Общія изслѣдованія, относящіяся къ интегрированію въ конечномъ видѣ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка.

Статья II.

Д. Мордухай-Болтовского.

§ 1. Настоящая работа представляетъ продолженіе другой нашей работы, помѣщенной въ „Сообщеніяхъ Харьковскаго Математическаго Общества" подъ тѣмъ же названіемъ, въ которой нами рѣшался вопросъ *о формѣ общаго интеграла алгебраическаго дифференціальнаго уравненія перваго порядка, выражаемаго въ конечномъ видѣ.*

Мы намѣрены теперь показать, какъ можно, пользуясь полученными въ упомянутой статьѣ результатами, рѣшить другую задачу, относящуюся къ дифференціальнымъ уравненіямъ перваго порядка, задачу о розысканіи формы *общаго рѣшенія y уравненія*

$$f(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

выражаемаго въ конечномъ видѣ.

Въ отличіе отъ первой статьи, гдѣ мы уравненіе (1) предполагали неприводимымъ въ области раціональныхъ функцій (x, y) т. е. f не разложимымъ на множители съ раціональными относительно (x, y) коэффиціентами, мы будемъ теперь предполагать f раціональной относительно y, но не x и неприводимость уравненія (1) понимать въ смыслѣ *неразложимости f на множители, раціональные относительно (y, y').* Понимая подъ f раціональную функцію отъ величинъ, заключенныхъ въ скобки, уравненіе (1) можемъ писать въ видѣ:

$$f(x, \xi, y, y') = 0, \tag{2}$$

гдѣ ξ опредѣляется алгебраическимъ уравненіемъ:

$$\pi(x, \xi) = 0, \tag{3}$$

и предполагать уравненіе (2) неприводимымъ въ области раціональныхъ функцій (x, ξ, y).

Получаемая нами формула для общаго рѣшенія уравненія (2), выражаемаго въ конечномъ видѣ имѣетъ тоже значеніе для интегрированія въ конечномъ видѣ алгебраическихъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, какое имѣетъ при интегрированіи въ конечномъ видѣ алгебраическихъ функцій упомянутая въ первой статьѣ формула Абеля—Льювиля.

Мы получаемъ слѣдующій результатъ, представляющій другой видъ обобщенія теоремы Фукса [1]).

Если общее рѣшеніе неприводимаго алгебраическаго дифференціальнаго уравненія перваго порядка

$$f(x, \xi, y, y') = 0, \tag{2}$$

выражается въ конечномъ видѣ, то y получается исключеніемъ $\triangle$ изъ одной изъ слѣдующихъ системъ.

I система

$$f(x, \xi, y, \triangle) = 0 \tag{4}$$

$$\Phi(x, \xi, y, \triangle) = C. \tag{5}$$

Рѣшеніе алгебраическое.

II система

$$f(x, \xi, y, \triangle) = 0 \tag{4}$$

$$\Phi(x, \xi, y, \triangle) \sqrt[n]{G(x, \xi)} = C + \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \lg \prod_{i=0}^{k=n-1} \psi_k^{\alpha^{-i}} [x, \xi, \alpha^i \sqrt[n]{G(x, \xi)}] \tag{6}$$

Рѣшеніе логариѳмическаго типа.

III система

$$f(x, \xi, y, \triangle) = 0 \tag{4}$$

$$\Phi(x, \xi, y, \triangle) \sqrt[n]{G(x, \xi)} = \frac{\sum_{i=0}^{i=n-1} \alpha^{-i} C^{\alpha i} e^{\omega(x, \xi, \alpha^i \sqrt[n]{G(x, \xi)})} \prod_{k=1}^{k=n-1} \psi_k^{\lambda k} [x, \xi, \alpha^i \sqrt[n]{G(x, \xi)}]}{n} \tag{7}$$

Рѣшеніе показательно-степенного типа.

Во всѣхъ этихъ системахъ:

Φ раціональная функція $(x, \xi, y, \triangle)$,

ψ_k. ω раціональныя функціи $[x, \xi, \sqrt[n]{G(x, \xi)}]$

$G(x, \xi)$ раціональная функція (x, ξ),

λ_k постоянная, C произвольно-постоянное,

n цѣлое число, α первообразный корень двучленнаго уравненія $\alpha^n = 1$.

Такимъ образомъ обѣ наши статьи открываютъ большое поле изслѣдованій, относящихся къ интегрированію въ конечномъ видѣ уравненій перваго порядка,—онѣ даютъ

---

[1]) *Fuchs.* Sitzungsber. der Berliner Akademie, 11 Dec. 1884. S. 1171.

общія основныя формы для:

1) интеграла, выражаемаго въ конечномъ видѣ (1 статья);
2) рѣшенія, выражаемаго въ конечномъ видѣ (2 статья).

I. Задача объ *интегрированіи* въ конечномъ видѣ дифференціальнаго уравненія перваго порядка приводится къ двумъ задачамъ.

1) Разысканіе частнаго интеграла вида

$$\omega = H_0(x, y, t) + \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \lg H_k(x, y, t)$$

уравненія въ частныхъ производныхъ:

$$\varphi(x, y, t)\frac{\partial \omega}{\partial x} + \psi(x, y, t)\frac{\partial \omega}{\partial y} = \chi(x, y, t),$$

гдѣ t опредѣляется въ (x, y) алгебраическимъ уравненіемъ.

2) Задача объ интегрированіи въ конечномъ видѣ алгебраической функціи вида:

$$\sqrt[n]{G(x, y, t)}\,[M(x, y, t)\,dx + N(x, y, t)\,dy]$$

или трансцендентной вида:

$$e^{\Theta(x, y, t)}[H_0(x, u, t)]^{\lambda_0}[H_1(x, y, t)]^{\lambda_1}\ldots[H_m(x, u, t)]^{\lambda_m}$$
$$[M(x, y, t)\,dx + N(x, y, t)\,dy]$$

H_0, H_k, φ, ψ, G, M, N, Θ означаютъ раціональныя функціи (x, y, t).

II. Задача о *разысканіи рѣшенія* въ конечномъ видѣ, т. е. объ опредѣленіи y въ конечномъ видѣ сводится тоже къ двумъ задачамъ:

1) Разысканіе алгебраической подстановки

$$\gamma = \Phi(x, \xi, y, \triangle)\sqrt[n]{G(x, \xi)}$$

или трансцендентной:

$$\gamma = \log \prod_{j=0}^{j=n-1} \Phi^{\alpha^{-j}}(x, \xi, y, \triangle, \alpha^j \sqrt[n]{G(x, \xi)})$$

при помощи которыхъ уравненіе (2) приводится къ уравненію

$$\frac{d\gamma}{dx} = \varphi(x, \xi)\sqrt[n]{G(x, \xi)},$$

гдѣ φ, G раціональныя функціи (x, ξ).

С. М. О.

2) Опредѣленіе въ конечномъ видѣ Абелева интеграла

$$\int \varphi(x, \xi) \sqrt[n]{G(x, \xi)}\, d\xi$$

т. е. задача интегрированія въ конечномъ видѣ, которой посвящены извѣстныя изслѣдованія Абеля, Чебышева и т. д.

Всѣ эти задачи требуютъ особаго изслѣдованія и мы обращаемъ на нихъ вниманіе математиковъ, заинтересованныхъ этой областью изслѣдованія. Для объизслѣдованія этихъ вопросовъ не достаточно силъ одного лица.

§ 2. Принимая Льювиллевскую классификацію трансцендентныхъ въ томъ видѣ, какъ она изложена въ началѣ нашей первой статьи, будемъ имѣть при условіи, что рѣшеніе y выражается въ конечномъ видѣ трансцендентной q-го класса

$$y = \pi(x, \theta_1, \theta_2 \ldots \theta_p, \eta_1, \eta_2 \ldots \eta_q) \tag{8}$$

гдѣ π алгебраическая функція основныхъ трансцендентныхъ q-го класса

$$\theta_i = \lg \alpha_i(x)$$

$$\eta_i = e^{\beta_i(x)} \quad \text{или} \quad [\gamma_i(x)]^{\lambda_i}$$

(гдѣ $\alpha_i(x)$, $\beta_i(x)$, $\gamma_i(x)$ трансцендентныя $\overline{q-1}$-го класса) и трансцендентныхъ нисшихъ классовъ, причемъ, если π дано въ приготовленномъ видѣ, между θ, η и нисшими трансцендентными, входящими въ π, не существуетъ алгебраическихъ зависимостей

$$N(x, \theta_1, \theta_2 \ldots \theta_p, \eta_1, \eta_2 \ldots \eta_q) = 0 \tag{9}$$

т. е. всякое такое равенство удовлетворяется тождественно при всякихъ значеніяхъ θ_i, η_i.

Легко видѣть, что уравненіе (2) можетъ быть еще представлено въ слѣдующемъ видѣ:

$$M(x, \xi, y, t)\, dx + N(x, \xi, y, t)\, dy = 0 \tag{10}$$

гдѣ M, N раціональныя функціи отъ (x, ξ, y, t), t опредѣляется алгебраическимъ уравненіемъ:

$$F(x, \xi, y, t) = 0 \tag{11}$$

неприводимымъ въ области раціональныхъ функцій отъ y и на ряду съ рѣшеніемъ (11) уравненіе (2) удовлетворяется еще рѣшеніемъ

$$y=\pi(x\,,\ \theta_1+\mu_1\,,\ \theta_2+\mu_2\ldots\theta_p+\mu_p\,,\ \nu_1\eta_1\,,\ \nu_2\eta_2\ldots\nu_q\eta_q) \tag{12}$$

гдѣ μ_i, ν_i произвольныя постоянныя.

Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$y=\pi(x\,,\ \theta), \tag{13}$$

гдѣ π алгебраическая функція трансцендентной

$$\theta=\lg\alpha(x),$$

и другихъ трансцендентныхъ будемъ имѣть

$$y'=\frac{\partial\pi(x\,,\ \theta)}{\partial x}+\frac{\partial\pi(x\,,\ \theta)}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dx}=\frac{\partial\pi}{\partial x}+\frac{\partial\pi}{\partial\theta}\frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)} \tag{14}$$

$$y'=\pi_1(x\,,\ \theta) \tag{13'}$$

гдѣ π_1 алгебраическая функція θ и другихъ трансцендентныхъ q-го класса и трансцендентныхъ нисшихъ классовъ. Въ самомъ дѣлѣ $y'=\dfrac{d\pi}{dx}$ выражается алгебраически черезъ основныя трансцендентныя q-го класса θ_1, $\theta_2\ldots\eta_1$, $\eta_2\ldots$ ихъ производныя $\dfrac{d\theta_1}{dx}$, $\dfrac{d\theta_2}{dx}\ldots$ $\dfrac{d\eta_1}{dx}$, $\dfrac{d\eta_2}{dx}\ldots$ и трансцендентныя нисшихъ классовъ. Но производныя $\dfrac{d\theta_1}{dx}, \dfrac{d\theta_2}{dx}\ldots \dfrac{d\eta_1}{dx}, \dfrac{d\eta_2}{dx}\ldots$ на основаніи выраженій θ_i, η_i выражаются алгебраически въ θ_1, $\theta_2\ldots$ η_1, $\eta_2\ldots$ и трансцендентныхъ нисшихъ классовъ и ихъ производныхъ. Производныя же трансцендентныхъ нисшихъ классовъ легко выразимы алгебраически черезъ эти трансцендентныя и трансцендентныя еще болѣе нисшихъ классовъ.

