрѣніи соприкасающагося коннекса. Тамъ же (§ 4) введено понятіе полярной пары. Мы покажемъ здѣсь примѣненіе этого понятія къ опредѣленію порядка и класса сопряженнаго коннекса, подобно тому какъ въ теоріи плоскихъ кривыхъ пересѣченіе кривой съ ея первою поляроcю опредѣляетъ классъ кривой.

Задача эта разрѣшена Clebsch'емъ (Math. Ann. V) и Cyp. Stephanos'омъ (Bulletin Darboux, (2) IV). Не будетъ однако излишнимъ привести новый выводъ, въ виду полной аналогіи его съ опредѣленіемъ класса плоской кривой или кривой поверхности.

2. Классомъ плоской кривой $f(x_1\ x_2\ x_3) = 0$ называемъ число касательныхъ, которыя можно провести къ кривой черезъ точку X, не лежащую на кривой, что аналитически сводится къ опредѣленію числа рѣшеній, общихъ уравненіямъ

$$f(x_1\ x_2\ x_3) = 0 \quad \text{и} \quad \Sigma_i X_i f_i'(x_1\ x_2\ x_3) = 0$$

т. е. числа точекъ пересѣченія кривой и первой ея поляры, взятой относительно произвольной точки X.

Если $f = 0$ алгебраическое уравненіе общаго вида и степени m, то два эти уравненія степеней m и $m-1$ имѣютъ $m(m-1)$ общихъ рѣшеній, что и даетъ классъ кривой.

Классъ поверхности опредѣляемъ, какъ число касательныхъ плоскостей, которыя можно провести къ поверхности черезъ произвольно заданную прямую, или, все равно, черезъ двѣ произвольно заданныя точки; аналитически это сводится къ опредѣленію общихъ рѣшеній трехъ уравненій

$$f(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)=0\,,\quad \Sigma X_i f'_i=0\,,\quad \Sigma X'_i f'_i=0\,,$$

гдѣ X и X' двѣ точки, лежащія на данной прямой, но не на данной поверхности. Если уравненіе поверхности общее алгебраическое и степени m, то находимъ $m(m-1)^2$ общихъ рѣшеній,— т. е. $m(m-1)^2$ точекъ пересѣченія поверхности съ двумя ея первыми полярами относительно двухъ точекъ, не лежащихъ на поверхности.

Порядкомъ коннекса мы называемъ порядокъ кривой K_u, принадлежащей произвольно заданной прямой u, т. е. число принадлежащихъ ему элементовъ (x, u), которыхъ точка x лежитъ на данной прямой, а прямая u дана, т. е. проходитъ черезъ двѣ данныя точки. Слѣдоват., порядокъ сопряженнаго коннекса опредѣлится, какъ число его элементовъ (y, v), которыхъ точка y лежитъ на даной прямой U, а прямая v дана, т. е. проходитъ черезъ двѣ данныя точки X и X'. Аналитически это выразится уравненіями:

$$f(x,\ u)=0\,, \tag{1}$$

$$\varrho v_i = f'_{x_i} \tag{2}$$

$$\sigma y_k = f'_{u_k}\,, \tag{3}$$

$$U_y=0\quad v_X=0\quad v_{X'}=0 \tag{4}$$

число системъ значеній y, удовлетворяющихъ этимъ уравненіямъ, и есть порядокъ сопряженнаго коннекса. Систему эту можемъ замѣнить другою

$$f(x,\ u)=0\,, \tag{1}$$

$$\Sigma X f'_x=0\,, \tag{5}$$

$$\Sigma X' f'_x=0\,, \tag{6}$$

$$\Sigma U f'_u=0\,, \tag{7}$$

число значеній (x, u) удовлетворяющихъ которой и должно дать искомое число значеній y. Но двѣ системы (1)—(4) и (1), (5)—(7) не вполнѣ эквивалентны. Именно, въ силу (1) и (2) $v_x=0$, слѣдоват., x, X и X' должны лежать на одной прямой, т. е. должно быть

$$(xXX')=0\,. \tag{8}$$

Это уравненіе и должно замѣнить (1) во второй системѣ. Мы получаемъ такимъ образомъ систему уравненій (5)—(8), число рѣшеній которой и доставитъ намъ порядокъ сопряженнаго коннекса.

По формулѣ $N = \Sigma mm'n''n'''$ для числа элементовъ, общихъ четыремъ коннексамъ, которые въ данномъ случаѣ суть

$$(m-1,n)\,,\quad (m-1,n)\,,\quad (m,n-1)\,,\quad (1,0)$$

находимъ

$$m' = n\,[mn + 2\,(m-1)\,(n-1)]\,.$$

Совершенно подобнымъ образомъ найдемъ, что классъ сопряженнаго коннекса опредѣлится, какъ число элементовъ, общихъ четыремъ коннексамъ

$$\Sigma X f'_x = 0\,,\quad \Sigma U f'_u = 0\,,\quad \Sigma U' f'_u = 0\,,\quad (uUU') = 0 \tag{9}$$

и слѣдовательно, по той же формулѣ равенъ

$$n' = m\,[mn + 2\,(m-1)\,(n-1)]\,.$$

3. Приведенный выводъ отличается отъ вывода Clebsch-Lindemann'a (Leçons de géom. III p. 364) только отсутствіемъ введенія вспомогательныхъ бинарныхъ перемѣнныхъ и потому имѣетъ болѣе непосредственное геометрическое значеніе. Благодаря этому мы можемъ примѣнить теперь для опредѣленія порядка и класса сопряженнаго коннекса понятіе *полярной пары*.

Названіе это было мною дано въ цитированной статьѣ (§ 4) конфигураціи, опредѣленной уравненіями

$$f(x\,,\,u) = 0\,,\quad \Sigma X f'_x = 0\,,\quad \Sigma U f'_u = 0\,.\ ^{1)} \tag{10}$$

Порядокъ такой пары по извѣстнымъ формуламъ опредѣлится равнымъ

$$n\,[mn + (n-1)\,(2m-1)]$$

а классъ

$$m\,[mn + (m-1)\,(2n-1)]$$

Числа эти больше порядка и класса сопряженнаго коннекса соотвѣтственно на $n\,(n-1)$ и $m\,(m-1)$. По аналогіи съ кривыми поверхностями можно было бы ожидать, что числа эти должны совпадать. Не трудно однако усмотрѣть причину этой разницы и удалить постороннія рѣшенія.

Всякій элементъ $(x,\,u)$, принадлежащій системѣ (5)—(8), принадлежитъ и системѣ (1), (5)—(7), а слѣдовательно, и полярной парѣ (10), если X и U въ обоихъ случаяхъ одинаковы. Точно также каждый элементъ, удовлетворяющій системѣ уравненій (9), принадлежитъ парѣ (10).

[1]) Въ цитированной статьѣ вкралась досадная описка: въ § 4 (стр. 15 отдѣльныхъ оттисковъ или стр. 85 Изв. Каз. Физ.-Мат. Общ. (2) XI n⁰ 3) вмѣсто 2-го и 3-го уравненій (10) стоитъ уравненіе касательнаго билинейнаго коннекса.

Порядокъ пары мы опредѣлимъ выражая, что точка x должна лежать на данной прямой U', т. е. добавляя къ (10) еще уравненіе

$$U'_x = 0 \tag{11}$$

причемъ прямая U' *совершенно произвольна*. Здѣсь точка X не лежитъ необходимо на прямой U',—вообще говоря $U'_X \neq 0$.

