Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions, définies par les équations différentielles linéaires du second ordre, et leurs applications au problème du développement d'une fonction arbitraire en séries procédant suivant les-dites fonctions.

par W. Stekloff.

1. Soit

$$\lambda_0^2,\ \lambda_1^2,\ \lambda_2^2,\ \lambda_3^2,\ \ldots,\ \lambda_n^2,\ \ldots \tag{1}$$

une suite infinie, formée suivant une loi quelconque bien déterminée, de nombres positifs indéfiniment croissants, lorsque l'indice n tend vers l'infini.

Supposons qu'à chaque nombre λ_n^2 $(n=0, 1, 2, \ldots)$ corresponde une fonction $u_n(x)$ de la variable réelle x, continue et bien déterminée dans un certain intervalle (a, b) $(b > a)$.

On obtient ainsi une suite de fonctions

$$u_0(x),\ u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots,\ u_n(x),\ \ldots,$$

contenant λ_n^2 $(n=0, 1, 2, \ldots)$ comme paramètre, définies dans chaque cas particulier suivant une loi déterminée.

Le cas le plus intéressant est celui, où les fonctions u_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ se déterminent par une équation différentielle linéaire jointe à certaines conditions initiales ou à certaines conditions aux limites de l'intervalle (a, b).

Signalons, pour exemple, les fonctions trigonométriques, fonctions de Bessel et de Lamé, les polynomes de Hermite-Tchébicheff, satisfaisant à l'équation

$$u_u'' - axu_n' + anu_n = 0, \qquad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

où les entiers

$$0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

jouissent le rôle des nombres λ_n^2 $(n=0, 1, 2, \ldots)$.

Signalons aussi les polynomes de Jacobi verifiant l'équation

$$(1-x^2)\,u_n'' + (\alpha - \beta - (\alpha+\beta)\,x)\,u_n' + n\,(n-1+\alpha+\beta)\,u_n = 0,$$

où l'on peut prendre pour les nombres λ_n^2 la suite de nombres

$$\alpha+\beta,\ 2(\alpha+\beta+1),\ 3(\alpha+\beta+2),\ldots,\ n(\alpha+\beta+n-1),\ldots.$$

Rappelons encore les polynomes de Tchébicheff satisfaisant à l'équation

$$xu_n''+(\beta-\alpha x)u_n'+\alpha n u_n=0,$$

les fonctions V_n de Sturm-Liouville qui se rencontrent dans le problème de refroidissement d'une barre hétérogène, définies par les équations

$$V_n''+(\lambda_n^2 p-q)V_n=0,\quad a<x<b, \tag{2}$$

jointes aux conditions aux limites

$$V_n'(a)-hV_n(a)=0,\quad V_n'(b)+HV_n(b)=0,$$

où p et q sont les fonctions positives de x, h et H deux constantes positives.

Les fonctions u_n de l'espèce considérée jouissent un rôle important dans diverses questions de l'Analyse et, en particulier, dans le problème du développement d'une fonction arbitraire $f(x)$ en séries infinies procédant suivant les fonctions u_n $(n=0,1,2,\ldots)$.

L'étude de ce dernier problème conduit tout d'abord à certaines expressions des fonctions u_n, qu'on appelle souvent „expressions asymptotiques", de la forme suivante

$$u_n=A_n(\cos\xi_n t+w_n(t)),\quad [\text{ou } A_n(\sin\xi_n t+w_n(t))]$$

où t est une fonction déterminée de la variable primitive x, ξ_n désigne une constante dépendant du nombre λ_n, A_n une autre constante dépendant de l'entier n, $w_n(t)$ une fonction dont le module tend vers zéro, lorsque n croît indéfiniment.

Il existe beaucoup de méthodes particulières conduisant dans divers cas particuliers aux expressions approchées de la forme tout à l'heure indiquée.

Rappelons, par exemple, un procédé de Laplace, appliqué par cet illustre géomètre aux polynomes de Legendre et, puis (en 1864), [1]) par Hermite aux polynomes qui portent le nom de polynomes de Hermite-Tchébicheff.

Une autre méthode a été donnée par Bonnet en 1852 [2]) pour les polynomes de Legendre et appliquée ensuite par M. Darboux au cas plus général de polynomes de Jacobi [3]).

---

[1]) Comptes Rendus, 1864. p. 266.

[2]) Journal de Liouville, T. XVII, p. 265, 1852.

[3]) Journal de Liouville, T. IV, 1878, p. 46.

Rappelons encore la méthode de M. Dini [1]), différente de celles de Laplace et de Bonnet et analogue à une méthode de Hanckel, à l'aide de laquelle M. Dini a établi les formules asymptotiques pour les fonctions de Bessel $J_\alpha(\lambda_n x)$, où λ_n est une racine réelle et positive de l'équation

$$zJ_{\alpha+1}(z) - (h + \alpha) J_\alpha(z) = 0,$$

h désignant une constante réelle, différente de zéro.

Signalons enfin les récentes recherches de M. Adamoff [2]), où l'auteur obtient les expressions asymptotiques pour les polynomes de Hermite-Tchébicheff ainsi que pour un cas particulier des polynomes de Jacobi, analogues à celles de Hermite et de Darboux, en prenant pour le point de départ certaines expressions de ces polynomes à l'aide des intégrales définies.

Eu égard à l'importance de l'approximation des fonctions de très-grands nombres pour divers problèmes de l'Analyse, je me permets d'indiquer, dans ce qui va suivre, une méthode générale et fort simple pour déduire les expressions asymptotiques pour toute suite de fonctions, définies par certaines équations différentielles linéaires du second ordre contenant comme des cas particuliers toutes les fonctions, mentionnées plus haut.

L'idée principale de cette méthode, représentant une généralisation de celle de Bonnet, découle des recherches de Liouville sur le problème du développement d'une fonction arbitraire en série de fonctions de Sturm-Liouville [l'équation (2)], publiées en 1837 dans le tome II du Journal de Liouville et perfectionnées récemment par M. Kneser dans ses Mémoires, insérés aux T. 58 et 60 des „Mathematische Annalen".

Après avoir exposé les fondements de la méthode, dont il s'agit, je l'applique aux divers cas particuliers: aux polynomes de Hermite, à une certaine classe des polynomes de Tchébicheff, aux polynomes de Jacobi et aux fonctions de Bessel.

L'emploi des expressions asymptotiques ainsi obtenues m'a conduit à une transformation des séries connues, qui servent de développement à une fonction arbitraire, en somme de deux autres, que nous appellerons série (α) et série (β), dont l'une (série (β)) converge absolument et uniformément, si la fonction développable satisfait aux certaines conditions très générales.

Donc la recherche des conditions de convergence de la série primitive se ramène, conformément aux idées de Laplace et de Hermite, à celle de convergence de l'autre série (α).

L'étude de ce dernier problème m'a permis non seulement de trouver les conditions générales de convergence uniforme de la série primitive,

---

[1]) Serie di Fourier etc. Pisa, 1880.

[2]) Bulletin de l'Ecole polythechnique de St-Petersbourg, 1906.

mais encore de déterminer la somme de cette série toutes les fois que la série (α) converge uniformément.

J'ai obtenu ce résultat en appliquant convenablement mon théorème général, établi en 1904 dans le Mémoire: „Sur certaines égalités générales, communes aux plusieurs suites de fonctions etc.“, inséré dans les Bulletins de l'Académie des Sciences de St-Pétersbourg.

Je suis arrivé ainsi à une méthode nouvelle pour résoudre le problème du développement d'une fonction arbitraire en séries procédant suivant les fonctions, mentionnées plus haut.

Après avoir examiné divers cas particuliers, dont l'étude m'a conduit au résultat que je viens d'énoncer, j'expose les principes de la méthode sous la forme générale et je termine mes recherches en appliquant la méthode, dont il s'agit, au problème du développement d'une fonction donnée en série de fonctions de Sturm-Liouville, qui présentent une classe de fonctions trés étendue contenant comme des cas particuliers les fonctions trigonométriques, les fonctions de Bessel, celles de Lamé et beaucoup d'autres.

2. La suite de nombres

$$\lambda_0^2 < \lambda_1^2 < \lambda_2^2 < \lambda_3^2 < \ldots < \lambda_n^2 < \ldots, \tag{3}$$

$$\lim_{n=\infty} \lambda_n^2 = \infty$$

étant donnée, supposons que les fonctions correspondantes $u_n (n=0, 1, 2, \ldots)$ satisfassent à l'équation

$$p u_n'' + q u_n' + \lambda_n^2 r u_n = 0 \quad \text{pour } a \leqq x \leqq b. \tag{4}$$

Supposons que les fonctions p et r de la variable réelle x restent continues, positives et ne s'annulent pas à l'intérieur de l'intervalle (a, b).

Supposons encore que p et r admettent les dérivées de deux premiers ordres et que la fonction q, restant continue, admette la dérivée du premier ordre dans l'intervalle (a, b).

Soit

$$x = \alpha, \quad a < \alpha < b$$

un point quelconque, pris arbitrairement à l'intérieur de l'intervalle (a, b).

Ce sera un point ordinaire pour la fonction u_n vérifiant l'équation linéaire (4), en vertu des hypothèses faites sur les fonctions p, q et r.

L'équation (4) admet au voisinage du point $x = \alpha$ deux solutions particulières indépendantes, continues à l'intérieur de l'intervalle (a, b); on peut les définir par les conditions initiales suivantes

$$u_n(\alpha) = A_n, \quad u_n'(\alpha) = B_n, \tag{5}$$

A_n et B_n étant des constantes.

Cela posé, indiquons une méthode particulière de l'intégration de l'équation (4) qui nous conduira tout de suite aux expressions asymptotiques dont nous avons parlé plus haut (n° 1).

Introduisons au lieu de x une nouvelle variable t

$$t = \varphi(x),$$

φ étant une fonction quelconque donnée.

L'équation (4) devient

$$p\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 \frac{d^2u_n}{dt^2} + \left[p\frac{d^2t}{dx^2} + q\frac{dt}{dx}\right]\frac{du_n}{dt} + \lambda_n^2 r u_n = 0. \tag{6}$$

Posons

$$p\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = r, \quad t = \int dx \sqrt{\frac{r}{p}}. \tag{7}$$

On obtient

$$\frac{d^2u_n}{dt^2} + 2\Theta\frac{du_n}{dt} + \lambda_n^2 u_n = 0, \tag{8}$$

où l'on a posé

$$2\Theta = \frac{2qr + pr' - rp'}{2r\sqrt{rp}}. \tag{9}$$

Remplaçant dans Θ la variable x par son expression en t à l'aide de (7), on peut écrire

$$\frac{d^2u_n}{dt^2} + 2\Theta(t)\frac{du_n}{dt} + \lambda_n^2 u_n = 0. \tag{9_1}$$

Introduisons maintenant au lieu de u_n une nouvelle inconnue v_n en posant

$$u_n = z(t)\, v_n(t). \tag{10}$$

On obtient cette équation en $v_n(t)$

$$z\frac{d^2v_n}{dt^2} + [2z' + 2\Theta(t)z]\frac{dv_n}{dt} + [z'' + 2\Theta(t)z' + \lambda_n^2 z]v_n = 0, \tag{11}$$

où

$$z' = \frac{dz}{dt}, \quad z'' = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Choisissons $z(t)$ de façon que l'on ait

$$z' + \Theta(t).z = 0.$$

On peut poser

$$z = e^{-\int \theta(t)\,dt}. \tag{12}$$

L'équation (11) se réduira à la suivante

$$\frac{d^2 v_n}{dt^2} + \lambda_n^2 v_n = \mu(t)\, v_n, \tag{13}$$

où l'on a posé

$$\mu(t) = \frac{d\Theta(t)}{dt} + \Theta^2(t). \tag{14}$$

Désignons par t_0, τ et t_1 les valeurs de t correspondant respectivement à $x = a$, $x = \alpha$, $x = b$.

En se rappelant l'hypothèse, faite sur les fonctions p, q et r, on peut affirmer, en vertu de (9) et (14), que la fonction $\mu(t)$ reste continue à l'intérieur de l'intervalle (t_0, t_1).

Transformons les conditions initiales (5).

L'équation (10) donne

$$A_n = u_n(\alpha) = z(\tau)\, v_n(\tau),$$

$$\left.\frac{du_n}{dx}\frac{dx}{dt}\right|_{x=\alpha} = \frac{\sqrt{p(\alpha)}}{\sqrt{r(\alpha)}} B_n = z'(\tau)\, v_n(\tau) + z(\tau)\, v_n'(\tau),$$

d'où

$$v_n(\tau) = \frac{A_n}{z(\tau)} = A_n', \tag{15}$$

$$v_n'(\tau) = \frac{\sqrt{p(\alpha)}}{z(\tau)\sqrt{r(\alpha)}} B_n - \frac{z'(\tau)}{z(\tau)} A_n = B_n'. \tag{16}$$

3. Cherchons une solution de l'équation différentielle (13) satisfaisant aux conditions (15) et (16).

Soit

$$v = C_1 \cos \lambda_n t + C_2 \sin \lambda_n t$$

l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \lambda_n^2 v = 0.$$

Moyennant la méthode de Cauchy nous obtiendrons l'intégrale générale de l'équation (13) sous la forme suivante

$$v_n = D_1 \cos \lambda_n t + D_2 \sin \lambda_n t,$$

où D_1 et D_2 sont les fonctions de t, définies par les équations

$$\frac{dD_1}{dt}\cos\lambda_n t + \frac{dD_2}{dt}\sin\lambda_n t = 0,$$

$$\frac{dD_1}{dt}\sin\lambda_n t - \frac{dD_2}{dt}\cos\lambda_n t = -\frac{\mu(t)}{\lambda_n} v_n,$$

qui donnent

$$D_1 = C_1 - \frac{1}{\lambda_n}\int_\tau^t \mu(\xi)\, v_n(\xi)\sin\lambda_n\xi\, d\xi,$$

$$D_2 = C_2 + \frac{1}{\lambda_n}\int_\tau^t \mu(\xi)\, v_n(\xi)\cos\lambda_n\xi\, d\xi,$$

C_1 et C_2 étant des constantes arbitraires.

On a donc

$$(17) \qquad v_n = C_1\cos\lambda_n t + C_2\sin\lambda_n t - \frac{1}{\lambda_n}\int_\tau^t \mu(\xi)\, v_n(\xi)\sin\lambda_n(\xi - t)\, d\xi$$

et

$$v_n' = \frac{dv_n}{dt} = -\lambda_n(C_1\sin\lambda_n t - C_2\cos\lambda_n t) + \int_\tau^t \mu(\xi)\, v_n(\xi)\cos\lambda_n(\xi - t)\, d\xi.$$

Il ne nous reste qu'à vérifier les équations (15) et (16).

