# Общія изслѣдованія, относящіяся къ интегрированію въ конечномъ видѣ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка.

## *Статья I.*

Д. Мордухай-Болтовского.

**§ 1.** Многочисленныя изслѣдованія, относящіяся къ интегрированію въ конечномъ видѣ Абелевыхъ интеграловъ, основываются на теоремахъ Льювиля [1]) и Абеля [2]).

Первый доказалъ, что, если Абелевъ интегралъ выражается въ конечномъ видѣ, т. е. выражается черезъ основныя трансцендентныя функціи (показательныя, тригонометрическія, логариѳмическія и круговыя), то это выраженіе можетъ быть приведено къ слѣдующей формѣ:

$$\int F(x\,,\,y)\,dx = \chi(x\,,\,y) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \log \psi_k(x\,,\,y) \tag{1}$$

гдѣ $C_k$ постоянныя, $\chi(x,\,y)$ и $\psi_k(x,\,y)$ алгебраическія функціи отъ $(x,\,y)$.

Абель дѣлаетъ къ этому существенное добавленіе,—онъ доказываетъ, что функціи $\chi(x\,,\,y)$, $\psi_k(x\,,\,y)$ можно всегда предположить раціональными функціями $(x\,,\,y)$.

Методы Льювиля и Абеля могутъ быть примѣнены къ рѣшенію болѣе общаго вопроса, о формѣ интеграла $U = C$ неприводимаго алгебраическаго дифференціальнаго уравненія перваго порядка

$$f(x\,,\,y\,,\,y') = 0 \tag{2}$$

въ томъ случаѣ, когда этотъ интегралъ выражается въ конечномъ видѣ.

1) *Liouville.* Intégrales dont la valeur est algébrique. Journal de Crelle B. X. 1833. p. 342. Sur la détermination des Intégrales dont la valeur est algébrique Journ. de l'Ecole Polytechnique. t. XIV. Ch. 22. 1833. p. 124. Mémoire sur l'integration d'une classe des fonctions transcendantes. Journ. de Crelle. B. XIII. 1835.

2) *Abel.* Précis d'une théorie des fonctions elliptiques. Journal de Crelle B. IV. 1829 и Oeuvres t. II. p. 545.

Фуксъ [1]) при помощи совершенно другихъ методъ изслѣдованія доказываетъ слѣдующую интересную теорему:

*Если общій интегралъ неприводимаго дифференціальнаго уравненія перваго порядка (2) алгебраическій, то онъ всегда можетъ быть представленъ въ слѣдующей формѣ:*

$$\Phi(x, y, \triangle) = C \tag{3}$$

*$\Phi$ раціональная функція $(x, y, \triangle)$, и $\triangle$ опредѣляется неприводимымъ алгебраическимъ уравненіемъ*

$$f(x, y, \triangle) = 0. \tag{4}$$

Мы докажемъ не только то, что этотъ результатъ можетъ быть полученъ обычнымъ методомъ Льювиля, съ большимъ успѣхомъ уже примѣнявшимся Кенигсбергеромъ [2]) къ рѣшенію многихъ вопросовъ, относящихся къ дифференціальнымъ уравненіямъ, но мы также обобщимъ результатъ Фукса, доказавъ теорему, что

*Если общій интегралъ неприводимаго дифференціальнаго уравненія перваго порядка (2) выражается въ конечномъ видѣ, то онъ всегда можетъ быть представленъ въ слѣдующей формѣ:*

$$\Phi(x, y, \triangle)\sqrt[n]{G(x, y, \triangle)} + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \log \prod_{j=0}^{j=n-1} \psi_k^{\alpha^{-j}}(x, y, \triangle, \alpha^j)\sqrt[n]{G(x, y, \triangle)} \tag{5}$$

*$\Phi$, $G$ раціональныя функціи $(x, y, \triangle)$, $\psi_k$ раціональная функція $(x, y, \triangle, G)$, $\triangle$ опредѣляется уравненіемъ (4), $\alpha$ первообразный корень двучленнаго уравненія $\alpha^n = 1$.*

**§ 2.** Приступая къ изслѣдованію, замѣтимъ, что всякое алгебраическое дифференціальное уравненіе можно привести къ виду:

$$M(x, y, t)\,dx + N(x, y, t)\,dy = 0, \tag{6}$$

гдѣ $M(x, y, t)$, $N(x, y, t)$ раціональныя функціи $(x, y, t)$, $t$ опредѣляется неприводимымъ алгебраическимъ уравненіемъ

$$F(x, y, t) = 0. \tag{7}$$

Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$y' = \alpha(x, y, t), \tag{8}$$

[1]) *Fuchs.* Sitzungsber. der Berliner Akademie 11 Dez. 1884. s. 1171.

[2]) *Königsberger.* Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen. Leipzig. 1888 и другія его статьи въ журналѣ Крелля.

гдѣ $\alpha(x, y, t)$ какая угодно раціональная функція $(x, y, t)$ мы приводимъ уравненіе (2) къ виду (6), если $t$ подчинимъ уравненію

$$f[x, y, \alpha(x, y, t)] = 0 \tag{9}$$

или (7). Въ частномъ случаѣ можно положить

$$t = \triangle, \tag{10}$$

гдѣ $\triangle$ опредѣляется уравненіемъ (4).

Положимъ сперва, что лѣвая часть уравненія (6) представляетъ полный дифференціалъ $du$, такъ что

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}. \tag{11}$$

Тогда общій интегралъ уравненія (6) будетъ

$$U = C,$$

гдѣ $U = \int (Mdx + Ndy)$, гдѣ для краткости полагаемъ $M = M(x, y, t)$, $N = N(x, y, t)$.

Намъ приходится воспроизводить только съ небольшими измѣненіями разсужденія Льювиля, чтобы доказать:

*Если* $\int (Mdx + Ndy)$ *выражается въ конечномъ видѣ, то можетъ быть всегда приведенъ къ виду:*

$$\int (Mdx + Ndy) = \chi(x, y, t) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \log \psi_k(x, y, t), \tag{12}$$

*гдѣ* $\chi_i$, $\psi_k$ *алгебраическія функціи* $(x, y, t)$, $C_k$ *постоянное.*

Вмѣстѣ съ Льювилемъ [1]) называемъ функціи $e^{u_1}$, $e^{u_2} \ldots lgu_1$, $lgu_2 \ldots$ гдѣ $u_1$, $u_2$ алгебраическія функціи $(x, y, t)$ основными трансцендентными перваго класса, алгебраическія функціи отъ нихъ при условіи, что онѣ не приходятся къ алгебраическимъ функціямъ $(x, y, t)$ назовемъ вообще трансцендентными перваго класса.

Функціи $e^v$, $lgv$, гдѣ $v$ трансцендентныя перваго класса будутъ основными трансцендентными второго класса, при условіи, что онѣ не приводятся къ трансцендентнымъ перваго класса, алгебраическія функціи отъ основныхъ трансцендентныхъ второго класса при томъ же условіи будутъ трансцендентныя второго класса и т. д.

---

[1]) *Liouville.* Mémoire sur la classification des transcendentes и т. д. Journal de Liouville t. II 1837. p. 56.

Предполагаемъ, что $U$ трансцендентная $n$-го класса, такъ что

$$U = \int (Mdx + Ndy) = \pi\,(\theta_1^{(n)},\ \theta_2^{(n)} \ldots), \tag{13}$$

гдѣ $\pi$ алгебраическая функція отъ основныхъ трансцендентныхъ $n$-го класса: $\theta_1^{(n)}$, $\theta_2^{(n)} \ldots$ и трансцендентныхъ нисшихъ классовъ. Изъ безконечнаго числа выраженій для $U$ мы беремъ тѣ, въ которыхъ число трансцендентныхъ $n$-го класса: $\theta_i^{(n)}$ доведено до минимума.

Изъ этихъ послѣднихъ выраженій беремъ тѣ, въ которыхъ число трансцендентныхъ $n$—1-го класса: $\theta_i^{(n-1)}$ доведено до минимума и т. д.

При такомъ выборѣ будемъ говорить, что *выраженіе $U$ дано въ приготовленномъ видѣ.* Въ этомъ случаѣ всякое равенство

$$N[\theta_1^{(n)},\ \theta_2^{(n)} \ldots] = 0 \tag{14}$$

гдѣ $N$ алгебраическая функція отъ трансцендентныхъ $n$ класса: $\theta_i^{(n)}$ и нисшихъ классовъ, должно быть тождествомъ, ибо въ противномъ случаѣ изъ уравненія (14) опредѣлили бы $\theta_1^{(n)}$ черезъ $\theta_2^{(n)} \ldots$ и подставивъ въ уравненіе (13), получили бы для $U$ выраженіе черезъ меньшее число основныхъ трансцендентныхъ $n$-го класса.

Такимъ же образомъ убѣждаемся, что равенство

$$N[\theta_1^{(j)},\ \theta_2^{(j)} \ldots] = 0 \tag{15}$$

гдѣ $N$ алгебраическая функція основныхъ трансцендентныхъ $j$ класса: $\theta_i^{(j)}$ и нисшихъ классовъ приводится къ тождеству.

Вслѣдствіе этого *уравненіе (14) и уравненіе (15) остаются въ силѣ и по замѣнѣ въ первомъ $\theta_i^{(n)}$, во второмъ $\theta_i^{(j)}$ какими угодно функціями отъ $(x, y)$.* Такъ можно замѣнять $\theta_i^{(n)}$ черезъ $m\theta_i^{(n)}$ или $\theta_i^{(n)} + m$, гдѣ $m$ постоянное.