Кромѣ того

$$M(x\,,\ y\,,\ t)=P(x\,,\ \theta)$$
$$N(x\,,\ y\,,\ t)=Q(x\,,\ \theta),$$

гдѣ P, Q алгебраическія функціи θ и другихъ трансцендентныхъ, входящихъ въ π, откуда на основаніи уравненія (10)

$$P(x\,,\ \theta)+Q(x\,,\ \theta)\,\pi_1(x\,,\ \theta)=0 \tag{15}$$

Это равенство должно быть тождествомъ т. е. должно удовлетворяться по замѣнѣ θ какой угодно функціей, въ частности $\theta+\mu$, такъ что

$$P(x\,,\ \theta+\mu)+Q(x\,,\ \theta+\mu)\ \pi_1(x\,,\ \theta+\mu)=0. \tag{16}$$

А, такъ какъ

$$P(x,\ \theta+\mu)=M[x,\ \xi,\ \pi(x,\ \theta+\mu),\ S(x,\ \theta+\mu)]$$

$$Q(x,\ \theta+\mu)=N[x,\ \xi,\ \pi(x,\ \theta+\mu),\ S(x,\ \theta+\mu)],$$

если

$$t=S(x,\ \theta),$$

а на основанiи уравненiй (14) (13′)

$$\pi_1(x,\ \theta+\mu)=\frac{d\pi(x,\ \theta+\mu)}{dx},$$

то

$$M[x,\ \xi,\ \pi(x,\ \theta+\mu),\ S(x,\ \theta+\mu)]+$$

$$+N[x,\ \xi,\ \pi(x,\ \theta+\mu),\ S(x,\ \theta+\mu)]\frac{d\pi(x,\ \theta+\mu)}{dx}=0$$

т. е.

$$y_1=\pi(x,\ \theta+\mu)$$

тоже рѣшенiе уравненiя (10) или (2).

Такимъ же образомъ, полагая

$$y=\pi(x,\ \eta) \tag{17}$$

$$\eta=e^{\beta(x)} \quad \text{или} \quad [\gamma(x)]^{\lambda}$$

имѣемъ

$$y'=\frac{\partial\pi}{\partial x}+\frac{\partial\pi}{\partial\eta}\frac{d\eta}{dx}=\frac{\partial\pi}{\partial x}+\frac{\partial\pi}{\partial\eta}\eta\delta(x)=\pi_1(x,\ \eta) \tag{18}$$

гдѣ

$$\delta(x)=\beta'(x) \quad \text{или} \quad \frac{\lambda\gamma'(x)}{\gamma(x)} \tag{19}$$

Равенство

$$P(x,\ \eta)+Q(x,\ \eta)\pi_1(x,\ \eta)=0 \tag{20}$$

удовлетворяется по замѣнѣ η на $\nu\eta$, гдѣ ν постоянное, откуда

$$P(x,\ \nu\eta)+\varphi(x,\ \nu\eta)\pi_1(x,\ \nu\eta)=0 \tag{21}$$

а, такъ какъ

$$P(x,\ \nu\eta)=M[x,\ \xi,\ \pi(x,\ \nu\eta),\ S(x,\ \nu\eta)]$$

$$\varphi(x,\ \nu\eta)=N[x,\ \xi,\ \pi(x,\ \nu\eta),\ S(x,\ \nu\eta)],$$

если

$$t=S(x,\ \eta)$$

а, на основанiи (18) и (19) также

$$\pi_1(x,\ \nu\eta)=\frac{d\pi(x,\ \nu\eta)}{dx},$$

то

$$M[x, \xi, \pi(x, \nu\eta), S(x, \nu\eta)] +$$
$$N[x, \xi, \pi(x, \nu\eta), S(x, \nu\eta)] \frac{d\pi(x, \nu\eta)}{dx} = 0$$

т. е.

$$y_1 = \pi(x, \nu\eta)$$

тоже рѣшенія уравненія (10) или (2).

§ 3 [1]). Функція y, опредѣляемая уравненіемъ:

$$y = \pi(x, \theta_1 + \mu_1, \theta_2 + \mu_2 \ldots \theta_p + \mu_p, \nu_1\eta_1, \nu_2\eta_2 \ldots \nu_q\eta_q) \tag{12}$$

только тогда можетъ быть общимъ рѣшеніемъ дифференціальнаго уравненія (10), если всѣ произвольныя постоянныя сведутся къ одной т. е. мы должны имѣть:

$$\pi^{(1)} = \pi(x, \theta_1 + \mu_1, \theta_2 + \mu_2 \ldots \theta_p + \mu_p, \nu_1\eta_1, \nu_2\eta_2 \ldots \nu_q\eta_q) = \Phi(\alpha) \tag{22}$$

гдѣ Φ функція отъ произвольной постоянной α, къ которой сводится всѣ произвольныя постоянныя μ_i и ν_i.

Дифференцируя по μ_i и μ_k, имѣемъ

$$\frac{\partial\pi^{(1)}}{\partial\mu_i} = \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial\mu_i}$$
$$\frac{\partial\pi^{(1)}}{\partial\mu_k} = \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial\mu_k}$$

Исключая отсюда $\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}$, получаемъ

$$\frac{\partial\pi^{(1)}}{\partial\mu_i} + A_{ik}\frac{\partial\pi^{(1)}}{\partial\mu_k} = 0, \tag{23}$$

гдѣ A_{ik} постоянныя.

Такимъ же образомъ имѣемъ

$$\frac{\partial\pi^{(1)}}{\partial\nu_i} + B_{ik}\frac{\partial\pi^{(1)}}{\partial\mu_k} = 0 \tag{24}$$

$$\frac{\partial\pi^{(1)}}{\partial\nu_i} + C_{ik}\frac{\partial\pi^{(1)}}{\partial\nu_k} = 0. \tag{25}$$

---

[1]) Метода, которую мы примѣняемъ въ §§ 3, 4, основывается на идеяхъ В. П. Максимовича, положенныхъ въ основаніе его изслѣдованій, относящихся къ интегрированію дифференціальныхъ уравненій 1-го порядка въ квадратурахъ: *В. П. Максимовичъ*. Разысканіе общихъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, интегрирующихся въ конечномъ видѣ. Казань 1885 г.

Замѣчая теперь, что

$$\frac{\partial \pi^{(1)}}{\partial \mu_i} = \frac{\partial \pi^{(1)}}{\partial \theta_i} = \frac{\partial \pi^{(1)}}{\partial (\theta_i + \mu_i)}$$

$$\frac{1}{\eta_i} \frac{\partial \pi^{(1)}}{\partial v_i} = \frac{1}{v_i} \frac{\partial \pi^{(1)}}{\partial \eta_i} = \frac{\partial \pi^{(1)}}{\partial (v_i \eta_i)}$$

будемъ имѣть

$$\frac{\partial \pi^{(1)}}{\partial \theta_i} + A_{ik} \frac{\partial \pi^{(1)}}{\partial \theta_k} = 0 \tag{26$^{(1)}$}$$

$$\eta_i \frac{\partial \pi^{(1)}}{\partial \eta_i} + B_{ik}^{(1)} \frac{\partial \pi^{(1)}}{\partial \theta_k} = 0 \tag{27$^{(1)}$}$$

$$B_{ik}^{(1)} = v_i B_{ik}$$

$$\eta_i \frac{\partial \pi^{(1)}}{\partial \eta_i} + C_{ik}^{(1)} \frac{\partial \pi^{(1)}}{\partial \eta_k} = 0 \tag{28$^{(1)}$}$$

$$C_{ik}^{(1)} = v_i C_{ik}$$

а, полагая при этомъ

$$\mu_i = 0\,, \quad v_k = 1\,, \quad \pi^{(1)} = \pi$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \theta_i} + A_{ik} \frac{\partial \pi}{\partial \theta_k} = 0 \tag{26}$$

$$\eta_i \frac{\partial \pi}{\partial \eta_i} + B_{ik} \frac{\partial \pi}{\partial \theta_k} = 0 \tag{27}$$

$$\eta_i \frac{\partial \pi}{\partial \eta_i} + C_{ik}\, \eta_k \frac{\partial \pi}{\partial \eta_k} = 0 \tag{28}$$

Эти послѣднія уравненія представляютъ тождества относительно θ_i, η_i, такъ какъ въ противномъ случаѣ между θ_i, η_i существовали бы алгебраическія соотношенія типа (9). Отсюда слѣдуетъ, что при всякихъ значеніяхъ θ_i и η_i

$$d\pi = \frac{\partial \pi}{\partial \theta_k} \left[\sum_{i=1}^{i=p} A_{ik}\, d\theta_i + \sum_{i=1}^{i=q} B_{ik}\, \eta_i^{-1}\, d\eta_i \right] + \frac{\partial \pi}{\partial x} dx$$

или

$$d\pi = G\, d\varepsilon + \frac{\partial \pi}{\partial x} dx \tag{30}$$

гдѣ

$$G = \frac{\partial \pi}{\partial \theta_k}$$

ε имѣетъ одно изъ слѣдующихъ значенiй

(I) $$\varepsilon = \zeta\,,$$

если въ π не входитъ η_i

(II) $$\varepsilon = \log\vartheta\,,$$

если въ π не входятъ θ_i,

(III) $$\varepsilon = \zeta + \log\vartheta\,,$$

если въ y не входятъ какъ η_i, такъ и θ_i

$$\vartheta = C\eta_1^{B_{1k}}\eta_2^{B_{2k}}\ldots\eta_q^{B_{qk}} \tag{31}$$

$$\zeta = \sum_{i=1}^{i=p} A_{ik}\,\theta_i + C \tag{32}$$

гдѣ C не зависятъ отъ η_i и θ_i т. е. суть трансцендентныя нисшаго класса.

Выражая одну изъ величинъ θ_i, η_i напримѣръ θ_q (или η_q) черезъ остальныя и ε и обозначая получаемое такимъ образомъ выраженiе y черезъ $\pi^{(\varepsilon)}$ будемъ имѣть:

$$d\pi = \frac{\partial\pi^{(\varepsilon)}}{\partial\varepsilon}\,d\varepsilon + \sum_{i=1}^{i=p-1}\frac{\partial\pi^{(\varepsilon)}}{\partial\theta_i}\,d\theta_i + \sum_{i=1}^{i=q-1}\frac{\partial\pi^{(\varepsilon)}}{\partial\eta_i}\,d\eta_i + \frac{\partial\pi^{(\varepsilon)}}{\partial\varkappa}\,d\varkappa + \frac{\partial\pi^{(\varepsilon)}}{\partial x}\,dx\,,$$

гдѣ $\varkappa$ равно θ_p или η_q.

Это выраженiе должно равняться при всякихъ значенiяхъ θ_i, η_i (или что тоже, при всякихъ значенiяхъ ε, $\theta_1, \theta_2 \ldots \theta_{q-1}$, $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_{q-1}$, $\varkappa$) выраженiю (30), такъ что

$$\frac{\partial\pi^{(\varepsilon)}}{\partial\varepsilon}\,d\varepsilon + \sum_{i=1}^{i=p-1}\frac{\partial\pi^{(\varepsilon)}}{\partial\theta_i}\,d\theta_i + \sum_{i=1}^{i=q-1}\frac{\partial\pi^{(\varepsilon)}}{\partial\eta_i}\,d\eta_i + \frac{\partial\pi^{(\varepsilon)}}{\partial\varkappa}\,d\varkappa + \frac{\partial\pi^{(\varepsilon)}}{\partial x}\,dx = G\,d\varepsilon + \frac{\partial\pi}{\partial x}\,dx$$

$\pi^{(\varepsilon)}$ получается изъ π замѣной θ_p или η_q его выраженiемъ въ

$$\varepsilon\,,\ \theta_1\,,\ \theta_2\ldots\theta_{p-1}\,,\ \eta_1\,,\ \eta_2\ldots\eta_{q-1}\,,\ \varkappa$$

получаемымъ при помощи одного изъ слѣдующихъ уравненiй:

$$\sum_{i=1}^{i=p} A_{ik}\theta_i = \varepsilon \qquad \sum_{i=1}^{i=q} B_{ik}\lg\eta_i = \varepsilon$$

$$\sum_{i=1}^{i=p} A_{ik}\theta_i + \sum_{i=1}^{i=q} B_{ik}\lg\eta_i = \varepsilon\,,$$

изъ которыхъ каждое не содержитъ x.