On trouve aisément

$$C_1 = A_n'\cos\lambda_n\tau - \frac{B_n'}{\lambda_n}\sin\lambda_n\tau,$$

$$C_2 = A_n'\sin\lambda_n\tau + \frac{B_n'}{\lambda_n}\cos\lambda_n\tau,$$

et, en vertu de (17),

$$(17_1) \quad v_n = A_n'\cos\lambda_n(t-\tau) + \frac{B_n'}{\lambda_n}\sin\lambda_n(t-\tau) - \frac{1}{\lambda_n}\int_\tau^t \mu(\xi)\, v_n(\xi)\sin\lambda_n(\xi - t)\, d\xi.$$

4. Nous allons distinguer, pour plus de simplicité, deux cas différents

$$1)\ B_n' = 0,\ A_n' \gtrless 0 \ \text{ et } \ 2)\ A_n' = 0,\ B_n' \gtrless 0.$$

Dans le premier cas on trouve

$$v_n = A_n' \cos \lambda_n (t - \tau) - \frac{1}{\lambda_n} \int_\tau^t \mu(\xi) v_n(\xi) \sin \lambda_n (\xi - t)\, d\xi. \tag{18}$$

Substituant cette expression de v_n dans l'intégrale du second membre de cette équation on obtient

$$v_n = A_n' \cos \lambda_n (t - \tau) - \frac{A_n'}{\lambda_n} \int_\tau^t \mu(\xi) \sin \lambda_n (\xi - t) \cos \lambda_n (\xi - \tau)\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_n^2} \int_\tau^t \mu(\xi) \sin \lambda_n (\xi - t) \left(\int_\tau^\xi \mu(\xi_1) v_n(\xi_1) \sin \lambda_n (\xi_1 - \xi)\, d\xi_1 \right) d\xi.$$

Remplaçant dans cette derniére intégrale $v_n(\xi_1)$ par son expression qui résulte de (18), on trouve ensuite

$$v_n = A_n' [\cos \lambda_n (t - \tau) - \frac{1}{\lambda_n} \int_\tau^t \mu(\xi) \sin \lambda_n (\xi - t) \cos \lambda_n (\xi - \tau)\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_n^2} \int_\tau^t \mu(\xi) \sin \lambda_n (\xi - t)\, d\xi \left(\int_\tau^\xi \mu(\xi_1) \sin \lambda_n (\xi_1 - \xi) \cos \lambda_n (\xi_1 - \tau)\, d\xi_1 \right) d\xi] -$$

$$- \frac{1}{\lambda_n^3} \int_\tau^t \mu(\xi) \sin \lambda_n (\xi_1 - t)\, d\xi \int_\tau^\xi \mu(\xi_1) \sin \lambda_n (\xi_1 - \xi)\, d\xi_1 \int_\tau^{\xi_1} \mu(\xi_2) v_n(\xi_2) \sin \lambda_n (\xi_2 - \xi_1)\, d\xi_2.$$

En continuant ainsi de suite nous obtiendrons une expression de v_n sous la forme d'une série, disposée suivant les puissances croissantes de

$$\varepsilon_n = \frac{1}{\lambda_n}.$$

Remplaçant, pour plus de symétrie, t par ξ_0, ξ par ξ_1, ξ_k par ξ_{k-1} et posant

$$\mu(\xi_k) \sin \lambda_n (\xi_k - \xi_{k-1}) = \varphi(\xi_k, \xi_{k-1}),$$

on aura évidemment

$$
\begin{aligned}
v_n(\xi_0) = A_n' \{ \cos\lambda_n(\xi_0-\tau) - \varepsilon_n \int_\tau^{\xi_0} \varphi(\xi_1,\ \xi_0)\cos\lambda_n(\xi_1-\tau)\,d\xi_1 + \\
+ \varepsilon_n^2 \int_\tau^{\xi_0} \varphi(\xi_1,\ \xi_0)\,d\xi_1 \int_\tau^{\xi_1} \varphi(\xi_2,\ \xi_1)\cos\lambda_n(\xi_2-\tau)\,d\xi_2 + \\
+ \ldots + (-1)^k \varepsilon_n^k \int_\tau^{\xi_0} \varphi(\xi_1,\ \xi_0)\,d\xi_1 \int_\tau^{\xi_1} \varphi(\xi_2,\ \xi_1)\,d\xi_2 \ldots \int_\tau^{\xi_{k-1}} \varphi(\xi_k,\ \xi_{k-1})\cos\lambda_n(\xi_k-\tau)\,d\xi_k\} + \\
+ (-1)^{k+1}\varepsilon_n^{k+1} \int_\tau^{\xi_0} \varphi(\xi_1,\ \xi_0)\,d\xi_1 \int_\tau^{\xi_1} \varphi(\xi_2,\ \xi_1)\,d\xi_2 \ldots \int_\tau^{\xi_{k-1}} \varphi(\xi_k,\ \xi_{k-1})\,d\xi_k \int_\tau^{\xi_k} \varphi(\xi_{k+1},\ \xi_k)\,v_n(\xi_{k+1})\,d\xi_{k+1}.
\end{aligned}
\tag{18_1}
$$

5. Revenons à l'équation (18).

Supposons, pour fixer les idées, que $t > \tau$ et désignons par M_n' le maximum de $|v_n|$ dans l'intervalle $(\tau,\ b_1)$, où b_1 est un nombre quelconque, pris arbitrairement dans l'intervalle $(\tau,\ t_1)$.

L'équation (18) donne pour tous les points de l'intervalle $(\tau,\ b_1)$, intérieur à $(\tau,\ t_1)$,

$$
|v_n| \leqq |A_n'| + \frac{M_n'}{\lambda_n} \int_\tau^t |\mu(\xi)|\,d\xi. \tag{19}
$$

Posons

$$
\int_\tau^t |\mu(\xi)|\,d\xi = K < \int_{a_1}^{b_1} |\mu(\xi)|\,d\xi = N.
$$

On obtient, en tenant compte de (19),

$$
M_n'\left(1 - \frac{K}{\lambda_n}\right) \leqq |A_n'|.
$$

En se rappelant que λ_n croît indéfiniment avec l'indice n, on en conclut qu'il existe un entier ν tel qu'on ait, pour toutes les valeurs de n, plus grandes que ν,

$$
1 - \frac{K}{\lambda_n} > 1 - \frac{K}{\lambda_\nu} = Q_1 \qquad \text{pour } n \geqq \nu,
$$

Q_1 étant, pour toute valeur donnée de t, un nombre positif fixe, ne dépendant pas de n.

On aura donc, pour $n \overline{\overline{>}} \nu$ et pour toute intervalle (τ, b_1), intérieur à (τ, b),

$$(20) \qquad |v_n| \leq M_n' \leq \frac{|A_n'|}{Q_1} = Q\,|A_n'| \qquad \text{pour } n \overline{\overline{>}} \nu .$$

Nous avons supposé que $t > \tau$, mais il est évident que l'inégalité, analogue à celle de (20), aura aussi lieu pour tout intervalle (a_1, τ), a_1 étant un nombre quelconque, pris arbitrairement entre les nombres t_0 et τ, c'est-à-dire

$$(20_1) \qquad |v_n| \leqq M_n'' \leqq Q\,|A_n'| \qquad \text{pour } n \overline{\overline{>}} \nu$$

et pour toutes les valeurs de $t (= \xi_0)$ appartenant à l'intervalle (a_1, τ), M_n'' désignant le maximum de $|v_n|$ dans cet intervalle.

Les inégalités (20) et (20_1) conduisent à la suivante

$$(21) \qquad |v_n| \leqq M_n \leqq Q\,|A_n| \qquad \text{pour } n \geqq \nu$$

et pour

$$a_1 \leqq t \leqq b_1 ,$$

où M_n désigne le maximum de $|v_n|$ dans l'intervalle (a_1, b_1).

6. Désignons maintenant par r_k le reste de la série (18_1)

$$r_k = (-1)^{k+1} \varepsilon_n^{k+1} \int_\tau^{\xi_0} \varphi(\xi_1, \xi_0)\, d\xi_1 \int_\tau^{\xi_1} \varphi(\xi_2, \xi_1)\, d\xi_2 \ldots \int_\tau^{\xi_{k-1}} \varphi(\xi_k, \xi_{k-1})\, d\xi_k \int_\tau^{\xi_k} \varphi(\xi_{k+1}, \xi_k) v_n(\xi_{k+1})\, d\xi_{k+1}$$

En remarquant que

$$(22) \qquad \left| \int_\tau^{\xi_s} \varphi(\xi_s, \xi_{s-1})\, d\xi_s \right| \leqq \int_\tau^{\xi_s} |\varphi(\xi_s, \xi_{s-1})|\, d\xi_s \leqq \int_\tau^{t} |\mu(\xi_s)|\, d\xi_s = K < N$$

et en tenant compte de (21), on trouve

$$|r_k| < Q\,|A_n'|\,(\varepsilon_n K)^{k+1} = Q\,|A_n'| \left(\frac{N}{\lambda_n}\right)^{k+1} .$$

On en conclut qu'il existe un entier k_0 tel qu'on ait, pour $k \geqq k_0$,

$$(23) \qquad |r_k| < \delta ,$$

δ désignant un nombre positif, donné à l'avance, pourvu que

$$1 - \frac{N}{\lambda_n} > 0 .$$

Il s'ensuit que l'inégalité (23) a lieu pour toutes les valeurs de n, plus grandes que ν (voir n⁰ précédent), et pour toutes les valeurs de $t(=\xi_0)$ de l'intervalle (τ, b_1).

Les inégalités (22) supposent que $\xi_s > \tau$, or il est évident que l'inégalité (23) reste vraie pour toutes les valeurs de $t(=\xi_0)$ appartenant à l'intervalle (a_1, b_1), intérieur à l'intervalle donné (t_0, t_1).

L'inégalité (23) montre que *la série*

$$A_n\Big\{\cos\lambda_n(\xi_0-\tau)-\varepsilon_n\int_\tau^{\xi_0}\varphi(\xi_1,\xi_0)\cos\lambda_n(\xi_1-\tau)d\xi_1+\varepsilon_n^2\int_\tau^{\xi_0}\varphi(\xi_1,\xi_0)d\xi_1\int_\tau^{\xi_1}\varphi(\xi_2,\xi_1)\cos\lambda_n(\xi_2-\tau)d\xi_2+\ldots$$

$$+\ldots+(-1)^k\varepsilon_n^k\int_\tau^{\xi_0}\varphi(\xi_1,\xi_0)d\xi_1\int_\tau^{\xi_1}\varphi(\xi_2,\xi_1)d\xi_2\ldots\int_\tau^{\xi_{k-1}}\varphi(\xi_k,\xi_{k-1})\cos\lambda_n(\xi_k-\tau)d\xi_k+\ldots\Big\}$$

converge uniformément à l'intérieur de l'intervalle (t_0, t_1), *pourvu que* $n \geqq \nu$, *et sa somme est égale à* $v_n(\xi_0)\,[=v_n(t_0)]$ [1]).

Cette série donne une moyenne fort simple de calcul des valeurs de la fonction $v_n(\xi_0)$, pour les valeurs assez grandes de l'indice n, avec une approximation donnée à l'avance.

7. L'inégalité (21) peut être remplacée par l'égalité suivante

$$v_n = A_n'\,\vartheta_n\,Q,$$

où

(24) $$|\vartheta_n| < 1.$$

L'équation (18) devient

(25) $$v_n = A_n'\left(\cos\lambda_n(\xi_0-\tau)+\frac{\omega_n(\xi_0)}{\lambda_n}\right),$$

où l'on a posé

$$\omega_n(\xi_0) = -Q\int_\tau^{\xi_0}\mu(\xi_0)\,\vartheta_n(\xi_0)\sin\lambda_n(\xi-\xi_0)\,d\xi.$$

De cette égalité on tire, eu égard à (24),

(26) $$|\omega_n(\xi_0)| < Q\int_\tau^{\xi_0}|\mu(\xi)|\,d\xi, \qquad \text{si } \xi_0 > \tau$$

[1]) Il est aisé de voir que cette série converge non seulement uniformément, mais encore absolument.

et

$$(26_1) \qquad |\omega_n(\xi_0)| < Q\int_{\xi_0}^{\tau} |\mu(\xi)|\,d\xi, \qquad \text{si } \xi_0 < \tau.$$

On a donc, quelle que soit la valeur de ξ_0, comprise entre les limites t_0 et t_1,

$$(27) \qquad |\omega_n(\xi_0)| < QK = N \qquad \text{pour } n \overline{\geqq} \nu,$$

où

$$(28) \qquad N = \frac{K}{1-\frac{K}{\lambda_\nu}}, \quad K < \int_{a_1}^{b_1} |\mu(\xi)|\,d\xi.$$

La formule (25) donne une expression asymptotique de la fonction v_n pour les valeurs de n assez grandes.

Nous obtiendrons l'expression correspondante de $u_n(x)$ à l'aide de l'équation (10) en y remplaçant t par son expression en x, A_n' par son expression en A_n à l'aide de (15).

