# Къ вопросу объ особенныхъ элементахъ коннекса.

## II. Порядокъ и классъ сопряженнаго коннекса. Вліяніе на нихъ основныхъ точекъ и прямыхъ и собственно-особенныхъ элементовъ.

Д. М. Синцова.

**1.** Въ статьѣ подъ приведеннымъ заглавіемъ, напечатанной въ Извѣстіяхъ Казанскаго Физико-Математическаго Общества (2) т. XI стр. 71—102, установлены основанія классификаціи особенныхъ элементовъ коннекса на плоскости, основанныя на разсмотрѣніи соприкасающагося коннекса. Тамъ же (§ 4) введено понятіе полярной пары. Мы покажемъ здѣсь примѣненіе этого понятія къ опредѣленію порядка и класса сопряженнаго коннекса, подобно тому какъ въ теоріи плоскихъ кривыхъ пересѣченіе кривой съ ея первою полярою опредѣляетъ классъ кривой.

Задача эта разрѣшена Clebsch'емъ (Math. Ann. V) и Cyp. Stephanos'омъ (Bulletin Darboux, (2) IV). Не будетъ однако излишнимъ привести новый выводъ, въ виду полной аналогіи его съ опредѣленіемъ класса плоской кривой или кривой поверхности.

**2.** Классомъ плоской кривой $f(x_1\ x_2\ x_3)=0$ называемъ число касательныхъ, которыя можно провести къ кривой черезъ точку $X$, не лежащую на кривой, что аналитически сводится къ опредѣленію числа рѣшеній, общихъ уравненіямъ

$$f(x_1\ x_2\ x_3)=0 \quad \text{и} \quad \Sigma_i X_i f_i'(x_1\ x_2\ x_3)=0$$

т. е. числа точекъ пересѣченія кривой и первой ея поляры, взятой относительно произвольной точки $X$.

Если $f=0$ алгебраическое уравненіе общаго вида и степени $m$, то два эти уравненія степеней $m$ и $m-1$ имѣютъ $m(m-1)$ общихъ рѣшеній, что и даетъ классъ кривой.

Классъ поверхности опредѣляемъ, какъ число касательныхъ плоскостей, которыя можно провести къ поверхности черезъ произвольно заданную прямую, или, все равно, черезъ двѣ произвольно заданныя точки; аналитически это сводится къ опредѣленію общихъ рѣшеній трехъ уравненій

$$f(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)=0\,,\quad \Sigma X_i f'_i=0\,,\quad \Sigma X'_i f'_i=0\,,$$

гдѣ $X$ и $X'$ двѣ точки, лежащія на данной прямой, но не на данной поверхности. Если уравненіе поверхности общее алгебраическое и степени $m$, то находимъ $m(m-1)^2$ общихъ рѣшеній,—т. е. $m(m-1)^2$ точекъ пересѣченія поверхности съ двумя ея первыми полярами относительно двухъ точекъ, не лежащихъ на поверхности.

Порядкомъ коннекса мы называемъ порядокъ кривой $K_u$, принадлежащей произвольно заданной прямой $u$, т. е. число принадлежащихъ ему элементовъ $(x, u)$, которыхъ точка $x$ лежитъ на данной прямой, а прямая $u$ дана, т. е. проходитъ черезъ двѣ данныя точки. Слѣдоват., порядокъ сопряженнаго коннекса опредѣлится, какъ число его элементовъ $(y, v)$, которыхъ точка $y$ лежитъ на даной прямой $U$, а прямая $v$ дана, т. е. проходитъ черезъ двѣ данныя точки $X$ и $X'$. Аналитически это выразится уравненіями:

$$f(x, u)=0\,, \tag{1}$$

$$\varrho v_i = f'_{x_i} \tag{2}$$

$$\sigma y_k = f'_{u_k}\,, \tag{3}$$

$$U_y=0 \quad v_X=0 \quad v_{X'}=0 \tag{4}$$

число системъ значеній $y$, удовлетворяющихъ этимъ уравненіямъ, и есть порядокъ сопряженнаго коннекса. Систему эту можемъ замѣнить другою

$$f(x, u)=0\,, \tag{1}$$

$$\Sigma X f'_x=0\,, \tag{5}$$

$$\Sigma X' f'_x=0\,, \tag{6}$$

$$\Sigma U f'_u=0\,, \tag{7}$$

число значеній $(x, u)$ удовлетворяющихъ которой и должно дать искомое число значеній $y$. Но двѣ системы (1)—(4) и (1), (5)—(7) не вполнѣ эквивалентны. Именно, въ силу (1) и (2) $v_x=0$, слѣдоват., $x$, $X$ и $X'$ должны лежать на одной прямой, т. е. должно быть

$$(xXX')=0\,. \tag{8}$$

Это уравненіе и должно замѣнить (1) во второй системѣ. Мы получаемъ такимъ образомъ систему уравненій (5)—(8), число рѣшеній которой и доставитъ намъ порядокъ сопряженнаго коннекса.

По формулѣ $N = \Sigma mm'n''n'''$ для числа элементовъ, общихъ четыремъ коннексамъ, которые въ данномъ случаѣ суть

$$(m-1,n)\,, \quad (m-1,n)\,, \quad (m,n-1)\,, \quad (1,0)$$

находимъ

$$m' = n\,[mn + 2\,(m-1)\,(n-1)]\,.$$

Совершенно подобнымъ образомъ найдемъ, что классъ сопряженнаго коннекса опредѣлится, какъ число элементовъ, общихъ четыремъ коннексамъ

$$\Sigma X f'_x = 0\,, \quad \Sigma U f'_u = 0\,, \quad \Sigma U' f'_u = 0\,, \quad (uUU') = 0 \tag{9}$$

