Изслѣдованія по теоріи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи.

Н. Н. Салтыкова.

(Окончаніе).

ГЛАВА IX.

Интегрирующіе множители и безконечно-малыя преобразованія.

1. Задача интегрированія разсматриваемыхъ дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, какъ это слѣдуетъ изъ предыдущаго изложенія, во всѣхъ встрѣчающихся различныхъ случаяхъ, съ теоретической точки зрѣнія, всегда приводится къ интегрированію линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи. Всѣ послѣдующія страницы настоящаго изслѣдованія посвящаются изученію этихъ послѣднихъ уравненій и соотвѣтствующихъ имъ дифференціальныхъ уравненій обыкновенныхъ или въ полныхъ дифференціалахъ.

Пусть имѣемъ линейное уравненіе съ частными производными одной функціи f

$$X(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + X\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

и соотвѣтствующее ему обыкновенное дифференціальное уравненіе

$$dy - X\,dx = 0, \tag{2}$$

гдѣ X представляетъ функцію перемѣнныхъ величинъ x и y.

Обозначимъ черезъ q *интегрирующій множитель* послѣдняго уравненія; въ такомъ случаѣ имѣютъ мѣсто равенства

$$q = \frac{\partial f}{\partial y},\ \ qX = -\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Отсюда, во-первыхъ, слѣдуетъ, что интегрирующій множитель уравненія (2) получается изъ интеграла уравненія (1) при помощи дифференцированія и, во-вторыхъ, получается уравненіе

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial (qX)}{\partial y} = 0,$$

или

$$\frac{\partial q}{\partial x} + X\frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial y} q = 0, \tag{3}$$

которое служитъ для опредѣленія множителя q, независимо отъ интеграла уравненія (1).

Система обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, соотвѣтствующая частному уравненію (3), представляется въ *каноническомъ видѣ*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial H}{\partial q}, \; \frac{dq}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y} \tag{4}$$

гдѣ введено слѣдующее обозначеніе

$$H \equiv Xq,$$

при чемъ первое изъ написанныхъ уравненій тождественно съ даннымъ уравненіемъ (2).

Уравненія (4) представляютъ *каноническую систему Ліувилля* [1], въ которую онъ преобразовываетъ каждое уравненіе, удвоивъ число функціональныхъ перемѣнныхъ, т. е. вводя въ настоящемъ случаѣ новую функціональную перемѣнную q.

Система (4) линейна относительно послѣдней перемѣнной q. Легко также убѣдиться, что послѣдняя система имѣетъ интегралъ, линейный относительно перемѣнной q. Въ самомъ дѣлѣ, чтобы уравненіе

$$\eta q = b, \tag{5}$$

представляло интегралъ системы (4), гдѣ b-произвольная постоянная величина и η-функція x и y, для этого должно удовлетворяться тождественно слѣдующее равенство

$$\frac{\partial(\eta q)}{\partial x} + \frac{\partial(\eta q)}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial(\eta q)}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial y} = 0,$$

которое, при помощи скобокъ Пуассона, выражается слѣдующимъ образомъ

$$(p + H, \; \eta q) = 0, \tag{6}$$

гдѣ p и q разсматриваются какъ частныя производныя перваго порядка одной и той же функціи соотвѣтственно по независимымъ перемѣннымъ x и y.

---

[1]) Ср. *Laurent—Traité d' Analyse*, t. VI p. 96.

Поэтому функція η опредѣляется слѣдующимъ уравненіемъ

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} + X \frac{\partial \eta}{\partial y} = \eta \frac{\partial X}{\partial y}, \text{ или } \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\eta}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\eta} X\right) = 0, \tag{7}$$

т. е. выраженіе $\frac{1}{\eta}$ представляетъ интегрирующій множитель уравненія (2).

Въ виду того, что послѣдній множитель всегда существуетъ, то, стало-быть, существуетъ и разсматриваемый линейный интегралъ (5) канонической системы уравненій (4).

Такъ какъ значеніе вспомогательной перемѣнной Ліувилля q представляетъ выраженіе интегрирующаго множителя уравненія (2), то само собою разумѣется, что, обратно, опредѣляемое значеніе q изъ извѣстнаго линейнаго интеграла вида (5)

$$q = \frac{b}{\eta}, \text{ или выраженіе } \frac{1}{\eta}$$

представляетъ каждое интегрирующій множитель уравненія (2).

С. Ли даетъ особое, спеціальное названіе лѣвой части интеграла (5), представляя ее въ нѣсколько иномъ видѣ. Если функція f обозначаетъ интегралъ уравненія (1), то въ такомъ случаѣ q выражается при помощи частной производной $\frac{\partial f}{\partial y}$, и С. Ли называетъ первую часть интеграла (5) *безконечно-малымъ преобразованіемъ* уравненія (1) или (2)-ого, обозначая его слѣдующимъ образомъ

$$U(f) \equiv \eta \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{8}$$

При этомъ очевидно, что равенство (6) приводится къ слѣдующему виду

$$(X(f),\ U(f)) = 0 \tag{9}$$

и показываетъ, что *безконечно-малое преобразованіе* U (f) является интеграломъ уравненія (1) одновременно съ функціей f. С. Ли принимаетъ послѣднее свойство безконечно-малыхъ преобразованій за ихъ опредѣленіе. Что же касается термина: *безконечно-малое преобразованіе*, то онъ естественно вытекаетъ изъ того соображенія, что выраженіе U (f) представляетъ коэффиціентъ безконечно-малаго приращенія интеграла уравненія (1), соотвѣтствующаго безконечно-малому приращенію $\eta\delta t$ перемѣнной y, гдѣ δt обозначаетъ нѣкоторую безконечно-малую величину [1]).

[1]) См. *S. Lie—Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (Mathematische Annalen, Bd. XI, S. 490).*

Если разсматривать $U(f)$ не только какъ функцію перемѣнныхъ x, y, а какъ выраженіе (8), то въ такомъ случаѣ послѣднее равенство (9) приводитъ обратно къ прежнему уравненію (7), служащему для опредѣленія функціи η.

Изъ послѣдняго замѣчанія непосредственно вытекаетъ прежнее заключеніе въ новой формѣ, т. е. *если извѣстно безконечно-малое преобразованіе (8) уравненія (2), то интегрированіе его совершается при помощи квадратуры,* вслѣдствіе того, что выраженіе $\frac{1}{\eta}$ представляетъ интегрирующій множитель уравненія (2).

Наконецъ, легко видѣть, что дифференціальное уравненіе съ частными производными перваго порядка, соотвѣтствующее канонической системѣ (4), выражается слѣдующимъ образомъ

$$p + Xq = 0, \tag{10}$$

т. е. представляетъ исходное уравненіе (1), гдѣ вмѣсто производныхъ $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ введены соотвѣтственно обозначенія p и q. Слѣдовательно, *каноническая система Ліувилля (4), соотвѣтствующая уравненію (2), получается какъ слѣдствіе приложенія общей теоріи Якоби-Гамильтона къ линейному уравненію съ частными производными (1).*

Такъ какъ безконечно-малое преобразованіе уравненія (1) опредѣляетъ интегралъ канонической системы (4), то зная $U(f)$, получаемъ интегралъ (5), а второй интегралъ системы (4) получается слѣдующимъ образомъ.

Подставляя значенія p и q, опредѣляемыя уравненіями (5) и (10), въ равенство

$$dz = pdx + qdy,$$

получаемъ точный дифференціалъ

$$dz = \frac{b}{\eta}(dy - X\,dx).$$

Дифференцируя по b интегралъ послѣдняго, получаемъ второй интегралъ канонической системы (4), который вмѣстѣ съ тѣмъ является очевидно также искомымъ интеграломъ уравненія (2)

$$\int \frac{1}{\eta}(dy - X\,dx) = a,$$

гдѣ a обозначаетъ новую произвольную постоянную величину.

Этотъ результатъ получается также, независимо отъ послѣднихъ соображеній, какъ непосредственное слѣдствіе приведеннаго выше предложеніе, что выраженіе $\frac{1}{\eta}$ представляетъ интегрирующій множитель уравненія (2). Если мы воспользовались теоріей каноническихъ уравненій, которая въ данномъ случаѣ приводитъ къ прежнимъ результатамъ, то только для того, чтобы изложенныя соображенія послужили намъ руководящей идеей для послѣдующихъ обобщеній.

Такимъ образомъ, по отношенію къ уравненіямъ (1) и (2), интегрирующій множитель послѣдняго изъ уравненій и ихъ безконечно-малое преобразованіе являются эквивалентными элементами для интегрированія разсматриваемыхъ уравненій. Кромѣ того, благодаря изложеннымъ соображеніямъ, устанавливается впервые на этихъ страницахъ тѣсная связь между понятіями объ интегрирующемъ множителѣ, безконечно-маломъ преобразованіи уравненія (2) и соотвѣтствующими ему каноническими уравненіями Ліувилля. Вмѣстѣ съ тѣмъ становится очевиднымъ, что преобразованіе Ліувилля обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій къ каноническому виду пріобрѣтаетъ существенное значеніе въ теоріи дифференціальныхъ уравненій, которое не придавали ему до сихъ поръ.

