Рѣшеніе уравненій „электромагнитной теоріи проводниковъ".

А. Грузинцева.

Электромагнитная теорія проводниковъ, данная мной въ 1899 году, приводитъ къ тремъ системамъ дифференціальныхъ уравненій; двѣ изъ нихъ представляютъ связь между электрическими перемѣщеніями или силами и магнитными силами и суть въ тоже время обобщеніе извѣстныхъ уравненій Максвелла или Герца; третья же система даетъ соотношеніе въ видѣ дифференціальныхъ уравненій между перемѣщеніями частицъ эфира и матеріи или другими словами, эта система уравненій—представляетъ движеніе іоновъ подъ вліяніемъ, какъ собственныхъ силъ взаимодѣйствія, такъ и силъ со стороны электрическаго поля. Если обозначимъ (f, g, h) проекціи перемѣщенія частицы эфира; (f_0, g_0, h_0)—матеріальной частицы (іона); x, y, z—координаты,—(α, β, γ) проекціи магнитной силы въ той же точкѣ (x, y, z) проводника: (p, q, r)—составляющія тока проводимости и t время, то упомянутыя системы будутъ:

$$\text{I.} \qquad 4\pi A \frac{\partial(f+f_0)}{dt} + 4\pi A p = \frac{\partial\beta}{dz} - \frac{\partial\gamma}{dy}$$

и два подобныхъ для 2-хъ другихъ координатныхъ осей.

$$\text{II.} \qquad A\mu \frac{\partial\alpha}{dt} = \frac{4\pi}{K}\left[\frac{\partial(h-h_0)}{dy} - \frac{\partial(g-g_0)}{dz}\right]$$

и два подобныхъ для другихъ осей.

Въ этихъ уравненіяхъ K діэлектрическая постоянная среды, μ коэффиціентъ магнитной проницаемости, а A величина обратная скорости свѣта въ пустотѣ (міровомъ эфирѣ).

Эти уравненія того же внѣшняго вида, какъ и въ теоріи дисперсіи Гельмгольца, но существенно отличаются отъ нихъ значеніями составляющихъ тока проводимости; у насъ эти составляющія выражаются такими формулами:

$$p = \frac{4\pi C}{K}(f + \varepsilon f_0) \text{ и т. п.}$$

причемъ C коэффиціентъ электропроводности, а ε постоянный коэффиціентъ, связанный съ K и C и съ соотвѣтствующими коэффиціентами, характеризующими матеріальные іоны, а именно [1]:

$$\varepsilon = \left(\frac{C_0}{C} - 1\right)\frac{K}{K_0}.$$

Приэтомъ току проводимости приданъ болѣе широкій смыслъ.

Уравненія движенія іона имѣютъ видъ:

$$\text{III.} \qquad m\frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} + k\frac{\partial f_0}{\partial t} + a^2 f_0 = f \text{ и т. п.}$$

гдѣ m, k и a^2 постоянные коэффиціенты, имѣющіе опредѣленное механическое значеніе.

Въ приведенныхъ системахъ подлежатъ опредѣленію, какъ функціи координатъ и времени, количества:

$$f, g, h;\ f_0, g_0, h_0 \text{ и } \alpha, \beta, \gamma.$$

Мы не будемъ заниматься общимъ вопросомъ интегрированія этихъ уравненій, для насъ съ точки зрѣнія потребностей физики—достаточно взять нѣкоторыя частныя ихъ рѣшенія, пріемлемыя со стороны тѣхъ общихъ взглядовъ, которые составила современная физика о внутреннемъ механизмѣ электромагнитныхъ (оптическихъ) явленій, а именно, что всѣ эти количества измѣняются *періодически* во времени и въ пространствѣ. Скажемъ болѣе. Для потребностей физики *важны въ нашемъ случаѣ не формы рѣшеній, а тѣ соотношенія между физическими коэффиціентами* (K, C и т. п.), *которые получаются отъ подстановки тѣхъ или другихъ рѣшеній въ наши дифференціальныя уравненія.* Не безполезно привести еще одно соображеніе. Для опредѣленія формы рѣшенія надо знать механизмъ явленія глубже, чѣмъ то позволяетъ намъ современный уровень нашихъ знаній, а потому для избѣжанія гипотезъ, вовсе не требуемыхъ сущностью дѣла, мы можемъ довольствоваться частными рѣшеніями, не предрѣшая вопроса о подробностяхъ механизма разбираемыхъ явленій.