и слѣдовательно, по той же формулѣ равенъ

$$n' = m\,[mn + 2\,(m-1)\,(n-1)]\,.$$

**3.** Приведенный выводъ отличается отъ вывода Clebsch-Lindemann'a (Leçons de géom. III p. 364) только отсутствіемъ введенія вспомогательныхъ бинарныхъ перемѣнныхъ и потому имѣетъ болѣе непосредственное геометрическое значеніе. Благодаря этому мы можемъ примѣнить теперь для опредѣленія порядка и класса сопряженнаго коннекса понятіе *полярной пары.*

Названіе это было мною дано въ цитированной статьѣ (§ 4) конфигураціи, опредѣленной уравненіями

$$f(x\,,\,u) = 0\,, \quad \Sigma X f'_x = 0\,, \quad \Sigma U f'_u = 0\,.\ ^{1)} \tag{10}$$

Порядокъ такой пары по извѣстнымъ формуламъ опредѣлится равнымъ

$$n\,[mn + (n-1)\,(2m-1)]$$

а классъ

$$m\,[mn + (m-1)\,(2n-1)]$$

Числа эти больше порядка и класса сопряженнаго коннекса соотвѣтственно на $n\,(n-1)$ и $m\,(m-1)$. По аналогіи съ кривыми поверхностями можно было бы ожидать, что числа эти должны совпадать. Не трудно однако усмотрѣть причину этой разницы и удалить постороннія рѣшенія.

Всякій элементъ $(x,\,u)$, принадлежащій системѣ (5)—(8), принадлежитъ и системѣ (1), (5)—(7), а слѣдовательно, и полярной парѣ (10), если $X$ и $U$ въ обоихъ случаяхъ одинаковы. Точно также каждый элементъ, удовлетворяющій системѣ уравненій (9), принадлежитъ парѣ (10).

[1]) Въ цитированной статьѣ вкралась досадная описка: въ § 4 (стр. 15 отдѣльныхъ оттисковъ или стр. 85 Изв. Каз. Физ.-Мат. Общ. (2) XI n⁰ 3) вмѣсто 2-го и 3-го уравненій (10) стоитъ уравненіе касательнаго билинейнаго коннекса.

Порядокъ пары мы опредѣлимъ выражая, что точка $x$ должна лежать на данной прямой $U'$, т. е. добавляя къ (10) еще уравненіе

$$U'_x = 0 \tag{11}$$

причемъ прямая $U'$ *совершенно произвольна*. Здѣсь точка $X$ не лежитъ необходимо на прямой $U'$,—вообще говоря $U'_X \neq 0$.

Опредѣляя же порядокъ сопряженнаго коннекса, предполагаемъ, что касательная къ кривой $X_u$ коннекса въ точкѣ ея $x$ есть данная прямая $U'$, т. е. $\sigma U'_i = f'_{x_i}$ и эта прямая проходитъ черезъ точку $X$, и слѣдовательно не только выполнено (11), но и

$$\Sigma U'_i X_i = U'_X = 0. \tag{12}$$

Вотъ разница въ опредѣленіи двухъ чиселъ. Въ остальномъ системы уравненій въ томъ и другомъ случаѣ одинаковы. Допустимъ теперь, что при опредѣленіи порядка пары мы беремъ прямую $U'$, которая выполняла бы условіе (12). По принципу сохраненія числа (Schubert) число элементовъ, удовлетворяющихъ (10) и (11) при условіи (12), или безконечно велико или таково же, что и въ общемъ случаѣ. Предыдущее показываетъ, что перваго случая не будетъ, слѣдовательно, и при условіи (12) для порядка полярной пары получимъ тоже число. Но при условіи (12) уравненіямъ (10) и (11) можемъ удовлетворить полагая $x = X$. Дѣйствительно тогда (11) удовлетворится въ силу (12), а (10) сводится къ двумъ уравненіямъ

$$f(X, u) = 0, \quad \Sigma U f'_u(X, u) = 0. \tag{13}$$

Уравненія эти опредѣляютъ $n(n-1)$ касательныхъ $u$ къ кривой коннекса (1), принадлежащей точкѣ $X$, которыхъ точки прикосновенія лежатъ на данной прямой $U$. Эти $n(n-1)$ элементовъ $(X, u)$ при опредѣленіи порядка сопряженнаго коннекса являются рѣшеніями посторонними, ибо системѣ (5)—(8) они не удовлетворяютъ. Поэтому чтобы получить число, равное порядку сопряженнаго коннекса, нужно отъ числа элементовъ пары (10), которыхъ точка лежитъ на данной прямой, отнять $n(n-1)$,— число этихъ постороннихъ элементовъ. Тогда получимъ

$$n[mn + (2m-1)(n-1)] - n(n-1) = n[mn + 2(m-1)(n-1)] = m'.$$

Подобнымъ образомъ если при опредѣленіи класса пары (10) возьмемъ точку $X'$, черезъ которую должны проходить $u$, на прямой $U$ (такъ что $U_{X'} = 0$), мы получимъ тоже число элементовъ

$$m[mn + (2n-1)(m-1)],$$

общихъ четыремъ коннексамъ, но въ томъ числѣ будутъ находиться $m(m-1)$ элементовъ $(x, U)$, выполняющихъ уравненія

$$f(x, U) = 0 \quad \Sigma X f'_x(x, U) = 0 .$$

Точки этихъ элементовъ суть тѣ точки принадлежащей $U$ кривой коннекса, касательныя которыхъ проходятъ черезъ точку $X'$. Эти элементы уравненіямъ (9) не удовлетворяютъ и потому являются рѣшеніями посторонними. Отбрасывая ихъ получимъ

$$m[(mn+(2n-1)(m-1)] - m(m-1) = m[mn+2(m-1)(n-1)] = n'.$$

Такимъ образомъ порядокъ и классъ сопряженнаго коннекса могутъ быть опредѣлены съ помощью полярной пары.

