# Объ уравненіи въ частныхъ производныхъ

## $(s^2 - rt) f(x, y) = 1$ или $s^2 - rt = f(p, q)$.

М. Лагутинскаго.

Еще въ 1848 г. J. A. Serret опубликовалъ небольшую замѣтку въ Journal de Mathématique (de Liouville) t. XIII, p. 361, гдѣ показываетъ, какъ найти линейчатыя поверхности постоянной кривизны. Ему удалось получить формулы для такихъ поверхностей, не содержащія ни одной квадратуры.

Stäckel и Scheffers получили въ недавнее время нѣкоторыя свойства этихъ поверхностей, составленныхъ изъ минимальныхъ прямыхъ.

Поверхности эти мнимыя, и значеніе ихъ для геометріи нельзя считать особенно важнымъ. Гораздо интереснѣе, какъ мнѣ кажется, аналитическая сторона дѣла. Въ этомъ смыслѣ идея J. A. Serret, насколько мнѣ извѣстно, не получила дальнѣйшаго развитія, а между тѣмъ интегрированіе уравненій въ частныхъ производныхъ 2-го порядка находится еще въ такой стадіи, что и частныя изслѣдованія въ этой области должны имѣть свою цѣнность въ качествѣ подготовительнаго матерьяла для полнаго рѣшенія этой трудной проблемы.

Въ концѣ статьи J. A. Serret указываетъ мимоходомъ дифференціальное уравненіе 2-го порядка, которое имѣетъ подобные же интегралы, но дѣйствительные. Въ настоящей работѣ я обобщаю этотъ результатъ. Въ самомъ дѣлѣ, задача J. A. Serret сводится къ интегрированію системы двухъ уравненій:

$$rt - s^2 = a(1 + p^2 + q^2)^2$$

и уравненія 3-го порядка линейчатыхъ поверхностей.

Результатъ, полученный J. A. Serret показалъ, что эта система вполнѣ интегрируема.

Я задался вопросомъ опредѣлить, при какихъ значеніяхъ функціи $f(p, q)$ уравненіе

$$s^2 - rt = f(p, q) \tag{1}$$

представляетъ интегрируемую систему съ дифференціальнымъ уравненіемъ линейчатыхъ поверхностей.

Оставляя въ сторонѣ очевидный случай развертывающихся поверхностей, получимъ слѣдующій результатъ:

I. Если эта система допускаетъ интегралъ, хотя бы не заключающій произвольныхъ постоянныхъ, функція $f(p, q)$ такова, что уравненіе

$$z = \sqrt[4]{f(x, y)} \tag{2}$$

представляетъ въ прямоугольныхъ декартовыхъ координатахъ линейчатую поверхность ортогональную къ плоскости $z = 0$, или конусъ съ вершиной въ плоскости $z = 0$, или цилиндръ съ образующими, параллельными плоскости $z = 0$.

II. Если функція $f(p, q)$ удовлетворяетъ этимъ условіямъ, разсматриваемая система вполнѣ интегрируема, т. е. допускаетъ интегралъ, который зависитъ отъ произвольной функціи, и для полученія котораго необходимы раціональныя (говоря вообще) алгебраическія дѣйствія и интегрированіе точнаго дифференціала отъ двухъ перемѣнныхъ.

Ради упрощенія вычисленій я преобразую уравненіе (1) съ помощію формулъ Лежандра въ новое

$$s^2 - rt = A^2, \tag{3}$$

гдѣ черезъ $A$ я обозначаю функцію $\dfrac{1}{\sqrt{f(x, y)}}$.

Второе уравненіе системы не измѣнитъ своей формы, такъ какъ преобразованіе Лежандра геометрически преобразуетъ линейчатую поверхность въ линейчатую же.

Въ самомъ дѣлѣ, любая линейчатая неразвертывающаяся поверхность можетъ быть задана въ такой формѣ:

$$\begin{aligned} z &= ax + b \\ y &= cx + d \end{aligned} \tag{4}$$

гдѣ $a$, $b$, $c$, $d$ функціи перемѣннаго параметра $\alpha$,

Дифференцируя уравненія (4) по $x$ и $y$, исключая $\dfrac{\partial \alpha}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \alpha}{\partial y}$, найдемъ

$$p = a - \frac{a' x + b'}{c' x + d'} c$$

$$q = \frac{a' x + b'}{c' x + d'}$$

гдѣ $a'$, $b'$, $c'$, $d'$ первыя производныя функцій $a$, $b$, $c$, $d$ по параметру $\alpha$.