Поэтому

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} = \frac{\partial \pi^{(\varepsilon)}}{\partial x}$$

и уравненіе (32) даетъ при всѣхъ значеніяхъ $\varepsilon, \theta_1, \theta_2 \ldots \theta_{p-1}, \eta_1, \eta_2 \ldots \eta_{q-1}\, \varkappa$.

$$\frac{\partial \pi^{(\varepsilon)}}{\partial \varepsilon} d\varepsilon + \sum_{i=1}^{i=p-1} \frac{\partial \pi^{(\varepsilon)}}{\partial \theta_i} d\theta_i + \sum_{i=1}^{i=q-1} \frac{\partial \pi^{(\varepsilon)}}{\partial \eta_i} d\eta_i = G d\varepsilon ,$$

откуда

$$\underset{i=1,\,2\ldots p-1}{\frac{\partial \pi^{(\varepsilon)}}{\partial \theta_i} = 0} \qquad \underset{i=1,\,2\ldots q-1}{\frac{\partial \pi^{(\varepsilon)}}{\partial \eta_i} = 0} \qquad \frac{\partial \pi^{(\varepsilon)}}{\partial \varkappa} = 0 \qquad \frac{\partial \pi^{(\varepsilon)}}{\partial \varepsilon} = G$$

Поэтому

$$\pi^{(\varepsilon)} = H(\varepsilon)$$

представляетъ функцію отъ одного ε. Если въ H вмѣсто ε подставить его выраженіе въ θ_i, η_i, то H обращается въ

$$\pi(x,\, \theta_1,\, \theta_2 \ldots \theta_p,\, \eta_1,\, \eta_2 \ldots \eta_q)$$

т. е. въ алгебраическую функцію (θ_i, η_i).

Положимъ что въ π входятъ θ_i.

Если въ H положить

$$\theta_2 = \theta_3 = \ldots \theta_p = 0$$

$$\eta_1 = \eta_2 = \ldots \eta_q = 1 ,$$

то получаемъ алгебраическую функцію отъ θ_1, такъ какъ

$$\Big[H(\varepsilon) \Big]_{\substack{\theta_2=\theta_3=\ldots\theta_p=0 \\ \eta_1=\eta_2=\ldots\eta_q=1}} = H(A_1\theta_1) = \pi(x,\, \theta_1,\, 0,\, 0 \ldots 0,\, 1,\, 1 \ldots 1)$$

Но $H(\varepsilon)$ получается изъ $H(A_1\theta_1)$ простой замѣной $A_1\theta_1$ на ε или θ_1 на $\frac{\varepsilon}{A_1}$.

Поэтому

$$H(\varepsilon) = \pi\left(x,\, \frac{\varepsilon}{A_1},\, 0,\, 0 \ldots 0,\, 1,\, 1 \ldots 1\right)$$

будетъ алгебраической функціей отъ ε. Вмѣстѣ съ θ_i въ π не могутъ входить также η_i.

Въ самомъ дѣлѣ, полагая въ противномъ случаѣ

$$\theta_1 = \theta_2 = \ldots \theta_p = 0$$

$$\eta_2 = \eta_3 = \ldots \eta_q = 1$$

имѣли бы

$$\Big[N(\varepsilon)\Big]_{\substack{\theta_1=\theta_2=\ldots\theta_p=0\\ \eta_2=\eta_3=\ldots\eta_q=1}}=H(\lg\eta_1)=\pi(x,\ 0,\ 0\ldots0,\ \eta_1,\ 1,\ 1\ldots1)$$

отсюда слѣдовало бы, что $\lg\eta_1$ алгебраическая функція η_1, чего, конечно быть не можетъ.

Такимъ образомъ въ π можетъ входить только одна изъ категоріи функцій

$$\theta_i \text{ или } \eta_i.$$

Поэтому возможны только случаи

(I) $$\varepsilon=\zeta$$

(II) $$\varepsilon=\lg\vartheta$$

При этомъ въ первомъ случаѣ H алгебраическая функція отъ ε.

Если въ π входятъ η_i, то

$$y=H(\lg\vartheta),$$

гдѣ функція H такова, что

$$\Big[H(\lg\vartheta)\Big]_{\substack{\theta_1=\theta_2=\ldots\theta_p=0\\ \eta_2=\eta_3=\ldots\eta_q=1}}=H(\lg\eta_1)=\pi(x,\ 0,\ 0\ldots0\ \eta_1,\ 1\ldots1)$$

Такъ какъ $H(\lg\vartheta)$ получается изъ $H(\lg\eta_1)$ простой замѣной η, на ϑ, то

$$H(\lg\vartheta)=\pi(x,\ 0,\ 0\ldots0,\ \vartheta,\ 1,\ 1\ldots1)$$

представляетъ алгебраическую функцію отъ $\vartheta=e^{\varepsilon}$.

Оба результата можно соединить въ слѣдующей формѣ

$$y=\Omega(x,\ \omega) \tag{33}$$

гдѣ Ω алгебраическая функція трансцендентной q-го класса: ω и трансцендентныхъ нисшихъ классовъ.

ω равно ϑ или ζ; конечно можно также положить $\omega=C\vartheta$ (31′) и $\omega=\zeta+C$ (32′), полагая въ (31′) $C=[\chi_0]^{\lambda_0}$, гдѣ λ_0 раціональное число, χ_0 трансцендентная класса $<q$, а въ (32′) $C=\lambda_0\lg\chi_0$ [1]) и мы можемъ высказать полученный результатъ въ слѣдующей формѣ:

---

[1]) Въ самомъ дѣлѣ, если y представляетъ алгебраическую функцію ω и нисшихъ трансцендентныхъ, то $y=\Omega\left(x,\ \frac{C\omega}{C}\right)$ будетъ алгебраической функціей $\omega_1=C\omega$ и нисшихъ трансцендентныхъ, въ числѣ которыхъ C.

Если общее рѣшеніе y уравненія

$$M(x, \xi, x, t)\,dx + N(x, \xi, y, t)\,dy = 0 \tag{10}$$

выражается въ конечномъ видѣ, то y представляетъ алгебраическую функцію отъ одного изъ выраженій

$$\vartheta = e^{\varphi}[\chi_0]^{\lambda_0}[\chi_1]^{\lambda_1}\dots[\chi_q]^{\lambda_q} \tag{34}$$

гдѣ λ_0 раціональное, λ_i ирраціональныя числа, φ, ω, χ_i трансцендентныя нисшихъ, чѣмъ y, классовъ, или

$$\zeta = \varphi + \sum_{i=0}^{i=p} \lambda_i \lg \chi_i \tag{35}$$

и трансцендентныхъ нисшихъ классовъ. При этомъ въ обоихъ случаяхъ можно предполагать между λ_i отсутствіе линейныхъ соотношеній съ раціональными коэффиціентами

$$\sum_{i=1}^{i=p} \alpha_i \lambda_i = \alpha \tag{36}$$

ибо въ противномъ случаѣ возможно было бы приведеніе ϑ и ζ, а потому и всего выраженія $y = \pi(x, \theta_1, \theta_2 \dots \theta_p, \eta_1, \eta_2 \dots \eta_q)$ къ меньшему числу трансцендентныхъ.

§ 4. Теперь той-же методой докажемъ, что въ выраженіяхъ ϑ и ζ функціи φ, ω, χ_i алгебраическія т. е. *рѣшеніе y алгебраическаго дифференціальнаго уравненія перваго порядка представляетъ трансцендентную 1-го класса или функцію алгебраическую.*

Положимъ съ этой цѣлью $q > 1$:

$$\theta_i = \lg \alpha_i(x, \theta),\ \eta_i = e^{\beta_i(x, \theta)} \quad \text{или} \quad [\gamma_i(x, \theta)]^{\lambda_i}$$

гдѣ θ основная трансцендентная т. е.

$$\theta = \lg \alpha^{(1)}(x), \quad e^{\beta^{(1)}(x, \theta)} \ \text{или} \ [\gamma^{(1)}(x, \theta)]^{\lambda^{(1)}}$$

нисшаго класса. Предположимъ сперва, что θ входитъ въ Ω только неявно черезъ ω.

Замѣтимъ, что уравненіе

$$y = \Omega(x, \omega), \tag{33}$$

гдѣ Ω алгебраическая функція ω и нисшихъ трансцендентныхъ даетъ

$$y' = \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial \omega}\frac{d\omega}{dx} = \Omega_1(x, \omega, \omega') \tag{37}$$

въ алгебраической функціи (ω, ω') и трансцендентныхъ нисшихъ классовъ, такъ какъ $\frac{\partial\Omega}{\partial x}$, $\frac{\partial\Omega}{\partial\omega}$ алгебраическія функціи этихъ величинъ. Исключеніе y, y' изъ уравненій (2) (33) и (37) даетъ для ω алгебраическое относительно ω и ω' уравненіе перваго порядка:

$$h(x, \omega, \omega') = 0 \tag{38}$$

Полагая сперва:

(I)
$$\omega = \vartheta = e^{\varphi}[\chi_0]^{\lambda_0}[\chi_1]^{\lambda_1}\ldots[\chi_q]^{\lambda_q} \tag{39}$$

$$\varphi = \beta(x, \theta), \ \chi_i = \gamma_i(x, \theta), \ \theta = \lg \alpha^{(1)}(x)$$

имѣемъ

$$\omega' = \omega\left[\varphi' + \sum_{i=0}^{i=q}\lambda_i\frac{\chi_i'}{\chi_i}\right] \tag{40}$$

а, такъ какъ

$$\varphi' = \frac{\partial\beta}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dx} = \frac{\partial\beta}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial\theta}\frac{\alpha^{(1)\prime}(x)}{\alpha^{(1)}(x)} = \varrho(x, \theta) \tag{41}$$

$$\chi_i' = \frac{\partial\chi_i}{\partial x} + \frac{\partial\chi_i}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dx} = \frac{\partial\chi_i}{\partial x} + \frac{\partial\chi_i}{\partial\theta}\frac{\alpha^{(1)\prime}(x)}{\alpha^{(1)}(x)} = \tau(x, \theta) \tag{42}$$

алгебраическія функціи отъ θ и другихъ трансцендентныхъ того же и нисшихъ классовъ, то и

$$\omega' = \omega\,\Phi(x, \theta) \tag{43}$$

будетъ алгебраической функціей (ω, θ).

Уравненіе (38), которое можно представить въ видѣ

$$K(x, \theta, \omega)\,dx + L(x, \theta, \omega)\,d\omega = 0 \tag{44}$$

гдѣ K алгебраическія функціи ω, θ и другихъ нисшихъ, чѣмъ ω, трансцендентныхъ, даетъ по подстановкѣ вмѣсто ω' его значенія (43):

$$K(x, \theta, \omega) + L(x, \theta, \omega)\,\omega\,\Phi(x, \theta) = 0 \tag{45}$$

алгебраическое соотношеніе между (ω, θ), остающееся въ силѣ по замѣнѣ ω какой угодно величиной.

При всякомъ значеніи ω оно приводится къ алгебраическому соотношенію между θ и другими трансцендентными того же или нисшихъ классовъ, остающееся въ силѣ по замѣнѣ θ какой угодно величиной.

Итакъ въ (45) можно замѣнить ω и θ какими угодно функціями.

Можно, напримѣръ замѣнить θ на $\theta+\mu$, ω на результатъ подстановки $\theta+\mu$ въ выраженіи ω вмѣсто θ т. е.

$$\omega^{(1)}=e^{\beta(x,\,\theta+\mu)}[\gamma_0(x,\,\theta+\mu)]^{\lambda_0}\ldots\;[\gamma_q(x,\,\theta+\mu)]^{\lambda_q}$$

Такъ какъ согласно уравненіямъ (41) и (42)

$$\varrho(x,\,\theta+\mu)=\frac{d\beta(x,\,\theta+\mu)}{dx}$$

$$\tau(x,\,\theta+\mu)=\frac{d\gamma(x,\,\theta+\mu)}{dx}$$

то

$$\omega^{(1)\prime}=\omega^{(1)}\;\Phi(x,\,\theta+\mu) \tag{43^{(1)}}$$

Отсюда слѣдуетъ, что уравненіе (38) или (44) имѣетъ своимъ рѣшеніемъ на ряду съ ω еще $\omega^{(1)}$. Но согласно § 2 уравненіе

$$f(x,\,\xi,\,y,\,y')=0 \tag{3}$$

должно имѣть на ряду съ рѣшеніями

$$y=\Omega(x,\,\omega)$$

$$y=\Omega(x,\,\omega^{(1)})$$

еще рѣшенія

$$y=\Omega(x,\,\alpha\omega)$$

$$y=\Omega(x,\,\alpha\omega^{(1)})=\Omega^{(1)},$$

гдѣ α произвольная постоянная.