Пользуясь этимъ замѣчаніемъ, докажемъ, что *въ выраженіи $U$, если оно дано въ приготовленномъ видѣ, не входятъ вовсе показательныя функціи.*

Положимъ:

$$\int (Mdx + Ndy) = \pi(\theta) \tag{16}$$

$$\theta = e^{n} \tag{17}$$

и трансцендентная $n$—1 класса, $\pi$ алгебраическая функція $(\theta,\ x,\ y)$ и другихъ трансцендентныхъ $n$-го и нисшихъ классовъ. Дифференцируя (16) имѣемъ

$$Mdx + Ndy = \frac{\partial\pi(\theta)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\pi(\theta)}{\partial y}\,dy$$

откуда

$$\begin{aligned} M &= \frac{\partial\pi(\theta)}{\partial x} \\ N &= \frac{\partial\pi(\theta)}{\partial y} \end{aligned} \tag{18}$$

или

$$M = \left(\frac{\partial\pi(\theta)}{\partial x}\right) + \frac{\partial\pi(\theta)}{\partial\theta}\,\frac{\partial\theta}{\partial x} \tag{19}$$

$$N = \left(\frac{\partial\pi(\theta)}{\partial y}\right) + \frac{\partial\pi(\theta)}{\partial\theta}\,\frac{\partial\theta}{\partial y}, \tag{20}$$

гдѣ $\left(\frac{\partial\pi(\theta)}{\partial x}\right)$ и $\left(\frac{\partial\pi(\theta)}{\partial y}\right)$ обозначаютъ частныя производныя, взятыя по $x$ и по $y$, въ предположенiи, что $\theta$ разсматривается, какъ опредѣленная функцiя $(x, y)$.

Уравненiе (19) на основанiи урав. (17) приводится къ виду:

$$M = \left(\frac{\partial\pi(\theta)}{\partial x}\right) + \frac{\partial\pi(\theta)}{\partial\theta}\,\theta\,\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{21}$$

Это послѣднее уравненiе алгебраическое и должно оставаться въ силѣ и по замѣнѣ $\theta$ какой угодно функцiей отъ $(x, y)$, напримѣръ $m\theta$, гдѣ $m$ постоянное.

Но послѣдняя замѣна даетъ:

$$M = \left(\frac{\partial\pi(m\theta)}{\partial x}\right) + \frac{\partial\pi(m\theta)}{\partial(m\theta)}\,m\theta\,\frac{\partial u}{\partial x} \tag{21'}$$

или

$$M = \frac{\partial\pi(m\theta)}{\partial x}, \tag{18'}$$

откуда черезъ сравненiе съ уравненiемъ (18) имѣемъ

$$\frac{\partial\pi(m\theta)}{\partial x} = \frac{\partial\pi(\theta)}{\partial x},$$

слѣдовательно:

$$\pi(m\theta) = \pi(\theta) + \sigma(y),$$

гдѣ $\sigma(y)$ зависитъ только отъ $y$. Такимъ же образомъ уравненiе (20) даетъ

$$\pi(m\theta) = \pi(\theta) + \tau(x),$$

поэтому

$$\pi(m\theta) = \pi(\theta) + C, \tag{22}$$

гдѣ $C$ постоянное, которое можетъ зависѣть отъ $m$.

Взявъ частную производную по $\theta$, имѣемъ

$$m\,\frac{\partial\pi(m\theta)}{\partial(m\theta)} = \frac{\partial\pi(\theta)}{\partial\theta},$$

а взявъ по $m$, имѣемъ:

$$\theta \frac{\partial \pi(m\theta)}{\partial(m\theta)} = \frac{\partial C}{\partial m} = C',$$

гдѣ $C'$ постоянное. Исключеніе $\frac{\partial \pi(m\theta)}{\partial(m\theta)}$ даетъ:

$$\theta \frac{\partial \pi(\theta)}{\partial \theta} = C' m = E$$

откуда

$$\pi(\theta) = Elg\theta + F$$

$F$ не зависитъ отъ $\theta$ или

$$\pi(\theta) = Eu + F \tag{23}$$

т. е. для $U$ получаемъ выраженіе уже не содержащее $\theta$, чего быть не можетъ, такъ какъ по условію $U$ задано въ приготовленномъ видѣ.

Положимъ теперь

$$\theta = lgu, \tag{24}$$

гдѣ $u$ трансцендентная $n-1$-го класса. Въ этомъ случаѣ получаемъ опять уравненіе (19) и (20), изъ которыхъ первое на основаніи уравненія (24) приводится къ виду:

$$M = \left(\frac{\partial \pi(\theta)}{\partial x}\right) + \frac{\partial \pi(\theta)}{\partial \theta} \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial x} \tag{25}$$

уравненіе это алгебраическое относительно $\theta$, остается въ силѣ и по замѣнѣ $\theta$ какой угодно функціей $(x\ y)$, напримѣръ, $\theta + m$, такъ что

$$M = \left(\frac{\partial \pi(\theta+m)}{\partial x}\right) + \frac{\partial \pi(\theta+m)}{\partial(\theta+m)} \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial x} \tag{25'}$$

или

$$M = \frac{\partial \pi(m+\theta)}{\partial x}, \tag{17''}$$

откуда черезъ сравненіе съ ур. (19), получаемъ

$$\frac{\partial \pi(\theta+m)}{\partial x} = \frac{\partial \pi(\theta)}{\partial x}$$

$$\pi(\theta+m) = \pi(\theta) + \sigma(y)$$

и такимъ же образомъ, на основаніи ур. (20), имѣемъ

$$\pi(\theta+m) = \pi(\theta) + \tau(x),$$

откуда
$$\pi(\theta + m) = \pi(\theta) + C, \tag{26}$$
гдѣ $C$ постоянное.

Дифференцируя по $\theta$ и по $m$ имѣемъ:
$$\frac{\partial\pi(\theta + m)}{\partial(\theta + m)} = \frac{\partial\pi(\theta)}{\partial\theta}$$
$$\frac{\partial\pi(\theta + m)}{\partial(\theta + m)} = \frac{\partial C}{\partial m} = E,$$
откуда
$$\frac{\partial\pi(\theta)}{\partial\theta} = E$$
$$\pi(\theta) = E\theta + F, \tag{27}$$
гдѣ $E$ постоянное, а $F$ не зависитъ отъ $\theta$

или
$$\pi(\theta) = Elgu + F \tag{28}$$
вообще
$$U = \pi(\theta_1, \theta_2 \ldots) = \sum_{i=1}^{i=n} E_i \log u_i + F, \tag{29}$$
гдѣ $E_i$ постоянныя, $F$ трансцендентная функція $\overline{n-1}$ класса.

Мы докажемъ, что $u_1, u_2, \ldots u_n$ должны быть тоже алгебраическими функціями $(x, y)$.

Если бы $U$ была трансцендентной функціей, то по вышедоказанному въ нее не могли бы входить показательныя функціи. Мы имѣли бы
$$u_i = P_i(\chi), \tag{30}$$
гдѣ $P_i$ алгебраическая функція $\chi = \log v$ ($v$ трансцендентная $\overline{n-2}$ класса), $x$, $y$ и другихъ трансцендентныхъ $\overline{n-2}$ и нисшихъ классовъ.

Уравненіе (29) и (30) даютъ:
$$M = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{C_i}{P_i(\chi)} \left[\left(\frac{\partial P_i}{\partial x}\right) + \frac{\partial P_i}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial x}\right] + \frac{\partial F}{\partial x}$$
это послѣднее уравненіе алгебраическое относительно $\chi$ и остается въ силѣ по замѣнѣ $\chi$ на $\chi + m$ и мы, какъ выше, изъ ур. (25) получили (28), получаемъ отсюда:
$$\pi(\theta) = D \log v + G, \tag{31}$$

$D$ постоянное, $G$ не зависитъ отъ $\chi$.

Вообще:

$$\pi(\theta) = \sum_{i=1}^{i=g} D_i \log v_i + G\,, \tag{32}$$

гдѣ $D_i$ постоянныя, $G$ трансцендентная $\overline{n-2}$ класса, послѣднее же не можетъ имѣть мѣста, такъ какъ тогда противно условію $U = \pi(\theta)$ была бы трансцендентная не $n$-го, а нисшаго класса.

**§ 3.** Теперь, мало отклоняясь отъ разсужденій Абеля, доказываемъ, что въ уравненіи (12)
*$\chi$ $(x, y, t)$ и $\psi_k$ $(x, y, t)$ можно предполагать раціональными функціями $(x, y, t)$.*

Для доказательства положимъ:

$$\int (Mdx + Ndy) = \xi_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \log \xi_k^{(1)}\,, \tag{33}$$

гдѣ $\xi_0^{(1)}$, $\xi_k^{(1)}$ алгебраическія функціи $(x, y, t)$ опредѣляемыя неприводимыми уравненіями

$$\lambda_k(x,\ y,\ t,\ \xi_k) = 0 \tag{34}$$
$$k = 0,\ 1.\ 2 \ldots m$$

Обозначая черезъ:

$$\begin{array}{l} \xi_0^{(1)},\ \xi_1^{(1)},\ \xi_2^{(1)} \ldots .\ \ \xi_m^{(1)} \\ \xi_0^{(2)},\ \xi_1^{(2)},\ \xi_2^{(2)} \ldots\ \ \xi_m^{(2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_0^{(N)},\ \ \xi_1^{(N)},\ \ \xi_2^{(N)},\ \ \xi_m^{(N)} \end{array} \tag{35}$$

системы значеній:

$$\xi_0,\quad \xi_1,\quad \xi_2 \ldots .\quad \xi_m\,,$$

удовлетворяющія системѣ уравненія (34), составимъ функцію:

$$\tau_i = \sum_{k=0}^{k=m} \alpha_k\, \xi_k^{(i)}\,,$$

гдѣ постоянныя $\alpha_k$ подбираемъ такъ, чтобы всѣ $\tau_i$ были бы между собой различны.

Эти функціи $\tau_i$ будутъ опредѣляться уравненіями:

$$\tau^N - A_1\, \tau^{N-1} + \ldots . (-1)^N A_N = 0\,, \tag{36}$$

въ которомъ коэффиціенты $A_i$, а слѣдовательно и всякія раціональныя симметрическія функціи $\tau_i$ будутъ раціональными симметрическими функціями величинъ (35), а на основаніи уравненій (34) раціональными функціями $(x, y, t)$.

Легко видѣть, что всякая раціональная функція величинъ каждой изъ системъ (35):

$$\xi_0^{(i)}, \quad \xi_1^{(i)}, \quad \xi_2^{(i)} \ldots \quad \xi_m^{(i)} \tag{37}$$

въ частномъ случаѣ, каждая изъ этихъ величинъ (37) выражается раціонально въ $\tau_i$.

Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$S(\tau, x, y, t) = (\tau - \tau_1)(\tau - \tau_2)\ldots(\tau - \tau_N)$$

и обозначая упомянутую функцію черезъ $P_i$, а черезъ $P_1$, $P_2 \ldots$ тѣ же функціи отъ величинъ другихъ системъ (35), будемъ имѣть:

$$S(\tau, x, y, t) . \sum_{i=1}^{i=N} \frac{P_i}{\tau - \tau_i} = U(\tau, x, y, t), \tag{38}$$

гдѣ $U(\tau, x, y, t)$ раціональная функція $(\tau, x, y, t)$.

Полагая въ уравненіи (38) $\tau = \tau_i$ получаемъ

$$P_i = \frac{U(\tau_i, x, y, t)}{S'_{\tau_i}(\tau_i, x, y, t)}$$

гдѣ $S'_{\tau_i}$ отлично отъ нуля, такъ какъ по предположенію $\tau_i$ простой корень уравненія (36).

Въ частномъ случаѣ имѣемъ

$$\xi_k^{(i)} = \alpha^{(k)}(\tau_i, x, y, t), \tag{39}$$

гдѣ $\alpha^{(k)}$ раціональная функція $(\tau_i, x, y, t)$

Дифференцируя уравненіе (33) имѣемъ:

$$M = \frac{\partial \xi_0^{(1)}}{\partial x} + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \frac{1}{\xi_k^{(1)}} \frac{\partial \xi_k^{(1)}}{\partial x} \tag{40}$$

$$N = \frac{\partial \xi_0^{(1)}}{\partial y} + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \frac{1}{\xi_k^{(1)}} \frac{\partial \xi_k^{(1)}}{\partial y} \tag{41}$$

Первое изъ этихъ уравненій на основаніи уравненія (34) приводится къ уравненію:

$$M = \pi_0(\xi_0^{(1)}, x, y, t) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \frac{1}{\xi_k^{(1)}} \pi_k(\xi_k^{(1)}, x, y, t), \tag{42}$$

гдѣ

$$\pi_k = \pi_k(\xi_k^{(1)}, x, y, t) = -\frac{\dfrac{\partial \lambda_k^{(1)}}{\partial x}}{\dfrac{\partial \lambda_k^{(1)}}{\partial \xi_k^{(1)}}}, \tag{43}$$

если для краткости положить:

$$\lambda_k^{(1)} = \lambda_k(\xi_k^{(1)}, x, y, t)$$

или

$$\pi(\tau_1, x, y, t) = 0 \tag{44}$$

гдѣ $\pi$ цѣлая функція $(\tau_1, x, y, t)$

Положимъ теперь, что неприводимое уравненіе, опредѣляющее $\tau = \tau_1$ будетъ:

$$S'(\tau, x, y, t) = 0, \tag{45}$$

такъ что

$$S(\tau, x, y, t) = S'(\tau, x, y, t)\ S''(\tau, x, y, t),$$

причемъ на ряду съ $\tau = \tau_1$ уравненіе (45) удовлетворяютъ еще:

$$\tau = \tau_2, \tau_3 \ldots \tau_м .$$

Вслѣдствіе неприводимости, уравненіе (45), имѣя съ (42) одинъ общій корень $\tau = \tau_1$, будетъ имѣть и остальные корни, удовлетворяющіе уравненію (42), такъ что:

$$\pi(\tau_i, x, y, t) = 0 \tag{44'}$$

$$i = 1.\ 2.\ 3 \ldots м$$

Но замѣна $\tau_1$ на $\tau_i$ въ уравненіи (44) равносильна замѣнѣ $\xi_k^{(1)}$ на $\xi_k^{(i)}$ въ уравненіи (42), такъ что

$$M = \pi(\xi_0^{(i)}, x, y, t) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \frac{1}{\xi_k^{(i)}} \pi_k(\xi_k^{(i)}, x, y, t), \tag{42'}$$

а, такъ какъ на основаніи уравненія (34):

$$\pi_k(\xi_k^{(i)}, x, y, t) = -\frac{\dfrac{\partial \lambda_k^{(i)}}{\partial x}}{\dfrac{\partial \lambda_k^{(i)}}{\partial \xi_k^{(i)}}} \tag{43'}$$

гдѣ $\lambda_k^{(i)} = \lambda_k(\xi_k^{(i)}, x, y, t)$, то получаемъ

$$M = \frac{\partial \xi_0^{(i)}}{\partial x} + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \frac{1}{\xi_k^{(i)}} \frac{\partial \xi_k^{(i)}}{\partial x} \tag{40'}$$

Такимъ же образомъ, исходя изъ уравненія (41), получаемъ

$$N = \frac{\partial \xi_0^{(i)}}{\partial y} + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \frac{1}{\xi_k^{(i)}} \frac{\partial \xi_k^{(i)}}{\partial y} \tag{41'}$$

Умножая (40′) на $dx$, (41′) на $dy$, складывая и интегрируя, получаемъ:

$$\int (Mdx + Ndy) = \xi_0^{(i)} + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \log \xi_k^{(i)} \tag{33'}$$

$$i = 1 . 2 . . . м$$

Складывая почленно и дѣля на $м$, получаемъ

$$\int (Mdx + Ndy) = \frac{1}{м} \sum_{i=1}^{i=м} \xi_0^{(i)} + \frac{1}{м} \sum_{k=1}^{k=m} C_k \log \prod_{i=1}^{i=м} (\xi_k^{(i)}),$$

замѣчая же, что

$$\sum_{i=1}^{i=м} \xi_k^{(i)} \text{ и } \prod_{i=1}^{i=м} (\xi_k^{(i)}),$$

какъ раціональныя симметрическія функціи $\xi_k^{(i)}$, $\xi_k^{(i)}$, а на основаніи уравненія (39) раціональныя симметрическія функціи $\tau_i$ и раціональныя функціи $(x, y, t)$, будутъ приводиться на основаніи уравненія (45) къ раціональнымъ функціямъ отъ $(x, y, t)$, мы получаемъ для $\int(Mdx + Ndy)$ выраженіе:

$$\int (Mdx + Ndy) = \varphi(x, y, t) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \log \psi_k(x, y, t), \tag{45}$$

гдѣ $C_k$ постоянныя $\varphi(x, y, t)$, $\psi_k(x, y, t)$ раціональныя функціи $(x, y, t)$, въ частномъ случаѣ при $t = \triangle$ выраженіе (5).

**§ 4.** Теперь переходимъ къ случаю, когда двучленъ $Mdx + Ndy$ не представляетъ полнаго дифференціала. Интегрирующій множитель $\mu = \frac{1}{M} \frac{\partial U}{\partial x}$, черезъ умноженіе на который $Mdx + Mdy$ приводится къ полному дифференціалу, удовлетворяетъ уравненію перваго порядка въ частныхъ производныхъ:

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

или $\omega=\log\mu$ уравненію:

$$\varphi\frac{\partial\omega}{\partial x}+\psi\frac{\partial\omega}{\partial y}=\chi, \tag{47}$$

гдѣ

$$\varphi=N,\ \psi=-M,\ \chi=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}$$

раціональныя функціи отъ $(x, y, t)$.

*Если интегралъ $U$ дифференціальнаго уравненія $Mdx+Ndy=0$ выражается въ конечномъ видѣ, то вмѣстѣ съ тѣмъ выражается въ конечномъ видѣ и интегрирующій множитель*

$$\mu=\frac{1}{M}\frac{\partial U}{\partial x}$$

*и* $\omega=log\,\mu$.

Мы теперь будемъ разыскивать форму для $\mu$ въ томъ случаѣ, когда $\mu$ выражается въ конечномъ видѣ. Форма для $U$ найдется изслѣдованіемъ интеграла

$$\int\mu\,(Mdx+Ndy),$$

аналогичнымъ изслѣдованіямъ §§ 2 и 3.

А именно мы докажемъ, что:

*Если интегралъ дифференціальнаго уравненія*

$$M(x, y, t)\,dx+N(x, y, t)\,dy=0 \tag{6}$$

*выражается въ конечномъ видѣ, то всегда для него существуетъ интегрирующій множитель типа:*

$$\mu=e^{H(x,\,y,\,t)}\prod_{k=1}^{k=m}[H_k(x, y, t)]^{\lambda_k}, \tag{46}$$

*гдѣ $H(x, y, t)$, $H_k(x, y, t)$ раціональныя функціи $(x, y, t)$, $\lambda_k$ постоянныя.*

Теорема будетъ доказана, если докажемъ, что, *если алгебраическое линейное уравненіе*

$$\varphi\frac{\partial\omega}{\partial x}+\psi\frac{\partial\omega}{\partial y}=\chi \tag{47}$$

*перваго порядка имѣетъ частный интегралъ, выражающійся въ конечномъ видѣ, то оно всегда имѣетъ частный интегралъ типа:*

$$\omega = H(x\,,\,y\,,\,t) + \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k\, lg\, H_k(x\,,\,y\,,\,t)\,, \tag{48}$$

*гдѣ* $H(x\,,\,y\,,\,t)$, $H_k(x\,,\,y\,,\,t)$ *раціональныя функціи отъ* $(x\,,\,y\,,\,t)$.

Сохраняя классификацію трансцендентныхъ § 2, мы докажемъ сперва, что на ряду съ частнымъ интеграломъ, содержащимъ показательную функцію $\theta = e^u$ и трансцендентныя $n - 1$ класса, всегда существуетъ интегралъ, не содержащій ея.