Гельмгольцъ для интегрированія уравненій (I) и (II) воспользовался предположеніемъ, что между f_0 и f, g и g_0, h и h_0 можно допустить постоянное соотношеніе:

[1]) Электромагнитная теорія проводниковъ, стр. 38,—только здѣсь написано ε вм. γ. Ученыя Записки Харьковскаго Университета за 1899 г. Кн. 4.

$$f_0 = uf, \quad g_0 = ug, \quad h_0 = uh \quad (a)$$

причемъ Гельмгольцъ считаетъ u постояннымъ комплекснымъ количествомъ, для опредѣленія котораго онъ полагалъ возможнымъ воспользоваться системой (III), дающей тогда по подстановкѣ значеній (a):

$$u = \frac{1}{a^2 - mp^2 + kp\sqrt{-1}},$$

гдѣ

$$p = \frac{2\pi}{\tau}, \ \tau \text{ — періодъ}$$

и

$$f = Me^Q \text{ и т. п.}$$

$$Q = pt\sqrt{-1} + ax + by + cz \text{ [1]}).$$

Того же пріема держался и я въ своемъ изслѣдованіи.

Но противъ такого пріема можно сдѣлать очень серьезныя возраженія, и они были мнѣ сдѣланы проф. В. А. Стекловымъ.

Дѣйствительно, если

$$f_0 = uf,$$

то уравненіе (III) обращается въ обыкновенное дифференціальное уравненіе:

$$mu\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + ku\frac{\partial f}{\partial t} + (a^2 u - 1) f = 0,$$

которое имѣетъ общее рѣшеніе вида:

$$f = e^{-s_0 t}(F_1 e^{st\sqrt{-1}} + F_2 e^{-st\sqrt{-1}})$$

гдѣ $s_0 = \frac{k}{2m}$, $s^2 = \frac{a^2 u - 1}{mu} - \frac{k^2}{4m^2}$, а F_1 и F_2 функціи только координатъ и подлежатъ опредѣленію изъ остальныхъ нашихъ дифференціальныхъ уравненій. Но эти рѣшенія не пріемлемы уже потому одному, что представляютъ такъ называемыя „затухающія" колебанія, которыхъ оптика не знаетъ; кромѣ того, вопросъ осложняется введеніемъ новыхъ функцій. На этихъ основаніяхъ я искалъ другой путь рѣшенія нашихъ уравненій, не прибѣгая къ гипотезѣ Гельмгольца. Оказалось, что можно придти къ тѣмъ же общимъ результатамъ, которые даны въ нашей „Электромагнитной теоріи проводниковъ", не пользуясь гипотезой Гельмгольца, даже болѣе того,—можно получить условія, при которыхъ допустимо положеніе Гельмгольца. Эта задача и служитъ предметомъ настоящей замѣтки.

---

[1]) Эл. теорія, стр. 42.

Такъ какъ электрическая пертурбація (f, g, h) во всякомъ случаѣ есть періодическая функція времени, то, руководствуясь примѣромъ теоретической акустики (Гельмгольцъ, Кирхгоффъ), можно положить, что

$$f = F_1 \sin pt + F_2 \cos pt \tag{1}$$

причемъ p частота перемѣнъ (т. е. число перемѣнъ тока за 2π—секундъ), а F_1 и F_2 дѣйствительныя функціи координатъ (x, y, z).

Такимъ образомъ уравненіе для опредѣленія движенія матеріальнаго іона будетъ:

$$m\frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} + k\frac{\partial f_0}{\partial t} + a^2 f_0 = F_1 \sin pt + F_2 \cos pt, \tag{2}$$

т. е. обыкновенное уравненіе со второй частью.

Проинтегрируемъ сначала уравненіе:

$$m\frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} + k\frac{\partial f_0}{\partial t} + a^2 f_0 = 0. \tag{3}$$

Пусть

$$f_0 = ce^{st}$$

будетъ частное рѣшеніе уравненія (3).

Тогда для опредѣленія s имѣемъ уравненіе:

$$ms^2 + ks + a^2 = 0,$$

отсюда находимъ:

$$s = -s_0 \pm p_0\sqrt{-1},$$

гдѣ

$$s_0 = \frac{k}{2m}, \quad p_0 = \frac{\sqrt{4a^2m - k^2}}{2m} \tag{4}$$

причемъ k^2 вообще мало и меньше $4a^2m$.