Произвольныя постоянныя α и μ, входящія въ $\omega^{(1)}$ должны сливаться въ одну произвольную постоянную, поэтому

$$A\,\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial(\alpha\omega^{(1)})}\,\omega^{(1)}+\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial(\alpha\omega^{(1)})}\;\alpha\,\frac{\partial\omega^{(1)}}{\partial\mu}=0, \tag{44}$$

гдѣ A постоянное.

Замѣтимъ, что на основаніи уравненія (39)

$$\frac{\partial\omega^{(1)}}{\partial\mu}=\omega^{(1)}\left[\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial\mu}+\sum_{i=0}^{i=q}\lambda_i\frac{1}{\chi_i^{(1)}}\frac{d\chi_i^{(1)}}{\partial\mu}\right]=\omega^{(1)}\;\Phi(x,\,\theta+\mu), \tag{45}$$

если для краткости положить

$$\varphi^{(1)}=\beta(x,\,\theta+\mu),\quad \chi_i^{(1)}=\gamma(x,\,\theta+\mu),$$

гдѣ $\Phi(x,\,\theta+\mu)$ алгебраическая функція $\theta+\mu$.

Полагая $\mu = 0$ и имѣя въ виду, что

$$\frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial \mu} = \frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial \theta} = \frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial (\theta + \mu)}$$

имѣемъ по сокращеніи на

$$\omega \frac{\partial \Omega}{\partial (\alpha \omega)}$$

$$\Phi(x\,,\ \theta) = -\frac{A}{\alpha}$$

или такъ какъ

$$\left[\frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial \mu}\right]_{\mu=0} = \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \omega \Phi(x\,,\ \theta),$$

то

$$\frac{\partial \omega}{\partial \theta} = -\frac{A\omega}{\alpha} \tag{46}$$

Уравненіе это, какъ алгебраическое относительно θ, такъ какъ

$$\frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \omega \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \sum_{i=1}^{i=q} \frac{\lambda_i}{\chi_i} \frac{\partial \chi_i}{\partial \theta}\right]$$

и отсюда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \sum_{i=1}^{i=q} \frac{\lambda_i}{\chi_i} \frac{\partial \chi_i}{\partial \theta} = -A$$

имѣетъ мѣсто при всякомъ значеніи θ; оно даетъ

$$\omega = Ce^{-\frac{A\theta}{\alpha}}$$

гдѣ C не содержитъ θ, а только другія трансцендентныя. Но

$$e^{-\frac{A\theta}{\alpha}} = [\alpha^{(1)}(x)]^{-\frac{A}{\alpha}}$$

трансцендентная q—1-го класса

Поэтому ω, а потому и y не будетъ содержать противно условію трансцендентныхъ q-го класса, содержащихъ θ.

Полагая

(II)
$$\omega = \zeta = \sum_{i=0}^{i=p} \lambda_i \lg \chi_i \tag{47}$$

$$\theta = \lg \alpha^{(1)}(x)$$

имѣемъ

$$\omega' = \varphi' + \sum_{i=0}^{i=p} \lambda_i \frac{\chi_i'}{\chi_i} \tag{48}$$

φ', ψ' опредѣляются уравненіемъ (41) и (42)

$$\omega' = \Phi(x, \theta)$$

Φ алгебраическая функція θ, откуда

$$K(x, \theta, \omega) + L(x, \theta, \omega)\,\Phi(x, \theta) = 0; \tag{49}$$

примемъ вмѣстѣ съ тѣмъ:

$$K(x, \theta+\mu, \omega^{(1)}) + L(x, \theta+\mu, \omega^{(1)})\,\Phi(x, \theta+\mu) = 0 \quad (49^{(1)})$$

гдѣ $\omega^{(1)}$ результатъ подстановки $\theta+\mu$ въ ω вмѣсто θ.

Съ рѣшеніемъ $\Omega(x, \omega^{(1)})$ имѣемъ еще рѣшеніе $\Omega(x, \omega^{(1)}+\beta)$, гдѣ β произвольная постоянная, которая вмѣстѣ съ μ должна слиться въ одну, для чего необходимо, чтобы

$$\frac{\partial\Omega}{\partial(\omega^{(1)}+\beta)}\frac{\partial\omega^{(1)}}{\partial\mu} + A\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial(\omega^{(1)}+\beta)} = 0$$

$$\Omega^{(1)} = \Omega(x, \omega^{(1)}+\beta),$$

гдѣ A постоянное.

Имѣя въ виду, что

$$\frac{\partial\omega^{(1)}}{\partial\mu} = \frac{\partial\omega^{(1)}}{\partial\theta} = \frac{\partial\omega^{(1)}}{\partial(\theta+\mu)} = \Phi(x, \theta+\mu)$$

$$\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial(\omega^{(1)}+\beta)} = \frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial\omega^{(1)}}$$

получаемъ по сокращеніи на $\dfrac{\partial\Omega}{\partial\omega}$: при $\beta=0$, $\mu=0$

$$\frac{\partial\omega}{\partial\theta} = -A,$$

откуда

$$\omega = -A\theta + C,$$

гдѣ C не зависитъ отъ θ, а только отъ другихъ трансцендентныхъ того же или низшихъ классовъ т. е. θ можетъ входить въ ω только алгебраически.

Полагая $\omega = \vartheta$

(III) $$\varphi = \beta(x, \eta) \quad \gamma_i = \gamma_i(x, \eta)$$

гдѣ

$$\eta = e^{\beta^{(1)}(x)} \text{ или } [\gamma^{(1)}(x)]^{\lambda^{(1)}}$$

получаемъ для ω' опять уравненія (45), но при этомъ φ', χ_i' опредѣляются вмѣсто (41), (42) уравненіями:

$$\varphi' = \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial \eta}\frac{d\eta}{dx} = \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial \eta}\delta(x) = \varrho(x, \eta) \tag{50}$$

$$\chi_i' = \frac{\partial \chi_i}{\partial x} + \frac{\partial \chi_i}{\partial x}\frac{d\eta}{dx} = \frac{\partial \chi_i}{\partial x} + \frac{\partial \chi_i}{\partial \eta}\delta(x) = \tau(x, \eta) \tag{51}$$

гдѣ

$$\delta(x) = \eta\beta^{(1)\prime}(x) \quad \text{или} \quad \lambda\eta\frac{\gamma^{(1)\prime}(x)}{\gamma^{(1)}(x)}$$

будетъ алгебраической функціей η, а

$$\omega' = \omega\,\Phi(x, \eta)$$

алгебраической функціей (ω, η)

Уравненіе

$$K(x, \eta, \omega) + L(x, \eta, \omega)\,\omega\,\Phi(x, \eta) = 0 \tag{52}$$

остается въ силѣ по замѣнѣ η на $v\eta$, а ω на $\omega^{(1)}$, результатъ подстановки $v\eta$ вмѣсто η.

Отсюда легко видѣть на основаніи уравненія (50) и (51), что уравненіе (10) будетъ имѣть интегралъ

$$y = \Omega(x, \alpha\omega^{(1)}),$$

причемъ должны имѣть

$$\frac{\partial \Omega}{\partial(\alpha\omega^{(1)})}\,\alpha\,\frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial v} + A\,\frac{\partial \Omega^{(1)}}{\partial(\alpha\omega^{(1)})}\,\omega^{(1)} = 0$$

$$\Omega^{(1)} = \Omega(\alpha\omega^{(1)})$$

откуда, замѣчая, что

$$\frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial v} = \frac{\eta}{v}\frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial \eta} = \eta\omega^{(1)}\,\Phi(x, v\eta)$$

полагая $\alpha = 1$, $v = 1$ и сокращая на $\omega\frac{\partial \Omega}{\partial \omega}$ имѣемъ

$$\eta\alpha\frac{\partial \omega}{\partial \eta} + A\omega = 0$$

откуда

$$\omega = C.(\eta)^{-\frac{A}{\alpha}}$$

гдѣ C не содержитъ η.

Такъ какъ

$$(\eta)^{-\frac{A}{\alpha}}$$

представляетъ трансцендентную q—1-го класса, то для ω мы получаемъ, противно условію, выраженіе, не содержащее тѣхъ основныхъ трансцендентныхъ q-го класса, въ которыя входитъ η. Наконецъ остается случай, когда

$$\omega = \zeta$$

$$\varphi = \beta(x, \eta) \quad \gamma_i = \gamma_i(x, \eta)$$

гдѣ

$$\eta = e^{\beta_i(x)} \text{ или } [\gamma^{(1)}(x)]^{\lambda^{(1)}}$$

Уравненіе

$$K(x, \eta, \omega) + L(x, \eta, \omega)\, \Phi(x, \eta) = 0 \tag{53}$$

получаемое для этого случая, остается въ силѣ по замѣнѣ η на $v\eta$, ω на $\omega^{(1)}$, откуда какъ выше, выводимъ, что

$$y = \Omega(x, \omega^{(1)} + \beta)$$

тоже рѣшеніе уравненія (10), а изъ уравненія

$$\frac{\partial \Omega^{(1)}}{\partial(\omega^{(1)} + \beta)} \frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial v} + A \frac{\partial \Omega^{(1)}}{\partial(\omega^{(1)} + \beta)} = 0 \tag{54}$$

представляющаго условіе сліянія произвольныхъ постоянныхъ v и β, гдѣ

$$\frac{\partial \omega^{(1}}{\partial v} = \frac{\eta}{v} \frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial \eta} = \eta \Phi(x, v\eta)$$

получаемъ при $v = 1$, $\beta = 0$:

$$\eta \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = -A$$

откуда

$$\omega = -A \lg \eta + B$$

гдѣ B не содержитъ η т. е.

$$\omega = -A \lg \beta_i(x) + B$$

или

$$\omega = -A \lg \gamma_i(x) + B$$

откуда слѣдуетъ, что ω не содержитъ основныхъ трансцендентныхъ q-го класса, содержащихъ η.

Итакъ доказано, что α_i, β_i, γ_i или φ_i: χ_i не могутъ быть алгебраическими функціями отъ трансцендентныхъ θ, η.

Слѣдовательно въ ω, а потому и въ Ω не входятъ трансцендентныя θ, η. Въ нашемъ доказательствѣ мы ограничивались случаемъ, когда θ входитъ въ $\Omega(x, \omega)$ только черезъ ω.

Но случай, когда $y = \Omega(x, \theta, \omega)$ легко сводится къ уже изслѣдованному случаю.

Дѣйствительно, уравненіе (44) замѣняется тогда слѣдующимъ болѣе сложнымъ:

$$A\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial(\alpha\omega^{(1)})}\omega^{(1)} + \frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial(\alpha\omega^{(1)})}\alpha\frac{\partial\omega^{(1)}}{\partial\mu} + \frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial\theta} = 0 \qquad (44')$$

дающимъ при $\alpha = 1$, $\mu = 0$

$$\left(A_0\omega + \frac{\partial\omega}{\partial\theta}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial\omega} + \frac{\partial\Omega}{\partial\theta} = 0$$

(A_0 значеніе A при $\alpha = 1$, $\mu = 0$) или

$$\omega\psi(\theta)\frac{\partial\Omega}{\partial\omega} + \frac{\partial\Omega}{\partial\theta} = 0,$$

гдѣ $\psi(\theta)$ алгебраическая функція отъ θ.