2. Начнемъ съ распространенія предыдущихъ результатовъ на одно уравненіе въ полныхъ дифференціалахъ

$$dx = \sum_{h=1}^{m} X_h \, dt_h , \tag{11}$$

и на соотвѣтствующую ему якобіевскую систему уравненій съ частными производными

$$X_h(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial t_h} + X_h \frac{\partial f}{\partial x} = 0 ,$$

$$h = 1,\ 2, \ldots m,$$

гдѣ всѣ X_h обозначаютъ функціи перемѣнныхъ $t_1,\ t_2, \ldots t_m$ и x.

Интегрирующій множитель уравненія (11), который мы обозначимъ черезъ p, удовлетворяетъ слѣдующей якобіевской [1]) системѣ

$$\frac{\partial p}{\partial t_h} + X_h \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial X_h}{\partial x} p = 0 ,$$

$$h = 1,\ 2, \ldots m.$$

[1]) Обыкновенно *якобіевскими* называются только системы линейныхъ однородныхъ уравненій.

Соотвѣтствующія уравненія въ полныхъ дифференціалахъ представляются совокупностью уравненій (11)-аго и слѣдующаго

$$dp = -\sum_{h=1}^{m} \frac{\partial X_h}{\partial x} p dt_h.$$

Если ввести обозначенія

$$X_h \; p \equiv H_h,$$

для всѣхъ значеній h, отъ 1 до m, то оба уравненія, (11)-ое и послѣднее, становятся

$$dx = \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial H_h}{\partial p} dt_h, \; dp = -\sum_{h=1}^{m} \frac{\partial H_h}{\partial x} dt_h \tag{12}$$

и представляютъ такимъ образомъ обобщенную *каноническую* систему Ліувилля.

Пусть η обозначаетъ функцію перемѣнныхъ величинъ $t_1, \; t_2, \ldots t_m$, x и выраженіе

$$U(f) \equiv \eta \frac{\partial f}{\partial x}$$

представляетъ безконечно-малое преобразованіе уравненія (11), удовлетворяющее тождественно условіямъ

$$(X_h(f), \; U(f)) = 0, \quad h = 1, \ldots m. \tag{13}$$

Поэтому каноническая система (12) имѣетъ слѣдующій интегралъ

$$\eta p = b,$$

гдѣ b обозначаетъ произвольную постоянную величину. Само собою разумѣется, что опредѣляемое послѣднимъ уравненіемъ значеніе

$$\frac{b}{\eta}, \text{ или выраженіе } \frac{1}{\eta}$$

представляютъ интегрирующіе множители уравненія (11). Слѣдовательно, интегралъ послѣдняго принимаетъ видъ

$$\int \frac{1}{\eta} \left(dx - \sum_{h=1}^{m} X_h \, dt_h \right) = a,$$

при чемъ a обозначаетъ произвольную постоянную величину.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ заключенію, что *уравненіе въ полныхъ дифференціалахъ, имѣющее безконечно-малое преобразованіе, интегрируется при помощи квадратуры.*

Это послѣднее предложеніе становится очевиднымъ *a priori*, если принять во вниманіе, что каждое уравненіе въ полныхъ дифференціалахъ преобразовывается, согласно теоріи А. Майера [1]), въ обыкновенное дифференціальное уравненіе. Что же касается С. Ли [2]), опубликовавшаго впервые этотъ результатъ, то онъ вывелъ его какъ слѣдствіе своей теоріи интегрирующаго множителя замкнутой системы линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка.

Написанный интегралъ получается также на основаніи уравненій, которыя вытекаютъ изъ равенствъ (13) и показываютъ, что выраженіе $\frac{1}{\eta}$ представляетъ интегрирующій множитель даннаго уравненія (11) [3]).

Наконецъ, тотъ же самый результатъ получается при помощи теоремы Якоби-Ліувилля, аналогично предыдущему случаю одного обыкновеннаго дифференціальнаго уравненія.

3. Переходимъ теперь къ разсмотрѣнію системы n обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$dx_i = X_i\,dt, \quad i = 1,\ 2, \ldots n, \tag{14}$$

гдѣ всѣ X_i обозначаютъ функціи перемѣнныхъ величинъ $t,\ x_1,\ x_2, \ldots x_m$. Обозначая черезъ

$$p_1,\ p_2, \ldots p_n$$

систему n интегрирующихъ множителей Якоби [4]) уравненій (14), получаемъ слѣдующія равенства (см. C. Jordan, Cours d'Analyse t. III, 1896, p. 68).

$$\left.\begin{array}{l} p_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i},\quad i = 1,\ 2, \ldots n, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} p_k X_k = -\dfrac{\partial f}{\partial t}, \end{array}\right\} \tag{15}$$

---

1) См. мое сочиненіе: *Объ интегрированіи уравненій...* стр. 34—37 и 41—44.

2) *S. Lie*—Mathematische Annalen, Bd. XI, p. 504—521.

3) Эти уравненія имѣютъ очевидно слѣдующій видъ

$$\frac{\partial \eta}{\partial t_h} + X_k \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial X_h}{\partial x}\eta,$$

$$h = 1,\ 2, \ldots m.$$

4) *Jacobi.—Dilucidationes de aequationum differentialium vulgarium systematis earumque connexione cum aequationibus differentialibus partialibus linearibus primi ordinis (Gesammelte Werke, Bd. IV, S. 240).*

гдѣ функція f обозначаетъ интегралъ слѣдующаго линейнаго уравненія съ частными производными, соотвѣтствующаго системѣ (14),

$$X(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0. \tag{16}$$

Исключая производныя функціи f изъ уравненій (15), получаемъ уравненія, служащія для опредѣленія значеній p_i, независимо отъ f,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial p_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} X_k \frac{\partial p_i}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_k}{\partial x_i} p_k = 0, \\ &\qquad i = 1, 2, \ldots n, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$\frac{\partial p_r}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_r}, \tag{18}$$

для всѣхъ различныхъ значеній указателей r и k, отъ 1 до n. Слѣдовательно, искомыя значенія p_i представляютъ рѣшенія системы (17), которыя кромѣ того удовлетворяютъ условіямъ (18). Система уравненій (17) принадлежитъ къ якобіевскому виду, изслѣдованному въ главѣ III настоящаго сочиненія. Соотвѣтствующая система обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій имѣетъ значеніе

$$dx_i = X_i\, dt, \quad dp_i = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_k}{\partial x_i} p_k\ dt,$$

$$i = 1, 2 \ldots n,$$

и представляетъ *каноническую систему* Ліувилля, въ которую онъ преобразовываетъ данную систему (14). Дѣйствительно, благодаря обозначенію

$$\sum_{k=1}^{n} X_k p_k \equiv H,$$

послѣднія уравненія становятся

$$\left.\begin{aligned} &dx_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} dt, \quad dp_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} . dt, \\ &\qquad i = 1, 2 \ldots n. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Легко видѣть, что для того, чтобы найти рѣшеніе системы (17), удовлетворяющее условіямъ (18), для этого достаточно составить интегралъ дифференціальнаго уравненія съ частными производными, соотвѣтствующаго канонической системѣ (19). Нетрудно замѣтить, что это послѣднее частное уравненіе представляетъ ничто иное какъ уравненіе (16), и, стало быть, мы возвращаемся обратно къ n первымъ формуламъ (15), выражающимъ значенія множителей p_i, при помощи интеграла уравненія (16). *Поэтому каноническая система Ліувилля (19) получается въ результатѣ приложенія къ уравненію (16) общей теоріи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи.*

Пусть выраженіе

$$U(f) \equiv \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

представляетъ безконечно-малое преобразованіе системы уравненій (14), при чемъ $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ обозначаютъ функціи перемѣнныхъ $t, x_1, x_2, \ldots x_n$. Въ такомъ случаѣ выраженіе $U(f)$, разсматриваемое какъ функція перемѣнныхъ $t, x_1, x_2, \ldots x_n$ представляетъ интегралъ уравненія (16) одновременно съ функціей f, и мы получаемъ равенство

$$(X(f),\ U(f)) = 0. \tag{20}$$

Поэтому уравненіе

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i\, p_i = b, \tag{21}$$

представляетъ интегралъ канонической системы Ліувилля (19), гдѣ b обозначаетъ произвольную постоянную величину и лѣвая часть равенства получается изъ выраженія $U(f)$ замѣной въ немъ производныхъ $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ обозначеніями p_i.