Полагая

$$\omega = \pi(\theta)\,, \tag{49}$$

гдѣ $\pi(\theta)$ имѣетъ то же значеніе, что въ уравненіи (16), будемъ имѣть на основаніи уравненія (47)

$$\varphi \frac{\partial \pi(\theta)}{\partial x} + \psi \frac{\partial \pi(\theta)}{\partial y} = \chi \tag{50}$$

или

$$\varphi \left[\left(\frac{\partial \pi(\theta)}{\partial x}\right) + \frac{\partial \pi(\theta)}{\partial \theta}\,\theta \frac{\partial u}{\partial x}\right] + \psi \left[\left(\frac{\partial \pi(\theta)}{\partial y}\right) + \frac{\partial \pi(\theta)}{\partial \theta}\,\theta \frac{\partial u}{\partial y}\right] = \chi \tag{51}$$

Уравненіе это алгебраическое относительно $\theta$ и другихъ трансцендентныхъ $n$ — го и нисшихъ порядковъ и будетъ оставаться въ силѣ по замѣнѣ $\theta$ на $m\theta$, такъ что

$$\varphi \left[\left(\frac{\partial \pi(m)\theta}{\partial x}\right) + \frac{\partial \pi(m\theta)}{\partial (m\theta)}\, m\theta \frac{\partial u}{\partial x}\right] + \psi \left[\left(\frac{\partial \pi(m\theta)}{\partial y}\right) + \frac{\partial \pi(m\theta)}{\partial (m\theta)}\, m\theta \frac{\partial u}{\partial y}\right] = \chi \tag{51}$$

или

$$\varphi \frac{\partial \pi(m\theta)}{\partial x} + \psi \frac{\partial \pi(m\theta)}{\partial y} = \chi\,, \tag{50'}$$

откуда черезъ сравненіе съ уравненіемъ (50) имѣемъ:

$$\varphi \frac{\partial H(\theta\,,\,m)}{\partial x} + \psi \frac{\partial H(\theta\,,\,m)}{\partial y} = 0\,, \tag{52}$$

гдѣ

$$H(\theta\,,\,m) = \pi(m\theta) - \pi(\theta)\,. \tag{53}$$

Здѣсь слѣдуетъ различать два случая, смотря по тому, зависитъ или независитъ $H(\theta\,,\,m)$ отъ $\theta$. Въ первомъ случаѣ, полагая

$$H(\theta\,,\,m) = \alpha\,,$$

будемъ имѣть $u = P(\alpha\,,\,x\,,\,y)$, гдѣ $P$ алгебраическая функція $\alpha$ и другихъ трансцендентныхъ $n$ — го и нисшихъ порядковъ, причемъ $\alpha$ частное рѣшеніе уравненія:

$$\varphi \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \psi \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0 \tag{54}$$

Тогда

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) + \frac{\partial P}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) + \frac{\partial P}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y}$$

$$\varphi \frac{\partial \omega}{\partial x} + \psi \frac{\partial \omega}{\partial y} = \varphi \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) + \psi \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) + \frac{\partial P}{\partial \alpha}\left[\varphi \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \psi \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right] = \chi$$

или на основаніи уравненія (54):

$$\varphi \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) + \psi \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \chi \tag{55}$$

Уравненіе это алгебраическое относительно $\theta$ и другихъ трансцендентныхъ $n$—го и низшихъ порядковъ и остается въ силѣ по замѣнѣ $\theta$ такимъ значеніемъ, при которомъ $\alpha$ равно постоянному $c$, т. е.

$$\varphi \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{\alpha = c} + \psi \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{\alpha = c} = \chi \tag{56}$$

Возьмемъ теперь

$$\omega = P(c\,,\ x\,,\ y) = P_0$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial P_0}{\partial x} = \left(\frac{\partial P_0}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial P_0}{\partial y} = \left(\frac{\partial P_0}{\partial y}\right),$$

откуда

$$\varphi \frac{\partial P_0}{\partial x} + \psi \frac{\partial P_0}{\partial y} = \varphi \left(\frac{\partial P_0}{\partial x}\right) + \psi \left(\frac{\partial P_0}{\partial y}\right)$$

Но такъ какъ очевидно

$$\left(\frac{\partial P_0}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{\alpha = c}, \quad \frac{\partial P_0}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{\alpha = c},$$

то по уравненію (56)

$$\varphi \frac{\partial P_0}{\partial x} + \psi \frac{\partial P_0}{\partial y} = \chi \tag{57}$$

и $P_0 = P(c\,,\ x\,,\ y)$, уже не содержащая $\theta = e^u$, будетъ тоже частнымъ интеграломъ уравненія (47).

Во второмъ случаѣ, когда $H(\theta, m)$ не зависитъ отъ $\theta$, получаемъ уравненіе

$$\pi(m\theta) = \pi(\theta) + C \tag{22}$$

§ 2, которое намъ дало

$$\pi(\theta) = Eu + F \tag{23}$$

т. е. $\pi(\theta)$ въ видѣ трансцендентной, противно условію, не содержащей алгебраически $\theta$.

Такимъ же точно образомъ, изслѣдуя случай, когда $\theta = \log u$, $u$ трансцендентная $\overline{n-1}$ класса, приходимъ или къ уравненію (57), гдѣ

$$P_0 = P(c, x, y)$$

уже не содержитъ $\theta$, или къ уравненію (26) § 2:

$$\pi(\theta + m) = \pi(\theta) + C, \tag{26}$$

которое даетъ намъ

$$\pi(\theta) = \sum_{i=1}^{i=m} E_i \log u_i + F \tag{29}$$

($E_i$ постоянныя, $F$ трансцендентныя $\overline{n-1}$ класса) и на основаніи котораго, какъ въ § 2, доказываемъ, что $u_i$, $F$ алгебраическія функціи.

Далѣе полагаемъ:

$$\omega = H_0^{(1)}(x, y, t) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \log H_k^{(1)}(x, y, t) \tag{58}$$

гдѣ $H_k^{(1)}(x, y, t)$ алгебраическія функціи $(x, y, t)$, $C_k$ постоянныя.

Опредѣляя изъ уравненія (58) $\frac{\partial\omega}{\partial x}$ и $\frac{\partial\omega}{\partial y}$ и подставляя въ уравненіе (47), получаемъ алгебраическое уравненіе

$$\varphi\left(\frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial x} + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \frac{1}{H_k^{(1)}} \frac{\partial H_k^{(1)}}{\partial x}\right) + \psi\left(\frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial y} + \sum_{k=k}^{k=m} C_1 \frac{1}{H_k^{(1)}} \frac{\partial H_k^{(1)}}{\partial y}\right) = \chi \tag{59}$$

или

$$\varphi\left[P_0(H_0^{(1)}, x, y, t) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \frac{1}{H_k^{(1)}} P_k(H_k^{(1)}, x, y, t)\right] +$$

$$+ \psi\left[Q_0(H_0^{(1)}, x, y, t) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \frac{1}{H_k^{(1)}} P_k(H_k^{(1)}, x, y, t)\right] = \chi \tag{60}$$

гдѣ

$$P_i(H_k^{(1)}, x, y, t) = -\frac{\dfrac{\partial L_k^{(1)}}{\partial x}}{\dfrac{\partial L_k^{(1)}}{\partial H_k^{(1)}}} \tag{61}$$

$$Q_i(H_k^{(1)}, x, y, t) = -\frac{\dfrac{\partial L_k^{(1)}}{\partial y}}{\dfrac{\partial L_k^{(1)}}{\partial H_k^{(1)}}}, \tag{62}$$

гдѣ

$$L_k^{(1)} = L_k(H_k^{(1)}, x, y, t),$$

а

$$L_k(H_k, x, y, t) = 0 \tag{63}$$

алгебраическія уравненія, опредѣляющія $H_k$.

Намъ остается только повторить разсужденія § 3, чтобы исходя изъ уравненій (59) и (62) доказать существованіе слѣдующихъ уравненій:

$$\varphi\left(\frac{\partial H_0^{(i)}}{\partial x} + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \frac{1}{H_k^{(i)}} \frac{\partial H_k^{(i)}}{\partial x}\right) + \psi\left(\frac{\partial H_0^{(i)}}{\partial y} + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \frac{1}{H_k^{(i)}} \frac{\partial H_k^{(i)}}{\partial y}\right) = \chi, \tag{59'}$$

гдѣ

$$H_k^{(i)} = A^{(k)}(T_i, x, y, t) \tag{64}$$

раціональная функція $(T_i, x, y, t)$, $T_i$ опредѣляется неприводимымъ уравненіемъ:

$$S(T_i, x, y, t) = 0 \tag{65}$$

Уравненіе (59′) или, что тоже,

$$\varphi \frac{\partial \omega_i}{\partial x} + \psi \frac{\partial \omega_i}{\partial y} = \chi,$$

гдѣ

$$\omega_i = H_0^{(i)}(x, y, t) + \sum_{k=1}^{k=m} C_h \log H_k^{(i)}(x, y, t)$$

даютъ по сложеніи:

$$\varphi \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \psi \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \chi,$$

гдѣ

$$\Omega = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=N} H_0^{(i)}(x, y, t) + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=m} C_k \log \prod_{i=1}^{i=N} H_k^{(i)}(x, y, t) =$$

$$= H(x, y, t) + \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \log H_k(x, y, t),$$

гдѣ $H(x, y, t)$, $H_k(x, y, t)$ раціональныя функціи $(x, y, t)$, $\lambda_k$ постоянныя.

**§ 5.** Такимъ образомъ, если интегралъ $U$ выражается въ конечномъ видѣ, то онъ можетъ быть представленъ слѣдующимъ интеграломъ

$$U = \int e^{H(x, y, t)} \prod_{k=1}^{k=m} [H_k(x, y, t)]^{\lambda_k} [M(x, y, t)\, dx + N(x, y, t)\, dy]. \quad (66)$$

Къ этому интегралу будутъ относиться наши дальнѣйшія изслѣдованія.

При помощи разсужденій аналогичныхъ развитымъ въ § 2, мы можемъ доказать, что

*Если общій интегралъ (66) выражается съ конечномъ видѣ, то онъ можетъ выражаться въ одной изъ слѣдующихъ двухъ формъ:*

$$U = e^{H(x, y, t)} \prod_{k=1}^{k=q} [H_k(x, y, t)]^{\lambda_k} \sqrt[n]{G(x, y, t)} \quad (67)$$

$$U = \Phi(x, y, t, \sqrt[n]{G(x, y, t)}) + \sum_{1}^{k=m} C_k \log \psi_k (x, y, t, \sqrt[n]{G(x, y, t)}), \quad (68)$$

*гдѣ* $H_k$, $G$ *раціональныя функціи* $(x, y, t)$, $\Phi$, $\psi_k$ *раціональныя функціи* $(x, y, t, g)$, *гдѣ* $g = \sqrt[n]{G(x, y, t)}$, $\lambda_k$, $C_k$ *постоянныя.*

Мы будемъ опять пользоваться классификаціей трансцендентныхъ § 2, но только введя въ нее слѣдующее измѣненіе. За основныя трансцендентныя $n$—го класса принимаемъ не только показательныя функціи $e^u$ и $lgu$, гдѣ $u$ трансцендентная $n-1$ класса, но еще степенныя функціи $u^\lambda = e^{\lambda . lgu}$, гдѣ $\lambda$ какое угодно несоизмѣримое число, считавшіяся въ § 2 за трансцендентныя $n+1$ класса.