On trouve ainsi

$$(29) \qquad u_n(x) = \frac{A_n}{z(\tau)} z(\varphi(x)) \left[\cos\lambda_n(\varphi(x)-\tau) + \frac{\omega_n(\varphi(x))}{\lambda_n}\right].$$

A cette égalité il faut ajouter encore l'inégalité suivante

$$(30) \qquad |\vartheta_n(x)| = |\omega_n(\varphi(x))| < N \qquad \text{pour } n \overline{\geqq} \nu.$$

8. Considérons maintenant le second cas, où

$$(30_1) \qquad A_n' = 0, \quad B_n' \gtrless 0.$$

Il suffit de remplacer dans (18_1) A_n' par $\frac{B_n'}{\lambda_n}$, $\cos\lambda_n(\xi_0-\tau)$ par $\sin\lambda_n(\xi_0-\tau)$ pour obtenir immédiatement la formule suivante

$$(31) \qquad \begin{aligned} v_n(\xi_0) = \frac{B_n'}{\lambda_n}\Big\{&\sin\lambda_u(\xi_0-\tau) - \varepsilon_n\int_{\tau}^{\xi_0}\varphi(\xi_1,\xi_0)\sin\lambda_n(\xi_1\ \ \tau)\,d\xi_1 + \varepsilon_n^2\int_{\tau}^{\xi_0}\varphi(\xi_1,\xi_0)\,d\xi_1\int_{\tau}^{\xi_1}\varphi(\xi_2,\xi_1)\sin\lambda_n(\xi_2-\tau)\,d\xi_2 + \\ &\ldots + (-1)^k\varepsilon_n^k\int_{\tau}^{\xi_0}\varphi(\xi_1,\xi_0)\,d\xi_1\int_{\tau}^{\xi_1}\varphi(\xi_2,\xi_1)\,d\xi_2\ldots\int_{\tau}^{\xi_{k-1}}\varphi(\xi_k,\xi_{k-1})\sin\lambda_n(\xi_k-\tau)\,d\xi_k\Big\} + r_k,\end{aligned}$$

où

$$r_k = (-1)^{k+1} \varepsilon^{k+1} \int_\tau^{\xi_0} \varphi(\xi_1, \xi_0) d\xi_1 \int_\tau^{\xi_1} \varphi(\xi_2, \xi_1) d\xi_2 \ldots \int_\tau^{\xi_{k-1}} \varphi(\xi_k, \xi_{k-1}) d\xi_k \int_\tau^{\xi_k} \varphi(\xi_{k+1}, \xi_k) \sin \lambda_n (\xi_{k+1} - \tau) d\xi_{k+1}.$$

En répétant presque textuellement les raisonnements du n^0 6, on s'assure aisément que *la série (31) converge absolument et uniformément à l'intérieur de l'intervalle* (t_0, t_1) *et que sa somme est égale à* $v_n(\xi_0)$.

Formons maintenant l'expression asymptotique de v_n dans le cas considéré.

En répétant les raisonnements du n^0 5 on trouve, en tenant compte de (30_1),

$$(32) \qquad |v_n(\xi_0)| < \frac{|B_n'|}{\lambda_n} Q \qquad \text{pour } n \gtreqqless \nu$$

et pour

$$a_1 \leqq \xi_0 \leqq b_1.$$

L'inégalité précédente donne

$$v_n = \frac{B_n'}{\lambda_n} \vartheta_n Q, \quad |\vartheta_n| < 1.$$

Substituant cette expression de v_n dans (17_1) on obtient

$$(33) \qquad v_n(\xi_0) = \frac{B_n'}{\lambda_n} \left(\sin \lambda_n (\xi_0 - \tau) + \frac{\omega_n(\xi_0)}{\lambda_n} \right),$$

où, comme au n^0 7,

$$\omega_n(\xi_0) = -Q \int_\tau^{\xi_0} \mu(\xi) \vartheta_n(\xi) \sin \lambda_n (\xi - \xi_0) \, d\xi,$$

et

$$(34) \qquad |\omega_n(\xi_0)| < Q.K = N \qquad \text{pour } n \gtreqqless \nu.$$

Moyennant enfin l'équation (10) on trouve la formule correspondante pour $u_n(x)$

$$(34_1) \qquad u_n(x) = \frac{B_n'}{\lambda_n} z(\varphi(x)) \left(\sin \lambda_n (\varphi(x) - \tau) + \frac{\omega_n(\varphi(x))}{\lambda_n} \right),$$

où il faut remplacer B_n' par son expression en B_n qui résulte de l'équation (16).

9. Faisons enfin quelques remarques sur le cas général, où A_n' et B_n' sont différents de zéro.

L'équation (17_1) montre que

$$|v_n| < \left| A_n' \cos\lambda_n(t-\tau) + \frac{B_n'}{\lambda_n} \sin\lambda_n(t-\tau) \right| Q \qquad \text{pour } n \geqq \nu.$$

On peut donc poser

$$(34_2) \qquad v_n = Q\left(A_n' \vartheta_{1n} + \frac{B_n'}{\lambda_n} \vartheta_{2n}\right),$$

où

$$|\vartheta_{1n}| < 1, \quad |\vartheta_{2n}| < 1.$$

Substituant (34_2) dans (17_1) on obtient cette formule asymptotique pour v_n

$$(35) \quad v_n = A_n'\left(\cos\lambda_n(t-\tau) + \frac{\omega_n^{(1)}(t)}{\lambda_n}\right) + \frac{B_n'}{\lambda_n}\left(\sin\lambda_n(t-\tau) + \frac{\omega_n^{(2)}(t)}{\lambda_n}\right),$$

où $\omega_n^{(1)}(t)$ et $\omega_n^{(2)}(t)$ sont les fonctions de t satisfaisant aux inégalités suivantes

$$\left.\begin{array}{l} |\omega_n^{(1)}(t)| < Q.K = N, \\ |\omega_n^{(2)}(t)| < Q.K = N \end{array}\right. \qquad \text{pour } n \geqq \nu.$$

Si nous employons le même procédé qu'au n⁰ 4 (ou au n⁰ 8), nous obtiendrons l'expression de v_n sous la forme de la série, disposée suivant les puissances entières de $\varepsilon_n = \frac{1}{\lambda_n}$, absolument et uniformément convergente à l'intérieur de l'intervalle (t_0, t_1).

10. Indiquons un autre procédé pour déduire les expressions asymptotiques, préférable dans plusieurs cas particuliers.

Considérons, par exemple, le cas qui se rencontre le plus souvent dans les applications: supposons qu'il existe une fonction $f(x)$, positive dans l'intervalle (a, b) et telle qu'on ait, pour toutes les valeurs de n plus grandes qu'un entier fixe n_0

$$(\alpha) \qquad \int_a^b f u_n^2 \, dx = \int_{t_0}^{t_1} f\sqrt{p}\,.\, z^2 v_n^2 dt < A_n'^2 K^2 \lambda^{2\beta},$$

où K désigne une constante fixe, ne dépendant pas de n, β désigne un nombre satisfaisant à la condition

$$|\beta| < 1.$$

On trouve

$$\left(\int_{\tau}^{t}\mu(\xi)v_n(\xi)\sin\lambda_n(\xi-t)\,d\xi\right)^2+\left(\int_{\tau}^{t}\frac{\mu(\xi)}{\sqrt{f(\xi)}\,p^{\frac{1}{4}}(\xi)z(\xi)}\sin\lambda_n(\xi-t)\sqrt{f(\xi)}\,p^{\frac{1}{4}}(\xi)z(\xi)v_n(\xi)\,d\xi\right)^2<$$

$$< A_n'^2 K^2 \lambda_n^{2\beta}\int_{\tau}^{t}\frac{\mu^2(\xi)}{f(\xi)\sqrt{p(\xi)}\,z^2(\xi)}\sin^2\lambda_n(\xi-t)\,d\xi .$$

Supposons qu'on ait, pour toutes les valeurs de t, comprises dans l'intervalle $(\tau,\ t_1)$

$$(36)\qquad \int_{\tau}^{t}\frac{\mu^2(\xi)}{f(\xi)\sqrt{p(\xi)}\,z^2(\xi)}\sin^2\lambda_n(\xi-t)\,d\xi<\int_{\tau}^{t}\frac{\mu^2(\xi)}{f(\xi)\sqrt{p(\xi)}\,z^2(\xi)}\,d\xi=M^2(t)<N^2,$$

N désignant un nombre fixe.

Ces conditions étant remplies, on peut écrire, dans le cas de $B_n'=0$,

$$(37)\qquad v_n=A_n'\left(\cos\lambda_n(t-\tau)+\frac{\omega_n(t)}{\lambda_n^{1-\beta}}\right),$$

où la fonction

$$(38)\qquad \omega_n(t)=-\frac{1}{A_n'}\int_{\tau}^{t}\mu(\xi)\,v_n(\xi)\sin\lambda_n(\xi-t)\,d\xi$$

satisfait à l'inégalité

$$(38_1)\qquad |\omega_n(t)|<K\,|M(t)|<KN$$

pour toutes les valeurs de t, comprises entre τ et t_1.

Nous avons supposé, dans ce qui précède, que $t>\tau$.

Si $t<\tau$, il suffit de supposer que

$$\int_{t}^{\tau}\frac{\mu^2(\xi)}{f(\xi)\sqrt{p(\xi)}\,z^2(\xi)}\sin^2\lambda_n(\xi-t)\,d\xi=M^2(t)<N$$

pour obtenir pour v_n la même formule asymptotique (38) jointe à l'inégalité (38_1).

Supposons maintenant que $A_n'=0$ et que, pour toutes les valeurs de n, plus grandes qu'un entier fixe n_0,

$$(\alpha_1) \qquad \int_a^b f u_n^2\, dx = \int_{t_0}^{t_1} f \sqrt{p}\, z^2 v_n^2\, d\xi < \frac{B_n'^2}{\lambda_n^2} K^2 \lambda_n^{2\beta},$$

où K est un nombre fixe, β est un nombre dont le module est plus petit que l'unité.

Dans ce cas on trouve, eu égard à (36) et (36_1), la formule suivante

$$(39) \qquad v_n = \frac{B_n'}{\lambda_n}\left(\sin \lambda_n (t - \tau) + \frac{\omega_n(t)}{\lambda_n^{1-\beta}}\right),$$

où la fonction

$$(40) \qquad \omega_n(t) = -\frac{\lambda_n}{B_n'} \int_\tau^t \mu(\xi)\, v_n(\xi) \sin \lambda_n (\xi - t)\, d\xi$$

satisfait à l'inégalité

$$(40_1) \qquad |\omega_n(t)| < K\,|M(t)| < KN.$$

11. Les formules (37) et (38_1) ainsi que celles de (39) et (40_1) peuvent être transformées de la manière suivante:

Substituant (37) dans (17_1), en y posant $B_n' = 0$, on trouve

$$(41) \qquad v_n = A_n'\left(\cos \lambda_n (t - \tau) + \frac{\vartheta_n(t)}{\lambda_n}\right),$$

où l'on a posé

$\xi - t$

$$(42) \qquad \vartheta_n(t) = -\int_\tau^t \mu(\xi) \sin \lambda_n (\xi - t) \cos \lambda_n (t - \tau)\, d\xi - \frac{1}{\lambda_n^{1-\beta}} \int_\tau^t \mu(\xi) \sin \lambda_n (\xi - t)\, \omega_n(\xi)\, d\xi.$$

De cette égalité on tire, en tenant compte de (38_1) et de ce que λ_n^2 croît en même temps que l'indice n,

$$(43) \qquad |\vartheta_n(t)| < \int_\tau^t |\mu(\xi)|\, d\xi + \frac{K}{\lambda_n^{1-\beta}} \int_\tau^t |\mu(\xi)|\,|M(\xi)|\, d\xi = \psi(t) <$$

$$< N + \frac{KN^2}{\lambda_1^{1-\beta}} = C,$$

où $\psi(t)$ désigne une fonction positive ne dépendant pas de n, C désigne un nombre positif fixe.

La même inégalité a lieu pour $t < \tau$, il suffit seulement de remplacer dans (43) t par τ et inversement.

De la même manière, en tenant compte de (39), (40_1) et (17_1), on obtient cette formule asymptotique pour v_n, dans le cas de $A_n' = 0$,

$$v_n = \frac{B_n'}{\lambda_n}\left(\sin \lambda_n (t-\tau) + \frac{\vartheta_n(t)}{\lambda_n}\right), \tag{44}$$

où la fonction

$$\vartheta_n(t) = -\int_\tau^t \mu(\xi) \sin \lambda_n (\xi - t) \sin \lambda_n (t - \tau)\, d\xi - \frac{1}{\lambda_n^{1-\beta}} \int_\tau^t \mu(\xi) \sin \lambda_n (\xi - t)\, \omega_n(\xi)\, d\xi \tag{45}$$

satisfait, comme dans le cas précédent, à l'inégalité

$$|\vartheta_n(t)| < \int_\tau^t |\mu(\xi)|\, d\xi + \frac{K}{\lambda_1^{1-\beta}} \int_\tau^t |\mu(\xi)|\, |M(\xi)|\, d\xi = \psi(t) <$$

$$< N + \frac{KN^2}{\lambda_1^{1-\beta}} = C,$$

si $t > \tau$.

L'inégalité analogue aura lieu dans le cas, où $t < \tau$; il suffit seulement de remplacer dans les limites des intégrales t par τ et inversement.

Les formules (41) et (44) conduisent, en vertu de (10), aux expressions asymptotiques suivantes pour u_n

$$u_n = \frac{A_n}{z(\tau)} z(\varphi(x)) \left[\cos \lambda_n (\varphi(x) - \tau) + \frac{\vartheta_n(\varphi(x))}{\lambda_n}\right], \quad \text{si } B_n' = 0 \tag{46}$$

$$u_n = \frac{B_n'}{\lambda_n} z(\varphi(x)) \left[\sin \lambda_n (\varphi(x) - \tau) + \frac{\vartheta_n(\varphi(x))}{\lambda_n}\right], \quad \text{si } A_n' = 0, \tag{47}$$

où il faut remplacer B_n' par son expression en B_n qui résulte de l'équation (16).

Les formules asymptotiques (46) et (47), jointes aux inégalités correspondantes (43) et (45), sont précisément celles que nous voulions établir.

Il y a une différence essentielle entre les formules (29) et (34_1) et celles de (46) et (47).

En effet, les inégalités (43) et (45) *ont lieu pour toutes les valeurs de n, plus grandes qu'un nombre fixe n_0 qui ne dépend pas de la valeur donnée de t*, tandis que les inégalités correspondantes (27) et (34) exigent que l'on ait $n \geqq v$, où v représente un entier, défini par l'une des conditions

$$1 - \frac{\int_{\tau}^{t} |\mu(\xi)|\, d\xi}{\lambda_\nu} > 0, \quad \text{si } t > \tau,$$

$$1 - \frac{\int_{t}^{\tau} |\mu(\xi)|\, d\xi}{\lambda_\nu} > 0, \quad \text{si } t < \tau$$

et dépendant, par suite, de la valeur donnée de la variable t.

12. Appliquons les formules générales à certains cas particuliers.

Considérons, en premier lieu, les polynomes u_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ de Hermite-Tchébicheff satisfaisant aux équations

(48) $$u_n'' - at\, u_n' + an\, u_n = 0,$$

a désignant une constante positive.

On sait que pour n pair

(49) $$u_n(0) = (-1)^{\frac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}}\, 1.3.5\ldots(n-1), \qquad u_n'(0) = 0$$

et, pour n impair,

(50) $$u_n(0) = 0, \qquad u_n'(0) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, 1.3.5\ldots n . a^{\frac{n+1}{2}}.$$

Chacune des fonctions u_n reste continue pour toutes les valeurs réelles de t, comprises entre $-\infty$ et $+\infty$.