Съ другой стороны, будемъ ли исходить изъ условія (20), или изъ предположенія, что уравненіе (21) представляетъ интегралъ системы (19), мы получаемъ каждый разъ слѣдующую систему уравненій, которымъ должны удовлетворять коэффиценты ξ_i,

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} X_k \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \xi_k,$$

$$i = 1, 2 \ldots n.$$

На основаніи теоріи, изложенной въ III-й главѣ настоящаго изслѣдованія, интегрированіе послѣдней системы приводится къ интегрированію совокупности обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій (14) и слѣдующихъ

$$d\xi_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \xi_k\, dt,$$

$$i = 1, 2 \ldots n.$$

Послѣднія уравненія отличаются отъ *варіаціонныхъ* уравненій Пуанкаре только обозначеніемъ функціональныхъ перемѣнныхъ δx_1, $\delta x_2, \ldots \delta x_n$, которыя связаны съ ξ_i слѣдующими соотношеніями

$$\delta x_i = \xi_i \, \delta t, \qquad i = 1, 2 \ldots n.$$

Наконецъ, замѣтимъ, что совокупность данныхъ уравненій (14) и n послѣднихъ выведенныхъ уравненій образуетъ каноническую систему при условіи, что исходныя уравненія (14) представляютъ каноническую систему.

4. Всѣ предыдущія соображенія прилагаются также къ системамъ уравненій въ полныхъ дифференціалахъ

$$dx_i = \sum_{h=1}^{m} X_i^h dt_h, \qquad i = 1, 2 \ldots n, \tag{22}$$

гдѣ всѣ X_i^h обозначаютъ функціи перемѣнныхъ величинъ $t_1, t_2, \ldots t_m$, $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Покажемъ прежде всего, что преобразованіе Ліувилля прилагается также къ уравненіямъ въ полныхъ дифференціалахъ. Дѣйствительно, введемъ новыя перемѣнныя величины

$$y_1, y_2, \ldots y_n,$$

опредѣляемыя слѣдующими уравненіями

$$dy_i = -\sum_{h=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_k^h}{\partial x_i} y_k \, dt_h, \qquad i = 1, 2 \ldots n.$$

Легко видѣть, что совокупность послѣднихъ уравненій, вмѣстѣ съ (22)-ыми, представляетъ каноническую систему. Для этого слѣдуетъ замѣтить прежде всего, что разсматриваемыя уравненія представляютъ систему уравненій въ полныхъ дифференціалахъ. Вводя затѣмъ обозначенія

$$\sum_{k=1}^{n} X_k^h y_k \equiv H_h, \qquad h = 1, 2 \ldots m,$$

мы представляемъ разсматриваемыя уравненія въ каноническомъ видѣ

$$dx_i = \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial H_h}{\partial y_i} dt_h, \quad dy_i = -\sum_{h=1}^{m} \frac{\partial H_h}{\partial x_i} dt_h, \qquad i = 1, 2, \ldots n. \tag{23}$$

Согласно съ опредѣленіемъ, интегрирующіе множители Якоби системы (22)

$$p_1,\ p_2, \ldots p_n$$

представляютъ соотвѣтственно значенія частныхъ производныхъ

$$\frac{\partial f}{\partial x_1},\ \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

гдѣ функція f является интеграломъ якобіевской системы

$$\left. X^h(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial t_h} + \sum_{i=1}^{n} X_i^h \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad h=1,2,\ldots m. \right\} \qquad (24)$$

Съ другой стороны, аналогично предыдущему случаю обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, множители p_i опредѣляются слѣдующей системой уравненій

$$\left. \frac{\partial p_i}{\partial t_h} + \sum_{k=1}^{n} X_k^h \frac{\partial p_i}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_k^h}{\partial x_i} p_k = 0, \quad i=1,2,\ldots n, \quad h=1,2,\ldots m, \right\} \qquad (25)$$

и уравненіями (18)-ыми. Послѣдняя написанная система nm уравненій (25) принадлежитъ къ типу уравненій, изслѣдованныхъ въ III-ьей главѣ настоящаго сочиненія. Какъ слѣдуетъ изъ изложенной тамъ теоріи, система уравненій въ полныхъ дифференціалахъ, соотвѣтствующая уравненіямъ (25), представляется въ видѣ канонической системы, которая получается изъ предыдущей системы (23), замѣной въ ней перемѣнныхъ y_i черезъ p_i. Другими словами послѣдняя система получается въ результатѣ приложенія къ линейнымъ уравненіямъ (24) общей теоріи уравненій съ частными производными перваго порядка.

Наконецъ, *каждому безконечно-малому преобразованію системы уравненій (22)*

$$U(f) \equiv \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

соотвѣтствуетъ интегралъ

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i p_i = b$$

канонической системы, къ которой приводятся данныя уравненія (22); при этомъ ξ обозначаютъ функціи перемѣнныхъ $t_1, t_2, \ldots t_m, x_1, x_2, \ldots x_n$, а b—произвольную постоянную величину.

Аналогично предыдущему, функціи ξ_i опредѣляются слѣдующей системой уравненій [1]), которая также принадлежитъ къ типу изслѣдованныхъ въ III-ьей главѣ,

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t_h} + \sum_{k=1}^{n} X_k^h \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_i^h}{\partial x_k} \xi_k,$$

$$i = 1, 2, \ldots n, \qquad h = 1, 2, \ldots m.$$

5. Въ виду полной аналогіи, которую представляютъ уравненія въ полныхъ дифференціалахъ съ обыкновенными дифференціальными уравненіями, мы ограничимся разсмотрѣніемъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій (14). Предположимъ, что слѣдующія уравненія

$$\left.\begin{array}{c} f_k(t,\ x_1,\ x_2, \ldots x_n) = a_k, \\ k = 1, 2, \ldots n, \end{array}\right\} \tag{26}$$

представляютъ n различныхъ интеграловъ системы (14), при чемъ всѣ a_k обозначаютъ различныя произвольныя постоянныя величины. Производныя

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_1},\ \frac{\partial f_k}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial f_k}{\partial x_n},$$

согласно съ предыдущимъ опредѣленіемъ, представляютъ значенія n интегрирующихъ множителей Якоби системы уревненій (14), которые условимся обозначать слѣдующимъ образомъ

$$p_{1k},\ p_{2k}, \ldots p_{nk}.$$

Такъ какъ число различныхъ интеграловъ (26) равняется n, то мы имѣемъ, стало-быть, n различныхъ системъ интегрирующихъ множителей, соотвѣтствующихъ n значеніямъ k, отъ 1 до n.

Наконецъ, вслѣдствіе того, что послѣднія n уравненій (19) линейны относительно перемѣнныхъ p_i, то очевидно, что они имѣютъ рѣшенія слѣдующаго вида

$$p_i = \sum_{k=1}^{n} b_k p_{ik},$$

$$i = 1, 2, \ldots n,$$

гдѣ b_k обозначаютъ произвольныя постоянныя величины. Далѣе, само собою разумѣется, что опредѣлитель

---

[1]) См. мое изслѣдованіе: *Sur les transformations infinitésimales des équations différentielles* (*Journal Jordan, 1897, p. 429*).

Ср. *A. Mayer.—Zur Theorie der infinitesimalen Transformationen und im Besondern der infinitesimalen Berührungstransformationen der Ebene (Berichte u. d. Verhandlungen d. K. S. Gesellschaft der W. zu Leipzig, Math.-Phys. classe, 1893, S. 697).*

$$M \equiv \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix}$$

отличенъ отъ нуля. Поэтому предыдущія уравненія, будучи разрѣшены относительно постоянныхъ b_k, даютъ n слѣдующихъ интеграловъ системы (19)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{M_{ik}}{M} p_i = b_k, \qquad (27)$$
$$k = 1, 2, \ldots n,$$

гдѣ выраженіе M_{ik} обозначаетъ миноръ опредѣлителя M, соотвѣтствующій его элементу p_{ik}, находящемуся на пересѣченіи k-ого столбца и i-ой строки разсматриваемаго опредѣлителя.

Послѣдніе интегралы представляются также слѣдующимъ образомъ

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial x_i}{\partial a_k}\right) p_i = b_k,$$
$$k = 1, 2, \ldots n,$$

гдѣ всѣ x_i обозначаютъ ихъ значенія, опредѣляемыя уравненіями (26), и скобки указываютъ на результатъ замѣны a_k ихъ функціональными значеніями f_k. Эти уравненія или выводятся изъ уравненій (27), или составляются непосредственно, на основаніи теоремы Ліувилля для канонической системы (19), по отношенію къ которой уравненія (27) образуютъ систему n интеграловъ въ инволюціи, разрѣшимыхъ относительно каноническихъ перемѣнныхъ перваго класса.

