Sur la déviation pendant la chute libre d'un pesant.

C. Russyan.

On sait, qu'un pesant éprouve pendant la chute libre la déviation de la direction verticale du point de départ. La déviation composante, perpendiculaire au plan méridien de ce point, est déjà detérminée par Poisson („Sur le mouvement des projectils" J. de l'Ec. Pol., t. 16, p. 32): elle est dirigée vers l'est et est égale à

$$\frac{1}{3}\omega g \operatorname{cs}\varphi t^3$$

au petit de l'ordre ω près, où ω est la vitesse angulaire de la rotation du globe terrestre et φ est la latitude astronomique du point de départ. Quant à la déviation composante, située dans le plan méridien, il dominait l'opinion, que cette dernière soit dirigée vers le sud et soit égale à

$$\frac{1}{6}\omega^2 g \operatorname{sn}\varphi \operatorname{cs}\varphi t^4$$

dans la supposition de la forme sphérique du globe terrestre (v. p. ex. P. Appell: „Traité de mécanique rationelle" t. II, p. 279). M. de Sparre démontre (C. R., 1905; Bull. de la Soc. math. de France, 1906), que cette déviation est dirigée vers le nord et est égale à

$$\frac{1}{8}\omega^4 L \operatorname{sn}^3\varphi \operatorname{cs}\varphi t^4,$$

où L est la distance du point de départ du centre de la Terre. Je démontre dans ce que va suivre, que la déviation en question est réellement dirigée vers le nord, et que la valeur donnée par M. de Sparre est la partie principale du premier terme de son dévellopement en fonction du temps.

Soit 0 le point de départ d'un pesant. L'axe positive $0Z$ soit dirigée vers le nadire; l'axe positive $0X$, située dans le plan méridien, soit dirigée vers le sud; l'axe positive $0Y$, perpendiculaire à ce plan, soit dirigée vers l'est.

Soit, enfin, φ la latitude astronomique du point 0 en valeur absolue, comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Les équations du mouvement relatif de ce pesant sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = p_x + \omega^2 \operatorname{sn}\varphi\,(x \operatorname{sn}\varphi - z \operatorname{cs}\varphi + h) + 2\omega \operatorname{sn}\varphi \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = p_y + \omega^2 y - 2\omega\left(\frac{dx}{dt}\operatorname{sn}\varphi - \frac{dz}{dt}\operatorname{cs}\varphi\right)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = p_z - \omega^2 \operatorname{cs}\varphi\,(x \operatorname{sn}\varphi - z \operatorname{cs}\varphi + h) - 2\omega \operatorname{cs}\varphi \frac{dy}{dt}$$

où p_x, p_y, p_z sont les composantes de l'accéleration, due à l'attraction newtonienne, et h est la distance du point de départ de l'axe de la rotation.

Si ξ, 0, ζ sont les coordonnées du centre du globe terrestre, on a dans la supposition que la Terre soit la sphère homogène, que

$$p_x = \frac{M(\xi - x)}{[(\xi - x)^2 + y^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}}, \quad p_y = -\frac{My}{[(\xi - x)^2 + y^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}},$$

$$p_z = \frac{M(\zeta - z)}{[(\xi - x)^2 + y^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}}.$$

Si $L = \sqrt{\xi^2 + \zeta^2}$ est la distance du point de départ du centre de la Terre, on a que

$$p_x = \frac{M}{L^3}(\xi - x)(1+\alpha)^{-3/2}, \quad p_y = -\frac{M}{L^3}y(1+\alpha)^{-3/2}, \quad p_z = \frac{M}{L^3}(\zeta - z)(1+\alpha)^{-3/2}$$

où

$$\alpha = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2x\xi - 2z\zeta}{L^2}.$$