Принимая болѣе краткое обозначеніе:

$$U = \int e^{H(x, y, t)} P(x, y, t)\, [Mdx + Ndy], \quad (69)$$

гдѣ

$$P(x\,,\,y\,,\,t)=\prod_{k=1}^{k=m}[H_k(x\,,\,y\,,\,t)]^{\lambda_k} \tag{70}$$

полагаемъ:

$$U=\pi(\theta), \tag{71}$$

гдѣ $\pi$ алгебраическая функція отъ трансцендентныхъ $\theta=e^u$ или $\theta=u^\lambda$, которыя полагаемъ трансцендентными класса $n>1$ и другихъ трансцендентныхъ $n$—го и нисшихъ классовъ.

Мы докажемъ, что, если предполагать, что число трансцендентныхъ $n$—го класса, входящихъ въ $U$, доведено до минимума, то такія трансцендентныя $e^u$, $u^\lambda$ въ $U$ вовсе не входятъ.

Дифференцируя уравненіе (69), имѣемъ:

$$e^{H(x,\,y,\,t)}P(x\,,\,y\,,\,t)\,M=\left(\frac{\partial\pi(\theta)}{\partial x}\right)+\frac{\partial\pi(\theta)}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} \tag{72}$$

$$e^{H(x,\,y,\,t)}P(x\,,\,y\,,\,t)\,N=\left(\frac{\partial\pi(\theta)}{\partial y}\right)+\frac{\partial\pi(\theta)}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}. \tag{73}$$

Такъ какъ

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=\theta\frac{\partial u}{\partial x}\quad\text{или}\quad\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\lambda\theta}{u}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y}=\theta\frac{\partial u}{\partial y}\qquad\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\lambda\theta}{u}\frac{\partial u}{\partial y},$$

то уравненія эти будутъ типа:

$$N(\theta\,,\,\alpha\,,\,\beta_1\,,\,\beta_2\ldots\beta_q)=0\,, \tag{74}$$

гдѣ $N$ алгебраическая функція отъ трансцендентной $\theta$, другихъ трансцендентныхъ $n$—го класса и трансцендентныхъ нисшихъ классовъ, между прочимъ перваго класса:

$$\alpha=e^{H(x,\,y,\,t)}$$

$$\beta_k=[H_k(x\,,\,y\,,\,t)]^{\lambda_k},\quad k=1\,,\,2,\ldots\,q$$

$\lambda_k$ число несоизмѣримое.

Это уравненіе (74) остается въ силѣ по замѣнѣ $\theta$ какой угодно функціей $(x\,,\,y\,,\,t)$, напримѣръ $m\theta$. Поэтому параллельно уравненію (72) будемъ имѣть:

$$e^{H(x,\,y,\,t)}P(x\,,\,y\,,\,t)\,M=\left(\frac{\partial\pi(m\theta)}{\partial x}\right)+\frac{\partial\pi(m\theta)}{\partial(m\theta)}\frac{\partial(m\theta)}{\partial x} \tag{72'}$$

или

$$e^{H(x,\,y,\,t)}\,P(x\,,\,y\,,\,t)\,M = \frac{\partial\pi\,(m\theta)}{\partial x}$$

откуда

$$\frac{\partial\pi\,(m\theta)}{\partial x} = \frac{\partial\pi\,(\theta)}{\partial x}$$

или

$$\pi\,(m\theta) = \pi\,(\theta) + \sigma\,(y).$$

Уравненіе (73) такимъ же образомъ дастъ

$$\pi\,(m\theta) = \pi\,(\theta) + \tau\,(x),$$

откуда

$$\pi\,(m\theta) = \pi\,(\theta) + C \tag{22}$$

$C$ постоянное, на основаніи же § 2 имѣемъ

$$\pi\,(\theta) = Eu + F \tag{23}$$

$E$ постоянное, $F$ не зависитъ отъ $\theta$, т. е. $\pi\,(\theta)$ противно условію не содержитъ $\theta$.

Полагаемъ теперь $\theta = \log u$, гдѣ $u$ трансцендентная $\overline{n - 1}$-го класса, $n > 1$.

Тогда уравненія (72) и (73) опять дадутъ уравненія (74), остающіяся въ силѣ и по замѣнѣ $\theta$ на $\theta + m$ и воспроизводя опять разсужденія § 2, получаемъ

$$\pi\,(\theta + m) = \pi\,(\theta) + C \tag{26}$$

откуда

$$\pi\,(\theta) = E\log u + F, \tag{28}$$

$E$ постоянное, $F$ не зависитъ отъ $\theta$.

Здѣсь $u$ можно всегда предполагать или трансцендентной перваго класса или алгебраической функціей, если только число трансцендентныхъ всѣхъ классовъ до 2-го включительно доведено до минимума.

Въ самомъ дѣлѣ на основаніи разсужденій § 2 имѣемъ, если положить

$$u = P\,(\chi)$$

гдѣ $P$ алгебраическая функція $\chi = \log v$ трансцендентной $\overline{n - 1}$-го класса и другихъ трансцендентныхъ $\overline{n - 1}$-го и нисшихъ классовъ, то

$$\pi\,(\theta) = D\log v + G \tag{31}$$

или

$$\pi\,(\theta) = \sum_{i=1}^{i=q} D_i \log v_i + G \tag{32}$$

$D_i$ постоянныя, $G$ трансцендентныя $\overline{n-2}$ класса, т. е. $\pi(\theta)$ противно условію трансцендентная $\overline{n-1}$ класса.

Переходя теперь къ трансцендентнымъ перваго класса, мы *не будемъ предполагать, что число ихъ доведено до минимума.*

Изъ безконечнаго числа выраженій для $U$ съ наименьшими числами трансцендентныхъ $n$, $\overline{n-1}$, ... 2 классовъ, мы будемъ дѣлать слѣдующій выборъ. Въ $U$ входятъ кромѣ $\alpha$, $\beta_i$ еще нѣкоторыя трансцендентныя перваго класса $\theta_i^{(1)}$, мы остановимся на томъ выраженіи, въ которомъ не число всѣхъ функцій: $\alpha$, $\beta_i$, $\theta_i^{(1)}$ а только функцій $\theta_i^{(1)}$ доведено до минимума.

При такомъ выводѣ всякое равенство:

$$N(\theta,\ \alpha,\ \beta_1\ \beta_2 \ldots \beta_q) = 0, \tag{75}$$

гдѣ $N$ алгебраическая функція $\theta$, $\alpha$, $\beta_i$ и другихъ трансцендентныхъ перваго класса $\theta_i^{(1)}$ будетъ тождествомъ и будетъ оставаться въ силѣ по замѣнѣ $\theta$ какой угодно функціей отъ $(x, y, t)$, ибо, въ противномъ случаѣ, опредѣляя $\theta$ черезъ $\alpha$, $\beta_i$, $\theta_i^{(1)}$ мы получили бы выраженіе $U$ черезъ меньшее число функцій $\theta_i^{(1)}$.

Относительно функцій $\alpha$, $\beta_i$ важно сдѣлать слѣдующее замѣчаніе: можно предполагать, что между $\alpha$, $\beta_i$ не существуетъ соотношеній типа

$$\alpha^{p^{(i)}}\ \beta_1^{p_1^{(i)}}\ \beta_2^{p_2^{(i)}} \ldots \beta_q^{p_q^{(i)}} = Q(x,\ y,\ t), \tag{76}$$

гдѣ $Q(x, y, t)$ алгебраическая функція $(x, y, t)$, $p^{(i)}$, $p_1^{(i)} \ldots p_q^{(i)}$ постоянныя.

Въ самомъ дѣлѣ въ противномъ случаѣ, опредѣляя изъ соотношеній (76) нѣкоторыя изъ $\beta_i$ въ функціи отъ $\alpha$ и остальныхъ $\beta_i$, получаемъ для $\mu$ выраженіе типа

$$\mu = e^{H(x,\ y,\ t)} \prod_{k=1}^{k=n} [H_k(x,\ y,\ t)]^{\lambda k}\, \Theta(x,\ y,\ t),$$

гдѣ $\Theta\ (x, y, t)$ алгебраическая функція отъ $(x, y, t)$, а изъ этого выраженія $\mu$, получаемъ выраженіе

$$\mu = e^{H(x,\ y,\ t)} \prod_{k=1}^{k=m} [H_k(x,\ y,\ t)]^{\lambda k},$$

гдѣ между $\alpha = e^{H(x,\ y,\ t)}$, $\beta = [H_k(x,\ y,\ t)]^{\lambda k}$ уже не существуетъ соотношеній типа (75).