Совокупность уравненій (26) и (27) представляетъ $2n$ различныхъ интеграловъ системы (19). Такимъ образомъ, *если извѣстны всѣ n интеграловъ данныхъ уравненій (14), то полная система интеграловъ соотвѣтствующей канонической системы Ліувилля (19) составляется при помощи операцій дифференцированія.*

Легко видѣть, что совокупность интеграловъ (26) и (27) образуетъ каноническую систему по отношенію къ уравненіямъ (19). Это слѣдуетъ, во-первыхъ, изъ того, что имѣютъ мѣсто условія

$$(f_s, f_r) = 0,$$

для всѣхъ значеній s и r, отъ 1 до n, такъ какъ функціи f_k зависятъ только отъ каноническихъ перемѣнныхъ перваго класса. Затѣмъ, во-вторыхъ, значенія p_{ik} утождествляютъ условія (18). Поэтому указанныя выше значенія функціи p_i удовлетворяютъ также послѣднимъ условіямъ. Слѣдовательно, интегралы (27) находятся въ инволюціи. Такимъ образомъ, называя черезъ F_k лѣвыя части уравненій (27), мы получаемъ слѣдующія тождества

$$(F_s,\ F_r) = 0,$$

для всѣхъ значеній s и r, отъ 1 до n. Наконецъ, получаемъ еще слѣдующія значенія скобокъ Пуассона

$$(F_s,\ f_r) \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_s}{\partial p_k}\frac{\partial f_r}{\partial x_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_s}{\partial p_k} p_{kr}.$$

Подставляя въ послѣднія выраженія значенія производныхъ $\dfrac{\partial F_s}{\partial p_k}$, представляемъ такимъ образомъ предыдущія выраженія

$$(F_s,\ f_r) \equiv \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{n} M_{ks}\ p_{kr}.$$

Отсюда, на основаніи свойствъ опредѣлителя M, приходимъ къ искомымъ равенствамъ

$$(F_s,\ f_r) \equiv \begin{cases} 0, & r \gtrless s, \\ 1, & r = s, \end{cases}$$

которыя, совмѣстно съ предыдущими равенствами, показываютъ, что разсматриваемые интегралы дѣйствительно образуютъ каноническую систему.

Кромѣ того, изъ существованія интеграловъ (27) заключаемъ, что каноническая система (19) имѣетъ n интеграловъ въ инволюціи, линейныхъ относительно вспомогательныхъ перемѣнныхъ Ліувилля p_i.

Само собою разумѣется, что вводя вспомогательныя перемѣнныя, чтобы привести данныя уравненія къ каноническому виду, мы удвоиваемъ число уравненій. Поэтому до сихъ поръ геометры въ своихъ вычисленіяхъ не пользовались преобразованіемъ Ліувилля. Какъ однако слѣдуетъ изъ предыдущихъ разсужденій, новыя вводимыя Ліувиллемъ перемѣнныя величины тѣсно связаны съ тѣми величинами, которыя встрѣчаются въ теоріи дифференціальныхъ уравненій или въ видѣ интегрирующихъ множителей Якоби, или при разсмотрѣніи безконечно-малыхъ преобразованій изслѣдуемыхъ уравненій. Такимъ образомъ введеніе вспомогательныхъ перемѣнныхъ Ліувилля не усложняетъ задачи интегрированія данныхъ уравненій больше, чѣмъ всѣ упомянутыя теоріи. Напротивъ преобразованіе разсматриваемыхъ уравненій къ каноническому виду представляетъ существенное удобство, въ виду особенностей теоріи каноническихъ уравненій, которыя упрощаютъ задачу интегрированія дифференціальныхъ уравненій.

ГЛАВА X.

Приложенiе безконечно-малыхъ преобразованiй къ интегрированiю дифференцiальныхъ уравненiй.

1. Первый вопросъ, который представляется при интегрированiи данныхъ дифференцiальныхъ уравненiй, при помощи ихъ безконечно-малыхъ преобразованiй, состоитъ въ разысканiи послѣднихъ.

Въ моемъ изслѣдованiи: *Sur les transformations infinitésimales*, опубликованномъ въ *Journal de Mathématiques pures et appliquées* за 1897 годъ [1]), показано, что задача вычисленiя безконечно-малыхъ преобразованiй системы дифференцiальныхъ уравненiй обыкновенныхъ и въ полныхъ дифференцiалахъ равнозначна задачѣ интегрированiя этихъ самыхъ уравненiй. То же самое заключенiе вытекаетъ съ особенной наглядностью изъ разсужденiй, изложенныхъ въ предыдущей главѣ. Поэтому теорiя безконечно-малыхъ преобразованiй представляетъ одинъ изъ тѣхъ формальныхъ, общихъ способовъ интегрированiя дифференцiальныхъ уравненiй, которые приводятъ, въ различныхъ частныхъ случаяхъ, сравнительно съ другими прiемами интегрированiя, къ болѣе или менѣе удачному разрѣшенiю задачи интегрированiя дифференцiальныхъ уравненiй того или другого частнаго вида.

Становясь на послѣднюю точку зрѣнiя, мы приходимъ къ необходимости изученiя элементовъ теорiи безконечно-малыхъ преобразованiй, достаточныхъ для интегрированiя дифференцiальныхъ уравненiй и къ разсмотрѣнiю вычисленiй, необходимыхъ для выполненiя самого интегрированiя.

Послѣднiе два вопроса служили предметомъ постоянныхъ изслѣдованiй С. Ли. Мнѣ удалось, съ своей стороны, получить въ этомъ направленiи нѣсколько результатовъ, изложенiе которыхъ представляетъ содержанiе настоящей главы.

Отличительная черта трудовъ С. Ли заключается въ оригинальности и новизнѣ формы изложенiя своихъ мыслей и результатовъ. Поэтому очень часто утрачивается связь между изслѣдованiями С. Ли и другихъ геометровъ. Но, кромѣ того, идеи С. Ли не всегда приводятъ

---

[1]) T. III, 5-e série, p. 429.

къ простому представленію изслѣдуемыхъ вопросовъ и, что всего важнѣе, иногда не даютъ естественнаго разъясненія сущности разсматриваемыхъ задачъ. Высказанныя соображенія относятся, по нашему мнѣнію, также къ теоріи безконечно-малыхъ преобразованій. Какъ мы видѣли въ предыдущей главѣ, существуетъ тѣсная связь между безконечно-малыми преобразованіями дифференціальныхъ уравненій, ихъ интегрирующими множителями Якоби и преобразованіемъ Ліувилля разсматриваемыхъ уравненій къ каноническому виду. Благодаря послѣднему обстоятельству, *интегрированіе уравненій, для которыхъ извѣстны безконечно-малыя преобразованія, представляетъ частный случай задачи интегрированія каноническихъ уравненій.*

Такимъ образомъ мы вносимъ нѣкоторыя упрощенія въ теорію безконечно-малыхъ преобразованій и приходимъ къ уменьшенію числа операцій, необходимыхъ для интегрированія системъ дифференціальныхъ уравненій обыкновенныхъ и въ полныхъ дифференціалахъ, допускающихъ такъ называемую группу безконечно-малыхъ преобразованій; наконецъ, всѣ необходимыя для выполненія послѣдняго интегрированія операціи, которыя совершаются при помощи квадратуръ, пріобрѣтаютъ у насъ весьма простое выраженіе.

На послѣдующихъ страницахъ излагаются подробно эти результаты, которые были опубликованы раньше въ *Journal de Mathématiques pures et appliquées* [1]) за 1905 г. въ мемуарѣ: *Etude sur les transformations infinitésimales* и въ статьѣ: *Приложеніе теоріи группъ безконечно-малыхъ преобразованій къ интегрированію дифференціальныхъ уравненій при помощи квадратуръ*, напечатанной въ Протоколахъ Физико-Математическаго Общества, состоящаго при Кіевскомъ Университетѣ [2]).

Пусть имѣемъ систему обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$dx_k = X_k dt, \qquad k = 1, 2, \ldots n, \tag{1}$$

гдѣ всѣ X_k представляютъ функціи независимой перемѣнной t и зависимыхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Соотвѣствующее линейное уравненіе съ частными производными перваго порядка функціи f перемѣнныхъ $t, x_1, x_2, \ldots x_n$, разсматриваемыхъ какъ независимыя, принимаетъ слѣдующій видъ

$$X(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0. \tag{2}$$

---

1) 6-e série, tome I, p. 53.

2) Кіевскія Университетскія Извѣстія за 1904 г.

Предположимъ, что разсматриваемыя уравненія (1) или (2) допускаютъ m различныхъ [1]) безконечно-малыхъ преобразованій

$$U_1(f),\ U_2(f), \ldots U_m(f), \tag{3}$$

гдѣ введены слѣдующія обозначенія

$$U_k(f) \equiv \sum_{i=1}^{n} \xi_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

при чемъ всѣ коэффиціенты ξ_{ik} представляютъ функціи перемѣнныхъ $t,\ x_1,\ x_2, \ldots x_n$.

С. Ли говоритъ, что *безконечно-малыя преобразованія (3) образуютъ группу*, если они удовлетворяютъ тождественно слѣдующимъ условіямъ

$$(U_s(f),\ U_r(f)) = \sum_{\rho=1}^{m} c_{sr\rho} U_\rho(f),$$

для всѣхъ различныхъ значеній s и r, отъ 1 до m, *при чемъ всѣ величины $c_{sr\rho}$ представляютъ постоянныя значенія.*

Наконецъ, условившись обозначать черезъ p_i частныя производныя функціи f

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = p_i, \quad i = 1,\ 2, \ldots n,$$

введемъ слѣдующія обозначенія

$$\sum_{i=1}^{n} X_i p_i \equiv H, \quad \sum_{i=1}^{n} \xi_{ik} p_i \equiv F_k.$$

Въ нашихъ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ мы ограничимся предположеніемъ о существованіи группъ безконечно-малыхъ преобразованій и не будемъ прибѣгать къ операціямъ, для составленія новыхъ безконечно-малыхъ преобразованій или интеграловъ разсматриваемыхъ дифференціальныхъ уравненій. Кромѣ того мы не будемъ предполагать извѣстными интегралы этихъ послѣднихъ уравненій, такъ какъ въ каждомъ случаѣ, когда нѣкоторые изъ этихъ интеграловъ становятся извѣстными, задача интегрированія соотвѣтствующихъ дифференціальныхъ уравненій пре-

---

[1]) Безконечно-малыя преобразованія называются *различными*, если они не связаны между собой линейными зависимостями съ постоянными коэффиціентами.