Таким образомъ полное рѣшеніе уравненія (3) будетъ:

$$f_0 = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} \tag{5}$$

гдѣ

$$s_1 = -s_0 + p_0\sqrt{-1}, \quad s_2 = -s_0 - p_0\sqrt{-1}. \tag{6}$$

Подставляя теперь значеніе (5) въ первоначальное уравненіе (2), получимъ для опредѣленія постоянныхъ c_1 и c_2 слѣдующія два уравненія:

$$e^{s_1 t}\frac{\partial c_1}{\partial t} + e^{s_2 t}\frac{\partial c_2}{\partial t} = 0$$

$$ms_1 e^{s_1 t}\frac{\partial c_1}{\partial t} + ms_2 e^{s_2 t}\frac{\partial c_2}{\partial t} = F_1 \sin pt + F_2 \cos pt.$$

Отсюда находимъ:

$$\left.\begin{aligned} m(s_1-s_2)\,e^{s_1t}\frac{\partial c_1}{\partial t} &= F_1\sin pt+F_2\cos pt,\\ m(s_1-s_2)\,e^{s_2t}\frac{\partial c_2}{\partial t} &= -F_1\sin pt-F_2\cos pt.\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

Для интегрированія этихъ уравненій предварительно замѣтимъ, что вообще:

$$\int Fe^{-st}\sin pt\,dt=-\frac{Fe^{-st}\sin pt}{s}+\frac{p}{s}\int Fe^{-st}\cos pt\,dt+C',$$
$$\int Fe^{-st}\cos pt\,dt=-\frac{Fe^{-st}\cos pt}{s}-\frac{p}{s}\int Fe^{-st}\sin pt\,dt+C'',$$

Отсюда найдемъ:

$$\int F_1e^{-st}\sin pt\,dt=-\frac{F_1e^{-st}}{p^2+s^2}(s\sin pt+p\cos pt)+[C'+\frac{p}{s}C'']\frac{s^2}{s^2+p^2},$$
$$\int F_2e^{-st}\cos pt\,dt=+\frac{F_2e^{-st}}{p^2+s^2}(p\sin pt-s\cos pt)+[C''-\frac{p}{s}C']\frac{s^2}{s^2+p^2}$$

причемъ C' и C'' постоянныя интегрированія, которыя могутъ быть функціями x, y, z.

Пользуясь этими интегралами, изъ уравненій (7) находимъ сначала c_1, а затѣмъ c_2, замѣняя въ c_1 величину s_1 черезъ s_2 и обратно:

$$c_1=\frac{e^{-s_1t}}{m(s_1-s_2)}\left[\frac{-F_1s_1+F_2p}{p^2+s_1^2}\sin pt-\frac{F_1p+F_2s_1}{p^2+s_1^2}\cos pt\right]+c';$$
$$c_2=\frac{e^{-s_2t}}{m(s_1-s_2)}\left[\frac{F_1s_2-F_2p}{p^2+s_2^2}\sin pt-\frac{F_1p+F_2s_2}{p^2+s_2^2}\cos pt\right]+c'',$$

причемъ c' и c'' новыя постоянныя.

Подставимъ теперь эти значенія c_1 и c_2 въ равенство (5), по приведеніи и сокращеніи на (s_1-s_2) получимъ:

$$f_0=\frac{[F_1(s_1s_2-p^2)-F_2p(s_1+s_2)]\sin pt+[F_1p(s_1+s_2)+F_2(s_1s_2-p^2)]\cos pt}{m(p^2+s_1^2)(p^2+s_2^2)}+$$
$$+c'e^{s_1t}+c''e^{s_2t}$$

Но при помощи равенствъ (6) находимъ:

$$s_1 s_2 = s_0^2 + p_0^2; \quad s_1 + s_2 = -2s_0;$$
$$p^2 + s_1^2 = p^2 + s_0^2 - p_0^2 - 2p_0 s_0 \sqrt{-1}; \quad p^2 + s_2^2 = p^2 + s_0^2 - p_0^2 + 2p_0 s_0 \sqrt{-1};$$

а потому, если положимъ для краткости письма:

$$\frac{p_0^2 - p^2 + s_0^2}{m[(p^2 - p_0^2 + s_0^2)^2 + 4p_0^2 s_0^2]} = A; \quad \frac{2ps_0}{m[(p^2 - p_0^2 + s_0^2)^2 + 4p_0^2 s_0^2]} = B, \tag{8}$$

то получимъ для f_0 выраженіе:

$$f_0 = (AF_1 + BF_2)\sin pt - (BF_1 - AF_2)\cos pt + f_0' e^{-s_0 t}\sin p_0 t + \\ + f_0'' e^{-s_0 t}\cos p_0 t; \tag{9}$$

причемъ f_0' и f_0'' будутъ или постоянными или функціями x, y, z.