L'équation (48) a précisément la forme de l'équation (9_1) du n° 2, où il faut poser

$$2\Theta(t) = -at, \quad \lambda_n^2 = an.$$

On a donc, dans le cas considéré,

(51) $$z = e^{-\int \Theta(t)\, dt} = e^{\frac{at^2}{4}}, \qquad u_n = e^{\frac{at^2}{4}} v_n$$

et (voir l'équation (13) du n° 2)

(52) $$v_n'' + an\, v_n = \frac{a}{2}\left(\frac{at^2}{2} - 1\right) v_n.$$

On a donc

$$(53) \qquad \mu(t) = \frac{a}{2}\left(\frac{at^2}{2} - 1\right).$$

L'équation (51) donne

$$u_n(0) = v_n(0), \quad u'_n(0) = v'_n(0).$$

On trouve donc, pour n pair, en supposant que $\tau = 0$,

$$(54) \qquad A'_n = (-1)^{\frac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}} 1.3.5\ldots(n-1), \quad B'_n = 0$$

et, pour n impair,

$$(55) \qquad A'_n = 0, \quad B'_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} 1.3.5\ldots n.a^{\frac{n+1}{2}}.$$

13. Considérons d'abord le premier cas (n pair).

En se rappelant que

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{at^2}{2}} u_n^2 \, dt = 1.2.3\ldots n a^n \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$ /n

on trouve, en vertu de (54),

$$\frac{I_n}{A'^2_n} = \frac{1.2.3\ldots n.a^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{a^n(1.3.5\ldots(n-1))^2} = \frac{2.4\ldots(n-2).n}{1.3.5\ldots(n-1)}\sqrt{\frac{2\pi}{a}}.$$ r1

Or,

$$\frac{2.4\ldots 2k}{1.3.5\ldots 2k-1} < \sqrt{2k+1}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad n = 2k.$$

Par conséquent

$$\frac{I_n}{A'^2_n} < \pi\sqrt{\frac{n+1}{a}} = \frac{\pi}{a}\lambda_n\sqrt{1+\frac{1}{n}} < \frac{\pi\sqrt{2}}{a}\lambda_n$$

pour toutes les valeurs de n, plus grandes que l'unité.

Cette inégalité coïncide avec celle de (α) du n° 9, si l'on pose

$$(56) \qquad f(t) = e^{\frac{-at^2}{2}}, \quad K^2 = \frac{\pi\sqrt{2}}{a}, \quad \beta = \frac{1}{2},$$

$$a = -\infty, \quad b = +\infty.$$

On peut donc écrire, en tenant compte de (36) (n⁰ 10), (51), (53) et (54),

$$M^2(t)=\frac{a^2}{4}\int_0^t\left(\frac{a\xi^2}{2}-1\right)^2 d\xi<\frac{ta^2}{4}\left(1+\frac{a^2t^4}{4.5}\right).$$

En remarquant que dans le cas considéré

$$z(\tau)=z(0)=1\,,\quad \varphi(x)=x=t$$

on obtient, eu égard à (46), cette expression asymptotique pour $u_{2k}=u_n$

$$(57)\qquad u_n=(-1)^{\frac{n}{2}}a^{\frac{n}{2}}1.3.5\ldots(n-1)\,e^{\frac{ax^2}{4}}\left(\cos x\sqrt{an}+\frac{\vartheta_n(x)}{\sqrt{n}}\right),$$

où, en vertu de (43), $\vartheta_n(x)$ est une fonction satisfaisant à l'inégalité

$$|\vartheta_n(x)|<a\left\{\int_0^x\left(\frac{a\xi^2}{2}+1\right)d\xi+\frac{\sqrt{\pi a}}{2^{3/4}}\int_0^x\left(\frac{a\xi^2}{2}+1\right)\sqrt{\xi}\sqrt{1+\frac{a^2\xi^4}{4.5}}\,d\xi\right\}.$$

En désignant par ε zéro ou l'unité, selon que $x<1$ ou $x>1$, on peut écrire

$$(58)\qquad \begin{aligned}|\vartheta_n(x)|&<\frac{a(a+2)}{2}\left(1+\frac{\sqrt{\pi a}}{2^{3/4}}\sqrt{1+\frac{a^2}{4.5}}\right)+\varepsilon\frac{a(a+2)}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{\pi a}}{11.2^{3/4}}\sqrt{1+\frac{a^2}{4.5}x^{\frac{5}{2}}}\right)x^3<\\&<\varrho(1+\varepsilon x^5\sqrt{x}),\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\varrho=\frac{a(a+2)}{2}\left(1+\frac{\sqrt{\pi a}}{2^{3/4}}\sqrt{1+\frac{a^2}{4.5}}\right).$$

14. Supposons maintenant que n soit impair.

On a, en vertu de (55),

$$\frac{I_n}{B_n'^2}=\frac{1.2.3\ldots n.a^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{a^{n+1}(1.3.5\ldots n)^2}=\frac{2.4\ldots(n-1)}{a\sqrt{a}.1.3.5\ldots n}\sqrt{2\pi}.$$

Or,

$$\frac{2.4\ldots 2k}{1.3.5\ldots(2k-1)(2k+1)}<\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\sqrt{2k+1}},\quad n=2k+1.$$

Par conséquent,

$$\frac{I_n}{B_n'^2}<\frac{\pi}{a\sqrt{a}\sqrt{n}}=\frac{\pi}{a}\lambda_n^{-1}=\frac{\pi}{a\lambda_n^2}\lambda_n.$$

Cette inégalité coïncide avec celle de (α_1), si l'on pose

$$f(t) = e^{\frac{-at^2}{2}}, \quad K^2 = \frac{\pi}{a}, \quad \beta = \frac{1}{2}.$$

La formule (47) devient

$$(59) \qquad u_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} a^{\frac{n}{2}} 1.3.5\ldots(n-2)\sqrt{n}\, e^{\frac{ax^2}{4}} \left(\sin x\sqrt{an} + \frac{\vartheta_n(x)}{\sqrt{n}}\right),$$

où la fonction $\vartheta_n(x)$ satisfait à l'inégalité (58).

Nous avons supposé, dans ce qui précéde, que $x > 0$.

Or, les formules (57) et (59) restent vraies aussi pour $x < 0$.

Pour obtenir la limite supérieure de $|\vartheta_n(x)|$ dans ce dernier cas, il suffit de remplacer dans l'inégalité (58) x par son module.

15. Considérons maintenant les polynomes u_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ de Jacobi, définies par l'équation

$$(60) \qquad (1-x^2)u_n'' - (2\alpha+1)xu_n' + n(n+2\alpha)u_n = 0, \quad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

où α désigne une constante positive.

Supposant que

$$u_n(+1) = +1, \quad u_n(-1) = (-1)^n,$$

on trouve, pour n pair,

$$(61) \qquad u_n(0) = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(2\alpha)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma(n+2\alpha)},$$

$$u_n'(0) = 0$$

et, pour n impair,

$$u_n = 0,$$

$$(62) \qquad u_n' = (-1)^{\frac{n-1}{2}} 2 \frac{\Gamma(2\alpha)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+\alpha\right)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma(n+2\alpha)},$$

ce qui résulte immédiatement du développement connu

$$\frac{1}{(1-2hx+h^2)^\alpha} = \sum_{u=0}^{\infty} h^n \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(2\alpha)\,\Gamma(n+1)} u_n(x).$$

L'équation (60) n'est qu'un cas particulier de l'équation (4), où

$$p = 1 - x^2, \quad q = -x(2\alpha + 1), \quad r = 1.$$

Appliquons à l'équation (60) la transformation du n⁰ 2 en introduisant la variable

$$t = -\int dx \sqrt{\frac{r}{p}} = arc\cos x,$$

ou

$$x = \cos t.$$

Les valeurs de t, correspondant à

$$x = -1, \quad x = 0, \quad x = +1,$$

sont

$$t_0 = \pi, \quad \tau = \frac{\pi}{2}, \quad t_1 = 0.$$

Remarquant que dans le cas considéré

(63)
$$\Theta(t) = \alpha \operatorname{cotg} t, \quad z = \frac{1}{\sin^\alpha t}, \quad \mu(t) = \frac{\alpha^2 \cos^2 t - \alpha}{\sin^2 t},$$
$$u_n = \frac{v_n(t)}{\sin^\alpha t},$$

on obtient l'équation suivante (l'équation (13) du n⁰ 2)

$$\frac{d^2 v_n}{dt^2} + n(n + 2\alpha) v_n = \frac{\alpha^2 \cos^2 t - \alpha}{\sin^2 t} v_n$$

ou

$$v_n'' + \lambda_n^2 v = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{\sin^2 t} v_n,$$

où l'on a posé

(64)
$$\lambda_n = n + \alpha.$$

On peut donc prendre pour $\mu(t)$ la fonction suivante

$$\mu(t) = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{\sin^2 t}.$$

16. Appliquons au cas considéré la méthode du n⁰ 10.

Supposons d'abord que n soit pair.

On a, en vertu de (61), (62) et (63)

$$v_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = u_n(0), \quad v_n'\left(\frac{\pi}{2}\right) = u_n'(0) = 0.$$

Il faut donc poser

(65) $$A'_n = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(2\alpha)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma(n+2\alpha)}, \qquad B'_n = 0.$$

Posons ensuite

$$f(x) = (1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}.$$

On a

$$I_n = \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} u_n^2\, dx = \frac{\pi}{2^{2\alpha-1}} \frac{\Gamma^2(2\alpha)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma^2(\alpha)\,\Gamma(n+2\alpha)\,(n+\alpha)}.$$

Par conséquent,

$$\frac{I_n}{A'^2_n} = \frac{\pi\,\Gamma^2\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma(n+2\alpha)}{2^{2\alpha-1}\,(n+\alpha)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma^2\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)}.$$

Or,

(66) $$\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+2\alpha)}{2^{2\alpha-1}} = 2^n\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha+\frac{1}{2}\right).$$

On peut donc écrire

$$\frac{I_n}{A'^2_n} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{2^n\,\Gamma^2\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)} \frac{n+2\alpha-1}{n+\alpha} <$$

$$< \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{n+2\alpha-1}{n+\alpha} \frac{2^n\,\Gamma^2\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma(n+1)}.$$

Cette inégalité a lieu pour toutes les valeurs de n, plus grandes que 2, quel que soit le nombre positif α.

D'autre part, en posant $n=2k$, on trouve

$$\frac{2^n\,\Gamma^2\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma(n+1)} = \frac{2.4\ldots 2k}{1.3\ldots 2k-1}.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{I_n}{A'^2_n} < \frac{\pi}{2}\,\frac{n+2\alpha-1}{n+\alpha}\,\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+\alpha}}\sqrt{\lambda_n} < \pi\sqrt{\frac{n+1}{n+\alpha}}\sqrt{\lambda_n},$$

car on a toujours

$$\frac{n+2\alpha-1}{n+\alpha}<2.$$

En remarquant encore que

$$\sqrt{\frac{n+1}{n+\alpha}}<\frac{1}{\sqrt{\alpha}},\quad \text{si } \alpha<1$$

et

$$\sqrt{\frac{n+1}{n+\alpha}}<1,\quad \text{si } \alpha>1,$$

on trouve

$$\frac{I_n}{A_n'^2}<\pi\mu^2\sqrt{\lambda_n}=K^2\lambda_n^{2\beta},$$

où

$$\beta=\frac{1}{4},\quad K^2=\pi\mu^2,$$

$$\mu^2=\frac{1}{\sqrt{\alpha}},\ \text{si } \alpha<1 \ \text{et } \mu^2=1,\ \text{si } \alpha>1.$$

L'inégalité précédente montre que la fonction u_n satisfait à la condition (α) du n° 10.

En se rappelant que dans le cas considéré

$$\tau=\frac{\pi}{2},\ f(\xi)=\sin^{2\alpha-1}\xi,\ p(\xi)=\sin^2\xi,\ z(\xi)=\frac{1}{\sin^\alpha\xi},\ \mu(\xi)=\frac{\alpha(\alpha-1)}{\sin^2\xi},$$

on trouve

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}\frac{\mu^2(\xi)}{f(\xi)\sqrt{p(\xi)}z^2(\xi)}d\xi=\alpha^2(\alpha-1)^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}\frac{d\xi}{\sin^4\xi}=\pm\frac{\cos t(1+2\sin^2 t)}{3\sin^3 t}\alpha^2(\alpha-1)^2,$$

où le signe (+) correspond au cas de $t<\frac{\pi}{2}$, le signe (—) au cas de $t>\frac{\pi}{2}$.

On peut donc poser (voir n° 10)

$$M^2(t)=\frac{\alpha^2(\alpha-1)^2}{\sin^3 t},$$

quelle que soit la valeur de t, prise à l'intérieur de l'intervalle $(0,\pi)$.

La formule générale (41) se réduit, en vertu de (64) et (65), à la suivante

$$(67)\quad v_n(t) = \frac{\Gamma(2\alpha)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma(n+2\alpha)}\left[\cos\left((n+\alpha)\,t - \frac{\alpha\pi}{2}\right) + \frac{\vartheta_n(t)}{n+\alpha}\right],$$

où, en vertu de (43),

$$(68)\qquad |\vartheta_n(t)| < \frac{\alpha\,|\alpha-1|}{|\operatorname{tang} t|} + \frac{\mu\,\pi\sqrt{\pi}\,\alpha^2\,|\alpha-1|^2}{(\alpha+2)^{3/4}\sin^{7/2} t}$$

pour toutes les valeurs de t, comprises entre 0 et π.