Les composantes de l'accéleration newtonienne au point de départ sont:

$$X_0 = \frac{M}{L^3}\xi, \quad Y_0 = 0, \quad Z_0 = \frac{M}{L^3}\zeta.$$

de manière que

$$p_x = X_0 - \frac{M}{L^3}x(1+\alpha)^{-3/2} + \frac{M}{L^3}\xi[(1+\alpha)^{-3/2} - 1], \quad p_y = -\frac{M}{L^3}y(1+\alpha)^{-3/2},$$

$$p_z = Z_0 - \frac{M}{L^3}z(1+\alpha)^{-3/2} + \frac{M}{L^3}\zeta[(1+\alpha)^{-3/2} - 1].$$

Mais comme

$$\omega^2 \operatorname{sn}\varphi\,(x \operatorname{sn}\varphi - z \operatorname{cs}\varphi + h), \quad \omega^2 y, \quad -\omega^2 \operatorname{cs}\varphi\,(x \operatorname{sn}\varphi - z \operatorname{cs}\varphi + h)$$

sont les composantes de l'accéleration centrifuge au point (xyz), celles au point de départ sont

$$\omega^2 h \operatorname{sn}\varphi\,, \qquad 0\,, \qquad -\omega^2 h \operatorname{cs}\varphi\,.$$

Les expressions donc

$$X_0 + \omega^2 h \operatorname{sn}\varphi\,, \quad 0\,, \quad Z_0 - \omega^2 h \operatorname{cs}\varphi\,.$$

sont les composantes de l'accéleration de la pesanteur au point 0, dirigée vers le nadire, et on a que

$$X_0 + \omega^2 h \operatorname{sn}\varphi = 0\,, \qquad Z_0 - \omega^2 h \operatorname{cs}\varphi = g$$

ou que

$$X_0 = -\,\omega^2 h \operatorname{sn}\varphi\,, \qquad Z_0 = g + \omega^2 h \operatorname{cs}\varphi$$

où g est l'accéleration de la pesanteur au point de départ. On a donc après la substitution que

$$p_x = -\omega^2 h \operatorname{sn}\varphi - \frac{M}{L^3} x (1+\alpha)^{-3/2} + \frac{M}{L^3}\xi\left[(1+\alpha)^{-3/2} - 1\right],\ p_y = -\frac{M}{L^3} y (1+\alpha)^{-3/2}$$

$$p_z = g + \omega^2 h \operatorname{cs}\varphi - \frac{M}{L^3} z (1+\alpha)^{-3/2} + \frac{M}{L^3}\zeta\left[(1+\alpha)^{-3/2} - 1\right].$$

En substituant ces valeurs des p_x, p_y, p_z dans les équations du mouvement relatif, nous les obtenons dans la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{M}{L^3} x (1+\alpha)^{-3/2} + \frac{M}{L^3}\xi\left[(1+\alpha)^{-3/2} - 1\right] + \omega^2 \operatorname{sn}\varphi\,(x \operatorname{sn}\varphi - z \operatorname{cs}\varphi) + 2\omega \operatorname{sn}\varphi \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{M}{L^3} y (1+\alpha)^{-3/2} + \omega^2 y - 2\omega\left(\frac{dx}{dt}\operatorname{sn}\varphi - \frac{dz}{dt}\operatorname{cs}\varphi\right)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g - \frac{M}{L^3} z (1+\alpha)^{-3/2} + \frac{M}{L^3}\zeta\left[(1+\alpha)^{-3/2} - 1\right] - \omega^2 \operatorname{cs}\varphi\,(x \operatorname{sn}\varphi - z \operatorname{cs}\varphi) - 2\omega \operatorname{cs}\varphi \frac{dy}{dt}\,.$$

Si p_0 est l'accéleration newtonienne au point de départ, on a que les composantes X_0 Z_0 sont

$$X_0 = p_0 \frac{\xi}{L}, \qquad Z_0 = p_0 \frac{\zeta}{L}$$

et

$$p_0 = \frac{M}{L^2}$$

mais comme d'un autre coté

$$X_0 = -\,\omega^2 h \operatorname{sn}\varphi\,, \qquad Z_0 = g + \omega^2 h \operatorname{cs}\varphi\,,$$

il en résulte que

$$\xi = -\frac{L}{p_0}\omega^2 h \operatorname{sn}\varphi\,, \qquad \zeta = \frac{L}{p_0}(g + \omega^2 h \operatorname{cs}\varphi)\,.$$