Подобныя же формулы получимъ для g_0 и h_0, замѣняя соотвѣтственно F_1, F_2, f_0', f_0'' черезъ G_1, G_2, g_0', g_0'' и H_1, H_2, h_0', h_0''.

Прежде чѣмъ идти дальше, дадимъ коэффиціентамъ A и B другой видъ. Подставляя въ нихъ значенія p_0 и s_0 изъ равенствъ (4), получимъ по приведеніи:

$$A = \frac{a^2 - mp^2}{(a^2 - mp^2)^2 + k^2 p^2}, \quad B = \frac{kp}{(a^2 - mp^2)^2 + k^2 p^2}. \tag{10}$$

Зная f_0, g_0, h_0, составляемъ выраженіе:

$$f + \varepsilon f_0 = [(1 + \varepsilon A) F_1 + \varepsilon B F_2]\sin pt - [\varepsilon B F_1 - (1 + \varepsilon A) F_2]\cos pt + \\ + \varepsilon f_0' e^{-s_0 t}\sin p_0 t + \varepsilon f_0'' e^{-s_0 t}\cos p_0 t;$$

и слѣдовательно:

$$f - f_0 = [(1 - A) F_1 - BF_2]\sin pt + [BF_1 + (1 - A) F_2]\cos pt - \\ - f_0' e^{-s_0 t}\sin p_0 t - f_0'' e^{-s_0 t}\cos p_0 t;$$

$$f + f_0 = [(1 + A) F_1 + BF_2]\sin pt - [BF_1 - (1 + A) F_2]\cos pt + \\ + f_0' e^{-s_0 t}\sin p_0 t + f_0'' e^{-s_0 t}\cos p_0 t.$$

Подобныя же выраженія получимъ для g_0 и h_0.

Подставимъ теперь значенія $f - f_0$ и $h - h_0$ во второе уравненіе системы (3) стран. 36-ой „Эл. теоріи проводниковъ“; по приведеніи, найдемъ:

$$\frac{AK\mu}{4\pi}\frac{\partial\beta}{\partial t}=\left[(1-A)\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial H_1}{\partial x}\right)-B\left(\frac{\partial F_2}{\partial z}-\frac{\partial H_2}{\partial x}\right)\right]\sin pt+$$
$$+\left[B\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial H_1}{\partial x}\right)+(1-A)\left(\frac{\partial F_2}{\partial z}-\frac{\partial H_2}{\partial x}\right)\right]\cos pt-$$
$$-e^{-s_0t}\left(\frac{\partial f_0'}{\partial z}-\frac{\partial h_0'}{\partial x}\right)\sin p_0t-e^{-s_0t}\left(\frac{\partial f_0''}{\partial z}-\frac{\partial h_0''}{\partial x}\right)\cos p_0t$$

причемъ f_0', f_0'', h_0', h_0'' предполагаются функціями x, y, z; если же они постоянныя количества, то послѣдніе члены съ $\sin p_0t$ и $\cos p_0t$ исчезаютъ.

Интегрируя послѣднее уравненіе по t, найдемъ:

$$\frac{AK\mu p}{4\pi}\beta=-\left[(1-A)\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial H_1}{\partial x}\right)-B\left(\frac{\partial F_2}{\partial z}-\frac{\partial H_2}{\partial x}\right)\right]\cos pt+$$
$$+\left[B\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial H_1}{\partial x}\right)+(1-A)\left(\frac{\partial F_2}{\partial z}-\frac{\partial H_2}{\partial x}\right)\right]\sin pt+$$
$$+\frac{pe^{-s_0t}}{p_0^2+s_0^2}\left(\frac{\partial f_0'}{\partial z}-\frac{\partial h_0'}{\partial x}\right)(s_0\sin p_0t+p_0\cos p_0t)-$$
$$-\frac{pe^{-s_0t}}{p_0^2+s_0^2}\left(\frac{\partial f_0''}{\partial z}-\frac{\partial h_0''}{\partial x}\right)(p_0\sin p_0t-s_0\cos p_0t)+\beta_0$$

причемъ β_0 функція x, y, z или постоянное.