Возвращаясь къ выраженію (69), полагаемъ $\theta = e^u$, $\theta = u^\lambda$, гдѣ $u$ алгебраическая функція, $\lambda$ число несоизмѣримое. Уравненія (72) и (73) или (74) въ настоящемъ случаѣ будутъ уравненіями типа (75) и должны оставаться въ силѣ по замѣнѣ $\theta$ на $m\theta$. Если $\theta$ не равно ни $\alpha$, ни $\beta$ то, какъ выше, получаемъ уравненія (72′), (23) и (22), откуда заключаемъ, что $\theta$ не входитъ въ $U$. Если же $\theta=\alpha$ или $\theta=\beta_i$, то уравненіе (72)

$$\alpha P(x, y, t) M=\left(\frac{\partial \pi(\theta)}{\partial x}\right)+\frac{\partial \pi(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \tag{72}$$

будетъ уравненіемъ типа (75),

$$N(\alpha, \beta_1, \beta_2 \ldots \beta_q)=0, \tag{77}$$

гдѣ $N$ алгебраическая функція $\alpha$, $\beta_i$. Другихъ трансцендентныхъ перваго класса $\theta_i^{(1)}$, не должно входить въ уравненіе (77), ибо въ противномъ случаѣ, опредѣляя одну $\theta_i^{(1)}$ черезъ другія, мы получили бы для $U$ выраженіе съ меньшимъ числомъ трансцендентныхъ $\theta_i^{(1)}$. Легко видѣть, что уравненіе (77) должно быть обязательно типа (76), если только оно не будетъ тождествомъ, т. е. не будетъ удовлетворяться по замѣнѣ $\theta=\alpha$, $\beta_i$ какой угодно функціей $(x, y, t)$. Въ самомъ дѣлѣ, если уравненіе (77) не имѣетъ мѣсто тождественно для всякаго $\alpha$, то оно даетъ

$$\alpha=F(\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_q), \tag{78}$$

гдѣ $F$ алгебраическая функція $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_q$, откуда

$$\frac{\partial H(x, y, t)}{\partial x}=\frac{\left(\frac{\partial F(\beta_i)}{\partial x}\right)+\sum_{i=1}^{i=q} \frac{\partial F(\beta_i)}{\partial \beta_i} \frac{\partial \beta_i}{\partial x}}{F(\beta_i)} \tag{78}$$

$$\frac{\partial H(x, y, t)}{\partial y}=\frac{\left(\frac{\partial F(\beta_i)}{\partial y}\right)+\sum_{i=1}^{i=q} \frac{\partial F(\beta_i)}{\partial \beta_i} \frac{\partial \beta_i}{\partial y}}{F(\beta_i)} \tag{79}$$

эти уравненія, въ которыхъ

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial x}=\frac{\lambda_i \beta_i}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial x}, \quad \frac{\partial \beta_i}{\partial y}=\frac{\lambda_i \beta_i}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial y}, \tag{80}$$

будутъ алгебраическими относительно $\beta_i$; и здѣсь могутъ представиться два случая: или эти оба уравненія (78) и (79) тождества по отношенію нѣкоторыхъ $\beta_i=\beta$ и потому остаются въ силѣ при замѣнѣ $\beta$ на $m\beta$, или же они даютъ $\beta$ въ алгебраической функціи отъ $\beta_i$

$$\beta=F_1(\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_i). \tag{81}$$

Въ первомъ случаѣ получаемъ изъ уравненій (78), (79)

$$\frac{\frac{\partial F(\beta)}{\partial x}}{F(\beta)} = \frac{\frac{\partial F(m\beta)}{\partial x}}{F(m\beta)} \tag{82}$$

$$\frac{\frac{\partial F(\beta)}{\partial y}}{F(\beta)} = \frac{\frac{\partial F(m\beta)}{\partial y}}{F(m\beta)}, \tag{83}$$

откуда

$$F(m\beta) = CF(\beta), \tag{84}$$

гдѣ $C$ постоянное. Дифференцируя по $\beta$ и $m$ имѣемъ

$$m\frac{\partial F(m\beta)}{\partial(m\beta)} = C\frac{\partial F(\beta)}{\partial\beta}$$

$$\beta\frac{\partial F(m\beta)}{\partial(m\beta)} = F(\beta)\frac{\partial C}{\partial m},$$

откуда

$$C\beta\frac{\partial F(\beta)}{\partial\beta} = \frac{\partial C}{\partial m}F(\beta)$$

и

$$F(\beta) = E\beta^s, \tag{85}$$

гдѣ $E$ не зависитъ отъ $\beta$, $s$ постоянное, или, опредѣляя форму $F(\beta)$ относительно другихъ трансцендентныхъ $\beta_i$, вообще,

$$F(\beta) = E\beta_1^{s_1}\,\beta_2^{s_2}\,\ldots\,\beta_i^{s_i}. \tag{86}$$

Если уравненія (78), (79) тождества по отношенію всѣхъ $\beta_i$, то

$$\alpha = F(\beta) = E\beta_1^{s_1}\,\beta_2^{s_2}\,\ldots\,\beta_q^{s_q}. \tag{87}$$

гдѣ $E$ не зависитъ отъ $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_q$, т. е. имѣемъ уравненіе типа (76), которое не можетъ имѣть мѣста. Поэтому мы имѣемъ уравненіе (81), изъ котораго, какъ выше изъ (78) выводимъ, что или

$$\beta = E\beta_1^{s_1}\,\beta_2^{s_2}\,\ldots\,\beta_i^{s_i}, \tag{88}$$

гдѣ $E$ не зависитъ отъ $\beta_i$, чего быть не можетъ или

$$\beta' = F_2(\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_j) \quad j < i \tag{89}$$

$\beta'$ опять одна изъ функцій $\beta_i$. Продолжая такимъ же образомъ дальше, приходимъ къ случаю, когда $j = 0$ т. е. къ случаю, когда

$$\beta_i = [H_i(x, y, t)]^{\lambda_i}$$

равно алгебраической функціи $(x, y, t)$.

Такимъ образомъ уравненіе (77) тождественно удовлетворяется по замѣнѣ $\theta = \alpha$, $\beta_i$ на $m\theta$. Производя теперь въ уравненіи (72) или, что тоже, въ уравненіяхъ

$$\alpha P(x, y, t) M = \left(\frac{\partial \pi(\alpha)}{\partial x}\right) + \frac{\partial \pi(\alpha)}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \tag{90}$$

$$\alpha \beta R(x, y, t) M = \left(\frac{\partial \pi(\beta)}{\partial x}\right) + \frac{\partial \pi(\beta)}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} \tag{91}$$

въ первомъ, вмѣсто $\alpha$, — $m\alpha$, во второмъ, вмѣсто $\beta$, — $m\beta$, получаемъ

$$m\alpha P(x, y, t) M = \left(\frac{\partial \pi(m\alpha)}{\partial x}\right) + \frac{\partial \pi(m\alpha)}{\partial (m\alpha)} \frac{\partial (m\alpha)}{\partial x} \tag{92}$$

$$m\alpha \beta R(x, y, t) M = \left(\frac{\partial \pi(m\beta)}{\partial x}\right) + \frac{\partial \pi(m\beta)}{\partial (m\beta)} \frac{\partial (m\beta)}{\partial x} \tag{93}$$

находимъ

$$\frac{\partial \pi(m\theta)}{\partial x} = m \frac{\partial \pi(\theta)}{\partial x} \tag{94}$$

гдѣ $\theta = \alpha$, $\beta$, и такимъ же образомъ изъ уравненія (73):

$$\frac{\partial \pi(m\theta)}{\partial y} = m \frac{\partial \pi(\theta)}{\partial y}, \tag{95}$$

откуда

$$\pi(m\theta) = m\pi(\theta) + C \tag{96}$$

гдѣ $C$ не зависитъ отъ $\theta$.

Дифференцируя уравненіе (96) по $\theta$ и $m$, имѣемъ:

$$m \frac{\partial \pi(m\theta)}{\partial (m\theta)} = m \frac{\partial \pi(\theta)}{\partial \theta}$$

$$\theta \frac{\partial \pi(m\theta)}{\partial (m\theta)} = \pi(\theta) + \frac{\partial C}{\partial m},$$

откуда

$$\theta \frac{\partial \pi(\theta)}{\partial \theta} = \left[\pi(\theta) + \frac{\partial C}{\partial m}\right]$$

или

$$\pi(\theta) + \frac{\partial C}{\partial m} = E\theta$$

$$\pi(\theta) = E\theta + F, \tag{97}$$

гдѣ $E$ не зависитъ отъ $\theta$, а $F$ постоянно.

Поэтому можно написать, если $\alpha$, $\beta_i$ входятъ въ $U$:

$$U = \alpha \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_r \Theta(x, y, t), \tag{98}$$

гдѣ $\Theta(x, y, t)$ алгебраическая функція трансцендентныхъ типа $lgu$, гдѣ $u$ алгебраическая функція отъ $(x, y, t)$.

Замѣтимъ, что, если въ $\mu$ входятъ: $\alpha$, $\beta_1$, $\beta_2 \ldots \beta_q$, то всѣ эти трансцендентныя входятъ и въ $U$, такъ что въ уравненіи (98) $r = q$.

Въ самомъ дѣлѣ для всякой функціи $\theta = \alpha$, $\beta_i$ не входящей въ $U$, имѣемъ:

$$\frac{\partial \pi (m\theta)}{\partial x} = \frac{\partial \pi (\theta)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \pi (m\theta)}{\partial y} = \frac{\partial \pi (\theta)}{\partial y}$$

откуда на основаніи уравненій (94) и (95) имѣемъ

$$\frac{\partial \pi (\theta)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \pi (\theta)}{\partial y} = 0$$

и

$$\pi (\theta) = const, \quad Mdx + Ndy = 0, \quad M = 0, \quad N = 0$$

и уравненіе (6) обращается въ тождество.

Мы останавливаемся пока на томъ случаѣ, когда $\mu$ содержитъ: $\alpha$, $\beta_1$ $\beta_2 \ldots \beta_q$. Мы покажемъ, что въ этомъ случаѣ

$$U = e^{H(x, y, t)} \prod_{k=1}^{k=q} [H_k (x, y, t)]^{\lambda_k} \sqrt[n]{G (x, y, t)}. \tag{67}$$

Замѣтимъ прежде всего, что на основаніи доказаннаго выше:

$$U = \sum_{i=1}^{i=m} E_i \, lg \, u_i + F,$$

гдѣ $E_i$ постоянныя, $F$ трансцендентная перваго класса. Мы имѣемъ по этому тождественно

$$\Theta (x, y, t) \, \alpha \beta_1 \, \beta_2 \ldots \beta_q = \sum_{i=1}^{i=m} E_i \, lg \, u_i + F, \tag{99}$$

гдѣ въ лѣвую и правую часть входятъ тѣ же трансцендентныя.