Это уравненіе въ частныхъ производныхъ даетъ:

$$\Omega = H\left(\omega e^{-\int\psi(\theta)\,d\theta}\right),$$

гдѣ H должно быть, какъ Ω, знакомъ алгебраической функціи.

Такъ какъ Ω при $\omega = \text{const.}$ алгебраическая функція отъ θ, то $H\left(\text{const.}\, e^{-\int\psi(\theta)\,d\theta}\right)$ а потому $e^{-\int\psi(\theta)\,d\theta}$ приводятся къ $\Phi(\theta)$, алгебраической функціи отъ θ.

$$y = H[\omega\Phi(\theta)]$$

$\omega\Phi(\theta)$, какъ ω, имѣетъ видъ (39), и мы можемъ $\omega\Phi(\theta)$ принять за ω. Тогда для y будемъ имѣть выраженіе, не содержащее уже θ явнымъ образомъ.

Такимъ же образомъ для другихъ случаевъ II, III, IV получаемъ уравненія въ частныхъ производныхъ:

(II) $$\psi(\theta)\frac{\partial\Omega}{\partial\omega} + \frac{\partial\Omega}{\partial\theta} = 0$$

(III) $$\psi(\eta)\frac{\partial\Omega}{\partial\omega}\omega + \frac{\partial\Omega}{\partial\eta} = 0,$$

(IV) $$\psi(\eta)\frac{\partial\Omega}{\partial\omega} + \frac{\partial\Omega}{\partial\eta} = 0,$$

дающія

(II) $$y = H[\omega + \Phi(\theta)]$$

(III) $$y = H[\omega\Phi(\eta)]$$

(IV) $$y = H[\omega + \Phi(\eta)]$$

Принимая выраженія

$$\omega + \Phi(\theta), \quad \omega\Phi(\eta), \quad \omega + \Phi(\eta)$$

за ω, получаемъ выраженія y, не содержащія θ явнымъ образомъ.

Такимъ образомъ: *Если общее рѣшеніе алгебраическаго уравненія*

$$M(x, \xi, y, t)\,dx + N(x, \xi, y, t)\,dy = 0 \tag{10}$$

выражается въ конечномъ видѣ, то y представляетъ алгебраическую функцію отъ одного изъ выраженій

$$\vartheta = e^{\varphi}[\chi_0]^{\lambda_0}[\chi_1]^{\lambda_1}\ldots[\chi_q]^{\lambda_q} \tag{34}$$

или

$$\zeta = \varphi + \sum_{i=0}^{i=p}\lambda_i \lg \chi_i, \tag{35}$$

гдѣ λ_i постоянныя, φ_i, χ алгебраическія функціи отъ x.

Очевидно и частное рѣшеніе имѣетъ тотъ же видъ, такъ какъ получается придавая въ $\Omega(\alpha\vartheta)$ и $\Omega(\zeta+\beta)$ постояннымъ α и β частныя значенія.

Особенное рѣшеніе получается исключеніемъ α и β изъ системъ уравненій

$$\Omega(\alpha\vartheta) = 0 \qquad \frac{\partial\Omega(\alpha\vartheta)}{\partial\alpha} = 0$$

или

$$\Omega(\zeta+\beta) = 0 \qquad \frac{\partial\Omega(\zeta+\beta)}{\partial\beta} = 0$$

или что тоже исключеніемъ ω изъ системы

$$\Omega(\omega) = 0 \qquad \frac{\partial\Omega(\omega)}{\partial\omega} = 0 \tag{55}$$

и представляетъ функцію алгебраическую.

Изъ полученнаго выраженія для

$$y = \Omega(x, \alpha\omega)$$

слѣдуетъ, что

I) *Между двумя частными интегралами и независимымъ перемѣннымъ должна существовать алгебраическая зависимость*

Полагая $x = x_0$ имѣемъ

$$y_0 = \Omega(\alpha\vartheta_0) \tag{a_0}$$

или

$$y_0 = \Omega(\zeta_0 + \beta) \tag{b_0}$$

гдѣ y_0, ϑ_0 значенія y и ϑ при $x = x_0$

Но

$$y = \Omega(\alpha\vartheta) \tag{a}$$

или

$$y = \Omega(\zeta + \beta) \tag{b}$$

Опредѣляя изъ уравненія (a_0) α и подставляя въ уравненіе (a) или опредѣляя изъ уравненія (b_0) β и подставляя въ уравненіе (b), получаемъ, что y выражается алгебраически черезъ y_0 (и вообще трансцендентно черезъ x_0 и x).

II) *Между общимъ интеграломъ y и произвольнымъ постояннымъ y_0 должна существовать алгебраическая зависимость.*

Эти два свойства можно назвать: *первымъ и вторымъ основными свойствами интегрируемаго въ конечномъ видѣ дифференціальнаго уравненія 1-го порядка.*

Всѣ рѣшаемыя въ конечномъ видѣ алгебраическія дифференціальныя уравненія мы можемъ раздѣлить на три класса:

I классъ.

Алгебраически интегрируемыя дифференціальныя уравненія.

II классъ.

Интегрируемыя при помощи только показательныхъ и степенныхъ функцій. Форма общаго рѣшенія:

$$y = \Omega(x,\ \alpha\vartheta)$$

III классъ.

Интегрируемыя при помощи только логариѳмическихъ функцій. Форма общаго рѣшенія:

$$y = \Omega(x,\ \zeta + \beta)$$

Примѣръ 1.

Уравненіе

$$ay' + y = \frac{x}{y^2}$$

съ общимъ рѣшеніемъ

$$\sqrt[3]{\frac{Ce^{-\frac{3x}{a}} + 3x - a}{3}}$$

и частнымъ

$$y = \sqrt[3]{\frac{3x - a}{3}}$$

принадлежитъ ко второму классу

Примѣръ 2.

Уравненіе

$$y^2 - 2xy' - y'^2 = 0$$

съ алгебраическимъ общимъ рѣшеніемъ

$$(3xy + 2x^3 + C)^2 - 4(y + x^2)^4 = 0$$

принадлежитъ къ первому классу

Примѣръ 3.

Уравненіе

$$y'^2 - 2xy' - 1 = 0$$

съ общимъ рѣшеніемъ

$$y = \frac{x^2}{2} \pm \frac{1}{2} x\sqrt{x^2+1} \pm \frac{1}{2} \lg (x + \sqrt{x^2+1}) + C$$

третьяго класса.

Примѣръ 4.

Уравненіе

$$y' + y^2 = \frac{a}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2}$$

согласно Эйлеру [1]) имѣетъ общимъ интеграломъ:

$$e^{-\omega} \frac{2(\alpha + \beta x + \gamma x^2) y + n - \beta - 2\gamma x}{2(\alpha + \beta x + \gamma x^2) y - n - \beta - 2\gamma x} = C,$$

гдѣ

$$n = \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma + 4a}$$

$$\omega = n \int \frac{dx}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} = \frac{n\gamma}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \lg \frac{2\gamma x + \beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\gamma x + \beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}$$

откуда получаемъ общее рѣшеніе въ слѣдующемъ видѣ:

$$y = \frac{2(\alpha + \beta x + \gamma x^2) - n - \beta - 2\gamma x}{2(\alpha + \beta x + \gamma x^2)} Ce^{\omega} + \frac{2\gamma x + n - \beta}{2(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}$$

---

[1]) Commentarii Academiae Petropolitanae t. VIII. 1760 г. *Euleri.* De integratione aequationum differentialium стр. 9.

Оно будетъ принадлежать ко второму классу и имѣть частное алгебраическое рѣшеніе ($C=0$)

$$y=\frac{2\gamma x+n+\beta}{2(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}$$

отмѣченное Эйлеромъ.

Примѣръ 5.

Уравненіе:

$$y'^2+(x+\frac{1}{2}x^3)y'-(1+x^2)y-\frac{1}{16}x^4=0$$

Откуда общее рѣшеніе:

$$y=-3x^2+2x\sqrt{1+x^2}\lg(x+\sqrt{1+x^2})+$$
$$+\lg^2(x+\sqrt{1+x^2})+2Cx\sqrt{1+x^2}+C^2$$

выражается при помощи логариѳмовъ и уравненіе третьяго класса.

Особенное рѣшеніе

$$16y+4x^2+x^4=0$$

алгебраическое.

§ 5. Всѣ разсужденія § 3 относятся къ случаю, когда *общее рѣшеніе выражается въ конечномъ видѣ.*

Возьмемъ теперь случай, когда *частное рѣшеніе выражается въ конечномъ видѣ при условіи, что общее рѣшеніе не выражается въ конечномъ видѣ.*

Въ этомъ случаѣ интегралъ

$$y=\pi(x,\ \theta_1+\mu_1,\ \theta_2+\mu_2\ldots\theta_p+\mu_p,\ v_1\eta_1,\ v_2\eta_2\ldots v_q\eta_q) \tag{42}$$

который вмѣстѣ съ даннымъ (согласно § 2)

$$y=\pi(x,\ \theta_1,\ \theta_2\ldots\theta_p,\ \eta_1,\ \eta_2\ldots\eta_q)$$

долженъ удовлетворять дифференціальному уравненію:

$$f(x,\ \xi,\ y,\ y')=0 \tag{2}$$

содержитъ произвольныя постоянныя, сводящіяся къ одной, и y, опредѣляемое уравненіемъ (12), представляетъ интегралъ уравненія (2). Для того, чтобы послѣднее не имѣло мѣста, изъ выраженія (12) всѣ μ_i должны исчезнуть т. е. должны имѣть

$$\frac{\partial\pi^{(1)}}{\partial\mu_i}=0 \qquad \frac{\partial\pi^{(1)}}{\partial v_i}=0$$

откуда

$$\frac{\partial\pi}{\partial\theta_i}=0 \qquad \frac{\partial\pi}{\partial\eta_i}=0$$

и π сводится къ алгебраической функціи отъ x.

Если частное рѣшеніе алгебраическаго дифференціальнаго уравненія перваго порядка выражается въ конечномъ видѣ, а общее не выражается, то частное рѣшеніе необходимо должно быть алгебраическимъ.

Особенное рѣшеніе, какъ совмѣстное рѣшеніе уравненій:

$$f(x\,,\,\xi\,,\,y\,,\,\triangle)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial\triangle}=0 \quad \frac{\partial f}{\partial x}+\triangle\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

должно быть всегда алгебраическимъ, независимо отъ того, выражается ли въ конечномъ видѣ общее рѣшеніе или нѣтъ.

§ 6. Первое основное свойство уравненій, рѣшаемыхъ въ конечномъ видѣ, связуетъ наши изслѣдованія съ работами Кенигсбергера [1]), относящимися къ классу уравненій перваго порядка, обладающимъ этимъ свойствомъ. Второе свойство даетъ возможность воспользоваться изслѣдованіями Пенлевэ [2]), относящимися къ уравненіямъ перваго порядка особаго класса. А, именно, алгебраическая зависимость между y и y_0 (значеніемъ y при $x=a$) является характернымъ свойствомъ уравненій, обладающихъ общимъ рѣшеніемъ съ конечнымъ опредѣленнымъ числомъ значеній около подвижныхъ (т. е. зависящихъ отъ y_0) критическихъ точекъ. Пенлевэ изслѣдуетъ условія, чтобы заданное уравненіе принадлежало къ такому классу уравненій, и даетъ методы дли опредѣленія въ иныхъ случаяхъ при наличности этихъ условій общаго рѣшенія уравненія. Въ этихъ случаяхъ изслѣдованія Пенлевэ даютъ также рѣшеніе изслѣдуемой нами задачи интегрированія въ конечномъ видѣ уравненія перваго порядка.

Оставляя покуда изслѣдованіе интересной связи нашихъ изслѣдованій съ работами Пенлевэ, мы выбираемъ болѣе простой способъ изслѣдованія, независимый отъ результатовъ Пенлевэ и опирающійся на результаты нашей предыдущей работы, относящейся къ дифференціальнымъ уравненіямъ перваго порядка.