образовывается въ новую задачу, при чемъ порядокъ интегрируемой системы уравненій становится меньше сравнительно съ исходной системой [1]).

Каждое безконечно-малое преобразованіе даетъ мѣсто интегралу канонической системы Ліувилля, соотвѣствующей даннымъ уравненіямъ (1). Поэтому идея С. Ли, примѣнить безконечно-малыя преобразованія къ интегрированію данныхъ уравненій, приводится по существу къ тому, чтобы ввести въ вычисленія интегралы второго класса канонической системы Ліувилля и воспользоваться ими для вычисленія искомыхъ интеграловъ, которые принадлежатъ къ первому классу.

2. Условившись въ предыдущихъ обозначеніяхъ, будемъ называть группу безконечно-малыхъ преобразованій (3) *группой въ инволюціи*, если всѣ постоянныя величины $c_{sr\rho}$ тождественно равны нулямъ, т. е. функціи F_k находятся въ инволюціи, удовлетворяя тождественно условіямъ

$$(F_s,\ F_r) = 0,$$

для всѣхъ различныхъ значеній s и r, отъ 1 до m.

Первое предложеніе, которое мы имѣемъ въ виду доказать, состоитъ въ слѣдующемъ:

Если система обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій (1) допускаетъ группу n различныхъ безконечно-малыхъ преобразованій въ инволюціи, то интегрированіе данной системы совершается при помощи одной только квадратуры.

Въ самомъ дѣлѣ, данныя функціи

$$F_1,\ F_2, \ldots F_n$$

представляютъ n различныхъ интеграловъ въ инволюціи линейнаго уравненія съ частными производными перваго порядка функціи F независимыхъ перемѣнныхъ

$$x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ p_1,\ p_2, \ldots p_n,$$

которое, при помощи скобокъ Пуассона, представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (H,\ F) = 0. \tag{4}$$

Поэтому соотвѣтствующая каноническая система обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій

---

[1]) См. по этому поводу изслѣдованія *С. Ли*: Mathematische Annalen, Bd. XI, S. 487, и *Vorlesungen über Differentialgeichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, bearbeitet* u. *herausgegeben v. G. Scheffers.*

C. Jordan. Cours d'Analyse, t III. 1896, p.p. 79—87.

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_k}, \tag{5}$$
$$k = 1, 2, \ldots n,$$

имѣетъ n интеграловъ въ инволюціи, разрѣшимыхъ относительно всѣхъ перемѣнныхъ $p_1, p_2, \ldots p_n$,

$$F_i = b_i, \ i = 1, 2, \ldots n, \tag{6}$$

гдѣ b_i представляютъ n различныхъ произвольныхъ постоянный величинъ.

Слѣдовательно, остальные n интеграловъ разсматриваемой канонической системы (5) опредѣляются, на основаніи извѣстной теоремы Якоби—Ліувилля, при помощи одной квадратуры, приводящейся къ интегрированію точнаго дифференціала

$$dz = -H\,dt + \sum_{k=1}^{n} p_k dx_k,$$

гдѣ всѣ p_k представляютъ ихъ значенія, опредѣляемыя уравненіями (6). Пусть интегралъ послѣдняго точнаго дифференціала представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$z = V(t, x_1, x_2, \ldots x_n, b_1, b_2, \ldots b_n) + b,$$

гдѣ b обозначаетъ новую произвольную постоянную величину. Въ такомъ случаѣ искомые n интеграловъ системы (5) представляются уравненіями

$$\frac{\partial V}{\partial b_i} = a_i, \ i = 1, 2, \ldots n, \tag{7}$$

гдѣ всѣ a_i обозначаютъ n новыхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ.

Легко убѣдиться, что эти послѣднія уравненія представляютъ вмѣстѣ съ тѣмъ интегралы данной системы уравненій (1).

Дѣйствительно, слѣдуетъ прежде всего замѣтить, что первыя n уравненій канонической системы (5) представляютъ данныя уравненія (1); остальныя же n уравненій (5) являются уравненіями Ліувилля, которыя онъ вводитъ для преобразованія данной системы (1) къ каноническому виду. Такъ какъ далѣе уравненія (6) разрѣшимы относительно всѣхъ перемѣнныхъ p_k, то, какъ хорошо извѣстно, уравненія (7) разрѣшимы относительно перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$. Наконецъ, нетрудно убѣдиться, что уравненія (7) не зависятъ отъ постоянныхъ

$$b_1, b_2, \ldots b_n.$$

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ уравненія (6) линейны относительно p_k, то опредѣленныя изъ этихъ уравненій выраженія послѣднихъ перемѣнныхъ линейны относительно всѣхъ постоянныхъ b_i. Поэтому выраженіе dz, а также выраженіе его интеграла, т. е. функція V, линейны относительно всѣхъ b_i. Слѣдовательно, всѣ частныя производныя $\frac{\partial V}{db_i}$ не заключаютъ совершенно постоянныхъ величинъ $b_1, b_2, \ldots b_n$, и уравненія (7) представляютъ, стало-быть, искомые интегралы данной системы уравненій (1).

Послѣдніе интегралы легко представить въ явной формѣ черезъ посредство коэффиціентовъ данныхъ безконечно-малыхъ преобразованій. Дѣйствительно, уравненія (6) представляются слѣдующимъ образомъ въ явной формѣ

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_{ik} p_i = b_k,$$
$$k = 1, 2, \ldots n.$$

Называемъ черезъ $\triangle$ отличный отъ нуля опредѣлитель

$$\triangle \equiv \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{21} & \cdots & \xi_{n1} \\ \xi_{12} & \xi_{22} & \cdots & \xi_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{1n} & \xi_{2n} & \cdots & \xi_{nn} \end{vmatrix}.$$

Обозначая черезъ $\triangle_{ri}$ миноръ опредѣлителя $\triangle$, соотвѣтствующій его элементу ξ_{ri}, получаемъ

$$p_r = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\triangle_{ri}}{\triangle},$$
$$r = 1, 2, \ldots n,$$

при чемъ послѣднія значенія p_r удовлетворяютъ условіямъ

$$\frac{\partial p_r}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_r},$$

для всѣхъ значеній r и k, отъ 1 до n. Такъ какъ b_k представляютъ произвольныя постоянныя величины, то мы получаемъ слѣдующія тождества

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\triangle_{ri}}{\triangle}\right) = \frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\triangle_{ki}}{\triangle}\right),$$
$$k, r = 1, 2, \ldots n,$$

при чемъ i получаетъ рядъ значеній отъ 1 до n. Отсюда слѣдуетъ, что отношенія

$$\frac{\Delta_{1i}}{\Delta}, \frac{\Delta_{2i}}{\Delta}, \ldots \frac{\Delta_{ni}}{\Delta}$$

представляютъ системы интегрирующихъ множителей данныхъ уравненій (1). Стало-быть, интегралы ихъ становятся

$$\int \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta_{ki}}{\Delta} (dx_k - X_k\, dt) = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots n,$$

гдѣ выраженія подъ знаками интеграловъ представляютъ точные дифференціалы и a_i обозначаютъ произвольныя постоянныя величины.

3. Для продолженія нашего изслѣдованія въ томъ же самомъ направленіи, необходимо распространить полученные результаты на уравненія въ полныхъ дифференціалахъ и на якобіевскія системы линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи и на какія угодно *замкнутыя* системы послѣднихъ уравненій.

Возьмемъ систему уравненій въ полныхъ дифференціалахъ въ слѣдующемъ видѣ

$$\left. dx_i = \sum_{h=1}^{m} X_i^h\, dt_h, \quad i = 1, 2, \ldots n, \right\} \tag{8}$$

гдѣ коэффиціенты X_i^h являются функціями независимыхъ перемѣнныхъ $t_1, t_2, \ldots t_m, x_1, x_2, \ldots x_n$ и удовлетворяютъ извѣстнымъ условіямъ, показывающимъ, что написанныя уравненія представляютъ систему уравненій въ полныхъ дифференціалахъ.