Опредѣляя же порядокъ сопряженнаго коннекса, предполагаемъ, что касательная къ кривой X_u коннекса въ точкѣ ея x есть данная прямая U', т. е. $\sigma U'_i = f'_{x_i}$ и эта прямая проходитъ черезъ точку X, и слѣдовательно не только выполнено (11), но и

$$\Sigma U'_i X_i = U'_X = 0. \tag{12}$$

Вотъ разница въ опредѣленіи двухъ чиселъ. Въ остальномъ системы уравненій въ томъ и другомъ случаѣ одинаковы. Допустимъ теперь, что при опредѣленіи порядка пары мы беремъ прямую U', которая выполняла бы условіе (12). По принципу сохраненія числа (Schubert) число элементовъ, удовлетворяющихъ (10) и (11) при условіи (12), или безконечно велико или таково же, что и въ общемъ случаѣ. Предыдущее показываетъ, что перваго случая не будетъ, слѣдовательно, и при условіи (12) для порядка полярной пары получимъ тоже число. Но при условіи (12) уравненіямъ (10) и (11) можемъ удовлетворить полагая $x = X$. Дѣйствительно тогда (11) удовлетворится въ силу (12), а (10) сводится къ двумъ уравненіямъ

$$f(X, u) = 0, \quad \Sigma U f'_u(X, u) = 0. \tag{13}$$

Уравненія эти опредѣляютъ $n(n-1)$ касательныхъ u къ кривой коннекса (1), принадлежащей точкѣ X, которыхъ точки прикосновенія лежатъ на данной прямой U. Эти $n(n-1)$ элементовъ (X, u) при опредѣленіи порядка сопряженнаго коннекса являются рѣшеніями посторонними, ибо системѣ (5)—(8) они не удовлетворяютъ. Поэтому чтобы получить число, равное порядку сопряженнаго коннекса, нужно отъ числа элементовъ пары (10), которыхъ точка лежитъ на данной прямой, отнять $n(n-1)$,— число этихъ постороннихъ элементовъ. Тогда получимъ

$$n[mn + (2m-1)(n-1)] - n(n-1) = n[mn + 2(m-1)(n-1)] = m'.$$

Подобнымъ образомъ если при опредѣленіи класса пары (10) возьмемъ точку X', черезъ которую должны проходить u, на прямой U (такъ что $U_{X'} = 0$), мы получимъ тоже число элементовъ

$$m[mn + (2n-1)(m-1)],$$

общихъ четыремъ коннексамъ, но въ томъ числѣ будутъ находиться $m(m-1)$ элементовъ (x, U), выполняющихъ уравненія

$$f(x, U) = 0 \quad \Sigma X f'_x(x, U) = 0.$$

Точки этихъ элементовъ суть тѣ точки принадлежащей U кривой коннекса, касательныя которыхъ проходятъ черезъ точку X'. Эти элементы уравненіямъ (9) не удовлетворяютъ и потому являются рѣшеніями посторонними. Отбрасывая ихъ получимъ

$$m[(mn + (2n-1)(m-1)] - m(m-1) = m[mn + 2(m-1)(n-1)] = n'.$$

Такимъ образомъ порядокъ и классъ сопряженнаго коннекса могутъ быть опредѣлены съ помощью полярной пары.

4. Теоремы, приведенныя въ цитируемой статьѣ, позволяютъ еще иначе свести вопросъ объ опредѣленіи порядка сопряженнаго коннекса на полярныя пары. Именно, не трудно видѣть, что порядокъ этотъ равенъ числу элементовъ пересѣченія (1-ой категоріи) двухъ полярныхъ паръ, принадлежащихъ элементамъ (X, U), (X', U) съ одною и тою же прямою,—т. е. тѣхъ элементовъ, общихъ двумъ такимъ парамъ, которыхъ точки лежатъ на прямой XX' (Тамъ же, теорема III. § 4). Оба вопроса приводятся къ рѣшенію одной и той же системы уравненій.

Также и классъ сопряженнаго коннекса можетъ быть опредѣленъ, какъ число тѣхъ элементовъ (x, u) пересѣченія полярныхъ паръ, соотвѣтствующихъ элементамъ (X, U) (X, U') съ общею точкою, которыхъ прямыя u проходятъ черезъ точку X.

Дѣйствительно, элементы пересѣченія полярныхъ паръ, принадлежащихъ (X, U) и (X', U), опредѣляются уравненіями

$$f(x, u) = 0 \quad \Sigma X f'_x = 0, \quad \Sigma X' f'_x = 0 \quad \Sigma U f'_u = 0.$$

Общее число ихъ

$$n[(3m-2)mn + (3m-1)(m-1)(n-1)].$$

Съ парою точечно-особенныхъ элементовъ каждая полярная пара, принадлежащая элементу (X, U) съ какою угодно точкою X и съ одною и тою же прямою U, пересѣкается по однимъ и тѣмъ же

$$3(m-1)n[mn + (m-1)(n-1)]$$

элементамъ. Если ихъ отбросить, то остается

$$n[nm + 2(m-1)(n-1)]$$

элементовъ пересѣченія, для которыхъ не всѣ три частныя производныя по x обращаются въ 0, а слѣдовательно три уравненія

$$f=0 \quad \Sigma X f'_x=0 \quad \Sigma X' f'_x=0$$

могутъ быть совмѣстны лишь при условіи $(xXX')=0$.

Но такимъ образомъ число такихъ элементовъ пересѣченія опредѣляется именно тѣми уравненіями, которыми мы выше опредѣляли порядокъ сопряженнаго коннекса.

5. Такая постановка вопроса позволяетъ *оцѣнить вліяніе нѣкоторыхъ особенностей на порядокъ сопряженнаго коннекса,* т. е. сдѣлать для тернарныхъ коннексовъ первый шагъ для нахожденія формулъ, аналогичныхъ формуламъ Plücker'а.

Именно теорема 4 и 5 § 4 цитируемой статьи позволяютъ оцѣнить вліяніе основной точки и основной прямой на порядокъ и классъ сопряженнаго коннекса.

Напомнимъ ихъ: 4) Если коннексъ $f=0$ имѣетъ основную точку $x_{осн}$, то.... двѣ пары, взятыя относительно элементовъ (X, U), (X, U') имѣютъ ∞^1 общихъ элементовъ, составленныхъ основною точкою и касательными къ кривой $\Sigma X f'_x(x_{осн}, u)=0$ n-го класса (т. е. онѣ имѣютъ общую пару $(0, n)$). Кромѣ того, двѣ такихъ пары имѣютъ $m[mn+ 2(m-1)(n-1)]-n$ общихъ элементовъ, которыхъ точка не основная, а прямыя проходятъ черезъ точку UU'".

Теорема 5) — двойственна теоремѣ 4).

Теоремы эти могутъ быть выражены иначе такъ:

Теорема I. *Присутствіе основной точки въ коннексѣ (m, n) понижаетъ классъ коннекса ему сопряженнаго на n единицъ, а основная прямая понижаетъ порядокъ сопряженнаго коннекса на m единицъ.*

Дѣйствительно, при подстановкѣ координатъ основной точки $(x_{осн})$ въ уравненія (9) n⁰ 2 второе и третье изъ нихъ удовлетворятся, остаются уравненія

$$\Sigma X f'_x(x_{осн}, u)=0 \quad (uUU')=0$$

имѣющія n общихъ рѣшеній, которыя будутъ принадлежать всѣмъ полярнымъ парамъ, соотвѣтствующимъ различнымъ элементамъ (X, V) съ одною и тою же точкою X при условіи $(VUU')=0$.

Напротивъ система уравненій (5)—(8) n⁰ 2 не удовлетворится, ибо всегда можно X и X' выбрать такъ, чтобы $(x_{осн}XX') \neq 0$.

Двойственно при подстановкѣ координатъ основной прямой (9) не удовлетворяются, а (5)—(8) сводятся къ

$$(xXX')=0, \quad \Sigma U f'_u(x, u_{осн})=0$$

и даютъ m рѣшеній $(x, u_{осн})$.