En substituant ces valeurs dans les équations du mouvement, nous obtenons

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{p_0}{L} x(1+\alpha)^{-3/2} - \omega^2 h \operatorname{sn}\varphi [(1+\alpha)^{-3/2} - 1] + \omega^2 \operatorname{sn}\varphi (x \operatorname{sn}\varphi - z \operatorname{cs}\varphi) + 2\omega \operatorname{sn}\varphi \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{p_0}{L} y(1+\alpha)^{-3/2} + \omega^2 y - 2\omega \left(\frac{dx}{dt} \operatorname{sn}\varphi - \frac{dz}{dt} \operatorname{cs}\varphi \right)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g - \frac{p_0}{L} z(1+\alpha)^{-3/2} + (g + \omega^2 h \operatorname{cs}\varphi)[(1+\alpha)^{-3/2} - 1] - \omega^2 \operatorname{cs}\varphi (x \operatorname{sn}\varphi - z \operatorname{cs}\varphi) - 2\omega \operatorname{cs}\varphi \frac{dy}{dt}.$$

où $$\alpha = \frac{(x^2 + y^2 + z^2) p_0 + 2xL\,\omega^2 h \operatorname{sn}\varphi - 2zL(g + \omega^2 h \operatorname{cs}\varphi)}{p_0 L^2}$$

Comme les coordonnées $x\,y\,z$ du mobile sont pratiquement très-petites par rapport à L, la fonction

$$(1+\alpha)^{-3/2}$$

est holomorphe aux environs du point (0, 0, 0) et les équations différentielles du mouvement possèdent trois intégrales holomorphes

$$x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots$$
$$y = b_0 + b_1 t + b_1 t^2 + \ldots$$
$$c = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots$$

Comme les coordonnées et la vitesse initiales sont nulles, on a que

$$a_0 = a_1 = b_0 = b_1 = c_0 = c_1 = 0,$$

et

$$x = a_2 t^2 + \ldots \qquad y = b_2 t^2 + \ldots \qquad z = c_2 t^2 + \ldots.$$

Par conséquent la fonction

$$(1+\alpha)^{-3/2},$$

égale à

$$1 - \frac{3}{2}\alpha + \frac{15}{8}\alpha^2 - \ldots,$$

se développe en série

$$1 - \frac{3}{p_0 L}[\omega^2 h \operatorname{sn}\varphi\, a_2 - c_2(g + \omega^2 h \operatorname{cs}\varphi)]\, t^2 + \ldots;$$

En substituant dans les équations du mouvement au lieu des x, y, z, $(1+\alpha)^{-3/2}$ leurs développements et en égalant les coëfficents des mêmes degrés de t, nous obtenons la série d'équations

$$a_2 = 0 \quad b_2 = 0 \quad c_2 = g_2$$

$$a_3 = 0 \quad b_3 = \frac{1}{3}\omega g \operatorname{cs}\varphi, \quad c_3 = 0$$

$$a_4 = \frac{1}{8}\omega^2 g \operatorname{sn}\varphi\left(\operatorname{cs}\varphi - \frac{h}{L}\frac{g}{p_0}\right) - \frac{1}{8}\omega^4\frac{h^2}{L}\frac{g}{p_0}\operatorname{sn}\varphi\operatorname{cs}\varphi,$$

$$b_4 = 0, \quad c_4 = -\frac{p_0}{L}\frac{g}{2} + \frac{3}{2}\frac{g}{pL}(g + \omega^2 h \operatorname{cs}\varphi)^2 - \frac{3}{2}\omega^2 g \operatorname{cs}\varphi^2$$

. . . .