Внеся полученныя выраженія для $p$ и $q$ въ формулы Лежандра

$$X = p$$

$$Y = q$$

$$Z = z - px - qy$$

получимъ уравненіе преобразованной поверхности въ видѣ:

$$\begin{aligned} X &= a - Yc \\ Z &= b - Yd \end{aligned} \tag{5}$$

Полученныя формулы не только доказываютъ правильность нашего утвержденія, но и позволяютъ перейти отъ уравненій первоначальной поверхности къ уравненіямъ преобразованной и обратно.

Дифференціальное уравненіе линейчатыхъ поверхностей получится[1]), если исключить изъ двухъ уравненій

$$r + 2\ us + u^2\ t = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3\,u\,\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} + 3\,u^2\,\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} + u^3\,\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0 \tag{7}$$

вспомогательную функцію $u$.

Это уравненіе допускаетъ промежуточный интегралъ второго порядка, зависящій отъ произвольной функціи.

Подвергнемъ уравненіе (6) операціи $\frac{\partial}{\partial x} + u\,\frac{\partial}{\partial y}$. Результатъ въ силу уравненія (7) приведется къ произведенію

$$(s + ut)\,\left(\frac{\partial u}{\partial x} + u\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0\,.$$

Но если мы примемъ равнымъ нулю первый множитель, то уравненіе (6) сведется къ такому

$$r + us = 0$$

а это совмѣстно съ уравненіемъ

$$s + ut = 0$$

можетъ существовать только для исключеннаго нами случая развертывающихся поверхностей.

---

[1]) См. напр. Salmon, Traité de géométrie analytique à trois dimensions. Deuxième partie p. 223.

Итакъ

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{8}$$

Это уравненіе играетъ основную роль также и въ вышеупомянутой статьѣ J. A. Serret, хотя и получено имъ при помощи другихъ соображеній.

Интегралъ его напишется такъ

$$y - xu = \varphi(u) \tag{9}$$

или

$$u = m$$

гдѣ $\varphi$ произвольная функція, а $m$ произвольная постоянная.

Уравненія (6) и (9) совмѣстно представятъ искомый промежуточный интегралъ.

Этимъ мы сводимъ нашу задачу къ изслѣдованію системы двухъ уравненій въ частныхъ производныхъ второго порядка. Этотъ вопросъ разработанъ теоретически [1]), но я примѣню въ данномъ случаѣ частный пріемъ, ведущій быстрѣе къ цѣли.

Рѣшая уравненіе (6) относительно $u$, получаемъ:

$$u = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - rt}}{t} = \frac{r}{-s \mp \sqrt{s^2 - rt}}.$$

Замѣняя $s^2 - rt$ его значеніемъ изъ уравненія (3), найдемъ

$$\begin{aligned} r + su \pm uA &= 0 \\ s + tu \mp A &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Наша система свелась на двѣ линейныя, различающіяся знакомъ для функціи $A$. Условіе же интегрируемости, какъ сейчасъ увидимъ, одно и тоже для обоихъ системъ, т. е. не зависитъ отъ этого знака.

Дифференцируя первое изъ нихъ по $y$, а второе по $x$ и вычитая одинъ результатъ изъ другого, получимъ

$$s\frac{\partial u}{\partial y} - t\frac{\partial u}{\partial x} \pm \frac{\partial u}{\partial y}A \pm u\frac{\partial A}{\partial y} \pm \frac{\partial A}{\partial x} = 0.$$

Замѣщая въ полученномъ уравненія $\frac{\partial u}{\partial x}$ его значеніемъ изъ уравненія (8) и сравнивая результатъ со вторымъ изъ уравненій (10), найдемъ

$$2\frac{\partial u}{\partial y}A + u\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial x} = 0. \tag{11}$$

---

[1]) См. E. Goursat. Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre.

Это и есть искомое условіе. Функція $A$ удовлетворяетъ дифференціальному уравненію въ частныхъ производныхъ перваго порядка. Оно интегрируется просто.