Подобнымъ же образомъ найдемъ:

$$\frac{AK\mu p}{4\pi}\gamma=-\left[(1-A)\left(\frac{\partial G_1}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)-B\left(\frac{\partial G_2}{\partial x}-\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)\right]\cos pt+$$
$$+\left[B\left(\frac{\partial G_1}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)+(1-A)\left(\frac{\partial G_2}{\partial x}-\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)\right]\sin pt+$$
$$+\frac{pe^{-s_0t}}{p_0^2+s_0^2}\left(\frac{\partial g_0'}{\partial x}-\frac{\partial f_0'}{\partial y}\right)(s_0\sin p_0t+p_0\cos p_0t)-$$
$$-\frac{pe^{-s_0t}}{p_0^2+s_0^2}\left(\frac{\partial g_0''}{\partial x}-\frac{\partial f_0''}{\partial y}\right)(p_0\sin p_0t-s_0\cos p_0t)+\gamma_0\,.$$

Изъ этихъ двухъ выраженій составляемъ правыя части уравненій (I):

$$\frac{\partial\beta}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial y}=\frac{4\pi}{AK\mu p}\left\{\cos pt\left[(1-A)\left(\frac{\partial\Theta_1}{\partial x}-\varDelta F_1\right)-B\left(\frac{\partial\Theta_2}{\partial x}-\varDelta F_2\right)\right]+\right.$$
$$+\sin pt\left[B\left(\varDelta F_1-\frac{\partial\Theta_1}{\partial x}\right)+(1-A)\left(\varDelta F_2-\frac{\partial\Theta_2}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial\beta_0}{\partial z}-\frac{\partial\gamma_0}{\partial y}+$$
$$+\frac{pe^{-s_0t}}{p_0^2+s_0^2}\left[\begin{aligned}&(s_0\sin p_0t+p_0\cos p_0t)\left(\varDelta f_0'-\frac{\partial\theta_0'}{\partial x}\right)\\&-(p_0\sin p_0t-s_0\cos p_0t)\left(\varDelta f_0''-\frac{\partial\theta_0''}{\partial x}\right)\end{aligned}\right]\tag{I}$$

причемъ положено, какъ принято:

$$\Theta_i = \frac{\partial F_i}{\partial x} + \frac{\partial G_i}{\partial y} + \frac{\partial H_i}{\partial z}, \quad \theta_0^i = \frac{\partial f_0^i}{\partial x} + \frac{\partial g_0^i}{\partial y} + \frac{\partial h_0^i}{\partial z},$$

и для i надо взять послѣдовательно 1 и 2 или $'$ и $''$.

Точно также для лѣвой части перваго уравненія системы (1) стр. 35 составимъ выраженіе:

$$\begin{aligned}4\pi A \frac{\partial(f+f_0)}{\partial t} + 4\pi A p = \frac{4\pi A}{K}\{(Kp[(1+A)F_1 + BF_2] - \\ - 4\pi C[\varepsilon BF_1 - (1+\varepsilon A)F_2])\cos pt + (Kp[BF_1 - (1+A)F_2] + \\ + 4\pi C[(1+\varepsilon A)F_1 + \varepsilon BF_2])\sin pt - \\ - f_0' e^{-s_0 t}[(Ks_0 - 4\pi C\varepsilon)\sin p_0 t - Kp_0 \cos p_0 t] - \\ - f_0'' e^{-s_0 t}[(Ks_0 - 4\pi C\varepsilon)\cos p_0 t + Kp_0 \sin p_0 t]\}. \qquad \text{(II)}\end{aligned}$$

Полагая теперь для простоты письма:

$$\left.\begin{aligned}M &= Kp(1+A) - 4\pi CB\varepsilon \\ N &= KpB + 4\pi C(1+A\varepsilon)\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

находимъ по сравненіи (I) и (II):

$$\begin{aligned}\cos pt\left[(1-A)\left(\frac{\partial\Theta_1}{\partial x} - \Delta F_1\right) - B\left(\frac{\partial\Theta_2}{\partial x} - \Delta F_2\right)\right] + \\ + \sin pt\left[B\left(\Delta F_1 - \frac{\partial\Theta_1}{\partial x}\right) + (1-A)\left(\Delta F_1 - \frac{\partial\Theta_2}{\partial x}\right)\right] + \\ + \frac{pe^{-s_0 t}}{p_0^2+s_0^2}\left[(s_0 \sin p_0 t + p_0 \cos p_0 t)\left(\Delta f_0' - \frac{\partial\theta_0'}{\partial x}\right) - (p_0 \sin p_0 t - s_0 \cos p_0 t)\left(\Delta f_0'' - \frac{\partial\theta_0''}{\partial x}\right)\right] = \\ = A^2\mu p\{\cos pt[MF_1 + NF_2] + \sin pt[NF_1 - MF_2] - \\ - f_0' e^{-s_0 t}[(Ks_0 - 4\pi C\varepsilon)\sin p_0 t - Kp_0 \cos p_0 t] - \\ - f_0'' e^{-s_0 t}[(Ks_0 - 4\pi C\varepsilon)\cos p_0 t + Kp_0 \sin p_0 t]\}\end{aligned}$$