17. Supposons maintenant que n soit impair.

Dans ce cas, en vertu de (62) et (63),

$$B_n' = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, 2\, \frac{\Gamma(2\alpha)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+\alpha\right)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma(n+2\alpha)}, \quad A_n' = 0,$$

ce qui nous donne [voir l'égalité (66)]

$$\frac{I_n}{B_n'^2} = \frac{\pi}{2^{2\alpha+1}}\,\frac{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma(n+2\alpha)}{(n+\alpha)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}+\alpha\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\,2^n\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)}{4\,(n+\alpha)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+\alpha\right)}.$$

On en tire, en remarquant que

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+\alpha\right)} < 1$$

et en posant $n = 2k+1$,

$$\frac{I_n}{B_n'^2} < \sqrt{\pi}\,\frac{2^n\,\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)}{4\,(n+\alpha)\,\Gamma(n+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\,(n+\alpha)}\,\frac{2.4\ldots 2k}{1.3\ldots(2k-1)\,(2k+1)} <$$

$$< \frac{\pi}{4\,(n+\alpha)\sqrt{n}} < \frac{\pi}{4\,\lambda_n^2}\sqrt{1+\alpha}\,\sqrt{\lambda_n}\,.$$

Donc la fonction u_n pour n impair satisfait à la condition (α_1) du n⁰ 10, où il faut poser

$$K^2 = \frac{1}{4}\pi\sqrt{1+\alpha}, \quad \beta = \frac{1}{4}$$

et, comme au n⁰ précédent,

$$M^2(t) = \frac{\alpha^2(\alpha-1)^2}{\sin^3 t}.$$

La formule (44) conduit à l'équation suivante

$$(69) \quad v_n(t) = 2\frac{\Gamma(2\alpha)\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+\alpha\right)}{\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma(n+2\alpha)(n+\alpha)}\left[\cos\left((n+\alpha)t-\frac{\alpha\pi}{2}\right)+\frac{\vartheta_n(t)}{n+\alpha}\right],$$

où la fonction $\vartheta_n(t)$ satisfait à l'inégalité

$$(70) \quad |\vartheta_n(t)| < \frac{\alpha|\alpha-1|}{|\operatorname{tang} t|} + \frac{\pi\sqrt{\pi}\,(1+\alpha)^{\frac{1}{4}}\alpha^2|\alpha-1|^2}{2(\alpha+2)^{3/4}\sin^{7/2} t}.$$

18. On peut simplifier les expressions asymptotiques (67) et (69) de la manière suivante:

Les relations connues

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \sqrt{\pi}\,2^{-n}\,\Gamma(n+1),$$

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+\alpha\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right) = \sqrt{\pi}\,2^{-n-2\alpha+1}\,\Gamma(n+2\alpha)$$

donnent

$$(71) \quad \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma(n+2\alpha)} = 2^{-2\alpha+1}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+\alpha\right)},$$

$$(72) \quad \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+\alpha\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma(n+2\alpha)} = 2^{-2\alpha+1}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)} = 2^{-2\alpha}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)}n.$$

Substituant (71) dans (67) on trouve

$$(73)\quad v_n(t) = \frac{\Gamma(2\alpha)}{2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+\alpha\right)} \left[\cos\left((n+\alpha)\,t - \frac{\alpha\pi}{2}\right) + \frac{\vartheta_n(t)}{n+\alpha}\right]$$

pour n pair.

On obtient ensuite, en tenant compte de (72) et (69),

$$(74)\quad v_n(t) = \frac{\Gamma(2\alpha)}{2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)} \frac{n}{n+\alpha} \left[\cos\left((n+\alpha)\,t - \frac{\alpha\pi}{2}\right) + \frac{\vartheta_n(t)}{n+\alpha}\right].$$

Or,

$$\frac{n}{n+\alpha}\left[\cos\left((n+\alpha)\,t - \frac{\alpha\pi}{2}\right) + \frac{\vartheta_n(t)}{n+\alpha}\right] = \cos\left((n+\alpha)\,t - \frac{\alpha\pi}{2}\right) -$$

$$- \frac{\alpha}{n+\alpha}\cos\left((n+\alpha)\,t - \frac{\alpha\pi}{2}\right) + \frac{n}{n+\alpha}\frac{\vartheta_n(t)}{n+\alpha} = \cos\left((n+\alpha)\,t - \frac{\alpha\pi}{2}\right) + \frac{\Theta(t)}{n+\alpha},$$

où l'on a posé

$$\Theta(t) = \alpha\cos\left((n+\alpha)\,t - \frac{\alpha\pi}{2}\right) + \frac{n}{n+\alpha}\vartheta_n(t).$$

L'équation (74) peut donc s'écrire comme il suit

$$(75)\quad v_n(t) = \frac{\Gamma(2\alpha)}{2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)} \left[\cos\left((n+\alpha)\,t - \frac{\alpha\pi}{2}\right) + \frac{\Theta_n(t)}{n+\alpha}\right].$$

Substituant (73) et (75) dans (63) on trouve finalement, pour n pair,

$$(76)\quad u_n(\cos t) = \frac{\Gamma(2\alpha)\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)\sin^{\alpha} t} \left[\cos\left((n+\alpha)\,t - \frac{\alpha\pi}{2}\right) + \frac{\Theta_n(t)}{n+\alpha}\right]$$

et, pour n impair,

$$(77)\quad u_n(\cos t) = \frac{\Gamma(2\alpha)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)\sin^{\alpha} t} \left[\cos\left((n+\alpha)\,t - \frac{\alpha\pi}{2}\right) + \frac{\Theta_n(t)}{n+\alpha}\right]^{1)},$$

[1]) Compar. Darboux: „Sur l'approximation des fonctions de très grands nombres etc". Journ. de Liouville, 1878, p. 49.

A. A. Adamoff: „Объ асимптотическомъ выраженіи полиномовъ $J_n^{\nu}(x)$ и т. д." Извѣстія С.-Петербург. Политехн. Института, 1906.

où

$$|\Theta_n(t)| < \alpha + |\vartheta_n(t)|,$$

$\vartheta_n(t)$ étant une fonction satisfaisant à l'inégalité (70).

Ces formules étant établies, il suffit de répéter, avec une modification légère, les raisonnements de M. Darboux (loc. cit.), qu'il a appliqués aux polynomes

$$Z_n = F(\alpha + n, -n, \gamma, x),$$

F désignant la série hypergéométrique, pour s'assurer que *toute fonction donnée $f(x)$ se développe en série de polynomes u_n avec les mêmes particularités que dans le cas des séries trigonométriques.*

18. Désignons maintenant par $u_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ les polynomes qui satisfont à l'équation

$$2xu_n'' + (1 - ax)u_n' + anu_n = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{78}$$

Nous avons ici un cas particulier de polynomes $V_n^{(\beta)}$, défines par les équations

$$x(V_n^\beta)'' + (\beta - \alpha x)(V_n^\beta)' + \alpha n V_n^\beta = 0, \tag{79}$$

car il suffit de remplacer dans cette équation α par $\frac{a}{2}$, β par $\frac{1}{2}$ pour en déduire l'équation (78).

V_n^β $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ sont les polynomes de Tchébicheff correspondant à la fonction caractéristique

$$p(x) = x^{\beta - 1} e^{-\alpha x}. \qquad (\beta > 0, \alpha > 0)$$

Rappelons quelques-unes de leurs propriétés.

Remplaçant dans (74) β par $\beta + 1$, n par $n - 1$, on trouve

$$x(V_{n-1}^{\beta+1})'' + (\beta + 1 - \alpha x)(V_{n-1}^{\beta+1})' + \alpha(n-1)V_{n-1}^{(\beta+1)} = 0.$$

D'autre part, différentiant (74) une fois par rapport à x, on tire

$$x\frac{d^2}{dx^2}(V_n^\beta)' + (\beta + 1 - \alpha x)\frac{d}{dx}(V_n^\beta)' + \alpha(n-1)(V_n^\beta)' = 0.$$

Ces dernières équations montrent que les polynomes $V_{n-1}^{\beta+1}$ et $\frac{dV_n^\beta}{dx}$ ne peuvent différer l'un de l'autre que par un facteur constant C.

On a donc

$$\frac{dV_n^\beta}{dx} = CV_{n-1}^{\beta+1}.$$

Supposant, pour plus de simplicité, que le coefficient à x^n de polynome V_n^β soit égal à l'unité, on trouve

$$\frac{dV_n^\beta}{dx} = n V_{n-1}^{\beta+1} . \tag{80}$$

Posons

$$V_n^\beta = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j .$$

On s'assure aisément que

$$a_j = (-1)^{n-j} \alpha^{-(n-j)} \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{j!} (\beta+j)(\beta+j+1)\dots(\beta+n-1).$$
$$(j=0,1,2,\dots n)$$

On a donc

$$V_n^\beta(0) = a_0 = (-1)^n \alpha^{-n} \beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1).$$

L'équation (79), mise sous la forme

$$\alpha n x^{\beta-1} e^{-\alpha x} V_n^\beta = -\frac{d}{dx}[x^\beta e^{-\alpha x} (V_n^\beta)'] ,$$

donne

$$\alpha n \int_0^\infty x^{\beta-1} e^{-\alpha x} (V_n^\beta)^2 dx = -\int_0^\infty V_n^\beta \frac{d}{dx}\left[x^\beta e^{-\alpha x} (V_n^\beta)'\right] dx = \int_0^\infty x^\beta e^{-\alpha x} \left((V_n^\beta)'\right)^2 dx ,$$

d'où, en vertu de (80),

$$\alpha \int_0^\infty x^{\beta-1} e^{-\alpha x} (V_n^\beta)^2 \, dx = n \int_0^\infty x^\beta e^{-\alpha x} (V_{n-1}^{\beta+1})^2 \, dx .$$

On peut donc écrire

$$I_n^\beta = \frac{n}{\alpha} I_{n-1}^{\beta+1} \tag{81}$$

en posant, en général,

$$I_n^\beta = \int_0^\infty x^{\beta-1} e^{-\alpha x} (V_n^\beta)^2 \, dx .$$

En remplaçant dans (81) n succesivement par $n-1$, $n-2, \dots, 0$ et β par $\beta+1$, $\beta+2, \dots$, $\beta+n$, on trouve, par la multiplication des équations ainsi obtenues,

$$I_n^\beta = \frac{n!}{\alpha^n} I_0^{\beta+n}.$$

Or,

$$I_0^{\beta+1} = \int_0^\infty x^{\beta+n-1} e^{-\alpha x} (V_0^{n+\beta})^2 dx = \int_0^\infty x^{\beta+n-1} e^{-\alpha x} dx = \frac{\Gamma(\beta+n)}{\alpha^{\beta+n}},$$

car

$$V_0^{n+\beta}(x) = 1.$$

On a donc

$$I_n^\beta = \frac{n!\,\Gamma(\beta+n)}{\alpha^{\beta+2n}} = \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\beta+n)}{\alpha^{\beta+2n}}.$$

Posons maintenant

$$\beta = \frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{a}{2}.$$

On aura

(82) $$u_n^{\frac{1}{2}}(0) = (-1)^n a^{-n}\, 1.3.5\ldots(2n-1),$$

(83) $$I_n^{\frac{1}{2}} = 2^{2n+1} \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{2}\, a^{2n+\frac{1}{2}}} = 4\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2a}} a^{-2n}\, n\,\Gamma(2n),$$

car

$$2^{2n-1}\,\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2n)}{\Gamma(n)}.$$

19. Remarquons qu'on peut poser $a=1$, sans restreindre la généralité, car il suffit de remplacer dans (78) la variable x par $\frac{x}{a}$ pour reduire cette équation à la suivante

(84) $$2x u_n'' + (1-x) u_n' + n u_n = 0.$$

Appliquons à cette équation la transformation du n⁰ 2 en y posant

$$p = 2x, \quad q = 1-x, \quad r = 1.$$

On trouve

$$t = \int dx \sqrt{\frac{r}{p}} = \sqrt{2x}, \quad x = \frac{t^2}{2},$$

(85) $$2\Theta = \frac{2(1-x)-2}{2\sqrt{2x}} = -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} = -\frac{t}{2},$$

$$z(t) = e^{-\int \Theta(t)\,dt} = e^{\frac{t^2}{8}},$$

(86) $$u_n\left(\frac{t^2}{2}\right) = e^{\frac{t^2}{8}} v_n(t).$$

L'équation (84) devient

$$\frac{d^2 v_n}{dt^2} + \sqrt{n}\, v_n = \mu(t)\, v_n,$$

où

$$\mu(t) = \frac{t^2 - 4}{16}.$$

L'équation (86) montre que

(87) $$v_n(0) = u_n(0), \quad v_n'(0) = 0.$$

Considérons le rapport

$$R = \frac{\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} u_n^2(x)\, dx}{A_n'^2} = \sqrt{2}\, \frac{\int\limits_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4}} u_n^2\left(\frac{t^2}{2}\right) dt}{A_n'^2},$$

où

$$A_n' = u_n(0) = (-1)^n\, 1.3.5\ldots(2n-1).$$

On trouve, en vertu de (83),

$$R = 2\sqrt{\pi}\, \frac{2n!}{[1.3.5\ldots(2n-1)]^2} = 2\sqrt{\pi}\, \frac{2^{2n}(n!)^2}{2n!}.$$

De cette égalité on tire à l'aide de formule de Wallis

$$R = 2\pi\sqrt{n}(1+\delta_n) < 4\pi\sqrt{n} = 4\pi\,\lambda_n^{2\beta},$$

où

$$\lambda_n^2 = n, \quad \beta = \frac{1}{2}.$$

Les polynomes u_n satisfont à la condition (α) du n⁰ 10.
Posons en effet, dans les formules générales du n⁰ 10,

(86₁) $$a = 0, \quad b = +\infty, \quad \tau = 0, \quad f(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}, \quad A_n' = u_n(0), \quad \mu(\xi) = \frac{\xi^2 - 4}{16}$$

$$p(x) = x, \quad z(\xi) = e^{\frac{\xi^2}{8}}, \quad \lambda_n^2 = n, \quad \beta = \frac{1}{2}, K^2 = 4\pi,$$

On trouve

$$\int\limits_a^b f(x)\, u_n^2(x)\, dx = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} u_n^2(x)\, dx < A_n'^2 K^2 \lambda_n^{2\beta},$$

et

$$\int_{\tau}^{t} \frac{\mu^2(\xi)}{f(\xi)\, z^2(\xi) \sqrt{p(\xi)}}\, d\xi = \int_0^t \mu^2(\xi)\, d\xi < \frac{1}{16^2} \int_0^t (\xi^2 - 4)^2\, d\xi < \frac{t(t^2+80)}{5.16^2}.$$

On peut donc poser

$$M^2(t) = \frac{t(t^4+80)}{5.16^2}. \tag{87}$$

L'équation (41) du n⁰ 11 conduit à cette expression de v_n

$$v_n = A_n' \left(\cos t\sqrt{n} + \frac{\vartheta_n(t)}{\sqrt{n}} \right), \tag{88}$$

où, en vertu de (43) et (87),

$$|\vartheta_n(t)| < \int_0^t \frac{|\xi^2 - 4|}{16}\, d\xi + 2\sqrt{\pi} \int_0^t \frac{|\xi^2 - 4|}{5.16^2} \sqrt{\xi(\xi^2+80)}\, d\xi$$

pour toutes les valeurs de n, plus grandes que l'unité.