Положивъ

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\frac{\partial u}{\partial y}=\psi(u\,,\;x)$$

и подвергнувъ это тождество операціи $\frac{\partial}{\partial x}+u\frac{\partial}{\partial y}$, найдемъ

$$-\frac{1}{2\sqrt{A^3}}\left\{u\frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}-2A\left(u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\right\}=\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Дифференцируя уравненіе (8) по $y$ и внеся въ только что полученное уравненіе вмѣсто $u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ его значеніе $-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$, убѣдимся, на основаніи (11), что

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=0$$

т. е.

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\frac{\partial u}{\partial y}=\psi(u). \tag{12}$$

Опредѣляя $\frac{\partial u}{\partial y}$ изъ уравненія (9) и внеся полученное значеніе, найдемъ

$$\frac{1}{\sqrt{A}}=\psi(u)\left\{x+\varphi'(u)\right\} \tag{13}$$

гдѣ $\varphi'(u)$ первая производная отъ $\varphi(u)$ по $u$.

Уравненіе (13) и (9) показываютъ, что поверхность, выраженная уравненіемъ

$$z=\frac{1}{\sqrt{A}}=\sqrt[4]{f(xy)}=\psi(u)\left\{x+\varphi'(u)\right\} \tag{14}$$

линейчатая.

Легко опредѣлить геометрическій характеръ этихъ поверхностей.

Начнемъ со случая развертывающихся поверхностей.

Извѣстное условіе для этого приводится въ виду:

$$\begin{vmatrix}\psi'(u) & \psi'(u)\varphi'(u)+\psi(u)\varphi''(u)\\ 1 & \varphi'(u)\end{vmatrix}\equiv-\psi(u)\;\varphi''(u)=0$$

гдѣ $\psi'(u)$ первая производная, а $\varphi''(u)$ вторая производная по $u$ отъ функцій $\psi$ и $\varphi$.

Полученное условіе показываетъ, что $\varphi$ линейна относительно $u$. Полагая её равной $\alpha u - \beta$, найдемъ уравненіе поверхности въ видѣ

$$z = \psi\left(\frac{y+\beta}{x+\alpha}\right)(x+\alpha)$$

т. е. это будетъ конусъ, вершина котораго находится въ плоскости $z=0$.

Предположимъ теперь, что поверхность, выражаемая уравненіемъ (13) и (9) не конусъ.

Полагая въ уравненіи (14) $z$ равнымъ нулю, найдемъ

$$\psi(u)\{x+\varphi'(u)\}=0$$

уравненіе, которое совмѣстно съ уравненіемъ (9) опредѣлитъ кривую пересѣченія поверхности съ плоскостью $z=0$.

Приравняемъ сначала нулю второй множитель

$$x+\varphi'(u)=0.$$

Это уравненіе совмѣстно съ уравненіемъ

$$y=ux+\varphi(u)$$

показываетъ, что проекція образующей касается линіи пересѣченія поверхности съ плоскостью, и слѣдовательно проектирующая плоскость, содержа двѣ касательныя къ поверхности: образующую и ея проекцію сама касается поверхности. Отсюда слѣдуетъ, что разсматриваемая линейчатая поверхность ортогональна къ плоскости $z=0$.

Что же касается перваго множителя, то онъ, обращаясь въ нуль, опредѣляетъ тѣ полости поверхности, которыя пересѣкаются съ плоскостью $z=0$ по образующимъ. Въ этомъ случаѣ образующая совпадаетъ со своей проэкціей и на такія полости наше заключеніе объ ортогональности къ плоскости $z=0$ не распространяется.

Докажемъ и обратно, если поверхность ортогональна къ плоскости $z=0$, то ея уравненія имѣютъ форму уравненій (14) и (9).

Чтобы избѣжать неопредѣленности, употребимъ такой пріемъ: напишемъ уравненіе поверхности въ формѣ

$$\begin{aligned} y &= \psi(u)\{x+\Theta(u)\}. \\ z &= ux+\varphi(u). \end{aligned} \tag{15}$$

Опредѣлимъ входящія въ нихъ функціи такъ, чтобы поверхность была ортогональна къ плоскости $y=0$, и затѣмъ перемѣнимъ координаты $y$ и $z$ между собою.

Производная $z$ по $y$ $q$ должна равняться нулю одновременно съ $y=0$.