или положивъ:

$$X = (1-A)\left(\frac{\partial\Theta_1}{\partial x} - \Delta F_1\right) - B\left(\frac{\partial\Theta_2}{\partial x} - \Delta F_2\right) - A^2\mu p(MF_1 + NF_2),$$

$$Y = B\left(\frac{\partial\Theta_1}{\partial x} - \Delta F_1\right) + (1-A)\left(\frac{\partial\Theta_2}{\partial x} - \Delta F_2\right) + A^2\mu p(NF_1 - MF_2),$$

$$U = \frac{pp_0}{p_0^2+s_0^2}\left(\frac{\partial\theta_0'}{\partial x} - \Delta f_0'\right) + A^2\mu pp_0 K f_0' + \frac{ps_0}{p_0^2+s_0^2}\left(\frac{\partial\theta_0''}{\partial x} - \Delta f_0''\right) - A^2\mu p(Ks_0 - 4\pi C\varepsilon)f_0'',$$

$$V = \frac{ps_0}{p_0^2+s_0^2}\left(\frac{\partial\theta_0'}{\partial x} - \Delta f_0'\right) - A^2\mu p(Ks_0 - 4\pi C\varepsilon)f_0' - \frac{pp_0}{p_0^2+s_0^2}\left(\frac{\partial\theta_0''}{\partial x} - \Delta f_0''\right) - A^2\mu pp_0 K f_0''$$

получимъ:

$$X \cos pt - Y \sin pt = e^{-s_0 t}(U \cos p_0 t + V \sin p_0 t). \qquad (A)$$

Такъ какъ мы можемъ установить сами одно условіе для опредѣленія функцій F_1 и F_2, то выберемъ ихъ такъ, чтобы удовлетворялось равенство:

$$(1-A)\left(\frac{\partial \Theta_1}{\partial x} - \varDelta F_1\right) - B\left(\frac{\partial \Theta_2}{\partial x} - \varDelta F_2\right) = A^2 \mu p (MF_1 + NF_2). \quad (a)$$

Поэтому уравненіе (A) обратится въ слѣдующее:

$$-Y \sin pt = e^{-s_0 t}(U \cos p_0 t + V \sin p_0 t). \qquad (B)$$

Это равенство должно существовать для всякаго значенія t, а потому, полагая $t=0$, находимъ:

$$U = 0.$$

Теперь равенство (B) будетъ:

$$-Y \sin pt = e^{-s_0 t} V \sin p_0 t.$$

Полагая здѣсь:

$$t = \frac{\pi}{p}, \quad \frac{\pi}{p_0},$$

находимъ

$$Y = 0, \quad V = 0$$

или, раскрывая значеніе Y'а:

$$B\left(\frac{\partial \Theta_1}{\partial x} - \varDelta F_1\right) + (1-A)\left(\frac{\partial \Theta_2}{\partial x} - \varDelta F_2\right) = -A^2 \mu p (NF_1 - MF_2). \quad (b)$$

Прежде чѣмъ идти дальше, остановимся на уравненіяхъ (a) и (b). Изъ нихъ находимъ:

$$\Theta_1 = 0, \quad \Theta_2 = 0.$$

Итакъ получаемъ для F_1 и F_2 уравненія:

$$\left.\begin{aligned} -(1-A)\varDelta F_1 + B\varDelta F_2 &= A^2 \mu p (MF_1 + NF_2) \\ B\varDelta F_1 + (1-A)\varDelta F_2 &= A^2 \mu p (NF_1 - MF_2) \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Эти уравненія обладаютъ интереснымъ свойствомъ. Если замѣнимъ въ нихъ F_1 черезъ $-F_2$, а F_2 черезъ F_1, то они обращаются одно въ другое, т. е. система (12) остается неизмѣнной. Отсюда заключаемъ, что если выраженіе

$$f = F_1 \sin pt + F_2 \cos pt \text{ и т. п.}$$

удовлетворяетъ нашимъ дифференціальнымъ уравненіямъ, то и выраженіе

$$f = -F_2 \sin pt + F_1 \cos pt \text{ и т. п.}$$

тоже удовлетворяетъ имъ. Но всѣ наши уравненія линейны, а потому они будутъ удовлетворяться и такимъ рѣшеніемъ для f:

$$(-F_2 \sin pt + F_1 \cos pt) + \sqrt{-1}(F_1 \sin pt + F_2 \cos pt) = (F_1 + F_2\sqrt{-1})e^{pt\sqrt{-1}}.$$