**4.** Теоремы, приведенныя въ цитируемой статьѣ, позволяютъ еще иначе свести вопросъ объ опредѣленіи порядка сопряженнаго коннекса на полярныя пары. Именно, не трудно видѣть, что порядокъ этотъ равенъ числу элементовъ пересѣченія (1-ой категоріи) двухъ полярныхъ паръ, принадлежащихъ элементамъ $(X, U)$, $(X', U)$ съ одною и тою же прямою,—т. е. тѣхъ элементовъ, общихъ двумъ такимъ парамъ, которыхъ точки лежатъ на прямой $XX'$ (Тамъ же, теорема III. § 4). Оба вопроса приводятся къ рѣшенію одной и той же системы уравненій.

Также и классъ сопряженнаго коннекса можетъ быть опредѣленъ, какъ число тѣхъ элементовъ $(x, u)$ пересѣченія полярныхъ паръ, соотвѣтствующихъ элементамъ $(X, U)$ $(X, U')$ съ общею точкою, которыхъ прямыя $u$ проходятъ черезъ точку $X$.

Дѣйствительно, элементы пересѣченія полярныхъ паръ, принадлежащихъ $(X, U)$ и $(X', U)$, опредѣляются уравненіями

$$f(x, u) = 0 \quad \Sigma X f'_x = 0, \quad \Sigma X' f'_x = 0 \quad \Sigma U f'_u = 0 .$$

Общее число ихъ

$$n[(3m-2)mn + (3m-1)(m-1)(n-1)] .$$

Съ парою точечно-особенныхъ элементовъ каждая полярная пара, принадлежащая элементу $(X, U)$ съ какою угодно точкою $X$ и съ одною и тою же прямою $U$, пересѣкается по однимъ и тѣмъ же

$$3(m-1)n[mn+(m-1)(n-1)]$$

элементамъ. Если ихъ отбросить, то остается

$$n[nm+2(m-1)(n-1)]$$

элементовъ пересѣченія, для которыхъ не всѣ три частныя производныя по $x$ обращаются въ 0, а слѣдовательно три уравненія

$$f=0 \quad \Sigma X f'_x = 0 \quad \Sigma X' f'_x = 0$$

могутъ быть совмѣстны лишь при условіи $(xXX')=0$.

Но такимъ образомъ число такихъ элементовъ пересѣченія опредѣляется именно тѣми уравненіями, которыми мы выше опредѣляли порядокъ сопряженнаго коннекса.

**5.** Такая постановка вопроса позволяетъ *оцѣнить вліяніе нѣкоторыхъ особенностей на порядокъ сопряженнаго коннекса,* т. е. сдѣлать для тернарныхъ коннексовъ первый шагъ для нахожденія формулъ, аналогичныхъ формуламъ Plücker'а.

Именно теорема 4 и 5 § 4 цитируемой статьи позволяютъ оцѣнить вліяніе основной точки и основной прямой на порядокъ и классъ сопряженнаго коннекса.

Напомнимъ ихъ: 4) Если коннексъ $f=0$ имѣетъ основную точку $x_{осн}$, то.... двѣ пары, взятыя относительно элементовъ $(X, U)$, $(X, U')$ имѣютъ $\infty^1$ общихъ элементовъ, составленныхъ основною точкою и касательными къ кривой $\Sigma X f'_x(x_{осн}, u)=0$ $n$-го класса (т. е. онѣ имѣютъ общую пару $(0, n)$). Кромѣ того, двѣ такихъ пары имѣютъ $m[mn + 2(m-1)(n-1)] - n$ общихъ элементовъ, которыхъ точка не основная, а прямыя проходятъ черезъ точку $UU'$".

Теорема 5) — двойственна теоремѣ 4).

Теоремы эти могутъ быть выражены иначе такъ:

Теорема I. *Присутствіе основной точки въ коннексѣ $(m, n)$ понижаетъ классъ коннекса ему сопряженнаго на $n$ единицъ, а основная прямая понижаетъ порядокъ сопряженнаго коннекса на $m$ единицъ.*

Дѣйствительно, при подстановкѣ координатъ основной точки $(x_{осн})$ въ уравненія (9) n⁰ 2 второе и третье изъ нихъ удовлетворятся, остаются уравненія

$$\Sigma X f'_x(x_{осн}, u)=0 \quad (uUU')=0$$

имѣющія $n$ общихъ рѣшеній, которыя будутъ принадлежать всѣмъ полярнымъ парамъ, соотвѣтствующимъ различнымъ элементамъ $(X, V)$ съ одною и тою же точкою $X$ при условіи $(VUU')=0$.

Напротивъ система уравненій (5)—(8) n⁰ 2 не удовлетворится, ибо всегда можно $X$ и $X'$ выбрать такъ, чтобы $(x_{осн} XX') \neq 0$.

Двойственно при подстановкѣ координатъ основной прямой (9) не удовлетворяются, а (5)—(8) сводятся къ

$$(xXX')=0, \quad \Sigma U f'_u(x, u_{осн})=0$$

и даютъ $m$ рѣшеній $(x, u_{осн})$.

Пріемъ доказательства наводитъ на дальнѣйшій результатъ. Пусть каждыя двѣ полярныя пары, взятыя относительно элементовъ $(X, U)$ и $(X', U)$, имѣютъ общую пару $(\mu, \nu)$ одинаковую, каковы бы ни были точки $X$, $X'$ и прямая $U$. Тогда въ числѣ элементовъ пересѣченія находится $\mu$ элементовъ этой пары, коихъ точки лежатъ на прямой $XX'$. Отбрасывая эти элементы, какъ общіе всѣмъ такимъ парамъ, тѣмъ самымъ понизимъ число собственныхъ элементовъ пересѣченія, а слѣдовательно, и порядокъ сопряженнаго коннекса на $\mu$ единицъ.

Точно также, если двѣ полярныя пары, соотвѣтствующія элементамъ $(X, U)$, $(X, U')$ имѣютъ общую пару $(\mu, \nu)$, независящую отъ $U$, $U'$ $X$, то въ числѣ элементовъ пересѣченія находится $\nu$ элементовъ этой пары, которыхъ прямыя проходятъ черезъ точку $(U, U')$. Эти элементы будутъ общими всѣмъ подобнымъ парамъ, каковы бы ни были $U$, $U'$, а потому не должны быть принимаемы въ разсчетъ, и слѣдовательно, классъ сопряженнаго коннекса понижается на $\nu$ единицъ.