Пріемъ доказательства наводитъ на дальнѣйшій результатъ. Пусть каждыя двѣ полярныя пары, взятыя относительно элементовъ (X, U) и (X', U), имѣютъ общую пару (μ, ν) одинаковую, каковы бы ни были точки X, X' и прямая U. Тогда въ числѣ элементовъ пересѣченія находится μ элементовъ этой пары, коихъ точки лежатъ на прямой XX'. Отбрасывая эти элементы, какъ общіе всѣмъ такимъ парамъ, тѣмъ самымъ понизимъ число собственныхъ элементовъ пересѣченія, а слѣдовательно, и порядокъ сопряженнаго коннекса на μ единицъ.

Точно также, если двѣ полярныя пары, соотвѣтствующія элементамъ (X, U), (X, U') имѣютъ общую пару (μ, ν), независящую отъ U, U' X, то въ числѣ элементовъ пересѣченія находится ν элементовъ этой пары, которыхъ прямыя проходятъ черезъ точку (U, U'). Эти элементы будутъ общими всѣмъ подобнымъ парамъ, каковы бы ни были U, U', а потому не должны быть принимаемы въ разсчетъ, и слѣдовательно, классъ сопряженнаго коннекса понижается на ν единицъ.

Вышеуказанное обстоятельство имѣетъ мѣсто, если коннексъ (1) имѣетъ пару собственно-особенныхъ элементовъ.

Отсюда:

Теорема II: *Если коннексъ (1) имѣетъ пару (μ, ν) собственно-особенныхъ элементовъ, то порядокъ сопряженнаго ему коннекса понижается на μ, классъ—на ν единицъ.*

6. Примѣры.

1) Коннексъ (2,1):

$$f = a_1 u_1 x_2 x_3 + a_2 u_2 x_3 x_1 + a_3 u_3 x_1 x_2 = 0$$

имѣетъ три основныя точки

$$(x_1 = 0,\ x_2 = 0), \quad (x_1 = 0,\ x_3 = 0), \quad (x_2 = 0,\ x_3 = 0),$$

вершины координатнаго треугольника. Такая особенность по теоремѣ I должна оставить порядокъ сопряженнаго коннекса безъ измѣненія, а классъ понизить на 3, т. е. вмѣсто 2 и 4 должны получить 2 и 1; и дѣйствительно сопряженный коннексъ имѣетъ уравненіе

$$a_1 v_1 y_2 y_3 + a_1 v_2 y_1 y_3 + a_3 v_3 y_1 y_2 = 0$$

тожественное съ исходнымъ уравненіемъ, т. е. это коннексъ 2-го порядка и 1-го класса, самъ себѣ сопряженный.

2) Для коннекса

$$f = k_1 x_1^2 u_1^2 + k_2 x_2^2 u_2^2 + k_3 x_3^2 u_3^2 = 0$$

пары собственно особенныхъ элементовъ суть

$$\begin{array}{lll} x_1=0\,, & u_2=u_3=0 & \\ x_2=0\,, & u_1=u_3=0 & \text{и} \\ x_3=0\,, & u_2=u_1=0 & \end{array} \qquad \begin{array}{lll} x_1=0 & x_2=0 & u_3=0 \\ x_1=0 & x_3=0 & u_2=0 \\ x_2=0 & x_3=0 & u_1=0 \end{array}$$

т. е. 3 пары (1,0) и 3 пары (0,1). Ими исчерпываются и всѣ точечно-особенные элементы и линейно-особенные и при подсчетѣ порядка и класса онѣ должны быть считаемы вдвойнѣ (см. ниже n⁰ 10).

Слѣдовательно, порядокъ и классъ сопряженнаго коннекса должны быть равны

$$2\,[2\,.\,2+2\,(2-1)\,(2-1)]-3\,.\,2=12-6=6\,.$$

вмѣсто 12, и дѣйствительно вычисляя, находимъ

$$\sum_i \sqrt[3]{\frac{v_i^2\,y_i^2}{k_i}}=0\,,\ ^{1)}$$

и освобождаясь отъ радикаловъ:

$$\left[\sum_i\left(\frac{v_i^2\,y_i^2}{k_i}\right)\right]^3-27\prod\frac{v_i^2\,y_i^2}{k_i}=0\,;$$

сопряженный коннексъ такимъ образомъ 6-го порядка и 6-го класса.

7. Разобранные выше случаи представляются лишь простѣйшими, какіе могутъ представиться. Далѣе нужно, опредѣлить пониженіе порядка и класса сопряженнаго коннекса благодаря наличности *коинциденціи* собственно-особенныхъ элементовъ. Можно составить представленіе себѣ, на основаніи одного частнаго случая, каково должно быть это вліяніе.

Если коннексъ $f(x\,,\,u)=0$ степеней $m\,,\,n$ относительно x и u соотвѣтств., распадается на два:

$$\varphi\,(x\,,\,u)=0 \qquad (m-p\,,\;n-q)$$

и

$$\psi\,(x\,,\,u)=0 \qquad (p\,,\;q)$$

т. е.

$$f(x\,,\,u)=\varphi\,(x\,,\,u)\,.\,\psi\,(x\,,\,u)$$

то, какъ нетрудно видѣть, его сопряженный коннексъ представитъ собою совокупность сопряженныхъ коннексовъ множителей $\varphi=0$ и $\psi=0$.

---

[1]) Здѣсь, какъ и въ дальнѣйшихъ примѣрахъ, суммы и произведенія берутся по i отъ 1 до 3.

Допустимъ, что коннексы φ и ψ самые общіе въ своемъ родѣ, никакихъ особенностей неимѣющіе; ихъ сопряженные коннексы будутъ слѣдовательно, порядковъ

$q\,[pq + 2\,(p-1)\,(q-1)]$ и $(m-p)\,[(m-p)\,(n-q) + 2\,(m-p-1)\,(n-q-1)]$

и классовъ

$p\,[pq + 2\,(p-1)(q-1)]$ и $(m-p)\,[(m-p)(n-q) + 2\,(m-p-1)\,(n-q-1)]$.

Совокупность же ихъ,—т. е. сопряженный коннексъ даннаго имѣетъ порядокъ и классъ, равные суммѣ порядковъ, соотвѣтственно классовъ коннексовъ-множителей.

Пониженіе

$$\begin{aligned}\triangle m' &= n\,[mn + 2\,(m-1)\,(n-1)] - q\,[pq + 2\,(p-1)\,(q-1)] - \\ &\quad - (n-q)\,[(m-p)\,(n-q) + 2\,(m-p-1)\,(n-q-1)] = \\ &= (3m-4)\,.\,q\,(n-q) + (3n-2)\,[q\,(m-p) + p\,(n-q)].\end{aligned}$$

Двойственнымъ образомъ классъ понижается на $\triangle n'$:

$$\triangle n' = (3m-2)\,[p\,(n-q) + q\,(m-p)] + (3n-4)\,p\,(m-p).$$

Особенностью нашего коннекса является коинциденція, общая коннексамъ

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0,$$

ея порядокъ, рангъ и классъ суть

$$\begin{aligned}\mu_1 &= p\,(m-p)\\ \varrho_1 &= p\,(n-q) + q\,(m-p)\\ \nu_1 &= q\,(n-q).\end{aligned}$$

Такимъ образомъ

$$\begin{aligned}\triangle m' &= (3m-4)\,\nu_1 + (3n-2)\,\varrho_1\\ \triangle n' &= (3m-2)\,\varrho_1 + (3n-4)\,\mu_1\end{aligned}$$

На самомъ дѣлѣ однако общая формула болѣе сложная и къ разсмотрѣнному случаю непосредственно не примѣняется.