de manière que

$$z = \frac{g}{2}t^2 + c_4 t^4 + \ldots$$

$$y = \frac{1}{3}\omega g \operatorname{cs}\varphi t^3 + b_5 t^5 + \ldots$$

$$x = a_4 t^4 + a_5 t^5 + \ldots.$$

Il est aisé de voir de la forme des équations du mouvement, que les coëfficients des degrés plus élevés de t sont petits par rapport à ceux des degrés plus bas de l'ordre ω ou $\frac{1}{L}$ au moins. On en voit qu'il y a la déviation vers l'est, car le premier terme

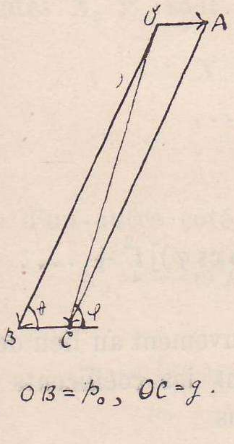
$$\frac{1}{3}\omega g \operatorname{cs}\varphi\, t^3$$

du développement de y est positif.

Quant à la déviation x dans le plan méridien, évaluons le coefficient a_4. Nous avons obtenu que

$$a_4 = \frac{1}{8}\omega^2 g \operatorname{sn}\varphi\left(\operatorname{cs}\varphi - \frac{h}{L}\frac{g}{p_0}\right) - \frac{1}{8}\omega^4 L\left(\frac{h}{L}\right)^2\frac{g}{p_0}\operatorname{sn}\varphi\operatorname{cs}\varphi.$$

Nous allons exprimer g, h ou plutôt $\frac{h}{L}\frac{g}{p_0}$, $\frac{g}{p_0}\left(\frac{h}{L}\right)^2$ par L et p_0.



$OA = \omega^2 h, \quad OB = p_0, \quad OC = g.$

Si la droite de l'accélération newtonienne fait avec le plan d'équateur l'angle aigu θ, nous aurons que

$$g^2 = p_0^2 + \omega^4 h^2 - 2p\omega^2 h \operatorname{cs}\theta,$$

ou

$$g^2 = p_0^2 + \omega^4 h^2 - 2p_0\omega^2\frac{h^2}{L};$$

et d'autre coté que

$$p_0^2 = g^2 + \omega^4 h^2 + 2g\omega^2 h \operatorname{cs}\varphi.$$

En ajoutant ces deux équations nous obtenons que

$$\omega^2 h + g \,\mathrm{cs}\,\varphi - p_0 \frac{h}{L} = 0,$$

d'où

$$\frac{h}{L} = \frac{g \,\mathrm{cs}\,\varphi}{p_0 - \omega^2 L}.$$

En substituant cette valeur de $\frac{h}{L}$ dans la première équation, nous aurons que

$$g^2 = p_0^2 + \omega^4 L^2 \frac{g^2 \,\mathrm{cs}^2\varphi}{(p_0 - \omega^2 L)^2} - 2 p_0 \omega^2 L \frac{g^2 \,\mathrm{cs}^2\varphi}{(p_0 - \omega^2 L)^2}$$

d'où il vient que

$$\left(\frac{g}{p_0}\right)^2 = \frac{\left(1 - \frac{\omega^2 L}{p_0}\right)^2}{1 - \mathrm{sn}^2\varphi \left(\frac{2\omega^2 L}{p_0} - \frac{\omega^4 L^2}{p_0^2}\right)}, \quad \frac{g}{p_0} = \frac{1 - \frac{\omega^2 L}{p_0}}{\left[1 - \mathrm{sn}^2\varphi \left(\frac{2\omega^2 L}{p_0} - \frac{\omega^4 L^2}{p_0^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}. \qquad \text{(a)}$$

Il en résulte que

$$\frac{g}{p_0}\frac{h}{L} = \frac{g}{p_0}\frac{g \,\mathrm{cs}\,\varphi}{p_0 - \omega^2 L} = \left(\frac{g}{p_0}\right)^2 \frac{\mathrm{cs}\,\varphi}{1 - \frac{\omega^2 L}{p_0}} = \frac{\left(1 - \frac{\omega^2 L}{p_0}\right) \mathrm{cs}\,\varphi}{1 - \mathrm{sn}^2\varphi \left(2\frac{\omega^2 L}{p_0} - \frac{\omega^4 L^2}{p_0^2}\right)}$$