Вышеуказанное обстоятельство имѣетъ мѣсто, если коннексъ (1) имѣетъ пару собственно-особенныхъ элементовъ.

Отсюда:

Теорема II: *Если коннексъ (1) имъетъ пару $(\mu, \nu)$ собственно-особенныхъ элементовъ, то порядокъ сопряженнаго ему коннекса понижается на $\mu$, классъ—на $\nu$ единицъ.*

**6.** Примѣры.

1) Коннексъ (2,1):

$$f = a_1 u_1 x_2 x_3 + a_2 u_2 x_3 x_1 + a_3 u_3 x_1 x_2 = 0$$

имѣетъ три основныя точки

$$(x_1 = 0\,,\ x_2 = 0)\,,\quad (x_1 = 0\,,\ x_3 = 0)\,,\quad (x_2 = 0\,,\ x_3 = 0)\,,$$

вершины координатнаго треугольника. Такая особенность по теоремѣ I должна оставить порядокъ сопряженнаго коннекса безъ измѣненія, а классъ понизить на 3, т. е. вмѣсто 2 и 4 должны получить 2 и 1; и дѣйствительно сопряженный коннексъ имѣетъ уравненіе

$$a_1 v_1 y_2 y_3 + a_1 v_2 y_1 y_3 + a_3 v_3 y_1 y_2 = 0$$

тожественное съ исходнымъ уравненіемъ, т. е. это коннексъ 2-го порядка и 1-го класса, самъ себѣ сопряженный.

2) Для коннекса

$$f = k_1 x_1^2 u_1^2 + k_2 x_2^2 u_2^2 + k_3 x_3^2 u_3^2 = 0$$

пары собственно особенныхъ элементовъ суть

$$\begin{array}{llcl} x_1=0\,, & u_2=u_3=0 & & x_1=0 \quad x_2=0 \quad u_3=0 \\ x_2=0\,, & u_1=u_3=0 & \text{и} & x_1=0 \quad x_3=0 \quad u_2=0 \\ x_3=0\,, & u_2=u_1=0 & & x_2=0 \quad x_3=0 \quad u_1=0 \end{array}$$

т. е. 3 пары (1,0) и 3 пары (0,1). Ими исчерпываются и всѣ точечно-особенные элементы и линейно-особенные и при подсчетѣ порядка и класса онѣ должны быть считаемы вдвойнѣ (см. ниже n⁰ 10).

Слѣдовательно, порядокъ и классъ сопряженнаго коннекса должны быть равны

$$2\,[2\,.\,2+2\,(2-1)\,(2-1)]-3\,.\,2=12-6=6\,.$$

вмѣсто 12, и дѣйствительно вычисляя, находимъ

$$\sum_i \sqrt[3]{\frac{v_i^2\,y_i^2}{k_i}}=0\,,\ ^{1)}$$

и освобождаясь отъ радикаловъ:

$$\left[\sum_i\left(\frac{v_i^2\,y_i^2}{k_i}\right)\right]^3-27\prod\frac{v_i^2\,y_i^2}{k_i}=0\,;$$

сопряженный коннексъ такимъ образомъ 6-го порядка и 6-го класса.

**7.** Разобранные выше случаи представляются лишь простѣйшими, какіе могутъ представиться. Далѣе нужно, опредѣлить пониженіе порядка и класса сопряженнаго коннекса благодаря наличности *коинциденціи* собственно-особенныхъ элементовъ. Можно составить представленіе себѣ, на основаніи одного частнаго случая, каково должно быть это вліяніе.

Если коннексъ $f(x\,,\,u)=0$ степеней $m\,,\,n$ относительно $x$ и $u$ соотвѣтств., распадается на два:

$$\varphi\,(x\,,\,u)=0 \qquad (m-p\,,\;n-q)$$

и

$$\psi\,(x\,,\,u)=0 \qquad (p\,,\;q)$$

т. е.

$$f(x\,,\,u)=\varphi\,(x\,,\,u)\,.\,\psi\,(x\,,\,u)$$

то, какъ нетрудно видѣть, его сопряженный коннексъ представитъ собою совокупность сопряженныхъ коннексовъ множителей $\varphi=0$ и $\psi=0$.

---

[1]) Здѣсь, какъ и въ дальнѣйшихъ примѣрахъ, суммы и произведенія берутся по $i$ отъ 1 до 3.

Допустимъ, что коннексы $\varphi$ и $\psi$ самые общіе въ своемъ родѣ, никакихъ особенностей неимѣющіе; ихъ сопряженные коннексы будутъ слѣдовательно, порядковъ

$q[pq+2(p-1)(q-1)]$ и $(m-p)[(m-p)(n-q)+2(m-p-1)(n-q-1)]$

и классовъ

$p[pq+2(p-1)(q-1)]$ и $(m-p)[(m-p)(n-q)+2(m-p-1)(n-q-1)]$.

Совокупность же ихъ,—т. е. сопряженный коннексъ даннаго имѣетъ порядокъ и классъ, равные суммѣ порядковъ, соотвѣтственно классовъ коннексовъ-множителей.

Пониженіе

$$\begin{aligned}\triangle m' &= n[mn+2(m-1)(n-1)]-q[pq+2(p-1)(q-1)]-\\ &-(n-q)[(m-p)(n-q)+2(m-p-1)(n-q-1)]=\\ &=(3m-4).q(n-q)+(3n-2)[q(m-p)+p(n-q)].\end{aligned}$$

Двойственнымъ образомъ классъ понижается на $\triangle n'$:

$$\triangle n'=(3m-2)[p(n-q)+q(m-p)]+(3n-4)p(m-p).$$

Особенностью нашего коннекса является коинциденція, общая коннексамъ

$$\varphi=0,\quad \psi=0,$$

ея порядокъ, рангъ и классъ суть

$$\begin{aligned}\mu_1 &= p(m-p)\\ \varrho_1 &= p(n-q)+q(m-p)\\ \nu_1 &= q(n-q).\end{aligned}$$

Такимъ образомъ

$$\begin{aligned}\triangle m' &= (3m-4)\nu_1+(3n-2)\varrho_1\\ \triangle n' &= (3m-2)\varrho_1+(3n-4)\mu_1\end{aligned}$$

На самомъ дѣлѣ однако общая формула болѣе сложная и къ разсмотрѣнному случаю непосредственно не примѣняется.