Мы придемъ къ желаемому результату, если къ разобранному случаю пересѣченія двухъ полярныхъ паръ примѣнимъ пріемъ, указанный J. Goettler'омъ [1]) (Untersuchungen über den allgemeinen Raumconnex. Programm München 1899 г. § 3. Algebraische Probleme, welche sich auf ebene Connexe beziehen).

---

[1]) Аналогичными соображеніями можно доказывать и теорему II. См. n⁰ 10.

Предположимъ, что коннексъ (m, n) имѣетъ коинциденцію собственно-особенныхъ элементовъ, опредѣленную уравненіями

$$\varphi = 0 \qquad \psi = 0 \tag{1}$$

[т. е. какъ пересѣченіе коннексовъ (μ, ν) и (μ', ν')]. Тогда

$$f'_{x_i} = A_i \varphi + B_i \psi \quad \text{и} \quad f'_{u_i} = Y_i \varphi + Z_i \psi$$

и уравненія полярныхъ паръ перепишутся

$$\varphi \sum A_i X_i + \psi \sum B_i X_i = 0 \equiv \varphi . A_X + \psi . B_X = 0 \tag{2}$$

$$\varphi \sum A_i X'_i + \psi \sum B_i X'_i = 0 \equiv \varphi . A_{X'} + \psi . B_{X'} = 0 \tag{3}$$

$$\varphi \sum Y_i U_i + \psi \sum Z_i U_i = 0 \equiv \varphi . U_Y + \psi . U_Z = 0 \tag{4}$$

Для опредѣленія порядка и класса сопряженнаго коннекса и нужно найти порядокъ и классъ остаточной пары кривыхъ пересѣченія.

Коинциденція, общая (2) и (3), состоитъ 1) изъ коинциденціи (1); 2) изъ остаточной коинциденціи порядка $(m-1)^2 - \mu\mu'$, класса $n^2 - \nu\nu'$ и ранга $2(m-1)n - \mu\nu' - \nu\mu'$.

Двѣ эти коинциденціи имѣютъ общую пару кривыхъ,—которая будетъ пересѣченіемъ коинциденціи (1) съ коннексомъ

$$A_X B_{X'} - A_{X'} B_X = 0 \tag{5}$$

порядокъ котораго $= 2m - \mu - \mu' - 2$, и классъ $= 2n - \nu - \nu'$

Поэтому пара, о которой шла рѣчь, имѣетъ порядокъ и классъ:

$$\left.\begin{aligned} \varsigma &= \nu\nu' (2m - \mu - \mu' - 2) + (\mu\nu' + \nu\mu')(2n - \nu - \nu') \\ \sigma &= \mu\mu' (2n - \nu - \nu') + (\mu\nu' + \nu\mu')(2m - \mu - \mu' - 2) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Остаточная коинциденція пересѣкается съ третьимъ коннексомъ (4) по парѣ, которой порядокъ и классъ опредѣлятся какъ разность порядка 1^0 пары общей тремъ коннексамъ (2), (3), (4) и 2^0 пары общей 3 коннексамъ (1), (4), и которая будетъ имѣть порядокъ и классъ равный:

$$\left.\begin{aligned} \varsigma' &= mn^2 + 2(m-1)n(n-1) - [m\nu\nu' + (n-1)(\mu\nu' + \nu\mu')] \\ \sigma' &= (m-1)[(m-1)(n-1) + 2nm] - [m(\mu\nu' + \nu\mu') + (n-1)\mu\mu'] \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Отнимая отсюда (6), получимъ:

$$
\begin{aligned}
M = \varsigma' - \varsigma = m\,[mn+2\,(m-1)\,(n-1)] - [m\nu\nu' + (n-1)\,(\mu\nu'+\nu\mu')] - \\
- (2m-2)\,\nu\nu' - 2n\,(\mu\nu'+\nu\mu') + (\mu+\mu')\,\nu\nu' + (\nu+\nu')\,(\mu\nu'+\nu\mu') = \\
= m\,[mn+2\,(m-1)\,(n-1)] - (3m-2)\,\nu\nu' - (3n-1)\,(\mu\nu'+\nu\mu') + \\
+ [(\mu+\mu')\,\nu\nu' + (\nu+\nu')\,(\mu\nu'+\nu\mu')].
\end{aligned}
$$

Итакъ пониженіе порядка сопряженнаго коннекса, производимое наличностью коинциденціи ($\mu\mu'$, $\mu\nu'+\nu\mu'$, $\nu\nu'$) собственно-особенныхъ элементовъ, выражается формулою

$$\varDelta m' = (3m-2)\,\nu\nu' + (3n-1)\,(\mu\nu'+\nu\mu') - (\mu+\mu')\,\nu\nu' - (\nu+\nu')\,(\mu\nu'+\nu\mu').$$

Аналогично можно найти производимое тою же коинциденціей пониженіе класса сопряженнаго коннекса, разсматривая систему трехъ коннексовъ

$$\varphi A_X + \psi B_X = 0\,, \quad \varphi U_Y + \psi U_Z = 0\,, \quad \varphi U_{Y'} + \psi U_{Z'} = 0$$

Классъ остаточной пары

$$
\begin{aligned}
N = m\,[mn+2\,(m-1)\,(n-1)] - (3m-1)\,(\mu\nu'+\nu\mu') - \\
- (3n-2)\,\mu\mu' + \mu\mu'\,(\nu+\nu') + (\mu\nu'+\nu\mu')\,(\mu+\mu').
\end{aligned}
$$

Итакъ

$$\varDelta n' = (3m-1)\,(\mu\nu'+\nu\mu') + (3n-2)\,\mu\mu' - (\mu+\mu')\,(\mu\nu'+\nu\mu') - (\nu+\nu')\,\mu\mu'.$$

Мы можемъ такимъ образомъ формулировать слѣдующую теорему.

Теорема III. *Если коннексъ (m, n) имѣетъ коинциденцію собственно-особенныхъ элементовъ, опредѣляемую какъ пересѣченіе коннексовъ (μ, ν), (μ', ν'), то порядокъ сопряженнаго ему коннекса понижается на*

$$(3m-2)\,\nu\nu' + (3n-1)\,(\mu\nu'+\nu\mu') - \{(\mu+\mu')\,\nu\nu' + (\nu+\nu')\,(\mu\nu'+\nu\mu')\}$$

а классъ его понижается на

$$(3m-1)\,(\mu\nu'+\nu\mu') + (3n-2)\,\mu\mu' - \{(\mu+\mu')\,(\mu\nu'+\nu\mu') + (\nu+\nu')\,\mu\mu'\}$$

*единицъ**.

Если бы коинциденція собственно-особенныхъ элементовъ была задана только тремя характеристиками—порядкомъ, μ_1, рангомъ ϱ_1 и классомъ ν_1, то полученныя формулы приняли бы видъ:

$$(3m-2)\,\nu_1 + (3n-1)\,\varrho_1 - \gamma$$

$$(3m-1)\,\varrho_1 + (3n-2)\,\mu_1 - \delta$$

гдѣ γ и δ нѣкоторыя характеристическія числа, зависящія только отъ коинциденціи, но не выражаемыя вполнѣ черезъ $\mu_1\ \varrho_1\ \nu_1$:

$$\gamma = (\mu + \mu')\,\nu_1 + (\nu + \nu')\,\varrho_1$$

$$\delta = (\mu + \mu')\,\varrho_1 + (\nu + \nu')\,\mu_1.$$

8. Параграфы 1—5 настоящей статьи написаны еще въ 1902 г. Я разсчитывалъ пополнить ея результаты. Въ настоящее время я рѣшаюсь напечатать ее въ нѣсколько дополненномъ видѣ, полагая, что она все же представляетъ нѣкоторый интересъ. Отмѣчу, что вліяніе основной точки на порядокъ сопряженнаго коннекса (теорема I) было замѣчено покойнымъ проф. П. С. Назимовымъ въ сообщеніи „Объ особенностяхъ коннексовъ на плоскости и въ пространствѣ", сдѣланномъ 16/IX 1895 г., но оставшемся не опубликованнымъ. П. С. Назимовъ приходилъ къ своему результату однако совершенно инымъ путемъ, чѣмъ указанный здѣсь.