Дифференцируя второе изъ уравненій (15) по $y$, получимъ

$$q=\{x+\varphi'(u)\}\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Но первое изъ уравненій (15) показываетъ, что $\frac{\partial u}{\partial y}$ не можетъ равняться нулю; слѣдовательно

$$x+\varphi'(u)=0.$$

Сравнивая его съ уравненіемъ

$$\psi(u)\{x+\Theta(u)\}=0$$

убѣждаемся, что $\Theta(u)=\varphi'(u)$.

Перемѣняя $y$ на $z$, найдемъ

$$z=\psi(u)\{x+\varphi'(u)\}$$
$$y=ux+\varphi(u),$$

что и требовалось.

Теперь перейдемъ къ случаю $u=m$. Наша система будетъ состоять изъ двухъ уравненій, уравненія (3) и уравненія:

$$r+2ms+m^2t=0.$$

Если $m$ отлично отъ 0 и $\infty$, то можно предполагать $r$ и $t$ отличными отъ нуля и слѣдовательно замѣнить подобно предыдущему нашу систему двумя уравненіями вида:

$$\begin{aligned} r+ms\pm mA&=0\\ s+mt\mp A&=0.\end{aligned}\tag{16}$$

Нетрудно убѣдиться непосредственно, что случаи $m=0$, $m=\infty$, также заключаются въ системѣ (16).

Обозначивъ $p+mq$ черезъ $v$, приведемъ систему (16) къ виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x}&=\mp mA\\ \frac{\partial v}{\partial y}&=\pm A.\end{aligned}\tag{17}$$

Откуда

$$m\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial A}{\partial x}=0$$

и слѣдовательно можно положить

$$A = \Theta'(y - mx) \tag{18}$$

гдѣ $\Theta'$ производная произвольной функціи $\Theta$.

Линейчатая поверхность

$$z = \frac{1}{\sqrt{A}}$$

будетъ на сей разъ цилиндромъ, образующія котораго параллельны плоскости $z = 0$.

Такъ какъ при послѣдовательныхъ разсужденіяхъ мы предполагали только, что существуетъ какое-нибудь рѣшеніе нашей системы, то можно считать доказаннымъ первое положеніе:

*Если разсматриваемая система имѣетъ какой-нибудь интегралъ, то функція $f(p, q)$ такова, что уравненіе*

$$z = \sqrt[4]{f(x, y)}$$

*представляетъ собою либо линейчатую поверхность, ортогональную къ плоскости $z = 0$, либо конусъ съ вершиной на плоскости $z = 0$, либо цилиндръ, образующія котораго параллельны плоскости $z = 0$.*

Покажемъ теперь, что эти условія достаточны для полной интегрируемости системы.

Начнемъ съ послѣдняго случая, какъ наиболѣе простого.

Умножая уравненія (17) соотвѣтственно на $dx$ и $dy$, складывая и интегрируя, найдемъ

$$p + mq = \pm \Theta(y - mx).$$

Отсюда

$$z = \pm \Theta(y - mx)\, x + \Theta_1(y - mx) \tag{19}$$

гдѣ $\Theta_1$ произвольная функція, введенная интегрированіемъ.

Полученное уравненіе есть уравненіе коноида, всѣ образующія котораго параллельны одной плоскости, а именно перпендикулярной къ плоскости $z = 0$.

Чтобы перейти отъ полученнаго интеграла для уравненія (3) къ интегралу уравненія (1), представимъ уравненіе (19) въ видѣ двухъ

$$\left.\begin{aligned} z &= \pm \Theta(\beta)\, x + \Theta_1(\beta) \\ y &= mx + \beta . \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Примѣнивъ къ нимъ формулы перехода (4) и (5), найдемъ:

$$x = \pm \Theta(\beta) - my$$

$$z = \Theta_1(\beta) - \beta y .$$

Вновь полученная поверхность будетъ также коноидъ того же типа, какъ и предыдущій.

Перейдемъ теперь къ интегрированію первыхъ двухъ случаевъ.

Положимъ

$$p+uq=\tau(u,\, x).$$

Операція $\dfrac{\partial}{\partial x}+u\dfrac{\partial}{\partial y}$, произведенная надъ этимъ тождествомъ дастъ въ силу (6)

$$\frac{\partial \tau(u,\, x)}{\partial x}=0$$

т. е.

$$p+uq=\tau(u) \tag{21}$$

гдѣ $\tau$ совершенно произвольная функція.