Къ тому же результату мы придемъ, если, помноживъ второе уравненіе въ системѣ (12) на $-\sqrt{-1}$, сложимъ съ первымъ. Дѣйствительно, мы получаемъ тогда:

$$-[(1-A) + B\sqrt{-1}]\,\Delta(F_1 + \sqrt{-1}\,F_2) =$$
$$= A^2\mu p(M - \sqrt{-1}\,N)(F_1 + \sqrt{-1}\,F_2)$$

или, если положимъ:

$$F_1 + \sqrt{-1}\,F_2 = F \tag{13}$$

$$\Delta F = \frac{A^2\mu p(M - \sqrt{-1}\,N)}{(A-1) - B\sqrt{-1}}\,F. \tag{14}$$

Рѣшивъ это уравненіе, мы знаемъ F_1 и F_2. Намъ достаточно взять какое-нибудь частное рѣшеніе для F, — лишь бы оно представляло періодическую функцію (x, y, z).

Положимъ:

$$F = F_0 e^{ax+by+cz}, \tag{15}$$

гдѣ F_0 и a, b, c комплексныя постоянныя.

Подставляя въ (14), находимъ:

$$a^2 + b^2 + c^2 = -\frac{A^2\mu p(M - N\sqrt{-1})}{1 - A + B\sqrt{-1}}. \tag{16}$$

Если подставимъ сюда значенія M, N, A и B, положивъ предварительно:

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= -A^2p^2V^2e^{2v\sqrt{-1}} \\ \text{и}\qquad A - B\sqrt{-1} &= w\,,\quad \frac{4\pi C}{p} = D \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

то получимъ:

$$K\mu - \frac{1+\varepsilon w}{1-w}D\mu\sqrt{-1} = \frac{1-w}{1+w}V^2e^{2v\sqrt{-1}}. \tag{I}$$

А это равенство *есть* тождественно наше дисперсіонное соотношеніе (I) „Электромагнитной теоріи проводниковъ“ (стр. 44); причемъ количество w при помощи равенства (10) стр. 6 настоящей статьи можетъ быть представлено въ слѣдующей формѣ:

$$w = \frac{1}{a^2 - mp^2 + kp\sqrt{-1}}$$

т. е. оно тождественно съ Гельмгольцевскимъ u.

Итакъ мы получили наше основное дисперсіонное соотношеніе (I), не прибѣгая къ гипотезѣ Гельмгольца.

Нашъ анализъ даетъ сверхъ того и условія, при которыхъ гипотеза Гельмгольца дѣлается простымъ частнымъ случаемъ нашихъ соображеній. Дѣйствительно, стоитъ только принять, что

$$f_0' = \text{const.}, \quad f_0'' = \text{const.},$$

какъ условія:

$$U = 0, \quad V = 0$$

дадутъ:

$$f_0' = 0, \quad f_0'' = 0,$$

а тогда рѣшеніе для f_0 будетъ:

$$f_0 = wf.$$

Но къ этимъ частнымъ условіямъ нѣтъ необходимости прибѣгать, какъ мы видѣли, для полученія дисперсіоннаго соотношенія.

Въ заключеніе замѣтимъ, что количества a, b, c должны имѣть видъ:

$$a = -\alpha_0 + \alpha\sqrt{-1}$$
$$b = -\beta_0 + \beta\sqrt{-1}$$
$$c = -\gamma_0 + \gamma\sqrt{-1}$$

и α_0, β_0, γ_0 должны быть положительны, чтобы лучи могли считаться поглощаемыми срединой.

Предыдущій анализъ можно значительно упростить, если сразу ввести комплексныя величины.

Положимъ, что напередъ выбрали для f, g, h рѣшеніе вида:

$$f = Fe^{pt\sqrt{-1}}, \quad g = Ge^{pt\sqrt{-1}}, \quad h = He^{pt\sqrt{-1}};$$

гдѣ F, G, H комплексныя функціи координатъ (x, y, z); и

$$p = \frac{2\pi}{\tau}$$

и τ — періодъ измѣненія кинетическаго состоянія средины.