9. Приведу еще нѣсколько примѣровъ вычисленія сопряженныхъ коннексовъ.

1) Коннексъ

$$k_1 x_2^2 x_3^2 u_1 + k_2 x_3^2 x_1^2 u_2 + k_3 x_1^2 x_2^2 u_3 = 0$$

имѣетъ вершины координатнаго треугольника своими основными точками. Написавъ его уравненіе подъ видомъ

$$k_1 \frac{u_1}{x_1^2} + k_2 \frac{u_2}{x_2^2} + k_3 \frac{u_3}{x_3^2} = 0$$

видимъ, что элементъ (y, v) сопряженнаго коннекса опредѣляется по формуламъ

$$\varrho y_i = \frac{k_i}{x_i^2}$$

$$\sigma v_i = \frac{k_i u_i}{x_i^3}$$

Отсюда уравненіе сопряженнаго коннекса

$$v_1 \sqrt{\frac{k_1}{y_1}} + v_2 \sqrt{\frac{k_2}{y_2}} + v_3 \sqrt{\frac{k_3}{y_3}} = 0$$

или въ раціональномъ видѣ

$$0 = (k_1 v_1^2 y_2 y_3 + k_2 v_2^2 y_1 y_3 - k_3 v_3^2 y_1 y_2)^2 - 4 k_1 k_2 v_2^2 v_1^2 y_1 y_2 y_3^2.$$

Такимъ образомъ это коннексъ 4 порядка и 4 класса, а не (4, 16), какъ было бы при отсутствіи основныхъ точекъ. Три основныхъ точки *порядокъ* сопряженнаго коннекса не измѣнили, а *классъ* понизили на 12, т. е. на 4 каждая, какъ это и должно быть по теоремѣ I.

2) Коннексъ (2, 2):

$$k_1 x_2 x_3 u_2 u_3 + k_1 x_3 x_1 u_3 u_1 + k_3 x_1 x_2 u_1 u_2 = 0$$

имѣетъ вершины координатнаго треугольника основными точками, а стороны его основными прямыми. Поэтому на основаніи теоремы I его порядокъ и классъ должны быть

$$2\,[2\,.\,2 + 2\,(2-1)\,.\,(2-1)] - 3\,.\,2 = 6\,.$$

На самомъ дѣлѣ однако, замѣтивъ, что уравненіе коннекса можетъ быть написано

$$\sum \frac{k_1}{x_1 u_1} = 0$$

имѣемъ

$$\varrho\, y_i = -\frac{k_i}{x_i u_i^2}\,, \quad \sigma v_i = -\frac{k_i}{x_i^2 u_i}$$

и

$$\sum \sqrt[3]{k_i v_i y_i} = 0$$

уравненіе сопряженнаго коннекса, или въ раціональномъ видѣ

$$\left(\sum k_i v_i y_i\right)^3 - 27\, \Pi\, k_i v_i y_i = 0$$

Итакъ сопряженный коннексъ есть (3, 3), а не (6, 6), какъ было бы въ томъ случаѣ, если бы исходный коннексъ не имѣлъ другихъ особенностей. Но здѣсь онъ имѣетъ еще шесть паръ кривыхъ собственно-особенныхъ элементовъ спеціальнаго типа

$$\begin{array}{llll} x_1 = 0 \quad u_2 = 0 \quad u_3 = 0\,; & & x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad u_3 = 0 \\ x_2 = 0 \quad u_3 = 0 \quad u_1 = 0\,; & & x_2 = 0 \quad x_3 = 0 \quad u_1 = 0 \\ x_3 = 0 \quad u_1 = 0 \quad u_2 = 0\,; & & x_3 = 0 \quad x_1 = 0 \quad u_2 = 0 \end{array}$$

три изъ которыхъ (1,0) и три (0,1) и которыя по теоремѣ II должны понизить на 3 порядокъ и классъ сопряженнаго коннекса.

3) Подобнымъ образомъ коннексъ (4, 2):

$$k_1 x_2^2 x_3^2 u_1^2 + k_2 x_3^2 x_1^2 u_2^2 + k_3 x_1^2 x_2^2 u_3^2 = 0$$

$\left(\text{или} \sum k_i \frac{u_i^2}{x_i^2} = 0\right)$ даетъ $\varrho y_i = \frac{k_i u_i}{x_i^2}$, $\sigma v_i = \frac{k_i u_i^2}{u_i^3}$, откуда $\frac{\sigma}{\varrho} \frac{v_i}{y_i} = \frac{u_i}{x_i}$

и слѣдовательно,

$$\sum k_i \frac{u_i^2}{x_i^2} \equiv \frac{\sigma^2}{\varrho^2} \sum k_i \frac{v_i^2}{y_i^2},$$

т. е. *этотъ коннексъ (4, 2) самъ себѣ сопряженный*. Кромѣ трехъ основныхъ точекъ—вершинъ координатнаго треугольника—разсматриваемый коннексъ имѣетъ еще три вырожденныхъ коинциденціи собственно-особенныхъ элементовъ:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0 & u_1 = 0 \\ x_2 = 0 & u_2 = 0 \\ x_3 = 0 & u_3 = 0 \end{array}$$

При этомъ основныя точки являются двойными основными точками, для нихъ уничтожаются и всѣ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$, и онѣ принадлежатъ коинциденціи собственно-особенныхъ элементовъ.

4) Коннексъ (3, 3):

$$k_1 x_1^3 u_1^3 + k_2 x_2^3 u_2^3 + k_3 x_3^3 u_3^3 = 0$$

также не имѣетъ ни основныхъ точекъ, ни основныхъ прямыхъ, но для перечисленныхъ въ примѣрѣ 2 n⁰ 6 паръ кривыхъ уничтожаются не только всѣ первыя, но и всѣ вторыя производныя; этимъ этотъ коннексъ выходитъ за предѣлы *двойныхъ* особенностей. Сопряженный коннексъ есть

$$\sum_i \sqrt[5]{\frac{v_i^3 y_i^3}{k_i}} = 0$$

или въ раціональномъ видѣ:

$$0 = \left[\sum \frac{v_i^3 y_i^3}{k_i}\right]^5 - 625 \prod \left(\frac{v_i^3 y_i^3}{k_i}\right) \cdot \left[\sum \frac{v_i^6 y_i^6}{k_i} - 3 \sum \frac{v_i^3 v_j^3 y_i^3 y_j^3}{k_i k_j}\right]$$

т. е. (15, 15) вмѣсто (51, 51).

5) Можно построить болѣе общій примѣръ. Коннексъ $(2m, n)$:

$$\sum k_i \frac{u_i^n}{x_i^m} = 0$$

или

$$k_1 x_2^m x_3^m u_1^n + k_2 x_3^m x_1^m u_2^n + k_3 x_1^m x_2^m u_3^n = 0$$

имѣетъ сопряженнымъ коннексомъ:

$$\sum_i \sqrt[n-m-1]{\frac{y^n}{k_i v_i^m}} = 0$$

уравненіе это должно быть освобождено отъ радикаловъ.

При $m=2$, $n=1$ и при $m=2$, $n=2$ получаемъ приведенные уже выше случаи. При $m=2$, $n=4$ получаемъ для коннекса $(4, 4)$: $\Sigma k_1 x_2^2 x_3^2 u_1^4 = 0$ сопряженный коннексъ также $(4, 4)$: $\Sigma k_1 k_2 y_1^4 v_2^2 v_3^2 = 0$ вмѣсто $(136, 136)$.