Substituant (88) dans (86) on trouve cette expression asymptotique pour u_n

$$u_n\left(\frac{t^2}{2}\right) = (-1)^n\, 1.3.5\ldots(2n-1)\, e^{\frac{t^2}{8}} \left(\cos t\sqrt{n} + \frac{\vartheta_n(t)}{\sqrt{n}} \right). \tag{80}$$

19. Nous allons maintenant appliquer les résultats obtenus au problème du développement d'une fonction arbitraire en séries des polynomes, considérés aux nos précédents (**12**—**18**).

Faisons d'abord quelques remarques préliminaires sur ce sujet.

M. Du-Bois-Raymond fût le premier qui a généralisé la méthode de Dirichlet, appliquée par cet illustre géomètre aux développements trigonométriques.

D'après Dirichlet, le problème se ramène, comme on sait, à la recherche de la limite, vers laquelle tend l'intégrale

$$\int_a^b \varphi(\alpha) \frac{\sin n(\alpha - x)}{\alpha - x}\, dx,$$

lorsque n tend vers l'infini, $\varphi(\alpha)$ désignant une fonction donnée.

M. Du-Bois-Raymond a étudié l'intégrale plus générale de la forme suivante

$$S_n = \int_a^b \varphi(\alpha)\, \psi(x, \alpha, n)\, d\alpha,$$

contenant comme un cas particulier celle de Dirichlet, et il a indiqué certaines hypothèses générales sur la fonction $\varphi(x)$, sous lesquelles on peut trouver la limite de l'intégrale S_n pour $n=\infty$.

Les recherches de Du-Bois-Raymond, dont le bût principal consistait à résoudre le problème de la représentation d'une fonction arbitraire à l'aide des intégrales définies, ont été généralisées ensuite par M. Dini en 1880, qui a appliqué ses recherches au problème du développement des fonctions en séries infinies.

Nous pouvons maintenant, en suivant une voie indiquée par M. Jordan dans son Cours d'Analyse, exposer les résultats principaux de ces recherches sous la forme suivante:

Soit $u_n (n=0, 1, 2, \ldots)$ une suite bien déterminée de fonctions de α et du paramètre n.

Posons

$$S_n = \sum_0^n \frac{u_k(x)}{I_k} \int_a^b f(\alpha)\varphi(\alpha) u_k(\alpha)\, d\alpha = \sum_0^n \frac{A_k}{I_k} u_k(x),$$

où

$$A = \int_a^b f(\alpha)\varphi(\alpha) u_k(\alpha)\, d\alpha, \quad I_k = \int_v^b f(\alpha) u_k^2(\alpha)\, d\alpha.$$

On peut écrire

$$S_n = \int_a^b \varphi(\alpha)\psi(x, \alpha, n)\, d\alpha,$$

si l'on pose

$$\psi(x, \alpha, n) = f(\alpha) \sum_0^n \frac{u_k(x) u_k(\alpha)}{I_k}.$$

La somme de la série infinie

$$S = \sum_0^\infty \frac{A_k}{I_k} u_k(x)$$

est égale à la limite, vers laquelle tend l'intégrale S_n, lorsque l'indice n croît indéfiniment.

Le problème se ramène à l'étude des intégrales

$$\int_a^\xi \psi(x, \alpha, n)\, d\alpha, \quad \int_\eta^b \psi(x, \alpha, n)\, d\alpha,$$

ξ désignant un nombre, compris entre a et x, η un nombre, compris entre x et b.

Si le module de chacune de ces intégrales ne surpasse pas un nombre fixe L, indépendant de ξ, η et de n, et si ces intégrales tendent uniformément vers une limite fixe G, lorsque n tend vers l'infini, on aura

$$\lim_{n=\infty} S_n = \lim_{n=\infty} \int_a^x \varphi(\alpha)\,\psi(x,\ \alpha,\ n)\,d\alpha + \lim_{n=\infty} \int_x^b \varphi(\alpha)\ \psi(x,\ \alpha,\ n)\,d\alpha =$$
$$= G\,[\varphi(x+0) + \varphi(x-0)]$$

toutes les fois que la fonction $\varphi(x)$ sera une fonction à variation bornée entre a et b.

Ce théorème conduit immédiatement à une méthode générale pour résoudre plusieurs problèmes du développement d'une fonction arbitraire en séries des fonctions $u_n\,(n = 0,\ 1,\ 2,)$.

Dans sa Thèse, présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de St.-Pétersbourg, M. A. Adamoff applique cette méthode de Du-Bois-Raymond et de Dini aux polynomes de Hermite et aux polynomes du n⁰ 15 qui présentent un cas particulier de ceux de Jacobi.

Or, je me permets de rappeler, en profitant de l'occasion, que les développements en séries des polynomes de Jacobi ont été étudiés déjà par M. Darboux en 1878, indépendemment des recherches de M^rs Du-Bois-Raymond et Dini, dans son Mémoire: „Sur l'approximation des fonctions de très-grands nombres etc.", cité plusieurs fois.

Il est aisé de comprendre ensuite que la méthode de Darboux s'étend à tous les polynomes, considérés aux n^os précédents (12—18). On pourra donc résoudre le problème du développement dans les cas, tout à l'heure mentionnés, en suivant une voie, indiquée par M. Darboux, sans se rapporter à la théorie générale de M^rs Du-Bois-Raymond et Dini.

Il n'est pas inutile de faire quelques remarques sommaires sur ce sujet sans entrer en détails.

20. En entendant par $u_n(x)\,(n = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$ une suite quelconque de polynomes de Tchébicheff, on a toujours

$$(91)\quad S_n = \sum_0^n \frac{u_k(x)\int_a^b f(y)\,\varphi(y)\,u_k(y)\,dy}{I_k} = \int_a^b \frac{f(y)\,\varphi(y)}{I_k}\,\frac{u_{n+1}(x)\,u_n(y) - u_{n+1}(y)\,u_n(x)}{x-y}\,dy$$

C'est une formule, établie, si je ne me trompe pas, pour la première fois par M. Darboux dans son Mémoire, cité plus haut (p. 411 etc.)[1]

[1] Voir aussi Tchébicheff: „О разложеніи въ непрерывную дробь рядовъ, расположенныхъ по нисходящимъ степенямъ перемѣнной". Записки Императорской Академіи Наукъ, № 3, 1892.

Appliquons cette formule aux polynomes $u_n(x)$ de n^{os} 12—18.

Les recherches précédentes montrent que chacun de ces polynomes peut être présenté sous la forme suivante

$$u_n = h_n\left(\alpha_n + \frac{\vartheta_n}{n^q}\right), \tag{92}$$

où q est égal à $\frac{1}{2}$ pour les polynomes de Hermite ainsi que pour ceux du n^0 18, et $q=1$ pour les polynomes de Jacobi.

Substituant (92) dans (91) on peut écrire

$$S_n = \frac{h_n h_{n+1}}{I_n}\int_a^b f(y)\,\varphi(y)\,\frac{\alpha_{n+1}(x)\,\alpha_n(y) - \alpha_n(x)\,\alpha_{n+1}(y)}{x-y}\,dy + \varepsilon_n. \tag{93}$$

En suivant la méthode de Darboux (loc. cit. p.p. 385 etc.) on peut s'assurer que

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0.$$

On aura donc

$$\lim_{n=\infty} S_n = \lim_{n=\infty} \frac{h_n h_{n+1}}{I_n}\int_a^b f(y)\,\varphi(y)\,\frac{\alpha_{n+1}(x)\,\alpha_n(y) - \alpha_n(x)\,\alpha_{n+1}(y)}{x-y}\,dy.$$

L'étude de cette dernière intégrale se ramène, dans tous les cas qui nous intéressent, à celui de l'intégrale de Dirichlet; il suffit pour cela de remplacer α_n par leurs expressions qui résultent des formules asymptotiques.

Considérons, pour exemple, les polynomes du n^0 18.

En se rappelant que dans ce cas

$$a=0, \quad b=\infty, \quad f(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}},$$

$$\alpha_n = e^{\frac{x}{4}} \cos\sqrt{2nx} = e^{\frac{t^2}{8}} \cos t\sqrt{n},$$

on trouve

$$S_n = \frac{h_n h_{n+1}}{I_n}\int_0^\infty \frac{e^{\frac{x-y}{4}}}{\sqrt{y}}\,\varphi(y)\,\frac{\cos\sqrt{2x(n+1)}\,.\cos\sqrt{2yn} - \cos\sqrt{2y(n+1)}\cos\sqrt{2xn}}{x-y}\,dy.$$

Or, il est aisé de s'assurer qu'on peut poser, pour les valeurs de n plus grandes que l'unité,

$$\cos\sqrt{2\varphi(n+1)} = \cos\sqrt{2\varphi n} - \frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{2n}}\sin\sqrt{2\varphi n} + \frac{\delta_n(\varphi)}{n},$$

$\delta_n(\varphi)$ désignant une fonction dont le module ne surpasse pas un nombre fixe ne dépendant pas de n.

On a donc

$$\cos\sqrt{2x(n+1)}\,.\cos\sqrt{2yn}-\sqrt{2y(n+1)}\cos\sqrt{2xn}=$$

$$=\frac{\sqrt{y}\sin\sqrt{2yn}\cos\sqrt{2xn}-\sqrt{x}\sin\sqrt{2xn}\cos\sqrt{2yn}}{\sqrt{2n}}+\frac{\varphi_n(x,\ y)}{n},$$

où l'on a posé

$$\varphi_n(x,\ y)=\delta_n(x)\cos\sqrt{2yn}-\delta_n(y)\cos\sqrt{2xn}\,.$$

Remarquant ensuite que, en vertu de (83) et (90),

$$\frac{h_n h_{n+1}}{I_n}=(-1)^{2n+1}\frac{[1.3.5\ldots(2n-1)]^2(2n+1)}{\sqrt{2\pi}\ 2n\,!}=$$

$$=(-1)^{2n+1}(2n+1)\frac{2n\,!}{2^{2n}(n\,!)^2}=-\frac{1}{\pi}\sqrt{2n+1}\,(1+\varepsilon_n),$$

ε_n désignant une quantité qui s'annule pour $n=\infty$, on trouve

$$\lim_{n=\infty}S_n=-\lim_{n=\infty}\frac{\sqrt{2n+1}}{\pi\sqrt{2n}}\int_0^\infty\frac{e^{\frac{x-y}{4}}}{\sqrt{y}}\,\varphi(y)\,\frac{\psi_n(x,\ y)}{x-y}\,dy+\lim_{n=\infty}\frac{\sqrt{2n+1}}{\pi n}\int_0^\infty\frac{e^{\frac{x-y}{4}}}{\sqrt{y}}\,\varphi(y)\,\frac{\varphi_n(x,\ y)}{x-y}\,dy$$

où l'on a posé

$$\psi_n(x,\ y)=\sqrt{y}\sin\sqrt{2yn}\cos\sqrt{2xn}-\sqrt{x}\sin\sqrt{2xn}\,.\cos\sqrt{2yn}\,.$$

On peut s'assurer que le second terme de cette égalité se réduit à zéro.

On en conclut que

$$\lim_{n=\infty}S_n=-\lim_{n=\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{e^{\frac{x-y}{4}}}{\sqrt{y}}\,\varphi(y)\,\frac{\psi_n(x,y)}{x-y}\,dy.$$

Or

$$\psi_n(x,\ y)=-\sqrt{x}\sin\sqrt{2n}\,(\sqrt{x}-\sqrt{y})+(\sqrt{y}-\sqrt{x})\sin\sqrt{2yn}\,.\cos\sqrt{2xn}\,.$$

L'intégrale du second membre de l'égalité précédente se decompose en deux dont l'une est égale à

$$S_n'=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{e^{\frac{x-y}{4}}}{\sqrt{y}}\,\varphi(y)\,\frac{\sin\sqrt{2yn}\cos\sqrt{2xn}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\,dy.$$

Cette intégrale tend vers zéro, lorsque n tend vers l'infini, si $\varphi(x)$ *est une fonction à variation bornée entre* 0 *et* $+\infty$.

On a donc

$$\lim_{n=\infty} S_n = \frac{2}{\pi} \lim_{n=\infty} \int_0^\infty \Theta(x, u) \frac{\sin \sqrt{2nx}(1-u)}{1-u} du,$$

où l'on a posé

$$u = \sqrt{\frac{y}{x}}, \quad \Theta(x, y) = \frac{e^{\frac{x(1-u^2)}{4}}}{1+u} \varphi(x, u^2).$$

L'intégrale du second membre de l'égalité précédente est précisément l'intégrale de Dirichlet.

On en conclut immédiatement que

$$(93_1) \qquad \lim_{n=\infty} S_n = \sum_0^\infty \frac{u_n(x) \int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}} u_n(x)\, dx}{\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}} \frac{u_n^2(x)}{\sqrt{x}} dx} = \frac{1}{2}[\varphi(x+0) + \varphi(x-0)].$$

Donc, la série (93_1) *converge uniformément pour toute valeur positive de* x, *si la fonction donnée* $\varphi(x)$ *est une fonction à variation bornée entre* 0 *et* $+\infty$, *et la somme de cette série est égale à*

$$\frac{1}{2}[\varphi(x+0) + \varphi(x-0)].$$

Le théorème analogue a lieu pour les polynomes du n° 15 ainsi que pour les polynomes de Hermite.

La réduction de l'intégrale (93_1) à celle de Dirichlet, ce qui suffit pour achever la démonstration, s'effectue par un procédé tout à fait analogue à ce que nous venons d'indiquer.

21. Revenons à la série

$$(94) \qquad \sum_0^\infty A_n u_n(x)$$

en désignant maintenant par A_n le rapport

$$\frac{\int_a^b f(x) \varphi(x) u_n(x)\, dx}{I_n},$$

où $\varphi(x)$ est une fonction donnée, $u_n(x)\,(n=0,\ 1,\ 2,\ldots)$ l'une de suites de polynomes, étudiés plus haut.

Indiquons une transformation de la série (94) moyennant les formules asymptotiques que nous avons établies aux n^{os} précédents.