Мы придемъ къ желаемому результату, если къ разобранному случаю пересѣченія двухъ полярныхъ паръ примѣнимъ пріемъ, указанный J. Goettler'омъ [1]) (Untersuchungen über den allgemeinen Raumconnex. Programm München 1899 г. § 3. Algebraische Probleme, welche sich auf ebene Connexe beziehen).

---

[1]) Аналогичными соображеніями можно доказывать и теорему II. См. n⁰ 10.

Предположимъ, что коннексъ $(m, n)$ имѣетъ коинциденцію собственно-особенныхъ элементовъ, опредѣленную уравненіями

$$\varphi = 0 \qquad \psi = 0 \tag{1}$$

[т. е. какъ пересѣченіе коннексовъ $(\mu, \nu)$ и $(\mu', \nu')$]. Тогда

$$f'_{x_i} = A_i \varphi + B_i \psi \quad \text{и} \quad f'_{u_i} = Y_i \varphi + Z_i \psi$$

и уравненія полярныхъ паръ перепишутся

$$\varphi \sum A_i X_i + \psi \sum B_i X_i = 0 \equiv \varphi . A_X + \psi . B_X = 0 \tag{2}$$

$$\varphi \sum A_i X'_i + \psi \sum B_i X'_i = 0 \equiv \varphi . A_{X'} + \psi . B_{X'} = 0 \tag{3}$$

$$\varphi \sum Y_i U_i + \psi \sum Z_i U_i = 0 \equiv \varphi . U_Y + \psi . U_Z = 0 \tag{4}$$

Для опредѣленія порядка и класса сопряженнаго коннекса и нужно найти порядокъ и классъ остаточной пары кривыхъ пересѣченія.

Коинциденція, общая (2) и (3), состоитъ 1) изъ коинциденціи (1); 2) изъ остаточной коинциденціи порядка $(m-1)^2 - \mu\mu'$, класса $n^2 - \nu\nu'$ и ранга $2(m-1)n - \mu\nu' - \nu\mu'$.

Двѣ эти коинциденціи имѣютъ общую пару кривыхъ,—которая будетъ пересѣченіемъ коинциденціи (1) съ коннексомъ

$$A_X B_{X'} - A_{X'} B_X = 0 \tag{5}$$

порядокъ котораго $= 2m - \mu - \mu' - 2$, и классъ $= 2n - \nu - \nu'$

Поэтому пара, о которой шла рѣчь, имѣетъ порядокъ и классъ:

$$\begin{aligned} \varsigma &= \nu\nu' (2m - \mu - \mu' - 2) + (\mu\nu' + \nu\mu')(2n - \nu - \nu') \\ \sigma &= \mu\mu' (2n - \nu - \nu') + (\mu\nu' + \nu\mu')(2m - \mu - \mu' - 2) \end{aligned} \tag{6}$$

Остаточная коинциденція пересѣкается съ третьимъ коннексомъ (4) по парѣ, которой порядокъ и классъ опредѣлятся какъ разность порядка $1^0$ пары общей тремъ коннексамъ (2), (3), (4) и $2^0$ пары общей 3 коннексамъ (1), (4), и которая будетъ имѣть порядокъ и классъ равный:

$$\begin{aligned} \varsigma' &= mn^2 + 2(m-1)n(n-1) - [m\nu\nu' + (n-1)(\mu\nu' + \nu\mu')] \\ \sigma' &= (m-1)[(m-1)(n-1) + 2nm] - [m(\mu\nu' + \nu\mu') + (n-1)\mu\mu'] \end{aligned} \tag{7}$$

Отнимая отсюда (6), получимъ:

$$M = \varsigma' - \varsigma = m[mn + 2(m-1)(n-1)] - [m\nu\nu' + (n-1)(\mu\nu' + \nu\mu')] -$$
$$- (2m-2)\nu\nu' - 2n(\mu\nu' + \nu\mu') + (\mu+\mu')\nu\nu' + (\nu+\nu')(\mu\nu' + \nu\mu') =$$
$$= m[mn + 2(m-1)(n-1)] - (3m-2)\nu\nu' - (3n-1)(\mu\nu' + \nu\mu') +$$
$$+ [(\mu+\mu')\nu\nu' + (\nu+\nu')(\mu\nu' + \nu\mu')].$$

Итакъ пониженіе порядка сопряженнаго коннекса, производимое наличностью коинциденціи $(\mu\mu', \mu\nu' + \nu\mu', \nu\nu')$ собственно-особенныхъ элементовъ, выражается формулою

$$\Delta m' = (3m-2)\nu\nu' + (3n-1)(\mu\nu' + \nu\mu') - (\mu+\mu')\nu\nu' - (\nu+\nu')(\mu\nu' + \nu\mu').$$

Аналогично можно найти производимое тою же коинциденціей пониженіе класса сопряженнаго коннекса, разсматривая систему трехъ коннексовъ

$$\varphi A_X + \psi B_X = 0\,, \quad \varphi U_Y + \psi U_Z = 0\,, \quad \varphi U_{Y'} + \psi U_{Z'} = 0$$

Классъ остаточной пары

$$N = m[mn + 2(m-1)(n-1)] - (3m-1)(\mu\nu' + \nu\mu') -$$
$$- (3n-2)\mu\mu' + \mu\mu'(\nu+\nu') + (\mu\nu' + \nu\mu')(\mu+\mu').$$

Итакъ

$$\Delta n' = (3m-1)(\mu\nu' + \nu\mu') + (3n-2)\mu\mu' - (\mu+\mu')(\mu\nu' + \nu\mu') - (\nu+\nu')\mu\mu'.$$

Мы можемъ такимъ образомъ формулировать слѣдующую теорему.