При $m=2$, $n=5$ находимъ $n-m-1=2$ и тѣмъ же пріемомъ $\Sigma k_1^2 y_1^{10} v_2^4 v_3^4 - 2\Sigma y_1^5 y_2^5 v_1^2 v_2^2 v_3^4 = 0$, т. е. $(10, 8)$ вмѣсто $(220, 176)$.

При $m=2$, $n=6$, $n-m-1=3$ и сопряженный коннексъ будетъ

$$\left(\sum \frac{y_i^6}{k_i v_i^3}\right)^3 - 27 \prod \frac{y_i^6}{k_1 v_1^3} = 0$$

т. е. $(18, 18)$ вмѣсто $(324, 216)$.

Но сопряженнаго коннекса не получимъ, если $n=m+1$. Дѣйствительно вышеприведенное уравненіе сопряженнаго коннекса получаемъ замѣчая, что при $\varrho y_i = k_i u_i^{n-1} x_i^{-m}$ и $\sigma v_i = k_i u_i^n x_i^{-m-1}$ имѣемъ $\varrho^\lambda \sigma^\mu y_i^\lambda v_i^\mu = k_i^{\lambda+\mu} u_i^{\lambda(n-1)+\mu n} x_i^{-\lambda m - \mu(m+1)}$ и слѣдовательно, нужно выбрать λ, μ такъ чтобы

$$\lambda(n-1) + \mu n = n,$$

$$\lambda m + \mu(m-1) = m;$$

при $m=n-1$ уравненія эти не совмѣстны. Такъ если возьмемъ коннексъ $(4, 3)$:

$$\Sigma k_1 x_2^2 x_3^2 u_1^3 = 0$$

то получаемъ

$$\varrho y_i = k_i \left(\frac{u_i}{x_i}\right)^2, \quad \sigma v_i = k_i \left(\frac{u_i}{x_i}\right)^2,$$

откуда

$$\left(\varrho \frac{y_i}{k_i}\right)^3 = \left(\sigma \frac{v_i}{k_i}\right)^2,$$

или

$$\frac{y_1^3}{k_1 v_1^2} = \frac{y_2^3}{k_2 v_2^2} = \frac{y_3^3}{k_3 v_3^2}$$

Сопряженный коннексъ не существуетъ, а существуетъ сопряженная коинциденція. Обстоятельство это представляетъ аналогію съ развертывающимися поверхностями въ теоріи поверхностей,—представляющими систему одного измѣненія, если за основной элементъ брать плоскость.

Въ коннексахъ тернарныхъ можетъ явиться, какъ фигура, сопряженная коннексу или снова многообразіе трехъ измѣреній—коннексъ, (общій случай) или многообразіе двухъ измѣреній—коинциденція, или сопряженная пара кривыхъ (многообразіе одного измѣренія) или наконецъ конечное число элементовъ.

10. Приведенные выше примѣры показываютъ, что при отсутствіи другихъ особенностей, способныхъ оказать вліяніе на порядокъ и классъ сопряженнаго коннекса, вліяніе простыхъ основныхъ точекъ и прямыхъ оказывается именно такимъ, какъ это указывается теоремою I.

Примѣненіе теоремы II уже встрѣчаетъ нѣкоторыя затрудненія. Въ примѣрѣ 2 n⁰ 6 пониженіе оказывается вдвое бо́льшимъ, чѣмъ указывается теоремою. Но если обратимъ вниманіе на ея доказательство, то замѣтимъ, что первоначально имѣется въ виду число точекъ пересѣченія прямой XX' съ парою, общею всѣмъ полярнымъ парамъ (X, U), $(X' U)$; но при этомъ остается открытымъ вопросъ, какое число точекъ пересѣченія поглощаетъ каждая такая точка. Поэтому я приведу другое доказательство, которое съ одной стороны подтвердитъ справедливость теоремы, съ другой стороны покажетъ причину отмѣченнаго въ примѣрѣ уклоненія.

Пусть собственно-особенные элементы коннекса образуютъ пару, опредѣляемую уравненіями

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad \chi = 0, \tag{1}$$

т. е. какъ пересѣченіе коннексовъ (μ, ν), (μ', ν'), (μ'', ν'').

Это пара, которой порядокъ $\mu_2 = \Sigma\mu\nu'\nu''$ и классъ $\nu_2 = \Sigma\nu\mu'\mu''$.

Тогда

$$f'_{x_i} = A_i . \varphi + B_i . \psi + C_i . \chi$$

и точно также

$$f'_{u_i} = L_i . \varphi + M_i . \psi + N_i . \chi .$$

Уравненія (5), (6), (7) n⁰ 2 принимаютъ видъ

$$\left.\begin{aligned} \varphi A_X + \psi . B_X + \chi . C_X = 0 \\ \varphi A_{X'} + \psi . B_{X'} + \chi . C_{X'} = 0 \\ \varphi U_L + \psi . U_M + \chi . U_N = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Эти три коннекса при данныхъ X, X' и U, каковы бы они ни были, будутъ имѣть общую пару (1), и для опредѣленія порядка сопряженнаго коннекса нужна лишь остаточная пара, порядокъ и классъ которой получимъ отнимая порядокъ и классъ (1) отъ общаго порядка и класса; это доставитъ:

$$M-\mu_2=mn^2+2(m-1)n(n-1)-\mu_2$$

$$N-\nu_2=(n-1)(m-1)^2+2nm(m-1)-\nu_2$$

Порядокъ сопряженнаго коннекса и равенъ $M-\mu_2$ т. е. понижается на μ_2. Совершенно подобнымъ образомъ классъ сопряженнаго коннекса оказывается равнымъ $m^2n+2(m-1)m(n-1)-\nu_2$, какъ это и значится въ теоремѣ II.

Двѣ разсмотрѣнныя пары (т. е. (1) и остаточная) имѣютъ нѣкоторое число общихъ элементовъ,—удовлетворяющихъ (1) и уравненію

$$\Xi\equiv\begin{vmatrix} A_X & B_X & C_X \\ A_{X'} & B_{X'} & C_{X'} \\ U_L & U_M & U_N \end{vmatrix}=0$$

Точки этихъ элементовъ не лежатъ вообще на прямой XX' и потому въ расчетъ приниматься не могутъ. Но если многочлены φ, ψ, χ входятъ еще множителями въ нѣкоторые изъ членовъ этого опредѣлителя, то можетъ оказаться, что опредѣлитель уничтожается для каждаго элемента коинциденціи (1), т. е.

$$\Xi=\Phi.\varphi+\Psi.\psi+X.\chi=0\,.$$

Тогда такая пара должна быть считаема вдвойнѣ, ибо она входитъ вся и въ остаточную пару.

Примѣръ 2-й n⁰ 6 представляетъ именно такой случай. Здѣсь этотъ опредѣлитель (для пары $x_1=0$, $u_2=0$, $u_3=0$)

$$k_1k_2k_3u_1x_2x_3\,[U_1x_1u_2u_3\,(X_2X_2'-X_3X_2')+x_2U_2u_1u_3\,(X_1'X_3-X_3'X_1)+$$
$$+x_3u_1u_2U_3\,(X_1X_2'-X_1'X_2)]=0\,;$$

онъ обращается въ 0 для разсматриваемой пары; тоже имѣетъ мѣсто и по отношенію къ каждой изъ остальныхъ. Мы должны поэтому *удвоить* числа, указывающія пониженіе порядка и класса, производимое каждою парою.

ПРОТОКОЛЫ

засѣданій Харьковскаго Математическаго Общества

Засѣданіе 4 Декабря 1904 г.

1. Прочитанъ и утвержденъ протоколъ предыдущаго засѣданія.