Въ такомъ случаѣ соотвѣтствующая нашимъ уравненіямъ якобіевская система имѣетъ видъ

$$\left. X^h(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial t_h} + \sum_{i=1}^{n} X_i^h \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad h = 1, 2, \ldots m. \right\} \tag{9}$$

Наконецъ, каноническая система, въ которую преобразовываются данныя уравненія (8), становится

$$dx_i = \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial H_h}{\partial p_i} dt_h, \quad dp_i = -\sum_{h=1}^{m} \frac{\partial H_h}{\partial x_i} dt_h,$$

$$i = 1, 2, \ldots n,$$

гдѣ функціи H_h имѣютъ значенія

$$H_h \equiv \sum_{k=1}^{n} X_k^h p_k.$$

Поэтому, на основаніи *обобщенной теоремы Якоби—Ліувилля*, распространенной мною на *системы каноническихъ уравненій въ полныхъ дифференціалахъ* [1]), доказанное выше предложеніе, относительно обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, распространяется слѣдующимъ образомъ на уравненія въ полныхъ дифференціалахъ и на якобіевскія системы:

Если системы уравненій въ полныхъ дифференціалахъ (8), или соотвѣтствующая якобіевская система (9) допускаютъ группу въ инволюціи n различныхъ безконечно-малыхъ преобразованій, то интегрированіе данныхъ уравненій совершается при помощи одной только квадратуры.

Наконецъ, послѣднее предложеніе относится не только къ якобіевскимъ системамъ, но распространяется также весьма легко и на всякую *замкнутую* систему линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи, т. е. такую систему, что скобки Пуассона, составленныя изъ лѣвыхъ частей ея уравненій, выражаются линейно черезъ эти лѣвыя части и, стало-быть, уничтожаются, на основаніи данныхъ уравненій.

Мы условимся говорить, что *замкнутая система* линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи допускаетъ *замкнутую группу безконечно-малыхъ преобразованій, если составленныя изъ нихъ скобки Пуассона выражаются линейно съ постоянными коэффиціентами относительно лѣвыхъ частей уравненій данной замкнутой системы.*

Чтобы убѣдиться въ справедливости послѣдняго обобщенія только что приведеннаго предложенія, относительно якобіевскихъ системъ, на замкнутыя системы, достаточно указать на то, что послѣдній случай приводится къ предыдущему. Въ самомъ дѣлѣ, какъ хорошо извѣстно, разсматриваемая замкнутая система, разрѣшеніемъ ея уравненій относительно частныхъ производныхъ, приводится къ якобіевской

---

[1]) См. сообщ. *Харьк. Мат. Общ. т. VI стр. 225, Comptes rendus d. S. de l'Acad. des Sc., 23 janvier, 30 janvier, 4 juillet, 1899* и главу VII настоящаго сочиненія.

системѣ, и, путемъ алгебраическихъ преобразованій, замкнутая группа разсматриваемыхъ безконечно-малыхъ преобразованій переходитъ въ группу въ инволюціи, соотвѣтствующую полученной якобіевской системѣ [1]).

Для примѣра возьмемъ слѣдующую систему уравненій

$$dx = X\,dt, \quad dy = Y\,dt, \tag{10}$$

допускающую группу двухъ слѣдующихъ различныхъ безконечно-малыхъ преобразованій

$$U_1(f) \equiv \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial x}, \quad U_2(f) \equiv \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial y},$$

гдѣ X, Y, ξ_1, η_1, ξ_2, η_2 представляютъ функціи перемѣнныхъ t, x, y.

Какъ извѣстно, возможны только слѣдующихъ два случая [2]): или имѣетъ мѣсто условіе

$$(U_1(f),\ U_2(f)) = 0,$$

или существуетъ зависимость

$$(U_1(f),\ U_2(f)) = U_1 f.$$

Если имѣетъ мѣсто первый случай, то составляемъ тогда слѣдующія уравненія

$$U_1(f) = b_1,\ U_2(f) = b_2,$$

при чемъ b_1, b_2, обозначаютъ произвольныя постоянныя величины. Вычисляемъ затѣмъ квадратуру

$$f = \int \frac{1}{\triangle} [b_1 \eta_2 - b_2 \eta_1)(dx - X\,dt) + (b_2 \xi_1 - b_1 \xi_1)(dy - Y\,dt)] + b,$$

гдѣ b — новая произвольная постоянная величина и имѣетъ $\triangle$ значеніе

$$\triangle \equiv \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1.$$

Въ такомъ случаѣ оба искомые интеграла данной системы дифференціальныхъ уравненій (10) становятся

---

[1]) Ср. *S. Lie.*—Mathematische Annalen, Bd. XI, S. 495.
C. Jordan.—Cours d'Analyse, t. III, 1-re édition, p. 81—82.

[2]) *S. Lie—Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen bearbeitet und herausgegeben v. G. Scheffers, Leipzig 1891, S. 412.*

$$\frac{\partial f}{\partial b_1} = a_1, \quad \frac{\partial f}{\partial b_2} = a_2,$$

гдѣ a_1 и a_2 представляютъ двѣ произвольныхъ постоянныхъ величины, при чемъ производныя $\frac{\partial f}{\partial b_1}$, $\frac{\partial f}{\partial b_2}$ не зависятъ отъ величинъ b_1 и b_2.

Во второмъ изъ указанныхъ предположенiй, относительно разсматриваемой группы, получается слѣдующая полная система линейныхъ уравненiй

$$\frac{\partial f}{\partial t} + X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

имѣющая безконечно-малое преобразованiе $U_2(f)$. Разрѣшая два послѣднихъ уравненiя относительно производныхъ $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, получаемъ якобiевскую систему, которой соотвѣтствуетъ слѣдующее уравненiе въ полныхъ дифференцiалахъ

$$dy = \frac{\eta_1}{\xi_1}\,dx + \left(Y - \frac{\eta_1}{\xi_1}X\right)dt.$$

Это уравненiе имѣетъ безконечно-малое преобразованiе

$$U_2' f \equiv \frac{\triangle}{\xi_1}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Поэтому отношенiе $\frac{\xi_1}{\triangle}$ представляетъ интегрирующiй множитель послѣдняго уравненiя въ полныхъ дифференцiалахъ, его интегралъ становится

$$\int \frac{\xi_1}{\triangle}\left[dy - \frac{\eta_1}{\xi_1}\,dx - \left(Y - \frac{\eta_1}{\xi_1}X\right)dt\right] = a_1$$

и представляетъ вмѣстѣ съ тѣмъ одинъ изъ интеграловъ системы (10), при чемъ a_1 обозначаетъ произвольную постоянную величину.

Второй изъ искомыхъ интеграловъ получается затѣмъ при помощи квадратуры. Въ самомъ дѣлѣ, подставляя значенiе y, опредѣляемое найденнымъ интеграломъ, въ первое изъ данныхъ уравненiй, получаемъ уравненiе

$$dx = (X)\,dt,$$

имѣющее безконечно-малое преобразованiе

$$U_1'(f) \equiv (\xi_1)\frac{\partial f}{\partial x},$$

гдѣ скобки обозначаютъ результатъ произведеннаго исключенія. Поэтому второй искомый интегралъ становится

$$\int \frac{1}{(\xi_1)}\,[dx - (X)\,dt] = a_2\,,$$

гдѣ a_2 — новая произвольная постоянная величина.

4. Основываясь на полученныхъ результатахъ, легко установить второй случай интегрированія дифференціальныхъ уравненій (1) или (2), уравненій въ полныхъ дифференціалахъ и якобіевскихъ системъ, при помощи квадратуръ, въ томъ предположеніи, что разсматриваемыя уравненія допускаютъ такъ называемую *интегрируемую группу безконечно-малыхъ преобразованій* [1]).

Чтобы составить понятіе объ *интегрируемой группѣ*, начнемъ съ опредѣленія такъ называемыхъ *производныхъ группъ данной группы безконечно-малыхъ преобразованій*.

Обозначимъ черезъ

$$U_1(f),\ U_2(f), \ldots\ U_n(f) \tag{11}$$

группу n различныхъ безконечно-малыхъ преобразованій системы уравненій (1).

Пусть послѣдняя группа заключаетъ *подгруппу* [2]) n_1 безконечно-малыхъ преобразованій

$$U_1(f),\ U_2(f), \ldots\ U_{n_1}(f)\,,$$

гдѣ $n_1 < n$; послѣдняя называется *производной группой*, если всѣ безконечно-малыя преобразованія данной группы удовлетворяютъ слѣдующимъ условіямъ

$$\big(U_s(f),\ U_r(f)\big) = \sum_{\rho=1}^{n_1} c_{sr\rho}\, U_\rho(f)\,,$$

для всѣхъ различныхъ значеній s и r, отъ 1 до n, при чемъ $c_{sr\rho}$ представляютъ постоянныя величины.

Предположимъ, что указанная производная группа имѣетъ въ свою очередь также производную группу; эта послѣдняя въ такомъ случаѣ называется *второй производной* данной группы и т. д.

Очевидно, что данная группа допускаетъ конечное число производныхъ группъ.

---

[1]) *S. Lie и Engel.—Theorie der Transformationsgruppen.* Bd. III, s. 679.

[2]) Мы говоримъ, что нѣсколько безконечно-малыхъ преобразованій данной группы образуютъ подгруппу, если они образуютъ самостоятельно группу, независимо отъ остальныхъ безконечно-малыхъ преобразованій данной группы.