Posons

$$W_n = A_n u_n(x)$$

et désignons par w_n ce qui devient W_n, lorsque on y remplace u_n par son expression approchée $h_n \alpha_n$ qui résulte de la formule générale (92) [voir n^0 précédent]

$$u_n = h_n\left(\alpha_n + \frac{\vartheta_n}{n^q}\right).$$

On trouve

$$(94_1)\qquad W_n - w_n = \frac{h_n^2}{I_n}\,\frac{\omega_n}{n^q} = \delta_n,$$

où

$$(95)\qquad w_n = \frac{h_n^2 \alpha_n}{I_n}\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,\alpha_n\,dx,$$

$$(96)\qquad \omega_n = \vartheta_n \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\left(\alpha_n + \frac{\vartheta_n}{n^q}\right)dx + \alpha_n \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,\vartheta_n\,dx.$$

Nous allons établir, dans ce qui va suivre, que *les conditions de convergence de la série (94) sont les mêmes que celles de la série approchée*

$$(97)\qquad \sum_0^\infty w_n = \sum_0^\infty \frac{h_n^2 \alpha_n}{I_n}\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,\alpha_n\,dx,$$

si la fonction $\varphi(x)$ satisfait à certaines conditions très générales que nous énoncerons plus loin.

Remarquons tout d'abord qu'il est aisé de s'assurer que δ_n tend vers zéro, lorsque n croît indéfiniment, pourvu que les intégrales qui figurent dans l'expression de ω_n aient un sens bien déterminé; il s'ensuit que les termes du développement (94) tendent de plus en plus à se confondre avec ceux de la série (97).

Or, pour démontrer rigoureusement que les conditions de convergence de ces deux séries sont les mêmes, il faut encore établir que la série

$$\sum_{0}^{\infty} \delta_n$$

converge absolument et uniformément, ce que nous ferons dans les articles prochains.

22. Bornons nous, pour fixer les idées, au cas des polynomes du n⁰ 18; l'analyse, que nous allons exposer, s'appliquera, avec une modification légère, aux polynomes de Hermite ainsi qu' à ceux de Jacobi.

L'égalité (42) du n⁰ 11 donne

$$(98) \qquad \vartheta_n(t) = \sin \lambda_n t \int_0^t \mu(\xi) \cos^2 \lambda_n \xi \, d\xi - \cos \lambda_n t \int_0^t \mu(\xi) \sin \lambda_n \xi \cos \lambda_n \xi \, d\xi - \frac{\beta_n}{\sqrt[4]{n}},$$

où

$$(99) \qquad \beta_n = \int_0^t \mu(\xi) \sin \lambda_n (\xi - t) \, \omega_n(\xi) \, d\xi .$$

On trouve, en tenant compte de (86_1),

$$\int_0^t \mu(\xi) \cos^2 \lambda_n \xi \, d\xi = \frac{t(t^2-12)}{3.16} + \frac{\sin 2\lambda_n t}{32\lambda_n}(t^2-4) - \frac{t \cos 2\lambda_n t}{32\lambda_n^2} + \frac{\sin 2\lambda_n t}{64\lambda_n^3} =$$

$$= \frac{t(t^2-12)}{6.16} + \Theta_n(t), \qquad \lambda_n = \sqrt{n} .$$

Il est aisé de s'assurer que

$$|\Theta_n(t)| < \frac{2t^2+2t+9}{2.64\sqrt{n}} < \frac{t^2+t+9}{64\sqrt{n}} .$$

D'autre part,

$$|\Theta_n'(t)| = \left| \int_0^t \mu(\xi) \sin \lambda_n \xi \cos \lambda_n \xi \, d\xi \right| = \frac{1}{64\lambda_n}\left[-4 - (t^2-4)\cos 2\lambda_n t + \frac{t \sin 2\lambda_n t}{\lambda_n} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\lambda_n^2}(\cos 2\lambda_n t - 1) \right] < \frac{t^2+t+9}{64\sqrt{n}} .$$

On peut donc écrire

$$(100) \qquad \vartheta_n(t) = \sin \lambda_n t \frac{t(t^2-12)}{6.16} + \frac{\psi_n(t)}{\sqrt{n}} - \frac{\beta_n}{\sqrt[4]{n}},$$

où l'on a posé

$$\psi_n(t) = \sqrt{n}\,[\sin \lambda_n t\, \Theta_n(t) - \cos \lambda_n t\, \Theta'_n(t)].$$

La fonction $\psi_n(t)$ satisfait évidemment à la condition

$$|\psi_n(t)| < \frac{t^2 + t + 9}{32}. \tag{101}$$

Considérons maintenant l'expression (99) de β_n.

On trouve, comme au n⁰ 11, en tenant compte de (86_1),

$$|\beta_n| < \frac{\sqrt{\pi}}{5.16.8} \int_0^t |\xi^2 - 4| \sqrt{\xi(\xi^4 + 80)}\, d\xi. \tag{102}$$

Or,

$$\int_0^t |\xi^2 - 4| \sqrt{\xi(\xi^4 + 80)}\, d\xi = \int_0^1 + \varepsilon \int_1^t,$$

où $\varepsilon = 0$ ou 1, selon que t soit < 1 ou > 1.

On peut donc écrire

$$|\beta_n| < \frac{\sqrt{\pi}}{5.16.8}\left[5.9 + \varepsilon .5.9 \int_1^t \xi^{\frac{9}{2}} d\xi\right] < \frac{9\sqrt{\pi}}{8.16}\left[1 + \frac{2}{11} t^{\frac{11}{2}}\right]$$

quelle que soit la valeur de t, prise entre 0 et $+\infty$.

Il est évident que l'expression $\vartheta_n(t)$ (100) peut être présentée sous la forme suivante

$$\vartheta_n(t) = \sin t\sqrt{n}\, \frac{t(t^2 - 12)}{16} + \frac{q_n(t)}{\sqrt[4]{n}}, \tag{103}$$

si l'on pose

$$q_n(t) = \frac{\psi_n(t)}{\sqrt[4]{n}} - \beta_n.$$

La fonction $q_n(t)$ satisfait à l'inégalité

$$|q_n(t)| < \varrho t^{11/2} + \sigma t^2 + \tau t + h, \tag{104}$$

où l'on peut poser, pour $n > 1$,

$$\varrho = \frac{9\sqrt{\pi}}{128}, \quad \sigma = \tau = \frac{1}{32}, \quad h = \frac{9}{32}\left(1 + \frac{\sqrt{\pi}}{4}\right),$$

ce qui résulte immédiatement des inégalités (101) et (102).

23. Cherchons maintenant une limite supérieure de ω_n, défini par l'équation (96).

Considérons d'abord l'intégrale

$$H = \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,\vartheta_n\,dx$$

qui prend, dans le cas considéré, la forme suivante

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{3\sqrt{2}\,.\,16}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4}}\varphi\left(\frac{t^2}{2}\right)t(t^2-12)\sin t\sqrt{n}\,dt + \frac{1}{\sqrt[4]{n}}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4}}\varphi\left(\frac{t^2}{2}\right)q_n(t)\,dt = \\ &= \int_0^\infty \psi(t)\sin t\sqrt{n}\,dt + \frac{\mu}{\sqrt[4]{n}} = H' + \frac{\mu}{\sqrt[4]{n}} \end{aligned} \tag{105}$$

où l'on a posé

$$\psi(t) = \frac{e^{-\frac{t^2}{4}}\varphi\left(\frac{t^2}{2}\right)t\,(t^2-12)}{3\sqrt{2}\,.\,16}.$$

Supposons que $\varphi(x)$ *soit une fonction à variation bornée entre* 0 *et* $+\infty$.

Il en sera de même de la fonction $\psi(t)$.

La fonction $\psi(t)$ peut se représenter sous la forme suivante

$$\psi(t) = \psi_1(t) - \psi_2(t),$$

où $\psi_1(t)$ et $\psi_2(t)$ sont des fonctions non croissantes, lorsque t croît de zéro à l'infini [1]).

On a donc

$$H' = \int_0^\infty \psi_1(t)\sin t\sqrt{n}\,dt - \int_0^\infty \psi_2(t)\sin t\sqrt{n}\,dt.$$

Le théorème de la moyenne donne

$$H_1 = \int_0^\infty \psi_1(t)\sin t\sqrt{n}\,dt = \psi_1(0)\int_0^\xi \sin t\sqrt{n}\,dt,$$

$$H_2 = \int_0^\infty \psi_2(t)\sin t\sqrt{n}\,dt = \psi_2(0)\int_0^\eta \sin t\sqrt{n}\,dt,$$

ξ et η étant des nombres, compris entre 0 et $+\infty$.

---

[1]) Voir C. Jordan: „Cours d'Analyse" Paris 1893, T. I, p.p. 54, 55.

Il s'ensuit que

$$|H_1| < \frac{\alpha}{\sqrt{n}}, \quad |H_2| < \frac{\beta}{\sqrt{n}},$$

α et β étant des nombres fixes, et enfin,

$$(106) \qquad |H'| < \frac{A}{\sqrt{n}}, \quad A = \alpha\,|\psi_1(0)| + \beta\,|\psi_2(0)|,$$

A désignant un nombre assignable.

Considérons l'integrale

$$\mu = \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4}} \varphi\left(\frac{t^2}{2}\right) q_n(t)\, dt.$$

Il suffit de supposer que $\varphi(x)$ *soit une fonction bornée dans l'intervalle* $(0, +\infty)$ pour s'assurer, en tenant compte de (104), que l'intégrale μ a un sens bien déterminé.

On en conclut, eu égard à (105) et (106), que

$$(107) \qquad |H| = \left|\int_0^\infty f(x)\,\varphi(x)\,\vartheta_n\, dx\right| < \frac{A}{\sqrt{n}} + \frac{B}{\sqrt[4]{n}},$$

B désignant un nombre fixe.

Considérons enfin l'intégrale

$$G = \int_0^\infty f(x)\,\varphi(x)\,\alpha_n\, dx = \sqrt{2}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{8}} \varphi(x) \cos t\sqrt{n}\, dt.$$

On trouve, en se rappelant que $\varphi(x)$ est une fonction à variation bornée,

$$(108) \qquad |G| < \frac{C}{\sqrt{n}},$$

G désignant un nombre fixe.

Cela posé, écrivons $\omega_n(t)$ sous la forme

$$\omega_n(t) = \vartheta_n G + \left(\alpha_n + \frac{\vartheta_n}{\sqrt{n}}\right) H.$$

De cette égalité on tire, en vertu de (107) et (108),

$$(109) \qquad |\omega_n(t)| < \frac{\varrho}{\sqrt{n}} + \frac{\sigma}{\sqrt[4]{n}} < \frac{\tau_n}{\sqrt[4]{n}},$$

τ_n désignant une quantité positive, finie pour toute valeur positive de la variable t.

En remarquant enfin que, en vertu de (83) et (90),

$$\frac{h_n^2}{I_n}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{[1.3.5\ldots(2n-1)]^2}{n(2n-1)!}=2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2n!}{2^{2n}(n!)^2}<\frac{\lambda}{\sqrt{n}},$$

λ désignant un nombre fixe, on trouve, en tenant compte de (94_1) et (109),

$$(110) \qquad |\delta_n|<\frac{\lambda\tau_n}{n\sqrt[4]{n}}=\frac{\sigma_n}{n\sqrt[4]{n}},$$

σ_n étant une quantité qui ne surpasse pas un certain nombre fixe Q pour toutes les valeurs de t, prises à l'intérieur d'un intervalle $(0, T)$, T désignant un nombre quelconque positif.

On en conclut que *la série*

$$\sum_0^\infty \delta_n$$

converge absolument et uniformément dans tout intervalle $(0, T)$, *quel que soit le nombre positif* T.

Donc, *la série primitive* (94) *converge sous les mêmes conditions par rapport à la fonction donnée* $\varphi(x)$ *que la série approchée* (97) (voir n° 21), *pourvu que* $\varphi(x)$ *soit une fonction à variation bornée entre* 0 *et* $+\infty$.

Le même théorème a lieu pour les polynomes de Jacobi ainsi que pour les polynomes de Hermite.

Je me permets de ne pas reproduire la démonstration qui est tout à fait analogue à celle que nous venons d'exposer pour les polynomes du n° 18.

Remarquons qu'un cas particulier du théorème général, que nous avons établi, a été énoncé, sans démonstration rigoureuse, par Laplace pour les polynomes de Legendre et puis, en 1864, par Hermite pour les polynomes qui portent son nom.

Nous voyons, de ce qui précède, que ce théorème s'applique, en effet, à tous les polynomes considérés aux n^os^ 11—18.

Nous verrons plus tard qu'il reste vrai dans beaucoup d'autres cas et nous montrerons, outre cela, qu'il peut nous servir non seulement à simplifier les recherches sur la convergence des séries de la forme (94), mais encore à résoudre complétement le problème du développement, c'est-à-dire à déterminer la somme des séries dont il s'agit.

24. Les considérations précédentes montrent que le terme général $A_n u_n(x)$ de la série (94) peut être présenté sous la forme suivante

$$A_n u_n(x)=\frac{h_n^2}{I_n}\alpha_n\int_a^b f(x)\varphi(x)\alpha_n\,dx+\beta_n\varrho_n.$$

La recherche de la convergence de la série (94) se ramène, en vertu du théorème, établi au n° précédent, à celle de convergence de la série

$$\sum_1^\infty \frac{h_n^2}{I_n} \alpha_n \int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, \alpha_n\, dx\,, \tag{110$_1$}$$

où il faut poser:

1) Pour les polynomes de Hermite

$$f(x) = e^{-\frac{\alpha x^2}{2}},\quad a = -\infty,\quad b = +\infty,\quad I_n = n!\, \alpha^n \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \tag{111}$$

et

$$\alpha_n = e^{\frac{\alpha x^2}{4}} \cos x\sqrt{\alpha n}\,,\quad h_n = (-1)^n\, \alpha^{\frac{n}{2}}\, 1.3.5\ldots(n-1), \tag{112}$$

si n est un nombre pair,

$$\alpha_n = e^{\frac{\alpha x^2}{4}} \sin x\sqrt{\alpha n}\,,\quad h_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, \alpha^{\frac{n+1}{2}}\, 1.3.5\ldots(n-2)\sqrt{n}\,, \tag{113}$$

si n est un nombre impair.

2) Pour les polynomes de Jacobi

$$f(x) = (1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}},\quad a = -1,\quad b = +1,\quad x = \cos t \tag{114}$$

$$I_n = \frac{\pi}{2^{2\alpha-1}} \frac{\Gamma^2(2\alpha)\, \Gamma(n+1)}{\Gamma^2(\alpha)\, \Gamma(n+2\alpha)\, (n+\alpha)}\,, \tag{115}$$

$$\alpha_n = \frac{\cos\left(t\,(n+\alpha) - \frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\sin^\alpha t} \tag{116}$$

et

$$h_n = \frac{\Gamma(2\alpha)\, \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2^{2\alpha-1}\, \Gamma(\alpha)\, \Gamma\left(\frac{n+1}{2}+\alpha\right)} \tag{117}$$

pour n pair,

$$h_n = \frac{\Gamma(2\alpha)\, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2^{2\alpha-1}\, \Gamma(\alpha)\, \Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)} \tag{118}$$

pour n impair.