Теорема III. *Если коннексъ $(m, n)$ имѣетъ коинциденцію собственно-особенныхъ элементовъ, опредѣляемую какъ пересѣченіе коннексовъ $(\mu, \nu)$, $(\mu', \nu')$, то порядокъ сопряженнаго ему коннекса понижается на*

$$(3m-2)\nu\nu' + (3n-1)(\mu\nu' + \nu\mu') - \{(\mu+\mu')\nu\nu' + (\nu+\nu')(\mu\nu' + \nu\mu')\}$$

*а классъ его понижается на*

$$(3m-1)(\mu\nu' + \nu\mu') + (3n-2)\mu\mu' - \{(\mu+\mu')(\mu\nu' + \nu\mu') + (\nu+\nu')\mu\mu'\}$$

*единицъ**.

Если бы коинциденція собственно-особенныхъ элементовъ была задана только тремя характеристиками—порядкомъ, $\mu_1$, рангомъ $\varrho_1$ и классомъ $\nu_1$, то полученныя формулы приняли бы видъ:

$$(3m-2)\nu_1 + (3n-1)\varrho_1 - \gamma$$
$$(3m-1)\varrho_1 + (3n-2)\mu_1 - \delta$$

гдѣ $\gamma$ и $\delta$ нѣкоторыя характеристическія числа, зависящія только отъ коинциденціи, но не выражаемыя вполнѣ черезъ $\mu_1$ $\varrho_1$ $\nu_1$:

$$\gamma = (\mu + \mu')\nu_1 + (\nu + \nu')\varrho_1$$
$$\delta = (\mu + \mu')\varrho_1 + (\nu + \nu')\mu_1.$$

**8.** Параграфы 1—5 настоящей статьи написаны еще въ 1902 г. Я разсчитывалъ пополнить ея результаты. Въ настоящее время я рѣшаюсь напечатать ее въ нѣсколько дополненномъ видѣ, полагая, что она все же представляетъ нѣкоторый интересъ. Отмѣчу, что вліяніе основной точки на порядокъ сопряженнаго коннекса (теорема I) было замѣчено покойнымъ проф. П. С. Назимовымъ въ сообщеніи „Объ особенностяхъ коннексовъ на плоскости и въ пространствѣ", сдѣланномъ ¹⁶/ɪx 1895 г., но оставшемся не опубликованнымъ. П. С. Назимовъ приходилъ къ своему результату однако совершенно инымъ путемъ, чѣмъ указанный здѣсь.

**9.** Приведу еще нѣсколько примѣровъ вычисленія сопряженныхъ коннексовъ.

1) Коннексъ

$$k_1 x_2{}^2 x_3{}^2 u_1 + k_2 x_3{}^2 x_1{}^2 u_2 + k_3 x_1{}^2 x_2{}^2 u_3 = 0$$

имѣетъ вершины координатнаго треугольника своими основными точками. Написавъ его уравненіе подъ видомъ

$$k_1 \frac{u_1}{x_1{}^2} + k_2 \frac{u_2}{x_2{}^2} + k_3 \frac{u_3}{x_3{}^2} = 0$$

видимъ, что элементъ $(y, v)$ сопряженнаго коннекса опредѣляется по формуламъ

$$\varrho y_i = \frac{k_i}{x_i^2}$$
$$\sigma v_i = \frac{k_i u_i}{x_i^3}$$

Отсюда уравненіе сопряженнаго коннекса

$$v_1 \sqrt{\frac{k_1}{y_1}} + v_2 \sqrt{\frac{k_2}{y_2}} + v_3 \sqrt{\frac{k_3}{y_3}} = 0$$

или въ раціональномъ видѣ

$$0 = (k_1 v_1{}^2 y_2 y_3 + k_2 v_2{}^2 y_1 y_3 - k_3 v_3{}^2 y_1 y_2)^2 - 4 k_1 k_2 v_2{}^2 v_1{}^2 y_1 y_2 y_3{}^2.$$

Такимъ образомъ это коннексъ 4 порядка и 4 класса, а не (4, 16), какъ было бы при отсутствіи основныхъ точекъ. Три основныхъ точки *порядокъ* сопряженнаго коннекса не измѣнили, а *классъ* понизили на 12, т. е. на 4 каждая, какъ это и должно быть по теоремѣ I.

2) Коннексъ (2, 2):

$$k_1 x_2 x_3 u_2 u_3 + k_1 x_3 x_1 u_3 u_1 + k_3 x_1 x_2 u_1 u_2 = 0$$

имѣетъ вершины координатнаго треугольника основными точками, а стороны его основными прямыми. Поэтому на основаніи теоремы I его порядокъ и классъ должны быть

$$2[2.2+2(2-1).(2-1)]-3.2=6.$$

На самомъ дѣлѣ однако, замѣтивъ, что уравненіе коннекса можетъ быть написано

$$\sum \frac{k_1}{x_1 u_1} = 0$$

имѣемъ

$$\varrho y_i = -\frac{k_i}{x_i u_i^2}, \quad \sigma v_i = -\frac{k_i}{x_i^2 u_i}$$

и

$$\sum \sqrt[3]{k_i v_i y_i} = 0$$

уравненіе сопряженнаго коннекса, или въ раціональномъ видѣ

$$\left(\sum k_i v_i y_i\right)^3 - 27 \prod k_i v_i y_i = 0$$

Итакъ сопряженный коннексъ есть (3, 3), а не (6, 6), какъ было бы въ томъ случаѣ, если бы исходный коннексъ не имѣлъ другихъ особенностей. Но здѣсь онъ имѣетъ еще шесть паръ кривыхъ собственно-особенныхъ элементовъ спеціальнаго типа

$$\begin{array}{llll} x_1=0 \quad u_2=0 \quad u_3=0\,; & & x_1=0 \quad x_2=0 \quad u_3=0 \\ x_2=0 \quad u_3=0 \quad u_1=0\,; & & x_2=0 \quad x_3=0 \quad u_1=0 \\ x_3=0 \quad u_1=0 \quad u_2=0\,; & & x_3=0 \quad x_1=0 \quad u_2=0 \end{array}$$

три изъ которыхъ (1,0) и три (0,1) и которыя по теоремѣ II должны понизить на 3 порядокъ и классъ сопряженнаго коннекса.