Замѣтимъ прежде всего, что, если общее рѣшеніе y выражается въ конечномъ видѣ, то опредѣляя изъ уравненій

$$y=\Omega(\alpha\vartheta)$$

$$y=\Omega(\zeta+\beta)$$

---

[1]) *L. Koenigsberger.* Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen. Leipzig 1882 s. 50.

[2]) *Painlevé.* Leçons sur la théorie analytique des équations differentielles. Paris 1897.

Тоже въ Annales de l'Eçole Normale t. 13 (1891):

Painlevé. Sur les équations différentielles du premier ordre.

произвольныя постоянныя α и β въ алгебраическихъ функціяхъ отъ (x, y, ζ) или (x, y, ϑ) получаемъ общій интегралъ уравненія (10):

$$M(x, \xi, y, t)\,dx + N(x, \xi, y, t)\,dy = 0 \tag{10}$$

въ конечномъ видѣ.

Но, согласно доказанному въ первой статьѣ, этотъ интегралъ можетъ быть всегда приведенъ къ слѣдующему виду:

$$\Phi(x, y, t)\sqrt[n]{G(x, y, t)} + \\ + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg \prod_{j=0}^{j=n-1} \psi_k^{\alpha^{-j}}\left[x, y, t, \alpha^j \sqrt[n]{G(x, y, t)}\right] = C \tag{55}$$

гдѣ Φ, G раціональныя функціи (x, y, t), ψ_k раціональная функція (x, y, t) и

$$\sqrt[n]{G(x, y, t)},$$

C_k постоянныя, α первообразный корень двучленнаго уравненія:

$$\alpha^n = 1. \tag{56}$$

Замѣняя въ § 3 первой статьи условія неприводимости въ области раціональныхъ функцій:

$$(x, y)$$

условіями неприводимости въ области раціональныхъ функцій:

$$(x, y, \xi),$$

мы получаемъ уравненіе (45 первой статьи)

$$\int (M dx + N dy) = \varphi(x, y, t) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg \psi_k(x, y, t) \tag{57}$$

но съ условіемъ, что φ, ψ раціональныя функціи не только (x, y, t) но и ξ, такъ что

$$\int (M dx + N dy) = \varphi(x, y, \xi, t) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg \psi_k(x, y, \xi, t) \tag{58}$$

если φ, ψ раціональныя функціи величинъ, заключенныхъ въ скобки.

Уравненіе (66 первой статьи) замѣняется тогда слѣдующимъ

$$u = \int e^{H(x, \xi, y, t)} \prod_{k=1}^{k=m} [H_k(x, \xi, y, t)]^{\lambda_k} [M(x, \xi, y, t)\,dx + N(x, \xi, y, t)\,dy] \tag{59}$$

Уравненія (67) и (68) слѣдующими:

Изъ ур. (59) слѣдуетъ согласно § 5 первой статьи:

$$U = e^{H(x,\xi,y,t)} \prod_{k=1}^{k=q} [H_k(x, \xi, y, t)]^{\lambda_k} \sqrt[n]{G(x,\xi,y,t)}$$

или

$$U = \Phi[x, \xi, y, t, \sqrt[n]{G(x, \xi, y, t)}] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg \psi_k[x, \xi, y, t, \sqrt[n]{G(x, \xi, y, t)}]$$

что даетъ вмѣсто (55) слѣдующее выраженіе для интеграла:

$$\Phi(x, \xi, y, t) \sqrt[n]{G(x, \xi, y, t)} +$$
$$\sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg \prod_{j=0}^{j=n-1} \psi_k^{\alpha-j}[x, \xi, y, t, \alpha^j \sqrt[n]{G(x, \xi, y, t)}] = C \tag{60}$$

гдѣ Φ, G раціональныя функціи (x, ξ, y, t), ψ_k раціональная функція (x, ξ, y, t) и

$$\sqrt[n]{G(x, \xi, y, t)}$$

C_k постоянныя, α первообразный корень уравненія (56).

Такимъ же образомъ преобразуется и болѣе общая форма интеграла (68 формула I-ой статьи), которую можемъ написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\Phi(x, \xi, y, t) \sqrt[n]{G(x \xi y t)} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg \psi_k[x, \xi, y, t, \sqrt[n]{G(x, \xi, y, t)}] = C \tag{61}$$

причемъ между C_k мы можемъ предполагать отсутствіе линейныхъ соотношеній

$$\sum_{k=1}^{k=m} a_k C_k = a \tag{62}$$

съ раціональными коэффиціентами.

§ 7. Положимъ теперь, что заданное уравненіе принадлежитъ ко второму классу, такъ что

$$y = \pi(x, \alpha\vartheta) \tag{63}$$

Положимъ далѣе, что общій интегралъ выражается въ алгебраическо-логариѳмической формѣ:

$$\Phi(x\,,\ y) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg \psi_k(x\,,\ y) = C \tag{64}$$

гдѣ между C_k нѣтъ линейныхъ соотношеній (62). Подставляя въ это уравненіе y въ ϑ изъ уравненія (63), получаемъ уравненіе, опредѣляющее ϑ:

$$P^{(1)}(x\ \alpha\vartheta) = 0\,, \tag{65}$$

гдѣ

$$P^{(1)}(x\,,\ \alpha\vartheta) = A(x\,,\ \alpha\vartheta) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg B_k(x\,,\ \alpha\vartheta) - C \tag{66'}$$

гдѣ A, B_k алгебраическія функціи $(x\,,\alpha\vartheta)$ ϑ, какъ и y можетъ содержать одну произвольную постоянную.

Для того, чтобы α и C въ $P^{(1)}(x\,,\ \alpha\vartheta)$ сливались въ одну произвольную постоянную необходимо, чтобы

$$\frac{\partial P^{(1)}}{\partial \alpha} + D\frac{\partial P^{(1)}}{\partial C} = 0 \tag{67}$$

гдѣ D постоянное или

$$\frac{\partial P^{(1)}}{\partial \alpha} = D\,,$$

а, такъ какъ

$$\frac{\partial P^{(1)}}{\partial \alpha} = \vartheta\,\frac{\partial P^{(1)}}{\partial(\alpha\vartheta)}\,,$$

то

$$\vartheta\,\frac{\partial P^{(1)}}{\partial(\alpha\vartheta)} = D\,,$$

а при $\alpha = 1$.

$$\vartheta\,\frac{\partial P}{\partial \vartheta} = D\,, \tag{68}$$

если

$$P(x\,,\ \vartheta) = A(x\,,\ \vartheta) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg B_k(x\,,\ \vartheta) - C \tag{66}$$

Изъ уравненія (68) слѣдуетъ слѣдующее тождество:

$$P(x\,,\ \vartheta) = D\lg\vartheta + E$$

или

$$A(x\,,\ \vartheta) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg B_1(x\ \vartheta) - C = D\lg\vartheta + E \tag{69}$$

гдѣ D постоянное, E не зависитъ отъ ϑ, а потому и отъ y.

Разсматривая B_k, какъ функцію отъ ϑ, для всякаго нуля и полюса $\vartheta = \omega$, отличнаго отъ $\vartheta = 0$, должны имѣть тождественно при всякомъ ϑ

$$\sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg (\vartheta - \omega)^{\gamma_k} = 0 ,$$

гдѣ γ_k раціональныя числа, откуда получаемъ

$$\sum_{k=1}^{k=m} C_k \gamma_k = 0$$

т. е. соотношеніе типа (62).

Такимъ образомъ $B_k(x, \vartheta)$ могутъ имѣть нулями и полюсами только $\vartheta = 0$.

Поэтому

$$B_k(x, \vartheta) = \vartheta^{\gamma_k} \pi_k(x), \tag{70}$$

гдѣ $\pi_k(x)$ не зависятъ отъ ϑ и какъ $B_k(x, \vartheta)$ алгебраическія функціи отъ x. Что же касается до $A(x, \vartheta)$, то, разлагая эту функцію около полюсовъ, убѣждаемся въ томъ, что главныя части разложеній тождественно равны нулю, $A(x, \vartheta)$ сохраняетъ на плоскости конечное значеніе и

$$A(x, \vartheta) = \varrho(x) \tag{71}$$

Но, если A и B_k вида (70) и (71), то

$$\Phi(x, y) = \Phi(x)$$

не зависитъ отъ y, а

$$\psi_k^{a_k}(x, y) = \psi_k(x) \pi(x, y),$$

гдѣ $\psi_k(x)$ функція отъ x, a_k постоянныя.

Если общій интегралъ дифференціальнаго уравненія перваго порядка и второго класса представляется въ алгебраическо-логариѳмической формѣ:

$$\Phi(x, y) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg \psi_k(x, y) = C \tag{72}$$

гдѣ между C_k не существуетъ линейныхъ соотношеній съ раціональными коэффиціентами, то алгебраическій членъ:

$$\Phi(x, y) = \Phi(x) \tag{73}$$

не зависитъ отъ y, *а степени функцій, стоящихъ подъ знаками логариѳмовъ, находятся между собой въ отношеніяхъ.*

$$\frac{\psi_k^{a_k}(x, y)}{\psi^{a_1}(x, y)} = \pi_k(x) \tag{74}$$

независящихъ отъ x.

§ 8. Положимъ теперь, что заданное уравненіе принадлежитъ ко второму классу, т. е.

$$y = \pi(x, \zeta + \beta) \tag{75}$$

Тогда уравненіе (67) замѣняется уравненіемъ

$$\frac{\partial P^{(1)}}{\partial \beta} - D\frac{\partial P^{(1)}}{\partial C} = 0 \tag{76}$$

гдѣ

$$P^{(1)}(x, \zeta + \beta) = A(x, \zeta + \beta) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg B_k(x, \zeta + \beta) - C \tag{77}$$

результатъ подстановки въ лѣвую часть уравненія (64) вмѣсто y его выраженія (75). Уравненіе же (76) даетъ:

$$\frac{\partial P^{(1)}}{\partial \beta} = D,$$

а, такъ какъ

$$\frac{\partial P^{(1)}}{\partial \beta} = \frac{\partial P^{(1)}}{\partial(\zeta + \beta)}$$

то при $\beta = 0$

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} = D \tag{78}$$

$$P = D\zeta + E,$$

гдѣ D постоянное, F не зависитъ отъ ζ, и потому и отъ y, или

$$A(x, \zeta) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg B_k(x, \zeta) = D\zeta + E \tag{79}$$

Какъ въ предыдущемъ параграфѣ выводили, что $B_k(x, \zeta)$ не зависятъ отъ ζ, $A(x, \zeta)$, имѣя тѣ же полюса, что $D\zeta$ съ тѣми же главными частями разложенія, отличаются отъ $D\zeta$ только на величины, независящія отъ ζ.

Отсюда слѣдуетъ:

Если общій интегралъ дифференціальнаго уравненія 3-го класса имѣетъ алгебраическо-логариѳмическую форму:

$$\Phi(x, y)+\sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg \psi_k(x, y)=C \tag{72}$$

гдѣ между C_k *не существуетъ линейныхъ соотношеній съ раціональными коэффиціентами, то функціи, стоящія подъ знаками логариѳмовъ, не зависятъ отъ* y.

§ 9. Возвращаясь къ доказанной формѣ (61) общаго интеграла, выражаемаго въ конечномъ видѣ, на основаніи доказаннаго въ § 7, мы имѣемъ, что въ случаѣ уравненія второго класса, функціи

$$\pi_k[x, \xi, y, t, \sqrt[n]{G(x, \xi, y, t)}]=\frac{\psi_k^{a_k}[x, \xi, y, t, \sqrt[n]{G(x, \xi, y, t)}]}{\psi_1^{a_1}[x, \xi, y, t, \sqrt[n]{G(x, \xi, y, t)}]} \tag{80}$$

не должны зависѣть отъ (y, t).