Il suit enfin de ces formules, que

$$\frac{g}{p_0}\left(\frac{h}{L}\right)^2 = \left(\frac{g}{p_0}\right)^3 \frac{\mathrm{cs}^2\varphi}{\left(1 - \frac{\omega^2 L}{p_0}\right)^2} = \frac{\left(1 - \frac{\omega^2 L}{p_0}\right) \mathrm{cs}^2\varphi}{\left[1 - \mathrm{sn}^2\varphi \left(\frac{2\omega^2 L}{p_0} - \frac{\omega^4 L^2}{p_0^2}\right)\right]^{3/2}}.$$

La valeur donc de a_4 devient après la substitution

$$a_4 = \frac{1}{8}\omega^2 g \,\mathrm{sn}\,\varphi \,\mathrm{cs}\,\varphi \left[1 - \frac{1 - \frac{\omega^2 L}{p_0}}{1 - \mathrm{sn}^2\varphi \left(\frac{2\omega^2 L}{p_0} - \frac{\omega^4 L^2}{p_0^2}\right)}\right] -$$

$$- \frac{1}{8}\omega^4 L \,\mathrm{sn}\,\varphi \,\mathrm{cs}^3\varphi \frac{1 - \frac{\omega^2 L}{p_0}}{\left[1 - \mathrm{sn}^2\varphi \left(\frac{2\omega^2 L}{p_0} - \frac{\omega^2 L^2}{p_0^2}\right)\right]^{3/2}}$$

ou après la transformation dans le premier terme

$$a_4 = \frac{1}{8}\omega^4 \operatorname{sn}\varphi \operatorname{cs}\varphi \frac{g}{p_0} L \frac{1 - \operatorname{sn}^2\varphi\left(2 - \frac{\omega^2 L}{p_0}\right)}{1 - \operatorname{su}^2\varphi\left(2\frac{\omega^2 L}{p_0} - \frac{\omega^4 L^2}{p_0^2}\right)} -$$

$$- \frac{1}{8}\omega^4 L \operatorname{sn}\varphi \operatorname{cs}^3\varphi \frac{1 - \frac{\omega^2 L}{p_0}}{\left[1 - \operatorname{sn}^2\varphi\left(\frac{2\omega^2 L}{p_0} - \frac{\omega^4 L^2}{p_0^2}\right)\right]^{3/2}}.$$

Si nous substituons au lieu de $\frac{g}{p_0}$ la valeur (a), nous obtiendrons:

$$a_4 = \frac{1}{8}\omega^4 L \operatorname{sn}\varphi \operatorname{cs}\varphi \frac{\left(1 - \frac{\omega^2 L}{p_0}\right)\left[1 - \operatorname{sn}^2\varphi\left(2 - \frac{\omega^2 L}{p_0}\right) - \operatorname{cs}^2\varphi\right]}{\left[1 - \operatorname{sn}^2\varphi\left(2\frac{\omega^2 L}{p_0} - \frac{\omega^4 L^2}{p_0^2}\right)\right]^{3/2}}$$

$$= -\frac{1}{8}\omega^4 L \operatorname{sn}^3\varphi \operatorname{cs}\varphi \frac{\left(1 - \frac{\omega^2 L}{p_0}\right)^2}{\left[\operatorname{cs}^2\varphi + \operatorname{sn}^2\varphi\left(1 - \frac{\omega^2 L}{p_0}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

Nous voyons que la déviation x est dirigée vers le nord.

La partie principale du premier terme

$$a_4 t^4$$

de cette déviation est

$$-\frac{1}{8}\omega^4 L \operatorname{sn}^3\varphi \operatorname{cs}\varphi\, t^4.$$

C'est la valeur de la déviation qui a été donnée par M. de Sparre.