Если послѣдняя производная данной группы приводится къ одному только безконечно-малому преобразованію, то мы называемъ разсматриваемую группу *интегрируемой*.

Предположимъ, что группа (11) интегрируемая и имѣетъ q производныхъ подгруппъ. Представимъ каждую послѣдовательную производную группу въ новой строкѣ слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{l}
U_1(f),\ U_2(f), \ldots U_{n_{q-1}}(f), \ldots U_{n_2}(f), \ldots U_{n_1}(f), \ldots U_n(f);\\
U_1(f),\ U_2(f), \ldots U_{n_{q-1}}(f), \ldots U_{n_2}(f), \ldots U_{n_1}(f);\\
U_1(f),\ U_2(f), \ldots U_{n_{q-1}}(f), \ldots U_{n_2}(f);\\
\ \cdot \qquad \cdot \qquad \ldots \qquad \ldots\\
\ \cdot \qquad \cdot \qquad \ldots \qquad \ldots\\
U_1(f),\ U_2(f), \ldots U_{n_{q-1}}(f);\\
U_1(f).
\end{array}$$

Въ такомъ случаѣ, согласно съ С. Ли, интегрированіе уравненій (1) совершается при помощи n различныхъ квадратуръ [1]). Но мы имѣемъ въ виду показать, что число квадратуръ, необходимыхъ для интегрированія системы (1) въ разсматриваемомъ случаѣ, равняется числу производныхъ подгруппъ данной группы, увеличенному на единицу. Такимъ образомъ всякій разъ, когда число разсматриваемыхъ производныхъ подгруппъ меньше n, то изслѣдумая задача интегрированія разрѣшается при помощи меньшаго числа квадратуръ, нежели этого требуетъ С. Ли.

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи понятія о производныхъ группахъ, становится очевиднымъ, что равенства

$$X(f)=0, \quad U_1(f)=0, \quad U_2(f)=0, \ldots U_{n_1}(f)=0 \tag{12}$$

образуютъ замкнутую систему линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка неизвѣстной функціи f, и что послѣдняя система допускаетъ *замкнутую группу $n-n_1$ различныхъ безконечно-малыхъ преобразованій*

$$U_{n_1+1}(f), \quad U_{n_1+2}(f), \ldots U_n(f). \tag{13}$$

Дѣйствительно, скобки Пуассона, составленныя изъ лѣвыхъ частей уравненій (12), уничтожаются, на основаніи этихъ самыхъ уравненій, а скобки Пуассона, изъ безконечно-малыхъ преобразованій (13), выражаются линейно съ постоянными коэффиціентами черезъ лѣвыя части уравненій (12).

---

[1]) *S. Lie.—Mathematische Annalen,* Bd. XI, s. 517—518.
S. Lie и Engel.—Theorie der Transformationsgruppen, Bd. III, s. 708—709.

Поэтому, въ силу предложенія, доказаннаго въ $n^o 3$, интегрированіе системы уравненій (12) совершается при помощи одной только квадратуры, и мы получаемъ дифференцированіемъ $n - n_1$ различныхъ ея интеграловъ, которые обозначимъ черезъ

$$f_1, f_2, \dots f_{n-n_1}.$$

Послѣднія функціи являются вмѣстѣ съ тѣмъ интегралами уравненія (2). Поэтому число входящихъ въ него независимыхъ перемѣнныхъ и вмѣстѣ съ тѣмъ порядокъ системы уравненій (1) могутъ быть понижены на $n - n_1$ единицъ. Предположимъ, что полученные интегралы различны относительно перемѣнныхъ

$$x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \dots x_n.$$

Вводя вмѣсто послѣднихъ, новыми перемѣнными, функціи $f_1, f_2, \dots f_{n-n_1}$, мы преобразовываемъ уравненіе (2) къ слѣдующему виду

$$X'(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n_1} X'_i \frac{\partial f}{\partial x_i}. \tag{14}$$

Такъ какъ функціи f служатъ интегралами уравненій (12), то первая производная нашей группы (11), будучи преобразована также къ новымъ перемѣннымъ, представляетъ *интегрируемую группу* n_1 различныхъ безконечно-малыхъ преобразованій, допускаемыхъ уравненіемъ (14), которая представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$U'_1(f), \ U'_2(f), \dots U'_{n_1}(f),$$

гдѣ введены обозначенія

$$U'_k(f) = \sum_{i=1}^{n_1} \xi'_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

и поставленные сверху буквъ значки отмѣчаютъ результатъ совершеннаго преобразованія.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ задачѣ, аналогичной исходной задачѣ, но порядка болѣе низкаго на $n - n_1$ единицъ.

Прилагая къ уравненію (14) предыдущія разсужденія, мы получаемъ, при помощи одной только квадратуры и дифференцированія, $n_1 - n_2$ интеграловъ уравненія (14), пусть

$$f_{n-n_1+1}, f_{n-n_1+2}, \dots f_{n-n_2},$$

различныхъ, положимъ, относительно перемѣнныхъ

$$x_{n_1+1},\ x_{n_2+2},\ \ldots\ x_{n_1}.$$

Преобразовываемъ уравненіе (14) къ новымъ перемѣннымъ, принимая за таковыя только что написанные интегралы и т. д.

Наконецъ, послѣ $q-1$ кратнаго повторенія указанныхъ операцій вычисленія, мы приходимъ къ составленію замкнутой системы двухъ слѣдующихъ линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка функціи f, по независимымъ перемѣннымъ $t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_{q-1}$,

$$X^{(q-1)}(f)=0, \qquad Y_1^{(q-1)}(f)=0,$$

допускающихъ *замкнутую* группу безконечно-малыхъ преобразованій

$$U_2^{(q-1)}(f),\ U_3^{(q-1)}(f),\ \ldots\ U_{n_{q-1}}^{(q-1)}(f).$$

Выполнивъ еще одну, q-ю по счету, квадратуру, мы составляемъ, при помощи дифференцированія, $n_{q-1}-1$ интеграловъ послѣднихъ двухъ уравненій, которые мы обозначимъ черезъ

$$f_{n-n_{q-1}+1},\ f_{n-n_{q-1}+2},\ \ldots\ f_{n-1}$$

и будемъ предполагать различными относительно перемѣнныхъ

$$x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_{n_{q-1}}.$$

Принимая полученные интегралы за новыя перемѣнныя, вмѣсто послѣднихъ величинъ, мы приходимъ, наконецъ, къ уравненію вида

$$\frac{\partial f}{\partial t}+X_1^{(q)}\frac{\partial f}{\partial x_1}=0,$$

допускающему безконечно-малое преобразованіе

$$U_1^{(q)}(f)\equiv \xi_{11}^{(q)}\frac{\partial f}{\partial x_1}.$$

Стало быть, соотвѣтствующее обыкновенное дифференціальное уравненіе имѣетъ интегрирующій множитель $\frac{1}{\xi_{11}^{(q)}}$ и искомый интегралъ разсматриваемаго уравненія f_n получается при помощи квадратуры

$$\int \frac{1}{\xi_{11}^{(q)}}(dx_1-X_1^{(q)}\,dt).$$

Приравнявъ произвольнымъ постояннымъ величинамъ всѣ вычисленные интегралы и возвратившись къ первоначальной системѣ перемѣнныхъ, мы получаемъ такимъ образомъ полную систему интеграловъ данныхъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій (1).

Само собою разумѣется, что приведенныя разсужденія прилагаются безъ существенныхъ измѣненій также къ интегрированію системы уравненій въ полныхъ дифференціалахъ, допускающихъ интегрируемую группу безконечно-малыхъ преобразованій.

Изъ предыдущаго изложенія слѣдуетъ, что число необходимыхъ квадратуръ, для интегрированія уравненій въ обоихъ разсмотрѣнныхъ случаяхъ, меньше сравнительно съ требованіями С. Ли, который рѣшаетъ каждую изъ обѣихъ задачъ, при помощи n различныхъ квадратуръ. Между тѣмъ оказывается, что, въ случаѣ *группы въ инволюціи*, достаточно всего одной квадратуры, а при *интегрируемой группѣ*, число необходимыхъ квадратуръ равняется числу производныхъ группъ, увеличенному на единицу.

Вводимое упрощеніе вытекаетъ изъ основного положенія, что *каждое безконечно-малое преобразованіе С. Ли системы данныхъ дифференціальныхъ уравненій опредѣляетъ интегралъ соотвѣтствующей канонической системы Ліувилля.*

Этотъ результатъ, который остался незамѣченнымъ С. Ли и его послѣдователями, является существеннымъ для развитія теоріи безконечно-малыхъ преобразованій. Благодаря тому же результату пріобрѣтаетъ новое значеніе преобразованіе Ліувилля данныхъ уравненій къ каноническому виду, которому до сихъ поръ не приписывали значенія, вслѣдствіе необходимости удвоить при этомъ число разсматриваемыхъ перемѣнныхъ. Однако, какъ оказывается, при разсмотрѣніи безконечно-малыхъ преобразованій, мы вводимъ тѣ же самыя перемѣнныя Ліувилля, образующія, совмѣстно съ данными, два класса каноническихъ перемѣнныхъ. Такимъ образомъ является возможность приложить къ изученію безконечно-малыхъ преобразованій теорію каноническихъ уравненій обыкновенныхъ и въ полныхъ дифференціалахъ, которая, мы полагаемъ, должна пріобрѣсти первенствующее значеніе при интегрированіи дифференціальныхъ уравненій, допускающихъ безконечно-малыя преобразованія.