Это равенство должно тождественно удовлетворяться по замѣнѣ $lg \, u_i$ какими угодно функціями $(x, y, t)$, ибо въ противномъ случаѣ мы могли бы, выразивъ $lg \, u$ черезъ $lg \, u_i$, $\alpha$, $\beta_i$ найти, для $U$ выраженіе съ меньшимъ числомъ трансцендентныхъ $lg \, u_i$. Поэтому, полагая $lg \, u_i = 0$ имѣемъ

$$F = \Theta_0 (x, y, t) \, \alpha \beta_1 \, \beta_2 \ldots \beta_q, \tag{100}$$

гдѣ $\Theta_0 (x, y, t)$ получено изъ $\Theta (x, y, t)$ замѣной $lg \, u_i = 0$.

Уравненія

$$\alpha\beta_1\,\beta_2\ldots\beta_q\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\Theta\beta_1\,\beta_2\ldots\beta_q\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\ldots=\sum_{i=1}^{i=m}\frac{E_i}{u_i}\frac{\partial u_i}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\alpha\beta_1\,\beta_2\ldots\beta_q\frac{\partial\Theta}{\partial y}+\Theta\beta_1\,\beta_2\ldots\beta_q\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\ldots=\sum_{i=1}^{i=m}\frac{E_i}{u_i}\frac{\partial u_i}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial y}$$

будутъ алгебраическими относительно $\alpha$, $\beta_i$ и другихъ трансцендентныхъ перваго класса. Онѣ должны тождественно удовлетворяться при всякихъ $\alpha$, $\beta_i$, ибо въ противномъ случаѣ имѣли бы уравненія типа (77).

Полагая $\alpha=\beta_i=0$ имѣемъ, такъ какъ при этомъ на основаніи уравненія (100). $\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\partial F}{\partial y}=0$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x}=0\qquad\frac{\partial\Omega}{\partial y}=0\,,$$

гдѣ

$$\Omega=\sum_{i=1}^{i=m}E_i\,lg\,u_i\,,$$

откуда $\Omega=Const$, а потому $\Theta(x,\,y,\,t)\;\alpha\beta^1\,\beta_2\ldots\beta_q$ на основаніи уравненія (99) не содержитъ $lg\,u_i$. Полагая $u_i$ алгебраическими функціями $(x,\,y,\,t)$, получаемъ уравненіе (99), гдѣ $F$ алгебраическая функція $\alpha$, $\beta_i$ типа (77), поэтому

$$\Theta(x,\,y,\,t)\;\alpha\beta_1\,\beta_2\ldots\beta_q=F\,(\alpha,\,\beta_1,\,\beta_2\ldots\beta_q).\tag{101}$$

Такимъ образомъ $U$, а слѣдовательно и $\Theta(x,\,y,\,t)$ не будетъ содержать трансцендентныхъ функцій, а потому будетъ алгебраической функціей. Остается только доказать, что эту функцію можно предполагать вида:

$$\Theta(x,\,y,\,t)=\sqrt[n]{G(x,\,y,\,t)}.$$

Для этого прежде всего замѣчаемъ, что множитель $\mu$ можетъ быть представленъ въ видѣ:

$$\mu=e^{H(x,\,y,\,t)}\prod_{k=1}^{k=q}[H_k\,x,\,y,\,t)]^{\lambda_k}\sqrt[n]{G\,(x,\,y,\,t)},\tag{102}$$

если черезъ $n$ обозначить наименьшее кратное знаменателей раціональныхъ чиселъ: $\lambda_{k+1}$, $\lambda_{k+2}\ldots\lambda_q$. Интегралъ $U$ приводится къ виду:

$$U = \int e^{H(x, y, t)} Q(x, y, t) \sqrt[n]{G(x, y, t)} [Mdx + Ndy], \tag{103}$$

гдѣ

$$Q(x, y, t) = \prod_{k=1}^{k=q} [H_k(x, y, t)]^{\lambda k} = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_q.$$

Дифференцируя уравненіе (103) и, имѣя въ виду, что

$$U = \Theta(x, y, t) A,$$

гдѣ

$$A = \alpha \beta_1 \beta_2 \dots \beta_q,$$

получаемъ по сокращеніи на $\alpha \beta_1 \beta_2 \dots \beta_q$

$$M \sqrt[n]{G(x, y, t)} = \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \Theta B \tag{104}$$

$$N \sqrt[n]{G(x, y, t)} = \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \Theta C, \tag{105}$$

гдѣ $B$ и $C$ раціональныя функціи $(x, y, t)$.

Если $\Theta$ опредѣляется уравненіемъ:

$$\lambda(\Theta, \sqrt[n]{G(x, y, t)}, x, y, t) = 0 \tag{106}$$

неприводимымъ въ области $(\sqrt[n]{G(x, y, t)}, x, y, t)$, то будемъ имѣть уравненіе (104) въ формѣ:

$$M \sqrt[n]{G(x, y, t)} = P(\sqrt[n]{G(x, y, t)}, x, y, t, \Theta) + \Theta B, \tag{107}$$

гдѣ

$$P(\sqrt[n]{G(x, y, t)}, x, y, t, \Theta) = -\frac{\dfrac{\partial \lambda}{\partial x}}{\dfrac{\partial \lambda}{\partial \Theta}} \tag{108}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right) + \frac{\partial \lambda}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial x}, \text{ гдѣ } g = \sqrt[n]{G(x, y, t)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\sqrt[n]{G(x, y, t)}}{nG(x, y, t)} \frac{\partial G(x, y, t)}{\partial x},$$

откуда слѣдуетъ, что функція $P(\sqrt[n]{G(x, y, t)}, x, y, t)$ раціональная функція $(\sqrt[n]{G(x, y, t)}, x, y, t)$ и уравненіе (107) типа:

$$\pi(\Theta, \sqrt[n]{G(x, y, t)}, x, y, t) = 0. \tag{109}$$

Это уравненіе, имѣя съ (106) одинъ общій корень, будетъ оставаться въ силѣ и по замѣнѣ $\Theta$ другими корнями уравненія (106); замѣняя же въ уравненіи (109) или, что тоже (107) для каждаго изъ $\Theta$ функціи $P$ его значеніемъ (108), доказываемъ, что уравненіе (104) (и такимъ же образомъ уравненіе (105)) остаются въ силѣ послѣ этой замѣны.

Обозначая черезъ $\Theta_i$ корни уравненія (106), получаемъ:

$$M\sqrt[n]{G(x,\ y,\ t)} = \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \Omega B$$

$$N\sqrt[n]{G(x,\ y,\ t)} = \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \Omega C,$$

гдѣ

$$\Omega = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{i=p} \Theta_i$$

на основаніи уравненія (106) должна быть раціональной функціей:

$$(x,\ y,\ t,\ \sqrt[n]{G(x,\ y,\ t)}),$$

откуда

$$U = \Omega(x,\ y,\ t,\ \sqrt[n]{G(x,\ y,\ t)})\ A. \tag{110}$$

Имѣя въ виду выраженіе для $U$ (103), мы получаемъ, что $\Omega$, разсматриваемая, какъ функція $g = \sqrt[n]{G(x,\ y,\ t)}$, должна удовлетворять условію:

$$\Omega(\alpha^j g) = \alpha^j\,\Omega(g), \tag{110}$$

гдѣ $\alpha$ первообразный корень двучленнаго уравненія:

$$\alpha^n = 1,$$

откуда, если положить

$$\Omega(g) = \sum_{k=0}^{k=n-1} \Omega_k\, g^k$$

$$\Omega(g) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{j=n-1} \alpha^{-j} \sum\limits_{k=0}^{k=n-1} \Omega_k\, \alpha^{jk} g^k}{n} = \Omega_1 g$$

и, наконецъ, на основаніи уравненія (110) получаемъ

$$U = \Omega_1 A \sqrt[n]{G(x,\ y,\ t)},$$

гдѣ $\Omega_1$ раціональная функція $(x,\ y,\ t)$ или, что тоже, уравненіе (67).

Переходимъ теперь къ случаю, когда $\mu$ не содержитъ $\alpha$ и $\beta_i$, тогда на основаніи уравненія (102):

$$\mu = \sqrt[n]{G(x, y, t)} \tag{111}$$

$$U = \int \sqrt[n]{G(x, y, t)}\,[Mdx + Ndy]. \tag{112}$$

Разсматривая $U$ въ формѣ:

$$U = \int [S(x, y, \sigma, g)\,dx + T(x, y, \sigma, g)\,dy] \tag{113}$$

гдѣ

$$\sigma = \alpha t + \beta g \tag{114}$$

опредѣляется неприводимымъ въ области $(x, y, t, g)$ уравненіемъ

$$f(\sigma, g, y, x) = 0 \tag{115}$$

мы имѣемъ на основаніи § 2, разсужденія котораго не мѣняются отъ замѣны выраженія

$$U = \int [M(x, y, t)\,dx + N(x, y, t)\,dy]$$

на выраженіе (113):

$$U = \xi_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{k=m} C_k\, lg\, \xi_k^{(1)} \tag{33'}$$

гдѣ $\xi_k^{(1)}$ опредѣляются уравненіями:

$$\lambda_k(x, y, t, g, \xi_k) = 0. \tag{34'}$$

Повторяя разсужденія § 3 съ тою только разницей, что вездѣ раціональныя функціи отъ $(x, y, t)$ замѣняемъ раціональными функціями $(x, y, t, g)$ получаемъ:

$$U = \Phi(x, y, t, g, \sigma) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k\, lg\, \psi_k(x, y, t, g, \sigma)$$

или, на основаніи уравненія (114):

$$U = \Phi(x, y, t, \sqrt[n]{G(x, y, t)}) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k\, lg\, \psi_k(x, y, t, \sqrt[n]{G(x, y, t)}). \tag{68}$$

Выведенныя нами формы (67) и (68) для интеграловъ $U$ можно замѣнить другими. Если $U$ интегралъ, то $lg\, U = C = c'$ будетъ тоже интеграломъ, вслѣдствіе чего форму (67) можемъ замѣнить слѣдующей:

$$U = \Phi(x, y, t) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k\, lg\, \psi_k(x, y, t). \tag{116}$$