2. Предсѣдатель доложилъ о полученныхъ книгахъ.

3. *Д. М. Синцовъ* доложилъ сообщеніе М. А. Тихомандрицкаго „О суммѣ угловъ плоскихъ треугольниковъ“.

4. *Н. Н. Салтыковъ* сдѣлалъ сообщеніе: „Примѣненіе теоріи непрерывныхъ группъ къ интегрированію дифференціальныхъ уравненій“.

5. По предложенію А. П. Пшеборскаго постановлено послать въ математическую читальню въ Гёттингенѣ 2-ую серію „Сообщеній“ Общества и имѣющіеся экземпляры 1-ой серіи.

Общее годичное засѣданіе 24 Ноября 1905 г.

1. Предсѣдатель напомнилъ о смерти И. М. Сѣченова, память котораго была почтена вставаніемъ.

2. Доложенъ и утвержденъ отчетъ о состояніи и дѣятельности Харьковскаго Математическаго Общества за 1904—1905 годъ.

3. По поводу отчета предсѣдатель замѣтилъ, что послѣ составленія отчета произведена уплата Зильбербергу въ размѣрѣ 348 руб. 25 коп. и предстоитъ платежъ за № 4 и 5 IX-го тома.

4. Произведенъ выборъ членовъ распорядительнаго комитета избраны: предсѣдателемъ проф. В. А. Стекловъ, товарищами предсѣдателя проф. А. П. Грузинцевъ и проф. Д. М. Синцовъ; секретаремъ проф. А. П. Пшеборскій.

Общее годичное собраніе 12 Ноября 1906 г.

1. Доложенъ и утвержденъ отчетъ о состояніи и дѣятельности Харьковскаго Математическаго Общества за $190^5/_6$ г.

2. По предложенію предсѣдательствующаго проф. Д. М. Синцова почтена вставаніемъ память скончавшихся математиковъ и физиковъ: E. Cesàro, Curie, Boltzman'a и P. Drude.

3. Предсѣдательствующій доложилъ о посылкѣ имъ отъ имени Общества привѣтственной телеграммы Полтавскому Обществу любителей физики и математики по поводу чествованія памяти акад. Остроградскаго.

4. Согласно § устава въ члены Общества безъ избранія вступилъ проф. Ц. К. Русьянъ.

5. Въ почетные члены Общества единогласно безъ баллотировки избраны: проф. В. А. Стекловъ, акад. G. Darboux, проф. F. Klein, проф. D. Hilbert, проф. Mittag-Leffler, проф. A. Mayer и проф. G. Cantor.

6. Произведенъ выборъ членовъ распорядительнаго комитета Общества на $190^6/_7$ академич. годъ; избраны: предсѣдателемъ проф. Д. М. Синцовъ, товарищами предсѣдателя: проф. А. П. Грузинцевъ и Ц. К. Русьянъ; секретаремъ проф. А. П. Пшеборскій.

7. Разсматривался и обсуждался вопросъ объ устройствѣ Математическаго Института при Математическомъ Обществѣ; поручено Н. Н. Салтыкову, Д. М. Синцову и А. П. Пшеборскому выработать общія основанія устава.

Очередное собраніе 18 Ноября 1906 г.

1. Доложенъ и утвержденъ протоколъ общаго годичнаго собранія.

2. *М. Н. Лагутинскій* сдѣлалъ сообщеніе: „Объ уравненіи въ частныхъ производныхъ: $(s^2 - rt)\ f(x, y) = 1$ или $s^2 - rt = f(p, q)$".

Очередное собраніе 12 Января 1907 г.

1. Прочитанъ и утвержденъ протоколъ предыдущаго засѣданія.

2. Доложены письма В. А. Стеклова, F. Klein'a, A. Mayer'a, D. Hilbert'a и G. Cantor'a съ выраженіемъ благодарности за избраніе въ почетные члены.

3. *М. Н. Лагутинскій* доложилъ статью Д. Д. Мордухай-Болтовского „Общія изслѣдованія, относящіяся къ интегрированію въ конечномъ видѣ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка".

4. *А. П. Пшеборскій* сдѣлалъ сообщеніе „О неаналитическихъ интегралахъ дифференціальныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ 1-го порядка".

Очередное засѣданіе 16 Февраля 1907 г.

1. Доложенъ и утвержденъ протоколъ предыдущаго засѣданія.

2. *Д. М. Синцовъ* сообщилъ о полученіи письма отъ проф. Mittag-Leffler'a съ выраженіемъ благодарности за избраніе почетнымъ членомъ.

3. Постановлено въ текущемъ году выписать слѣдующіе журналы: Acta mathematica, Mathésis, Intermédiaire des mathématiciens, Hoffmann's

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, причемъ на выписку ихъ постановлено ассигновать до 50 руб.

4. *А. П. Грузинцевъ* напомнилъ о смерти Moissan'a, Д. И. Менделѣева и Н. А. Меншуткина. Память ихъ почтена вставаніемъ.

5. *А. П. Пшеборскій* сдѣлалъ заявленіе о желаніи Г. А. Грузинцева привести въ порядокъ библіотеку Общества; Общество приняло это предложеніе съ благодарностью.

6. *А. П. Грузинцевъ* сдѣлалъ докладъ „Примѣненіе электромагнитной теоріи проводниковъ къ магнитно-оптическимъ явленіямъ“.

Очередное засѣданіе 9 Марта 1907 г.

1. Доложенъ и утвержденъ протококъ предыдущаго засѣданія.

2. *Д. М. Синцовъ* напомнилъ о смерти профессора Московскаго Университета В. Я. Цингера; память его почтена вставаніемъ.

А. П. Грузинцевъ напомнилъ о смерти академ. Berthelot; память его почтена вставаніемъ.

4. Предсѣдатель доложилъ письмо проф. Marcolongo съ предложеженіемъ обмѣна изданіями съ „Academia Peloritana“; постановлено вступить въ обмѣнъ и выслать 2-ую серію „Сообщеній“ Общества.

5. *А. П. Грузинцевъ* сдѣлалъ сообщеніе: „Рѣшеніе уравненій электромагнитной теоріи проводниковъ“.

6. *Г. А. Латышевъ* сдѣлалъ сообщеніе: „О геометрическомъ образованіи поверхностей, имѣющихъ напередъ заданныя плоскія сѣченія“.

7. Обсуждался вопросъ объ учительскихъ экзаменахъ.

Очередное засѣданіе 31 Марта 1907 г.

1. *Д. М. Синцовъ* сдѣлалъ сообщеніе „О постулатѣ Евклида (по поводу статьи проф. М. А. Тихомандрицкаго)“.

2. *Ц. К. Русьянъ* сдѣлалъ сообщеніе „Объ отклоненіи при свободномъ паденіи тяжелаго тѣла“.

Засѣданіе 6 Октября 1907 г.

1. Прочтены и утверждены протоколы предыдущихъ засѣданій.

2. *Д. М. Синцовъ* передалъ благодарность проф. G. Cantor'a по поводу избранія его почетнымъ членомъ Общества.

3. *Д. М. Синцовъ* сообщилъ о трудахъ проф. Schlesinger'a и предложилъ избрать его членомъ-корреспондентомъ Общества. Избранъ единогласно par acclamation.

4. *Д. М. Синцовъ* доложилъ о печатающихся въ настоящее время трудахъ въ „Сообщеніяхъ“ Общества.

5. *А. П. Пшеборскій* доложилъ статью С. Н. Бернштейна „Изслѣдованіе и интегрированіе дифференціальныхъ уравнененій эллиптическаго типа“.

6. *Д. М. Синцовъ* доложилъ статью В. А. Стеклова „Объ асимптотическихъ выраженіяхъ нѣкоторыхъ функцій, удовлетворяющихъ линейнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ 2-го порядка“.