Дифференцируя обѣ части уравненія (21) по $x$ и, принимая во вниманіе первое изъ уравненій (10), получимъ

$$q=\tau'(u)\pm\frac{uA}{\dfrac{\partial u}{\partial x}}$$

гдѣ $\tau'(u)$ первая производная отъ функціи $\tau(u)$ по $u$.

Подставляя значеніе $q$ въ уравненіе (21) найдемъ

$$p=\tau(u)-u\tau'(u)\mp\frac{u^2A}{\dfrac{\partial u}{\partial x}}.$$

Такимъ образомъ мы привели нашу задачу къ интегрированію точнаго дифференціала:

$$dz=\left\{\tau(u)-u\tau'(u)\mp\frac{u^2A}{\dfrac{\partial u}{\partial x}}\right\}dx+\left\{\tau'(u)\pm\frac{uA}{\dfrac{\partial u}{\partial x}}\right\}dy. \tag{22}$$

Можно положить

$$z=V\mp W \tag{23}$$

гдѣ

$$dV=\{\tau(u)-u\tau'(u)\}\,dx+\tau'(u)\,dy \tag{24}$$

$$dW=\frac{uA}{\dfrac{\partial u}{\partial x}}(udx-dy).$$

Изъ уравненія (12) находимъ

$$A=\frac{\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2}{\psi(u)^2}$$

и слѣдовательно

$$dW = \frac{1}{\psi(u)^2}\left\{\frac{u^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}{\frac{\partial u}{\partial x}}\,dx - \frac{u\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}{\frac{\partial u}{\partial x}}\,dy\right\}.$$

Но $-u\frac{\partial u}{\partial y}$ по уравненію (8) равно $\frac{\partial u}{\partial x}$ и мы имѣемъ

$$dW = \frac{1}{\psi(u)^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) = \frac{du}{\psi(u)^2}$$

и слѣдовательно

$$W = \int \frac{du}{\psi(u)^2}.$$

Возьмемъ теперь полный дифференціалъ отъ выраженія $V - x\tau(u)$. Въ силу уравненія (24) онъ приметъ видъ

$$d\{V - x\tau(u)\} = \tau'(u)(dy - udx - xdu).$$

Взявъ полный дифференціалъ отъ уравненія (9) и сравнивая съ только что полученнымъ, найдемъ

$$d\{V - x\tau(u)\} = \tau'(u)\,\varphi'(u)\,du.$$

Откуда

$$V = x\tau(u) + \int \tau'(u)\,\varphi'(u)\,du.$$

Внеся полученныя значенія $V$ и $W$ въ уравненіе (23), найдемъ

$$z = \mp \int \frac{du}{\psi(u)^2} + \int \tau'(u)\,\varphi'(u)\,du + x\tau(u).$$

Можно избавиться въ этомъ выраженіи отъ второго знака интеграла, положивъ произвольную функцію $\tau(u)$ равной $\sigma'\{\varphi'(u)\}$, гдѣ $\sigma'(v)$ первая производная произвольной функціи $\sigma(v)$. По выполненіи интегрированія, найдемъ

$$z = \mp \int \frac{du}{\psi(u)^2} - \sigma\{\varphi'(u)\} + \varphi'(u)\,\sigma'\{\varphi'(u)\} + x\sigma'\{\varphi'(u)\} \tag{25}$$

это выраженіе для $z$ совмѣстно съ уравненіемъ

$$y - ux = \varphi(u)$$

и даетъ искомый интегралъ.

Формулы (4) и (5) дадутъ соотвѣтствующій интегралъ для уравненія (1) въ такомъ видѣ:

$$x = \sigma' \{\varphi'(u)\} - uy$$

$$z = \mp \int \frac{du}{\psi(u)^2} - \sigma\{\varphi'(u)\} + \varphi'(u)\,\sigma'\{\varphi'(u)\} - \varphi(u)\,y. \tag{26}$$

Интегралъ, какъ видимъ, заключаетъ произвольную функцію.