Такимъ образомъ уравненіе движенія іона будетъ:

$$m\frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2}+k\frac{\partial f_0}{\partial t}+a^2 f_0=Fe^{pt\sqrt{-1}} \text{ и т. п.}$$

Отсюда находимъ, какъ и прежде:

$$f=uf+f_0'e^{s_1 t}+f_0''e^{s_2 t} \text{ и т. п.}$$

гдѣ

$$u=\frac{1}{a^2-mp^2+kp\sqrt{-1}}.$$

Составляя затѣмъ уравненіе (3) стр. 36-й и (1) стр. 35-й находимъ по сравненіи результатовъ слѣдующее общее соотношеніе:

$$A^2K\mu\{(1+u)p\sqrt{-1}\,Fe^{pt\sqrt{-1}}+\frac{4\pi C}{K}(1+\varepsilon u)\,Fe^{pt\sqrt{-1}}+$$

$$+f_0's_1e^{s_1t}+f_0''s_2e^{s_2t}+\frac{4\pi C\varepsilon}{K}(f_0'e^{s_1t}+f_0''e^{s_2t})\}=\frac{1-u}{p\sqrt{-1}}\left(\varDelta F-\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)-$$

$$-\frac{e^{s_1t}}{s_1}\left(\varDelta f_0'-\frac{\partial\theta_0'}{\partial x}\right)-\frac{s^{s_2t}}{s_2}\left(\varDelta f_0''-\frac{\partial\theta_0''}{\partial x}\right) \text{ и т. д.}$$

причемъ:

$$\Theta=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial z}.$$

Но мы всегда имѣемъ право выбрать функціи F, G и H такими, чтобы онѣ удовлетворяли уравненіямъ вида:

$$A^2K\mu\,[(1+u)p\sqrt{-1}+\frac{4\pi C}{K}(1+\varepsilon u)]\,F=\frac{1-u}{p\sqrt{-1}}\left(\varDelta F-\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)$$

или проще:

$$\varDelta F-\frac{\partial\Theta}{\partial x}=-A^2p^2\left[\frac{1+u}{1-u}K\mu-\frac{1+\varepsilon u}{1-u}D\mu\sqrt{-1}\right]F$$

и подобныя уравненія для G и H, причемъ положено:

$$\frac{4\pi C}{p}=D.$$

Положимъ для краткости письма:

$$\frac{1+u}{1-u}K\mu-\frac{1+\varepsilon u}{1-u}D\mu\sqrt{-1}=V^2e^{2v\sqrt{-1}},$$

тогда предыдущее уравненіе будетъ:

$$\Delta F - \frac{\partial \Theta}{\partial x} = - A^2 p^2 V^2 e^{2v\sqrt{-1}} F.$$

Изъ этихъ уравненій находимъ, что

$$\Theta = 0,$$

а потому окончательно уравненіе для опредѣленія F будетъ:

$$\Delta F = - A^2 p^2 V^2 e^{2v\sqrt{-1}} F.$$

Простое частное рѣшеніе, удовлетворяющее условіямъ періодичности въ пространствѣ, будетъ обычнаго вида:

$$F = F_0 e^{ax + by + cz}$$

гдѣ a, b, c комплексныя постоянныя.

Подстановка въ наше уравненіе дастъ:

$$a^2 + b^2 + c^2 = - A^2 p^2 V^2 e^{2v\sqrt{-1}},$$

т. е. данное раньше равенство:

$$\frac{1+u}{1-u} K\mu - \frac{1+\varepsilon u}{1-u} D\mu\sqrt{-1} = V^2 e^{2v\sqrt{-1}}$$

есть дисперсіонное соотношеніе нашей электромагнитной теоріи проводниковъ.

Для опредѣленія функцій f_0', f_0'', ... безъ труда находимъ уравненія:

$$\Delta f_0' - \frac{\partial \theta_0'}{\partial x} = - A^2 \mu (s_1^2 + 4\pi C \varepsilon s_1) f_0',$$

и

$$\Delta f_0'' - \frac{\partial \theta_0''}{\partial x} = - A^2 \mu (s_2^2 + 4\pi C \varepsilon s_2) f_0''.$$

Простѣйшія рѣшенія ихъ:

$$f_0' = \text{const.} = 0, \quad f_0'' = \text{const.} = 0.$$

Можно взять для f еще болѣе общее рѣшеніе вида:

$$f = F_1 e^{pt\sqrt{-1}} + F_2 e^{-pt\sqrt{-1}}$$

и подобрать функціи F_1 и F_2 такъ, чтобы окончательно f было дѣйствительной функціей координатъ и времени. Получается тоже дисперсіонное соотношеніе.