Здѣсь слѣдуетъ различать два случая:

I) *G зависитъ отъ (y, t).*

II) *G не зависитъ отъ (y, t).*

I) Въ первомъ случаѣ, полагая

$$\alpha t+\beta \sqrt[n]{G(x, \xi, y, t)}=w, \tag{82}$$

гдѣ α, β надлежаще выбранныя постоянныя, имѣемъ

$$\pi_k[x, \xi, y, t, \sqrt[n]{G(x, \xi, y, t)}]=\pi_k(x, \xi, y, w),$$

гдѣ π_k, какъ и вездѣ ниже, означаетъ раціональную функцію величинъ, заключенныхъ въ скобки.

Далѣе, такъ какъ $\pi_k(x, \xi, y, w)$ не зависятъ отъ (y, t), а потому и отъ w, то

$$\pi_k(x, \xi, y, w)=\pi_k(x, \xi, y, w_j)=\frac{\sum_{j=1}^{j=q}\pi_k(x, \xi, y, w_j)}{q},$$

гдѣ w_j корни неприводимаго уравненія, опредѣляющаго w. Отсюда $\pi_k(x, \xi, y, w)=\pi_k(x, \xi, y)$ раціональная функція (x, ξ, y). Полагая же вмѣсто y какое либо постоянное, черезъ что $\pi_k(x, \xi, y, w)$ какъ не зависящее отъ ζ не мѣняется, имѣемъ, что

$$\pi_k(x, \xi, y, w) = \pi_k(x, \xi), \quad \varrho(x, \xi, y, w) = \varrho(x, \xi)$$
$$\varrho(x, \xi, y, w) = \Phi[x, \xi, y, t, \sqrt[n]{G(x, \xi, y, t)}]\ ^{1)}$$

раціональныя функціи (x, ξ).

Но легко теперь видѣть, что этотъ случай не можетъ имѣть мѣста при уравненіяхъ второго класса безъ того, чтобы общій интегралъ не представлялся бы въ слѣдующей болѣе простой формѣ:

$$\lg \Phi(x, \xi, y, t) + \omega(x, \xi) + \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \lg \pi_k(x, \xi) = C \tag{83}$$

гдѣ Φ раціональная функція отъ (x, ξ, y, t), ω, π_k раціональныя функціи (x, ξ), λ_k постоянныя. Въ самомъ дѣлѣ на основаніи доказаннаго выше имѣемъ [2]), замѣняя въ выраженіи (61) ψ_k черезъ $\pi_k(x, \xi)$ по формулѣ (80):

$$\begin{gathered}\lg \Phi[x, \xi, y, t, \sqrt[n]{G(x, \xi, y, t)}] + \varrho(x, \xi) + \\ + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg \pi_k(x\ \xi) = C,\end{gathered} \tag{84}$$

переходя же отъ этой формы общаго интеграла къ другимъ, отвѣчающимъ $\alpha^j \sqrt[n]{G(x, \xi, y, t)}$

$$\begin{gathered}\lg \Phi[x, \xi, y, t, \alpha^j \sqrt[n]{G(x, \xi, y, t)}] + \varrho(x, \xi) + \\ + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg \pi_k(x, \xi) = C_j\end{gathered} \tag{84_j}$$

гдѣ, согласно доказанному въ первой статьѣ

$$C_j = \alpha^j C_1$$

Складывая почленно уравненія (84_j) получаемъ

$$\begin{gathered}\lg \prod_{j=0}^{j=n-1} \Phi[x, \xi, y, t, \alpha^j \sqrt[n]{G(x, \xi, y, t)}] + \\ + n\varrho(x, \xi) + n \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg \pi_k(x, \xi) = \sum_{j=0}^{j=n-1} C_1 \alpha^j\end{gathered}$$

---

[1]) Здѣсь Φ имѣетъ другое значеніе чѣмъ выше.

[2]) Замѣняя изъ уравненія (80) $\lg \psi_k(x, \xi, y, t, \sqrt[n]{G})$ черезъ $\lg \pi_k(x, \xi, y, t, \sqrt[n]{G})$ и $\lg \psi_1(x, \xi, y, t, \sqrt[n]{G})$.

или

$$\lg \Phi(x, \xi, y, t) + \varrho(x, \xi) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg \pi_k(x, \xi) = 0 \tag{85}$$

гдѣ Φ раціональная функція.

Уравненіе это даетъ не общее, а частное рѣшеніе. Но согласно § 6 изъ него получаемъ общее простой замѣной $\lg \pi_k(x, \xi)$ на $\lg \pi_k(x, \xi) + C^{(k)}$, гдѣ $C^{(k)}$, произвольное постоянное. Въ самомъ дѣлѣ уравненіе (85) даетъ

$$y = \pi(x, \eta_1, \eta_2 \ldots \eta_k),$$

гдѣ π алгебраическая функція $(x, \eta_1, \eta_2 \ldots \eta_m)$ и гдѣ $\eta_i = [\pi(x, \xi)]^{C_k}$ можно замѣнить $v_i\ \eta_i$ гдѣ v_i произвольное постоянное, а это равносильно замѣнѣ въ (85) $\lg \pi_k(x, \xi)$ на $\lg \pi_k(x, \xi) + \dfrac{\lg v_i}{C_k}$

II) Итакъ общее рѣшеніе опредѣляется уравненіями типа:

$$\lg \Phi(x, \xi, y, t) + \varrho(x, \xi) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg \pi_k(x\ \xi) = C \tag{83}$$

II) Если G не зависитъ отъ (y, t), то, какъ выше, убѣждаемся обозначая черезъ G, π_k, ϱ раціональныя функціи величинъ, заключенныхъ въ скобки:

$$G(x, \xi, y, t) = \frac{\sum_{j=1}^{1=q} G(x, \xi, y, t_j)}{q} = G(x, \xi, y) = G(x, \xi)$$

$$\pi_k(x, \xi, y, t, \sqrt[n]{G(x, \xi)}) = \frac{\sum_{j=1}^{1=q} \pi_k[x, \xi, y, t, \sqrt[n]{G(x, \xi)}]}{q} =$$

$$= \pi_k[x, \xi, y, \sqrt[n]{G(x, \xi)}] = \pi_k[x, \xi, \sqrt[n]{G(x, \xi)}]$$

и точно такимъ же образомъ:

$$\varrho[x, \xi, y, t, \sqrt[n]{G(x, \xi)}] = \varrho[x, \xi, \sqrt[n]{G(x, \xi)}]$$

и поэтому общій интегралъ получаемъ въ формѣ:

$$\lg \Phi[x, \xi, \sqrt[n]{G(x, \xi)}, y, t] + \varrho[x, \xi, \sqrt[n]{G(x, \xi)}] + \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \lg \pi_k[x, \xi, \sqrt[n]{G(x, \xi)}] = C \tag{86}$$

подъ которую, какъ частный случай подходитъ форма (83).

Изъ уравненія (86) получаемъ:

$$\Phi[x, \xi, \sqrt[n]{G(x, \xi)}, y, t] =$$
$$= C'_0 e^{\rho[x, \xi, \sqrt[n]{G(x, \xi)}]} \prod_{k=1}^{k=m} \Big[\pi_k[x, \xi, \sqrt[n]{G(x, \xi)}]\Big]^{\lambda_k} \tag{87}$$

Переходя къ формамъ интеграловъ, отвѣчающихъ $\alpha^j \sqrt[n]{G(x, \xi)}$ будемъ имѣть также

$$\Phi[x, \xi, \alpha^j \sqrt[n]{G(x, \xi)}, y, t] =$$
$$= C'_j e^{\rho[x, \xi, \alpha^j \sqrt[n]{G(x, \xi)}]} \prod_{k=1}^{k=m} \Big[\pi_k[x, \xi, \alpha^j \sqrt[n]{G(x, \xi)}]\Big]^{\lambda_k} \tag{87_j}$$

Умножая уравненія (87_j) на α^{-j} и почленно складывая, получаемъ, имѣя въ виду, что, согласно первой статьѣ

$$C'_j = C'^{\alpha^{-j}}_0$$

$$\Phi(x, \xi, y, t \sqrt[n]{G(x, \xi)} =$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{j=n-1} C_0^{\alpha^{-j}} \alpha^{-j} e^{\rho[x, \xi, \alpha^j \sqrt[n]{G(x, \xi)}]} \prod_{k=1}^{k=m} \pi^{\lambda_k}[x, \xi, \alpha^j \sqrt[n]{G(x, \xi)}] \tag{88}$$

Такимъ образомъ мы получаемъ общую форму для рѣшенія дифференціальнаго уравненія перваго порядка и второго класса.

Полученный результатъ можетъ быть еще слѣдующимъ образомъ формулированъ:

$$\lg \Phi[x, \xi, y, t, \alpha^j \sqrt[n]{G(x, \xi)}] + \varrho[x, \xi, \alpha^j \sqrt[n]{G(x, \xi)}] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \lg \pi_k[x, \xi, \alpha^j \sqrt[n]{G(x, \xi)}] = C_j \tag{84_j}$$

Умножая на α^{-j} и складывая почленно, имѣемъ

$$\lg \prod_{j=0}^{j=n-1} \Phi^{\alpha^{-j}}[x, \xi, y, t, \alpha^j \sqrt[n]{G(x, \xi)}] = \varrho(x, \xi) \sqrt[n]{G(x, \xi)} +$$
$$+ \sum_{k=0}^{k=m} \lambda_k \lg \prod_{j=0}^{j=n-1} \pi_k^{\alpha^{-j}}[x, \xi, \alpha^j \sqrt[n]{G(x, \xi)}] + C. \tag{89}$$

гдѣ ϱ и π означаютъ раціональныя функціи величинъ, заключенныхъ въ скобки.

Полагая

$$\gamma = \lg \prod_{j=0}^{j=n-1} \Phi^{\alpha^{-j}} [x, \xi, y, t, \alpha^{-j} \sqrt[n]{G(x, \xi)}] \tag{90}$$

будемъ имѣть:

$$\frac{d\gamma}{dx} = \varphi(x, \xi) \sqrt[n]{G(x, \xi)} \tag{91}$$

гдѣ $\varphi(x, \xi)$ раціональная функція.

Итакъ, *если дифференціальное уравненіе перваго порядка разрѣшается съ помощью однихъ алгебраическихъ, степенныхъ и показательныхъ функцій, т. е. принадлежитъ ко второму классу, то подстановкой:*

$$\gamma = \lg \prod_{j=0}^{j=n-1} \Phi^{\alpha^{-j}} [x, \xi, y, t, \alpha^{j} \sqrt[n]{G(x, \xi)}], \tag{92}$$

дифференціальное уравненіе приводится къ квадратурѣ

$$\frac{d\gamma}{dx} = \varphi(x, \xi) \sqrt[n]{G(x, \xi)} \tag{93}$$

Абелевъ интегралъ

$$\gamma = \int \varphi(x, \xi) \sqrt[n]{G(x, \xi)}\, dx, \tag{94}$$

которымъ опредѣляется γ, принадлежитъ къ типу Абелевыхъ интеграловъ, впервые изслѣдованныхъ Кенигсбергеромъ [1]), а затѣмъ нами въ нашей диссертаціи [2]). Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$G(x, \xi) = z^r$$

$$\pi(x, \xi) = 0,$$

и, исключая ξ имѣемъ

$$\Phi(x, z) = 0$$

$$\xi = \omega(x, z),$$

гдѣ ω раціональная функція; имѣемъ

$$\gamma = \int F(x, y^n)\, y^r\, dx \tag{95}$$

---

[1]) *L. Koenigsberger.* Ueber die Reduction Abelscher Integrale auf niedere Integralformen. Journal de Crelle. 89. 1880 s. 89 и другія статьи.

[2]) *Д. Мордухай-Болтовской.* О приведеніи Абелевыхъ интеграловъ къ нисшимъ трансцендентнымъ ч. I. гл. III, ч. II. гл. II. В.