Возьмемъ, для примѣра, систему дифференціальныхъ уравненій [1])

$$dx = X dt, \quad dy = Y dt, \quad dz = Z dt,$$

допускающую слѣдующую группу безконечно-малыхъ преобразованій

[1]) Ср. *S. Lie.—Vorlesungen über Differentialgeichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen bearbeitet und herausgegeben v. G. Scheffers*, ss. 545—555.

$$U_1(f), \quad U_2(f), \quad U_3(f),$$

удовлетворяющихъ условіямъ

$$(U_1(f),\ U_2(f)) = 0, \quad (U_1(f),\ U_3(f)) = U_1(f), \quad (U_2(f),\ U_3(f)) = 0,$$

при чемъ введены обозначенія

$$U_i(f) \equiv \xi_i \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_i \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_i \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Первая производная подгруппа данной группы состоитъ изъ одного безконечно-малаго преобразованія $U_1(f)$. Поэтому, интегрируя систему уравненій

$$X(f) = 0, \quad U_1(f) = 0, \quad U_2(f) = b_1, \quad U_3(f) = b_2,$$

получаемъ, при помощи квадратуры, уравненіе

$$f = V(t,\ x,\ y,\ z,\ b_1,\ b_2) + b,$$

гдѣ b_1, b_2 и b представляютъ три произвольныхъ постоянныхъ величины.

Стало быть, два интеграла данной системы представляются уравненіями

$$\frac{\partial V}{\partial b_1} = a_1, \quad \frac{\partial V}{\partial b_1} = a_2,$$

гдѣ a_1 и a_2—двѣ произвольныхъ постоянныхъ величины.

Введемъ далѣе слѣдующее обозначеніе

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix},$$

и назовемъ черезъ Δ_{ri} миноръ послѣдняго опредѣлителя, соотвѣтствующій его элементу, расположенному на пересѣченіи r-аго столбца и i-ой строки. Поэтому, на основаніи указанныхъ выше соображеній, оба предыдущихъ интеграла представляются также въ слѣдующемъ видѣ

$$\int \left[\frac{\Delta_{12}}{\Delta}(dx - X dt) + \frac{\Delta_{22}}{\Delta}(dy - Y dt) + \frac{\Delta_{32}}{\Delta}(dz - Z dt) \right] = a_1,$$

$$\int \left[\frac{\Delta_{13}}{\Delta}(dx - X dt) + \frac{\Delta_{23}}{\Delta}(dy - Y dt) + \frac{\Delta_{33}}{\Delta}(dz - Z dt) \right] = a_2.$$

Предположимъ, что полученные интегралы разрѣшимы относительно перемѣнныхъ y и z. Въ такомъ случаѣ третій искомый интегралъ находится при помощи квадратуры

$$\int \frac{1}{\xi_1'}[dx - X'dt]\, a_3,$$

гдѣ a_3 обозначаетъ новую произвольную постоянную величину.

5. Въ XI томѣ *Mathematische Annalen* (p. 521) С. Ли приложилъ къ рѣшенію своей задачи, изслѣдованной въ главѣ VIII-ой настоящаго сочиненія, теорію группъ безконечно-малыхъ преобразованій. Развитыя выше соображенія позволяютъ также и здѣсь внести упрощенія въ изложеніе С. Ли и приводятъ рѣшеніе разсматриваемой задачи къ приложенію теоремы Якоби-Ліувилля.

Возвращаемся къ системѣ m уравненій съ частными производными въ инволюціи

$$\left. \begin{array}{c} F_i(x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2 \ldots p_n) = 0, \\ i=1, 2, \ldots m, \end{array} \right\} \tag{15}$$

удовлетворяющихъ условію

$$D\left(\frac{F_1, F_2, \ldots F_m}{p_1, p_2, \ldots p_m}\right) \gtrless 0.$$

Предположимъ, что соотвѣтствущая система линейныхъ уравненій въ инволюціи

$$(F_i, f) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots m, \tag{16}$$

имѣетъ $m + r$ различныхъ интеграловъ

$$F_1, F_2, \ldots F_m, f_1, f_2, \ldots f_r, \quad (r < 2n - 2m) \tag{17}$$

образующихъ *функціональную группу*, съ $m + q$ *существенными функціями*.

Очевидно, что каждое выраженіе

$$U_k(f) \equiv (f_k, f)$$

представляетъ безконечно-малое преобразованіе системы уравненій (16). Что же касается безконечно-малыхъ преобразованій

$$V_1(f), V_2(f), \ldots V_q(f), \tag{18}$$

составленныхъ въ VIII главѣ (см. $n^0 2$), то они уничтожаются для значеній f, представленныхъ рядомъ интеграловъ (17), и кромѣ того образуютъ группу безконечно-малыхъ преобразованій въ инволюціи [1]).

Какъ и раньше (см. loc. c.), при помощи послѣдовательныхъ интегрированій, находимъ рядъ $n - m - q - \varrho$ различныхъ интеграловъ въ инволюціи системы уравненій (16)

$$f_{r+1},\ f_{r+2}, \ldots f_{n-m+\rho} \tag{19}$$

и составляемъ $n - m - q - \varrho$ новыхъ безконечно-малыхъ преобразованій

$$V_{q+1}(f),\ V_{q+1}(f), \ldots V_{n-m+\rho}(f). \tag{20}$$

Всѣ выраженія (18) и (20) образуютъ группу $n - m - \varrho$ безконечно-малыхъ преобразованій въ инволюціи, которыя кромѣ того уничтожаются для всѣхъ значеній интеграловъ (17) и (19) системы линейныхъ уравненій (16). Это послѣднее соображеніе является весьма существеннымъ для дальнѣйшаго изложенія.

Предполагая интегралы (17) и (19) различными относительно перемѣнныхъ $x_{n-\rho+1}, x_{n-\rho+2}, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n$, принимаемъ функціи (17) и (19) за новыя перемѣнныя величины вмѣсто послѣднихъ перемѣнныхъ. Само собою разумѣется, что уравненія (16) преобразовываются въ уравненія слѣдующаго вида

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{s=1}^{n-m-\rho} X_{si} \frac{\partial f}{\partial x_{m+s}} = 0\,, \quad i = 1, \ldots m, \right| \tag{21}$$

и группа ихъ $n - m - \varrho$ безконечно-малыхъ преобразованій становится

$$V'_\sigma f \equiv \sum_{s=1}^{n-m-\rho} \xi_{s\sigma} \frac{\partial f}{\partial x_{m+s}}$$

$$\sigma = 1, 2, \ldots n - m - \rho,$$

гдѣ всѣ коэффиціенты X_{si}, $\xi_{s\sigma}$ зависятъ отъ перемѣнныхъ величинъ $x_1, x_2, \ldots x_{n-\rho}$ и отъ значеній $F_1, F_2, \ldots F_m, f_1, f_2, \ldots f_{n-m+\rho}$, которыя разсматриваются какъ постоянныя величины. Въ такомъ случаѣ интегрированіе системы (21) заканчивается при помощи одной только квадратуры. Въ самомъ дѣлѣ, введемъ обозначеніе

---

[1]) Ср. *E. Goursat.—Leçons sur l'intégration...* p. 50—51 и мое изслѣдованіе: *Etude sur les transformations infinitésimales (Journal Jordan 1905, p. 74—75).*

$$D \equiv \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{21} & \cdots & \xi_{n-m-\rho,\,1} \\ \xi_{12} & \xi_{22} & \cdots & \xi_{n-m-\rho,\,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \xi_{1,\,n-m-\rho} & \xi_{2,\,n-m-\rho} & \cdots & \xi_{n-m-\rho,\,n-m-\rho} \end{vmatrix}$$

и назовемъ черезъ D_{si} миноръ послѣдняго опредѣлителя, соотвѣтствующій его элементу ξ_{si}.

Проинтегрировавъ точный дифференціалъ

$$df = \sum_{s=1}^{n-m-\rho} \sum_{k=1}^{n-m-\rho} b_k \frac{D_{sk}}{D}(dx_{m+s} - \sum_{i=1}^{m} X_{si}\,dx_i),$$

представимъ искомые интегралы слѣдующими формулами

$$\frac{\partial f}{\partial b_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots n-m-\rho,$$

или при помощи слѣдующихъ квадратуръ

$$\int \sum_{s=1}^{n-m-\rho} \frac{D_{sk}}{D}(dx_{m+s} - \sum_{i=1}^{m} X_{si}\,dx_i),$$

$$k = 1, 2, \ldots n-m-\rho.$$

Затѣмъ интегрированіе дифференціальныхъ уравненій съ частными производными (15) совершается на основаніи теоріи характеристикъ.