Затѣмъ, если $\mu$ для одного значенія $\sqrt[n]{G(x, y, t)}$ будетъ интегрирующимъ множителемъ, то, какъ это слѣдуетъ изъ уравненія (47), $\mu$ будетъ интегрирующимъ множителемъ и для всякаго другаго значенія корня: $\alpha^j \sqrt[n]{G(x, y, t)}$. Если по этому

$$U(g) = C$$

$$U(\alpha^j g) = C_j, \quad j = 0, 1, 2 \ldots n-1,$$

причемъ

$$C_j = \int \alpha^j \mu (Mdx + Ndy) = \alpha^j C,$$

а также и

$$\sum_{j=0}^{j=n-1} \alpha^{-j} U(\alpha^j g) = \sum_{j=0}^{j=n-1} C_j \alpha^{-j} = Cn$$

откуда получаемъ слѣдующую теорему:

*Если общій интегралъ дифференціальнаго уравненія:*

$$M(x, y, t)dx + N(x, y, t)dy = 0 \tag{6}$$

*выражается въ конечномъ видѣ, то онъ всегда можетъ быть представленъ въ слѣдующей формѣ:*

$$\Phi(x, y, t)\sqrt[n]{G(x, y, t)} + \sum_{k=1}^{k=m} C_k lg \prod_{j=0}^{j=n-1} \psi_k^{\alpha^{-j}}(x, y, t, \alpha^j \sqrt[n]{G(x, y, t)}) = C \tag{117}$$

*гдѣ* $\Phi(x, y, t)$, $G(x, y, t)$ *раціональныя функціи* $(x, y, t)$, $\psi_k(x, y, t, \sqrt[n]{G(x, y, t)})$ *раціональная функція отъ* $(x, y, t, \sqrt[n]{G(x, y, t)})$, $C_k$ *постоянныя,* $\alpha$ *первообразный корень двучленнаго уравненія* $\alpha^n = 1$.

Полагая $t = \triangle$ получаемъ теорему, высказанную въ началѣ сочиненія.

Если полагать $U$ функціей алгебраической, то членъ съ $lg$ въ лѣвой части уравненія (117) долженъ исчезнуть, и мы получаемъ:

$$U = \Phi(x, y, t)\sqrt[n]{G(x, y, t)}.$$

Но очевидно, если $U = C$, то и $U^n = C^n = const$ и мы получаемъ упомянутую въ началѣ статьи теорему Фукса.

---

**Примѣчаніе 1.** Доказанная общая форма для интеграловъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка даетъ возможность рѣшить слѣдующую задачу.

*Найти общую форму для рѣшенія y, удовлетворяющаго неприводимому уравненію перваго порядка (2) при условіи, что y выражается въ конечномъ видѣ?*

Задача эта сводится къ изслѣдованію рѣшеній трансцендентнаго уравненія (117) при условіи, что эти рѣшенія выражаются въ конечномъ видѣ, которое мы отлагаемъ до слѣдующаго раза.

**Примѣчаніе 2.** Всѣ изслѣдованія настоящей статьи допускаютъ обобщенія въ томъ же направленіи, въ какомъ обобщаются изслѣдованія Льювиля и Абеля, относящіяся къ интегрированію въ конечномъ видѣ. Намъ прійдется воспользоваться изслѣдованіями Кенигсбергера [1]) и нашими въ нашей большой работѣ: „О приведеніи Абелевыхъ интеграловъ къ нисшимъ трансцендентнымъ“, помѣщенной въ „Извѣстіяхъ Варшавскаго Политехническаго Института за 1905 годъ“ [2]), чтобы доказать, что:

*Если общій интегралъ неприводимаго дифференціальнаго уравненія перваго порядка (2) выражается черезъ Абелевы интегралы и функціи обращенія, то онъ долженъ быть формы:*

$$\Phi(x, y, t) \sqrt[n]{G(x, y, t)} + \sum_{k=1}^{k=m} C_k lg \prod_{j=0}^{j=n-1} \psi_k^{\alpha-j}(x, y, t, \alpha^j \sqrt[n]{G(x, y, t)}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=q} E_i \sum^{j=n-1} \alpha^{-j} \sum_{k=1}^{k=\pi_i} \int_{(\xi_0, \eta_0)}^{\xi_{ij}^{(k)}\ \eta_{ij}^{(k)}} \Phi_i(\xi, \eta)\, d\xi, \qquad (118)$$

*гдѣ* $\Phi(x, y, t)$, $G(x, y, t)$, $\psi_k(x, y, t, \alpha^i \sqrt[n]{G(x, y, t)})$ *имѣютъ прежнія значенія и гдѣ* $(\xi^{(k)}, \eta^{(k)})$ *опредѣляются уравненіями типа:*

$$\alpha_{0i}(x, y, t, \alpha^j g)\, \xi_{ij}^{\pi_i} + \alpha_{1i}(x, y, t, \alpha^j g)\, \xi_{ij}^{\pi_i-1} + \dots \alpha_{\pi_i i}(x, y, t, \alpha^j g) = 0 \qquad (119)$$

$$\eta_{ij}^{(k)} = S(\xi_{ij}^{(k)}, x, y, t, \alpha^j g) \qquad (120)$$

$\alpha_{ji}(x, y, t, \alpha^j g)$ *раціональная функція* $(x, y, t, \alpha^j g)$

$$g = \sqrt[n]{G(x, y, t)}$$

$S(\xi_{ij}^{(k)}(x, y, t, \alpha^j g)$ *раціональная функція* $(\xi_i^{(k)}, x, y, t, \alpha^j g)$, $\alpha$ *первообразный корень уравненія* $\alpha^n = 1$, $\pi_i$ *порядокъ Абелева интеграла* $\int \Phi_i(\xi, \eta)\, d\xi$, *если этотъ интегралъ перваго рода.*

**Примѣчаніе 3.** Не трудно также видѣть, что приходится съ небольшими измѣненіями воспроизводить всѣ разсужденія настоящей статьи, чтобы доказать, что:

*Если предполагать уравненіе (2) алгебраическимъ относительно* $(y', y)$ *и трансцендентнымъ относительно* $x$, *то при условіи, что интегралъ выражается въ конечномъ видѣ черезъ* $y$ *(но не черезъ* $x$*), общая*

---

[1]) *Koenigsberger.* Ueber die Reduction Abelscher Integrale aut niedere Integralformen, speciell auf elliptische Integrale. Journ. de Crelle. B. 89. 1880. S. 89.

[2]) *Часть I.* Глава 1 §§ 15, 16, 17, 18. 19, 20, 21, 22, 23.

*его форма будетъ выражаться формулой (117), но съ другимъ уже значеніемъ функціи $\Phi$, $G$, $\psi_k$, а именно $\Phi$, $G$ будутъ раціональными функціями не $(x, y, t)$, а только $(y, t)$ а $\psi_k$ раціональная функція не $(x, y, t, g)$, а $(y, t, g)$, относительно $x$ всѣ эти функціи могутъ быть трансцендентными.*

Тоже замѣчаніе относится и къ формѣ (118), (119) и (120). Равнымъ образомъ мы будемъ имѣть для этого случая *общую форму Эйлерова множителя*

$$\mu = e^{H(x, y, t)} \prod_{k=1}^{k=n} [H_k(x, y, t)]^{\lambda_k},$$

*въ которой $H(x, y, t)$, $H_k(x, y, t)$ раціональныя функціи $(y, t)$, $\lambda_k$ постоянныя.*

Замѣтимъ здѣсь, между прочимъ, что въ томъ случаѣ, когда $U$ алгебраическая функція отъ $(y, t)$, то $e^{H(x, y, t)}$ долженъ приводиться къ функціи отъ одного $x$, и мы имѣемъ множитель:

$$\mu = P(x) \prod_{k=1}^{k=m} [H_k(x, y, t)]^{\lambda_k}. \tag{121}$$

Когда уравненіе (2) первой степени относительно $y'$, получаемъ интегрирующій множитель факторіальной формы:

$$\mu = P(y - u_1)^{\lambda_1} (y - u_2)^{\lambda_2} \ldots (y - u_n)^{\lambda_n}, \tag{122}$$

гдѣ $P$, $u_1$, $u_2 \ldots u_n$ алгебраическая функція отъ $x$. Необходимое существованіе множителя такой формы для дифференціальнаго уравненія

$$Mdx + Ndy = 0, \tag{123}$$

гдѣ $M$, $N$ цѣлыя функціи отъ $y$, алгебраически интегрируемаго, доказано А. Н. Коркинымъ [1]).

---

[1]) Московскій Математ. Сборникъ XXIV, 2 за 1904 г. *А. Н. Коркинъ.* Изысканія о множителяхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка стр. 194. В. П. Ермаковъ называетъ такой множитель факторіальнымъ.

# ОПЕЧАТКИ:

Въ статьѣ г. Мордухай-Болтовскаго (Сообщенія Х. М. О. (2) т. X. № 1) остались неисправленными слѣдующія опечатки:

| | *Напечатано:* | *Должно быть:* |
|---|---|---|
| стр. 35 стр. 15 снизу | $\alpha^j)\sqrt[n]{G(x,\, y,\, \triangle)}$ | $\alpha^j\sqrt[n]{G(x,\, y,\, \triangle))}$ |
| стр. 36 стр. 7 „ | приходятся | приводятся |
| стр. 37 стр. 12 сверху | $\theta_i^{(n)}$ | $\theta_i^{(n)}$ |
| стр. „ стр. 8 снизу | $e^n$ | $e^u$, |
| стр. „ стр. 7 „ | $n$ | $u$ |
| стр. 38 стр. 5 и 6 сверху: | *послѣ словъ:* „въ предположеніи, что θ“ | *нужно вставить:* „постоянное и заключены нами въ скобки въ отличіе отъ частныхъ производныхъ $\frac{\partial\pi(\theta)}{\partial x}$ и $\frac{\partial\pi(\theta)}{\partial y}$, въ которыхъ θ“ и т. д. |
| стр. 45 стр. 3 снизу | $\varphi\frac{\partial\omega}{ox}+\psi\frac{\partial\omega}{oy}=\chi$ | $\varphi\frac{\partial\omega}{\partial x}+\psi\frac{\partial\omega}{\partial y}=\chi$ |
| стр. 46 стр. 3 „ | $u=$ | $\omega=$ |
| стр. 48 стр. 11 „ | трансцендентныя | трансцендентная |
| стр. „ стр. 4 „ | (въ формулѣ (59)) $C_1$ | $C_k$ |