3) Подобнымъ образомъ коннексъ (4, 2):

$$k_1 x_2^2 x_3^2 u_1^2 + k_2 x_3^2 x_1^2 u_2^2 + k_3 x_1^2 x_2^2 u_3^2 = 0$$

$\left(\text{или} \sum k_i \frac{u_i^2}{x_i^2} = 0\right)$ даетъ $\varrho y_i = \frac{k_i u_i}{x_i^2}$, $\sigma v_i = \frac{k_i u_i^2}{u_i^3}$, откуда $\frac{\sigma}{\varrho}\frac{v_i}{y_i} = \frac{u_i}{x_i}$

и слѣдовательно,

$$\sum k_i \frac{u_i^2}{x_i^2} \equiv \frac{\sigma^2}{\varrho^2} \sum k_i \frac{v_i^2}{y_i^2},$$

т. е. *этотъ коннексъ (4, 2) самъ себѣ сопряженный.* Кромѣ трехъ основныхъ точекъ—вершинъ координатнаго треугольника—разсматриваемый коннексъ имѣетъ еще три вырожденныхъ коинциденціи собственно-особенныхъ элементовъ:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0 & u_1 = 0 \\ x_2 = 0 & u_2 = 0 \\ x_3 = 0 & u_3 = 0 \end{array}$$

При этомъ основныя точки являются двойными основными точками, для нихъ уничтожаются и всѣ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$, и онѣ принадлежатъ коинциденціи собственно-особенныхъ элементовъ.

4) Коннексъ (3, 3):

$$k_1 x_1{}^3 u_1{}^3 + k_2 x_2{}^3 u_2{}^3 + k_3 x_3{}^3 u_3{}^3 = 0$$

также не имѣетъ ни основныхъ точекъ, ни основныхъ прямыхъ, но для перечисленныхъ въ примѣрѣ 2 n⁰ 6 паръ кривыхъ уничтожаются не только всѣ первыя, но и всѣ вторыя производныя; этимъ этотъ коннексъ выходитъ за предѣлы *двойныхъ* особенностей. Сопряженный коннексъ есть

$$\sum_i \sqrt[5]{\frac{v_i^3 y_i^3}{k_i}} = 0$$

или въ раціональномъ видѣ:

$$0 = \left[\sum \frac{v_i^3 y_i^3}{k_i}\right]^5 - 625 \prod \left(\frac{v_i^3 y_i^3}{k_i}\right) \cdot \left[\sum \frac{v_i^6 y_i^6}{k_i} - 3 \sum \frac{v_i^3 v_j^3 y_i^3 y_j^3}{k_i k_j}\right]$$

т. е. (15, 15) вмѣсто (51, 51).

5) Можно построить болѣе общій примѣръ. Коннексъ ($2m$, $n$):

$$\sum k_i \frac{u_i^n}{x_i^m} = 0$$

или

$$k_1 x_2^m x_3^m u_1^n + k_2 x_3^m x_1^m u_2^n + k_3 x_1^m x_2^m u_3^n = 0$$

имѣетъ сопряженнымъ коннексомъ:

$$\sum_i \sqrt[n-m-1]{\frac{y^n}{k_i v_i^m}} = 0$$

уравненіе это должно быть освобождено отъ радикаловъ.

При $m = 2$, $n = 1$ и при $m = 2$, $n = 2$ получаемъ приведенные уже выше случаи. При $m = 2$, $n = 4$ получаемъ для коннекса (4, 4): $\Sigma k_1 x_2^2 x_3^2 u_1^4 = 0$ сопряженный коннексъ также (4, 4): $\Sigma k_1 k_2 y_1^4 v_2^2 v_3^2 = 0$ вмѣсто (136, 136).

При $m = 2$, $n = 5$ находимъ $n - m - 1 = 2$ и тѣмъ же пріемомъ $\Sigma k_1^2 y_1^{10} v_2^4 v_3^4 - 2\Sigma y_1^5 y_2^5 v_1^2 v_2^2 v_3^4 = 0$, т. е. (10, 8) вмѣсто (220, 176).

При $m = 2$, $n = 6$, $n - m - 1 = 3$ и сопряженный коннексъ будетъ

$$\left(\sum \frac{y_i^6}{k_i v_i^3}\right)^3 - 27 \prod \frac{y_i^6}{k_1 v_1^3} = 0$$

т. е. (18, 18) вмѣсто (324, 216).

Но сопряженнаго коннекса не получимъ, если $n = m + 1$. Дѣйствительно вышеприведенное уравненіе сопряженнаго коннекса получаемъ замѣчая, что при $\varrho y_i = k_i u_i^{n-1} x_i^{-m}$ и $\sigma v_i = k_i u_i^n x_i^{-m-1}$ имѣемъ $\varrho^\lambda \sigma^\mu y_i^\lambda v_i^\mu = k_i^{\lambda+\mu} u_i^{\lambda(n-1)+\mu n} x_i^{-\lambda m - \mu(m+1)}$ и слѣдовательно, нужно выбрать $\lambda$, $\mu$ такъ чтобы

$$\lambda(n-1) + \mu n = n,$$

$$\lambda m + \mu(m-1) = m;$$

при $m = n - 1$ уравненія эти не совмѣстны. Такъ если возьмемъ коннексъ (4, 3):

$$\Sigma k_1 x_2^2 x_3^2 u_1^3 = 0$$

то получаемъ

$$\varrho y_i = k_i \left(\frac{u_i}{x_i}\right)^2, \quad \sigma v_i = k_i \left(\frac{u_i}{x_i}\right)^2,$$

откуда

$$\left(\varrho \frac{y_i}{k_i}\right)^3 = \left(\sigma \frac{v_i}{k_i}\right)^2,$$

или

$$\frac{y_1^3}{k_1 v_1^2} = \frac{y_2^3}{k_2 v_2^2} = \frac{y_3^3}{k_3 v_3^2}$$

Сопряженный коннексъ не существуетъ, а существуетъ сопряженная коинциденція. Обстоятельство это представляетъ аналогію съ развертывающимися поверхностями въ теоріи поверхностей,—представляющими систему одного измѣненія, если за основной элементъ брать плоскость.