Интеграція зависитъ отъ опредѣленія функцій $\varphi$ и $\psi$ по уравненіямъ (13) и (9). Въ случаѣ, разсматриваемомъ J. A. Serret, обѣ онѣ равнялись $\alpha\sqrt{1-u^2}$, гдѣ $\alpha$ постоянная; видъ этихъ функцій былъ очень простъ. Вообще же опредѣленіе ихъ при современномъ состояніи алгебры, дающей только небольшое число разрѣшимыхъ уравненій, можетъ представить непреоборимыя трудности. Можно обойти эти вычисленія слѣдующимъ образомъ. Прежде всего необходимо дать другое аналитическое условіе, которому удовлетворяетъ функція $f(p, q)$.

Подвергая уравненіе (13) дважды операціи $\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial y}$, получимъ

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{\sqrt{A}}}{\partial x^2} + 2u\frac{\partial^2 \frac{1}{\sqrt{A}}}{\partial x\,\partial y} + u^2\frac{\partial^2 \frac{1}{\sqrt{A}}}{\partial y^2} = 0. \tag{27}$$

Новое повтореніе операціи приводитъ къ уравненію

$$\frac{\partial^3 \frac{1}{\sqrt{A}}}{\partial x^3} + 3u\frac{\partial^3 \frac{1}{\sqrt{A}}}{\partial x^2\,\partial y} + 3u^2\frac{\partial^3 \frac{1}{\sqrt{A}}}{\partial x\,\partial y^2} + u^3\frac{\partial^3 \frac{1}{\sqrt{A}}}{\partial y^3} = 0. \tag{28}$$

Исключая $u$ изъ обоихъ уравненій, получимъ первое условіе: оно показываетъ, что уравненіе

$$z = \sqrt[4]{f(x, y)} \tag{29}$$

линейчатая поверхность.

Дифференцируя уравненіе (27) по $y$ и замѣняя $\frac{\partial u}{\partial y}$ его выраженіемъ изъ уравненія (11), найдемъ

$$\frac{\partial^3 \frac{1}{\sqrt{A}}}{\partial x^2\,\partial y} + 2u\frac{\partial^3 \frac{1}{\sqrt{A}}}{\partial x\,\partial y^2} + u^2\frac{\partial^3 \frac{1}{\sqrt{A}}}{\partial y^3} - \left\{\frac{\partial^2 \frac{1}{\sqrt{A}}}{\partial x\,\partial y} + u\frac{\partial^2 \frac{1}{\sqrt{A}}}{\partial y^2}\right\}\left\{\frac{\frac{\partial A}{\partial x}}{A} + u\frac{\frac{\partial A}{\partial y}}{A}\right\} = 0. \tag{30}$$

Исключая $u$ изъ уравненія (27) и вновь полученнаго, найдемъ дополнительное условіе, которому подчинена функція $A$.

Любопытно, что въ данномъ случаѣ условіе ортогональности поверхности къ плоскости $z=0$, состоящее въ томъ, что $p$ и $q$ обращаются въ безконечность одного порядка для всѣхъ координатъ $x$, $y$, удовлетворяющихъ извѣстной *функціональной зависимости*, выражается дополнительнымъ дифференціальнымъ уравненіемъ, *тождественно* удовлетворяющимся *всѣми возможными* координатами $x$, $y$.

Перейдемъ къ опредѣленію функцій $u$, $\varphi(u)$, $\psi(u)$, $\varphi'(u)$. Функція $u$ опредѣляется какъ общій корень трехъ уравненій (27), (28) и (30). Дѣйствія, необходимыя для его опредѣленія (говоря вообще) раціональны.

Соотвѣтствующія выраженія въ $x$ и $y$ для $\varphi(u)$ и $\psi(u)$ дадутъ формулы (9) и (13) и наконецъ $\varphi'(u)$ получится изъ уравненія (9) равнымъ $\dfrac{1}{\dfrac{du}{dy}} - x$.

Для окончательнаго опредѣленія интеграла (25) останется квадратура $\displaystyle\int \frac{du}{\psi(u)^2}$, которая представится въ видѣ точнаго дифференціала отъ двухъ перемѣнныхъ.

Само собой разумѣется, что при этомъ способѣ уже нельзя будетъ воспользоваться формулами (4) и (5) для опредѣленія интеграла уравненія (1), а придется прибѣгнуть непосредственно къ формуламъ Лежандра.

Суммируя все предыдущее, видимъ, что и второе положеніе можно считать доказаннымъ.