7. Доложена просьба Казанскаго студенческаго математическаго кружка о высылкѣ изданій Общества. Постановлено высылать, начиная съ IX-го тома.

Общее годичное собраніе 14 Октября 1907 г.

1. Доложенъ и утвержденъ отчетъ о состояніи и дѣятельности Общества за 190$^6/_7$ академ. годъ.

2. Произведенъ выборъ распорядительнаго комитета на 190$^7/_8$ акад. годъ, при чемъ передъ выборами А. П. Пшеборскій просилъ не баллотировать его въ секретари въ виду отсутствія у него свободнаго времени. Избраны: предсѣдателемъ проф. Д. М. Синцовъ, товарищами предсѣдателя: проф. А. П. Грузинцевъ и проф. Ц. К. Русьянъ и секретаремъ проф. Н. Н. Салтыковъ.

3. Постановлено выразить А. П. Пшеборскому благодарность за несеніе обязанностей секретаря въ теченіе 8 лѣтъ.

4. Постановлено просить М. Н. Лагутинскаго быть и въ этомъ году библіотекаремъ Общества.

5. Постановлено выдать 75 руб. Г. А. Грузинцеву за приведеніе въ порядокъ библіотеки Общества.

6. Постановлено выписывать въ будущемъ году журналы: Acta mathematica, L'intermédiaire des mathématiciens, Mathésis и Hoffmann's Zeitschrift.

Засѣданіе 5 Ноября 1907 г.

1. Прочитанъ и утвержденъ протоколъ засѣданія 6 октября 1907 г.

2. *А. П. Пшеборскій* доложилъ статью Д. Д. Мордухай-Болтовского: „О преобразованіи ультра эллиптическихъ интеграловъ перваго класса формы

$$\int\frac{Cy+D}{\sqrt{R(y)}}\,dy=\int\frac{Ax+B}{\sqrt{R(x)}}\,dx$$

3. *М. Н. Лагутинскій* сообщилъ свое изслѣдованіе „О кратныхъ частныхъ интегралахъ“.

4. Постановлено вступить въ обмѣнъ изданіями съ новыми научными учрежденіями и обществами.

Засѣданіе 22 Декабря 1907 г.

1. Предсѣдатель предложилъ согласно рѣшенію распорядительнаго Комитета въ виду исполняющагося 1 Января 1908 года окончанія штатной службы проф. А. П. Грузинцева, состоявшаго членомъ Математическаго Общества съ самаго его основанія, состоявшаго секретаремъ его и послѣдніе годы товарищемъ предсѣдателя, избрать его въ почетные члены. Постановлено единогласно избрать въ почетные члены профессора А. П. Грузинцева. Относительно чествованія иного характера присоединиться къ тому, что организуетъ Общество Физико-Химическихъ Наукъ о чемъ поручить распорядительному комитету войти въ сношеніе съ распорядительнымъ комитетомъ Общества Физико-Химическихъ Наукъ.

2. *Д. М. Синцовъ* доложилъ статью Д. Д. Мордухай-Болтовского: „Общія изслѣдованія, относящіяся къ интегрированію въ конечномъ видѣ дифференціальныхъ уравненій 1-го порядка“, статья 2.

ОТЧЕТЪ

о состояніи и дѣятельности

Харьковскаго Математическаго Общества

за 190$^{6}/_{7}$ академич. годъ.

Дѣятельность Харьковскаго Математическаго Общества въ истекшемъ году открылась общимъ годичнымъ собраніемъ 12 Ноября 1906 г.

Въ этомъ собраніи послѣ чтенія и утвержденія отчета за 190$^{5}/_{6}$ ак. годъ избраны: предсѣдателемъ проф. Д. М. Синцовъ, товарищами предсѣдателя: проф. А. П. Грузинцевъ и Ц. К. Русьянъ и секретаремъ проф. А. П. Пшеборскій.

Въ отчетномъ году кромѣ годичнаго собранія Общество имѣло 5 очередныхъ засѣданій, на которыхъ сдѣлано 9 сообщеній чисто научнаго характера.

Въ 190$^{6}/_{7}$ акад. году Обществомъ издано было два первыхъ выпуска X тома „Сообщеній“ и въ настоящее время печатается одновременно продолженіе X тома и XI томъ.

„Сообщенія“ Общества по примѣру прежнихъ лѣтъ разсылались различнымъ русскимъ и иностраннымъ ученымъ Обществамъ и учрежденіямъ главнымъ образомъ въ обмѣнъ на ихъ изданія; такихъ Обществъ и учрежденій въ истекшемъ году было 65; изъ нихъ 40 русскихъ и 25 иностранныхъ.

Путемъ упомянутаго обмѣна пополнялась библіотека Общества; кромѣ того она пополнялась присылкой своихъ сочиненій отдѣльными учеными и путемъ выписки журналовъ: Acta mattematica, Intermédlaire des mathématiciens и Mathesis. Въ отчетномъ году библіотека Общества начала приводиться въ порядокъ благодаря трудамъ стипендіата Харьковскаго Университета Г. А. Грузинцева, такъ что есть полное основаніе предполагать, что, когда Общество получитъ отдѣльное помѣщеніе, библіотека Общества явится цѣннымъ учебно-вспомогательнымъ учрежденіемъ, какъ для преподавателей, такъ и для студентовъ физико-математическаъо факультета.

Переходя къ составу членовъ Общества, слѣдуетъ отмѣтить, что въ истекшемъ году въ почетные члены избраны: проф. В. А. Стекловъ, акад. G. Darboux и профессора: G. Cantor, D. Hilbert, F. Klein, A. Mayer G. Mittag-Leffler.

Въ дѣйствительные члены вошелъ безъ избранія проф. Харьковскаго Университета Ц. К. Русьянъ.

Такимъ образомъ къ концу отчетнаго года Общество состояло изъ 76 членовъ; изъ нихъ 18 почетныхъ, 45 дѣйствительныхъ и 13 членовъ корреспондентовъ.

Средства Общества состояли, какъ и въ прежніе годы, изъ пособій выдаваемыхъ Харьковскимъ Университетомъ и изъ добровольныхъ взносовъ, производимыхъ членами Общества.

Приходъ и расходъ средствъ Общества распредѣляется слѣдующимъ образомъ.

ПРИХОДЪ

1. Остатокъ отъ ассигновки Харьковскаго Университета къ 1 Ноября 1906 г. . . .	308 р.	40 к.
2. Ассигновано во второй половинѣ 1906 г. Университетомъ	225 „	— „
3. Возмѣщены Университетомъ недополученные Обществомъ по ассигновкѣ $190^{5}/_{6}$ г. .	133 „	40 „
4. Ассигновано Университетомъ единовременно изъ превышенія поступленій по смѣтѣ спеціальныхъ средствъ на 1906 г. .	500 „	— „
5. Остатокъ отъ собственныхъ средствъ Общества	49 „	58 „
6. Получено добровольныхъ взносовъ	25 „	— „
Итого въ приходѣ	1241 р.	38 к.

РАСХОДЪ

1. На печатаніе „Сообщеній“ Общества . .	256 р.	05 к.
2. Уплачено за переплеты книгъ библіотеки Общества	73 „	45 „
3. Почтовые расходы	13 „	31 „
4. Выписка журналовъ	16 „	55 „
5. Расходы по засѣданіямъ	20 „	— „
Итого въ расходѣ	379 р.	36 „

Такимъ образомъ къ 1 Октября 1907 года имѣется остатокъ въ 862 руб. 02 коп.; изъ нихъ въ кассѣ Университета находится 820 руб. 75 коп. и въ кассѣ Общества 41 руб. 27 коп.

Секретарь Общества *А. Пшеборскій.*