Въ коннексахъ тернарныхъ можетъ явиться, какъ фигура, сопряженная коннексу или снова многообразіе трехъ измѣреній—коннексъ, (общій случай) или многообразіе двухъ измѣреній—коинциденція, или сопряженная пара кривыхъ (многообразіе одного измѣренія) или наконецъ конечное число элементовъ.

**10.** Приведенные выше примѣры показываютъ, что при отсутствіи другихъ особенностей, способныхъ оказать вліяніе на порядокъ и классъ сопряженнаго коннекса, вліяніе простыхъ основныхъ точекъ и прямыхъ оказывается именно такимъ, какъ это указывается теоремою I.

Примѣненіе теоремы II уже встрѣчаетъ нѣкоторыя затрудненія. Въ примѣрѣ 2 n⁰ 6 пониженіе оказывается вдвое бо́льшимъ, чѣмъ указывается теоремою. Но если обратимъ вниманіе на ея доказательство, то замѣтимъ, что первоначально имѣется въ виду число точекъ пересѣченія прямой $XX'$ съ парою, общею всѣмъ полярнымъ парамъ $(X, U)$, $(X' U)$; но при этомъ остается открытымъ вопросъ, какое число точекъ пересѣченія поглощаетъ каждая такая точка. Поэтому я приведу другое доказательство, которое съ одной стороны подтвердитъ справедливость теоремы, съ другой стороны покажетъ причину отмѣченнаго въ примѣрѣ уклоненія.

Пусть собственно-особенные элементы коннекса образуютъ пару, опредѣляемую уравненіями

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad \chi = 0, \tag{1}$$

т. е. какъ пересѣченіе коннексовъ $(\mu, \nu)$, $(\mu', \nu')$, $(\mu'', \nu'')$.

Это пара, которой порядокъ $\mu_2 = \Sigma\mu\nu'\nu''$ и классъ $\nu_2 = \Sigma\nu\mu'\mu''$.

Тогда

$$f'_{x_i} = A_i . \varphi + B_i . \psi + C_i . \chi$$

и точно также

$$f'_{u_i} = L_i . \varphi + M_i . \psi + N_i . \chi .$$

Уравненія (5), (6), (7) n⁰ 2 принимаютъ видъ

$$\left.\begin{aligned} \varphi A_X + \psi . B_X + \chi . C_X = 0 \\ \varphi A_{X'} + \psi . B_{X'} + \chi . C_{X'} = 0 \\ \varphi U_L + \psi . U_M + \chi . U_N = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Эти три коннекса при данныхъ $X$, $X'$ и $U$, каковы бы они ни были, будутъ имѣть общую пару (1). и для опредѣленія порядка сопряженнаго коннекса нужна лишь остаточная пара, порядокъ и классъ которой получимъ отнимая порядокъ и классъ (1) отъ общаго порядка и класса; это доставитъ:

$$M-\mu_2 = mn^2+2(m-1)n(n-1)-\mu_2$$

$$N-\nu_2 = (n-1)(m-1)^2+2nm(m-1)-\nu_2$$

Порядокъ сопряженнаго коннекса и равенъ $M-\mu_2$ т. е. понижается на $\mu_2$. Совершенно подобнымъ образомъ классъ сопряженнаго коннекса оказывается равнымъ $m^2n+2(m-1)m(n-1)-\nu_2$, какъ это и значится въ теоремѣ II.

Двѣ разсмотрѣнныя пары (т. е. (1) и остаточная) имѣютъ нѣкоторое число общихъ элементовъ,—удовлетворяющихъ (1) и уравненію

$$\Xi \equiv \begin{vmatrix} A_X & B_X & C_X \\ A_{X'} & B_{X'} & C_{X'} \\ U_L & U_M & U_N \end{vmatrix} = 0$$

Точки этихъ элементовъ не лежатъ вообще на прямой $XX'$ и потому въ расчетъ приниматься не могутъ. Но если многочлены $\varphi$, $\psi$, $\chi$ входятъ еще множителями въ нѣкоторые изъ членовъ этого опредѣлителя, то можетъ оказаться, что опредѣлитель уничтожается для каждаго элемента коинциденціи (1), т. е.

$$\Xi = \Phi.\varphi + \Psi.\psi + X.\chi = 0 .$$

Тогда такая пара должна быть считаема вдвойнѣ, ибо она входитъ вся и въ остаточную пару.

Примѣръ 2-й n° 6 представляетъ именно такой случай. Здѣсь этотъ опредѣлитель (для пары $x_1=0$, $u_2=0$, $u_3=0$)

$$k_1k_2k_3u_1x_2x_3\,[U_1x_1u_2u_3(X_2X_2'-X_3X_2')+x_2U_2u_1u_3(X_1'X_3-X_3'X_1)+$$
$$+x_3u_1u_2U_3(X_1X_2'-X_1'X_2)]=0\,;$$

онъ обращается въ 0 для разсматриваемой пары; тоже имѣетъ мѣсто и по отношенію къ каждой изъ остальныхъ. Мы должны поэтому *удвоить* числа, указывающія пониженіе порядка и класса, производимое каждою парою.