гдѣ $y = z^{\frac{1}{n}}$ опредѣляется уравненіемъ

$$\Phi(x\,,\;y^n) = 0 \tag{96}$$

Это и есть обычная форма *однозначныхъ интеграловъ Кенигсбергера*, въ которой мы вели ихъ изслѣдованіе.

Уравненіе (86) вмѣстѣ съ тѣмъ даетъ преобразованіе заданнаго уравненія (10) при помощи подстановки

$$\gamma = \Phi[x\,,\;\xi\,,\sqrt[n]{G(x,\xi)}\,,\;y\,,\;t] \tag{97}$$

въ уравненіе

$$\frac{d\gamma}{dx} = \varphi\,[x\,,\;\xi\,,\sqrt[n]{G(x,\xi)}]\,\gamma \tag{98}$$

Дифференціальное уравненіе перваго порядка второго класса преобразуется алгебраической подстановкой типа:

$$\gamma = \Phi[x\,,\;\xi\,,\sqrt[n]{G(x,\xi)}\,,\;y\,,\;t]\,,$$

гдѣ Φ означаетъ раціональную функцію

$$[x,\;\xi,\sqrt[n]{G(x,\xi)},\;y,\;t]$$

въ линейное уравненіе перваго порядка безъ послѣдняго члена.

Примѣръ.

Уравненіе

$$4y'^2(1+x)^2 - 4yy'(1+x) - xy^2 - 1 = 0 \tag{99}$$

или, что тоже, уравненіе

$$2(1+x)\,dy - (y+t)\,dx = 0$$

гдѣ

$$t^2 = (1+x)\,y^2 + 1 \tag{100}$$

имѣетъ общій интегралъ опредѣляемый уравненіемъ:

$$y\sqrt{1+x} = \frac{Ce^{\sqrt{1+x}} - C^{-1}e^{-\sqrt{1+x}}}{2} \tag{101}$$

Здѣсь

$$G(x\,,\;\xi) = G(x) = 1 + x$$

$$n = 2\,,\quad \alpha = -1$$

Изъ уравненія (101) имѣемъ:

$$Ce^{\sqrt{1+x}} = y\sqrt{1+x} \pm \sqrt{y^2(1+x)+1}\,,$$

а такъ какъ на основаніи уравненія (100)

$$t = \pm \sqrt{y^2(1+x)+1}\,,$$

$$y\sqrt{1+x} + t = Ce^{\sqrt{1+x}}$$

$$\lg(t + y\sqrt{1+x}) + \lg\frac{1}{\sqrt{1+x}} = C\,.$$

Уравненіе (99) при помощи трансцендентной подстановки

$$\gamma = \lg\,\frac{t + y\sqrt{1+x}}{t - y\sqrt{1+x}}$$

преобразуется въ уравненіе

$$\frac{d\gamma}{dx} = 0\,,$$

а при помощи алгебраической подстановки

$$\gamma = t + y\sqrt{1+x}$$

въ линейное уравненіе:

$$\frac{d\gamma}{dx} + \frac{\gamma x}{2(1+x)} = 0$$

§ 10. Теперь разсмотримъ случай уравненій третьяго класса.

На основаніи § 8 мы имѣемъ, что

$$\psi_k[x\,,\ \xi\,,\ y\,,\ t\,,\ \sqrt[n]{G(x,\ \xi,\ y,\ t)}]$$

не зависитъ отъ $(y\,,\ t)$.

Различая опять два случая, когда

I) *G зависитъ и* **II)** *не зависитъ отъ* $(y\,,\ t)$,

убѣждаемся, что въ первомъ случаѣ интегралъ дифференціальнаго уравненія перваго порядка будетъ вида:

$$\Phi[x\,,\ \xi\,,\ y\,,\ t\,,\sqrt[n]{G(x,\xi,y,t)}] + \varrho\,(x,\ \xi) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg \pi_k(x,\ \xi) = C \quad (102)$$

Переходя къ другимъ формамъ интеграла, отвѣчающимъ

$$\alpha^j\sqrt[n]{G(x,\ \xi,\ y,\ t)}$$

имѣемъ:

$$\Phi[x, \xi, y, t, \alpha^j\sqrt[n]{G(x,\xi,y,t)}] + \varrho\,(x,\xi) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg \pi_k(x,\ \xi) = C_j \quad (102_j)$$

умножая на α^{-j} и почленно складывая, получаемъ алгебраическій интегралъ вида:

$$\Phi(x, \xi, y, t)\sqrt[n]{G(x, \xi, y, t)} = C \tag{103}$$

чего быть не можетъ, ибо взятое уравненіе по предположенію 3-го, а не 1-го класса.

Въ случаѣ G не зависящаго отъ (y, t), какъ въ § 8, получаемъ:

$$\Phi[x, \xi, \sqrt[n]{G(x, \xi)}, y, t] = \varrho[x, \xi, \sqrt[n]{G(x, \xi)}] + \\ + \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \lg \pi_k [x, \xi \sqrt[n]{G(x, \xi)}] + C \tag{104}$$

и кромѣ того

$$\Phi[x, \xi, \alpha^j \sqrt[n]{G(x, \xi)}, y, t] = \varrho[x, \xi, \alpha^j \sqrt[n]{G(x, \xi)}] + \\ + \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \lg \pi_k [x, \xi, \alpha^j \sqrt[n]{G(x, \xi)}] + C \tag{104_j}$$

Умножая на α^{-j} и почленно складывая получаемъ:

$$\Phi(x, \xi, y, t)\sqrt[n]{G(x, \xi)} = \varrho(x, \xi)\sqrt[n]{G(x, \xi)} + \\ + \sum_{k=1}^{\gamma=m} \lambda_k \lg \prod_{j=0}^{j=n-1} \pi_k^{\alpha^{-j}} [x, \xi, \alpha^j \sqrt[n]{G(x, \xi)}] + C \tag{105}$$

это—*общая форма для рѣшенія дифференціальнаго уравненія перваго порядка 3-го класса.*

Изъ уравненія (105) слѣдуетъ, что, *если дифференціальное уравненіе перваго порядка рѣшается при помощи однихъ алгебраическихъ и логариѳмическихъ функцій, а потому принадлежитъ къ третьему классу, то это уравненіе алгебраической подстановкой типа:*

$$\gamma = \Phi[x, \xi, t, \sqrt[n]{G(x, \xi)}] \tag{106}$$

гдѣ Φ означаетъ раціональную функцію величинъ, заключенныхъ въ скобки, приводится къ квадратурѣ:

$$\frac{d\gamma}{dx} = \varphi(x, \xi)\sqrt[n]{G(x, \xi)} \tag{107}$$

гдѣ φ раціональная функція (x, ξ).

Примѣръ. Дифференціальное уравненіе:

$$x+y^2-6(1-x)yy'+\frac{3(1-x)^2}{x}=0 \tag{108}$$

легко приводимое къ виду

$$(1+2yy')\sqrt[3]{1-x}-\frac{(x+y^2)}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}=\frac{\sqrt[3]{1-x}}{x}$$

имѣетъ интегралъ

$$(x+y^2)\sqrt[3]{1-x}=C+$$

$$+3\sqrt[3]{1-x}-\lg(\sqrt[3]{1-x}-1)(\alpha\sqrt[3]{1-x}-1)^{\alpha^{-1}}(\alpha^2\sqrt[3]{1-x}-1)^{\alpha^{-2}}$$

гдѣ

$$\alpha=-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \qquad i=\sqrt{-1}$$

откуда слѣдуетъ, что уравненіе (108) алгебраической подстановкой

$$\gamma=(x+y^2)\sqrt[3]{1-x}$$

приводится къ

$$\frac{d\gamma}{dx}=\frac{\sqrt[3]{1-x}}{x}$$

здѣсь

$$n=3, \qquad G(x, \xi)=G(x)=\sqrt[3]{1-x}$$

§ 11. Замѣчая, что алгебраическое рѣшеніе т. е. рѣшеніе уравненія перваго класса опредѣляется уравненіемъ типа:

$$\Phi(x, \xi, y, t)=C, \tag{109}$$

а потому

$$\gamma=\Phi(x, \xi, y, t)\sqrt[n]{G(x, \xi)}$$

$$G(x, \xi)=1$$

мы можемъ слѣдующимъ образомъ резюмировать полученные результаты.

I) *Если рѣшеніе уравненія перваго порядка выражается въ конечномъ видѣ, то это уравненіе одной изъ подстановокъ*

$$\gamma=\Phi(x, \xi, y, t)\sqrt[n]{G(x, \xi)} \tag{109}$$

или

$$\gamma=\lg\prod_{j=0}^{j=n-1}\Phi^{\alpha^{-j}}[x, \xi, y, t, \alpha^j\sqrt[n]{G(x, \xi)}] \tag{110}$$

гдѣ Φ, G раціональныя функція величинъ, заключенныхъ въ скобки, приводится къ уравненію

$$\frac{d\gamma}{dx} = \varphi(x,\ \xi)\sqrt[n]{G(x,\xi)}$$

φ, G раціональныя функціи $(x,\ \xi)$.

II) *Если общее рѣшеніе дифференціальнаго уравненія перваго порядка выражается въ конечномъ видѣ, то это уравненіе алгебраической падстановкой:*

$$\gamma = \Phi[x,\ \xi,\ y.\ t, \sqrt[n]{G(x,\ \xi)}] \tag{111}$$

гдѣ Φ раціональная функція

$$[x,\ \xi,\ y,\ t,\ \sqrt[n]{G(x,\ \xi)}]$$

преобразуется въ линейное уравненіе перваго порядка

$$\frac{d\gamma}{dx} + \varphi[x,\ \xi,\ \sqrt[n]{G(x,\ \xi)}]\ y = \psi(x,\ \xi, \sqrt[n]{G(x,\ \xi)}]\ . \tag{112}$$

съ коэффиціентами, раціональными относительно:

$$[x,\ \xi,\ \sqrt[n]{G(x,\ \xi)}],$$

гдѣ G раціональная функція $(x,\ \xi)$.

Дифференціальное уравненіе перваго порядка мы брали въ формѣ:

$$M(x,\ \xi,\ y,\ t)\,dx + N(x,\ \xi,\ y,\ t) = 0, \tag{10}$$

гдѣ M, N раціональныя функціи $(x,\ \xi,\ y,\ t)$, t опредѣляется уравненіемъ

$$F(x,\ \xi,\ y,\ t) = 0 \tag{11}$$

неприводимымъ въ области раціональныхъ функцій $(x,\ \xi,\ y)$, а ξ уравненіемъ

$$\pi(x,\ \xi) = 0, \tag{3}$$

неприводимымъ въ области раціональныхъ функцій x.

Отъ формы (10) легко перейти къ обычной

$$f(x,\ \xi,\ y,\ y') = 0 \tag{2}$$

полагая $f = \triangle$, гдѣ $\triangle$ опредѣляется уравненіемъ

$$f(x,\ \xi,\ y,\ \triangle) = 0. \tag{4}$$

Добавленіе къ статьѣ I-й.

(Д. Д. Мордухай-Болтовского).

Во избѣжаніе неясности въ § 4 I-й статьи слѣдуетъ имѣть въ виду, что $H(\theta, m)$ мы можемъ предполагать не зависящимъ не только отъ θ, но и отъ x, такъ что въ уравненіяхъ (22) и (26) C постоянныя.

Въ самомъ дѣлѣ въ противномъ случаѣ, если бы

$$H(\theta, m) + H_1(\theta_1, m)$$

была алгебраической функціей отъ трансцендентной θ_1, то имѣли бы

$$H_1(\theta_1, m) = \alpha,$$

гдѣ α рѣшеніе уравненія (54), и изъ приведенныхъ выше разсужденій слѣдовало бы, что θ_1 можно замѣнить постоянной. Такимъ образомъ $H(\theta, m)$ можетъ быть только алгебраической функціей, но тогда уравненіе (54) имѣетъ алгебраическое рѣшеніе, а уравненіе (6) алгебраическій интегралъ и потому алгебраическій интегрирующій множитель μ и для $\lg \mu$ мы очевидно имѣемъ форму (29).