3) Pour les polynomes du n⁰ 18

(119) $$f(x)=\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}},\quad a=0,\quad b=+\infty,\quad x=\frac{t^2}{2},$$

(120) $$I_n=4\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\alpha}}\alpha^{-2n}n\,\Gamma(2n),$$

(121) $$\alpha_n=e^{\frac{t^2}{8}}\cos t\sqrt{n},\quad h_n=(-1)^n\alpha^{-n}1.3.5\ldots(2n-1),$$

quel que soit le nombre n.

25. Appliquons le théorème du n⁰ 23 aux polynomes de Jacobi. On trouve, en vertu de (115) et (117), pour n pair,

(122) $$\frac{h_n^2}{I_n}=\frac{1}{\pi 2^{2\alpha-1}}\frac{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma(n+2\alpha)(n+\alpha)}{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}+\alpha\right)\Gamma(n+1)}$$

et, en vertu de (115) et (118), pour n impair,

$$\frac{h_n^2}{I_n}=\frac{1}{\pi\, 2^{2\alpha-1}}\frac{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma(n+2\alpha)(n+\alpha)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)\Gamma(n+1)}.$$

Il est aisé de s'assurer que le rapport

$$\frac{h_n^2}{I_n}$$

tend vers $\frac{2}{\pi}$, lorsque n tend vers l'infini.

Supposons, par exemple, que n reste pair [l'égalité (122)]. On trouve, en tenant compte de (72),

$$\frac{h_n^2}{I_n}=\frac{(2n+\alpha)}{\pi n}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+\alpha\right)},$$

d'où, moyennant la formule de Stirling, on tire

$$\frac{h_n^2}{I_n}=\frac{(2n+\alpha)}{\pi n}\left(1+\frac{1}{2\beta_n}\right)^{\beta_n}\left(1-\frac{1}{2\gamma_n}\right)^{\gamma_n}\left(\sqrt{\frac{\beta_n}{\gamma_n}}+\frac{1}{2\sqrt{\gamma_n\beta_n}}\right)(1+\varepsilon_n),$$

où l'on a posé

$$\beta_n = \frac{n}{2} - 1\,, \quad \gamma_n = \frac{n}{2} + \alpha - \frac{1}{2}\,,$$

ε_n étant une quantité qui s'annule pour $n = \infty$.

L'équation précédente montre que

$$\lim_{n=\infty} \frac{h_n^2}{I_n} = \frac{2}{\pi}\,,$$

car

$$\lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{2\beta_n}\right)^{\beta_n} = \sqrt{e}\,, \quad \lim_{n=\infty}\left(1 - \frac{1}{2\gamma_n}\right)^{\gamma_n} = \frac{1}{\sqrt{e}}\,, \quad \lim_{n=\infty} \frac{n+\alpha}{n} = 1\,, \quad \lim_{n=\infty}\sqrt{\frac{\beta_n}{\gamma_n}} = 1\,.$$

On démontrera de la même manière que

$$\lim_{n=\infty} \frac{h_n^2}{I_n} = \frac{2}{\pi}$$

lorsque n reste impair.

On en conclut que la série (110_1) peut être remplacée par la suivante

$$\sum_1^\infty \alpha_n \sin^\alpha t \int_{-1}^{+1} \varphi(x)(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \alpha_n\, dx =$$

$$= \sum_1^\infty \cos\left(t(n+\alpha) - \frac{\pi\alpha}{2}\right) \int_0^\pi \sin^\alpha \xi \,.\, \varphi(\cos\xi) \cos\left(\xi(n+\alpha) - \frac{\pi\alpha}{2}\right) d\xi\,.$$

La série (94) converge sous les mêmes conditions par rapport à la fonction $\varphi(x)$ que cette dernière série trigonométrique qui est égale à la différence de deux séries suivantes

$$S_1 = \sum_1^\infty \int_0^\pi \sin^\alpha \xi\, \varphi(\cos\xi) \cos(t-\xi)(n+\alpha)\, d\xi\,,$$

$$S_2 = \sum_1^\infty \int_0^\pi \sin^\alpha \xi\, \varphi(\cos\xi) \cos[(t+\xi)(n+\alpha) - \pi\alpha]\, d\xi\,.$$

En appliquant la méthode connue de Dirichlet on s'assure immédiatement que chacune des sommes

$$S_{1n} = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \sin^\alpha \xi\, \varphi(\cos\xi) \cos(t-\xi)(k+\alpha)\, d\xi\,,$$

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} \sin^{\alpha} \xi \, \varphi(\cos \xi) \cos [(t+\xi)(k+\alpha) - \pi\alpha] \, d\xi$$

tend uniformément vers une limite bien déterminée, *si la fonction donnée $\varphi(x)$ est une fonction à variation bornée entre -1 et $+1$.*

Donc *la série* (94), *disposée suivant les polynomes de Jacobi, converge uniformément, pourvu que la fonction $\varphi(x)$ satisfasse à la condition tout à l'heure énoncée.*

On voit, à cet exemple, que l'emploi du théorème du n⁰ 23 conduit à une démonstration nouvelle d'une proposition, établie par M. Darboux par une méthode tout à fait différente.

26. Faisons encore quelques remarques concernant les polynomes de Hermite ainsi que les polynomes du n⁰ 18.

Nous avons déjà indiqué, en termes générales, une voie, due à M. Darboux, qui peut nous servir à trouver les conditions de la convergence uniforme des séries de la forme (94) pour les polynomes dont il s'agit.

En suivant cette voie on s'assure que *les-dites séries convergent uniformément, si la fonction $\varphi(x)$, intégrable entre les limites 0 et $+\infty$ (le cas des polynomes du n⁰ 18), ou entre les limites $-\infty$ et $+\infty$ (le cas des polynomes de Hermite), est une fonction à variation bornée.*

Une autre démonstration, un peu différente et détaillée, du théorème analogue pour les polynomes de Hermite paraîtra prochainement dans une thèse, déjà mentionnée plus haut, de M. Adamoff; cette démonstration s'étend sans difficulté au cas des polynomes du n⁰ 18.

Le même théorème peut être établi aussi par la méthode, indiquée au n⁰ 23, qui ramène le problème à la démonstration de convergence de la série approchée (110_1).

Cette série, pour les polynomes du n⁰ 18, se remplace par la suivante

$$(123) \qquad \sum_1^{\infty} \frac{\cos t\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{8}} \varphi(\alpha) \cos \alpha \sqrt{n} \, . \, d\alpha,$$

car, dans le cas considéré,

$$\frac{h_n^2}{I_n} = \frac{\sqrt{2}}{4\pi e}\left(1 + \frac{1}{2n-2}\right)^{2n-2} \frac{2n-1}{2n-2} \sqrt{\frac{2n-1}{n}} \frac{1}{\sqrt{n}} (1 + \varepsilon_n),$$

ce qui montre, qu'on peut poser, pour n assez grand,

$$\frac{h_n^2}{I_n} = \frac{1}{2\pi\sqrt{n}} (1 + \delta_n),$$

δ_n étant une quantité qui s'annule pour $n = \infty$.

Dans le cas des polynomes de Hermite la série (110_1) se réduit à la suivante

$$(124)\quad \sum_1^{\infty}\left(\frac{\cos x\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\varphi(\alpha)\cos\alpha\sqrt{n}\,.\,d\alpha+\frac{\sin x\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\varphi(\alpha)\sin\alpha\sqrt{n}\,.\,d\alpha\right),$$

indiquée déjà par Hermite en 1864.

L'étude de ces séries [(123) et (124)] peut se ramener à celui des intégrales analogues à l'intégrale (93).

27. En me bornant par cette remarque, sans entrer en détails, je m'arrêterai au cas, où les séries (123) et (124) convergent non seulement *uniformément, mais encore absolument.*

Considérons, pour fixer les idées, la série (123).

Posons

$$\alpha=\xi\sqrt{n}\,.$$

On trouve

$$w_n=\frac{\cos t\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{8}}\varphi(\alpha)\cos\alpha\sqrt{n}\,.\,d\alpha=\cos t\sqrt{n}\int_0^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{8}n}\varphi(\xi\sqrt{n})\cos\xi n\,.\,d\xi\,,$$

d'où l'on tire, en supposant que $\varphi(x)$ reste positif pour toutes les valeurs positives de x,

$$|w_n|<\int_0^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{8}n}\varphi(\xi\sqrt{n})\,d\xi=u_n>0\,.$$

Considérons la série à termes positifs

$$(125)\qquad u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

Cette série sera convergente, si la quantité

$$r_{n+p}=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}$$

tend vers zéro pour $n=\infty$, quel que soit l'entier p.

Or,

$$r_{n+p}=\sum_{j=1}^{p}\int_0^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{8}(n+j)}\varphi(\xi\sqrt{n+j})\,d\xi=\int_0^{\infty}\sum_{j=1}^{p} e^{-\frac{\xi^2}{8}(n+j)}\varphi(\xi\sqrt{n+j})\,d\xi.$$

Supposons maintenant que la fonction positive $\varphi(x)$ satisfasse encore aux conditions suivantes:
elle est égale à zéro pour les valeurs de ξ, comprises entre 0 et ε, où ε est un nombre positif assez petit, mais fixe; elle est égale à C pour $x=\varepsilon$, et décroît ensuite de C à zéro, lorsque x croît de ε à $+\infty$.

On peut toujours choisir le nombre $n = n_0$ de façon que l'on ait, pour $n \geq n_0$,

$$e^{-\frac{\xi^2}{8}(n+j)} < \frac{A}{(n_0+j)^2},$$

A désignant un nombre fixe, quelle que soit la valeur de ξ, comprise entre ε et $+\infty$.

Cette condition étant remplie, on aura

$$\sum_1^p e^{-\frac{\xi^2}{8}(n+j)} \varphi(\xi\sqrt{n+j})\, d\xi < A \sum_{j=1}^p \frac{\varphi(\xi\sqrt{n_0+j})}{(n_0+j)^2}$$

et

$$r_{n+p} = \int_\varepsilon^\infty \sum_{j=1}^p e^{-\frac{\xi^2}{8}(n+j)} \varphi(\xi\sqrt{n+j})\, d\xi < A \int_\varepsilon^\infty \sum_{j=1}^p \frac{\varphi(\xi\sqrt{n_0+j})}{(n_0+j)^2}\, d\xi =$$

$$= A \int_0^\infty \sum_{j=1}^p \frac{\varphi(\xi\sqrt{n_0+j})}{(n_0+j)^2}\, d\xi = \varrho_{n_0+p}.$$

Or, quel que soit ξ,

$$\sum_{j=1}^p \frac{\varphi(\xi\sqrt{n_0+j})}{(n_0+j)^2} < \frac{\varphi(\xi\sqrt{n_0})}{n_0}.$$

On a donc

$$\varrho_{n_0+p} < \frac{A}{n_0} \int_0^\infty \varphi(\xi\sqrt{n_0})\, d\xi = \frac{A}{n_0\sqrt{n_0}} \int_0^\infty \varphi(t)\, dt.$$

Il s'ensuit que ϱ_{n_0+p} et, par suite, r_{n+p} tendent vers zéro, lorsque n croît indéfiniment, car l'intégrale

$$\int_0^\infty \varphi(t)\, dt$$

ne surpasse pas une certaine limite fixe.

Donc, la série (125) converge. Il en résulte que la série

$$\sum_{n=1}^\infty w_n = \sum_{n=1}^\infty \cos t\sqrt{n} \int_\varepsilon^\infty e^{-\frac{\xi^2}{8}n} \varphi(\xi\sqrt{n}) \cos \xi n\, d\xi, \tag{126}$$

c'est-à-dire *la série (123), converge absolument et uniformément.*

Supposons maintenant que la fonction $\varphi(x)$, étant égale à zéro pour les valeurs de x, comprises entre 0 et ε, soit une fonction à variation bornée entre ε et $+\infty$.

On a, pour toutes les valeurs de x, plus grandes que ε,

$$\varphi(x) = \psi_1(x) - \psi_2(x),$$

ψ_1 et ψ_2 étant des fonctions positives, bornées et non croissantes.

La série (126) se réduit à la différence de deux séries suivantes

$$\sum_1^\infty \cos t\sqrt{n} \int_\varepsilon^\infty e^{-\frac{\xi^2}{8}n} \psi_1(\xi\sqrt{n}) \cos \xi n . d\xi,$$

$$\sum_1^\infty \cos t\sqrt{n} \int_\varepsilon^\infty e^{-\frac{\xi^2}{8}n} \psi_2(\xi\sqrt{n}) \cos \xi n . d\xi.$$

Chacune de ces séries converge absolument et uniformément.

Il en sera de même de la série (126) ou, ce qui revient au même, de la série (123).

On en conclut, en tenant compte du théorème du n⁰ 23, que *la série de la forme (94), $u_n(x)$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$ désignant les polynomes du n⁰ 18, converge absolument et uniformément, si la fonction $\varphi(x)$, qui reste égale à zéro pour les valeurs de x, comprises entre 0 et ε, ε étant un nombre positif quoique assez petit, mais fixe, est une fonction à variation bornée entre ε et $+\infty$* [1]).

Le même théorème a lieu pour les polynomes de Hermite et se démontre par les raisonnements tout à fait analogues.

J'indiquerai encore un cas général, où les séries de la forme (94) convergent absolument et uniformément.

Je me bornerai, pour fixer les idées, au cas des polynomes du n⁰ 18; les raisonnements, qui vont suivre, s'appliquent presque sans changement aux polynomes de Jacobi et à ceux de Hermite.

Supposons que la fonction $\varphi(x)$ soit continue et admette la dérivée $\varphi'(x)$ qui est une fonction intégrable et à variation bornée entre 0 et $+\infty$.

On a

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{8}} \varphi(\alpha) \cos \alpha\sqrt{n} . d\alpha = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^\infty \frac{d}{d\alpha}\left(e^{-\frac{\alpha^2}{8}} \varphi(\alpha)\right) \sin \alpha\sqrt{n} . d\alpha.$$

[1]) On suppose certainement que l'intégrale

$$\int_\varepsilon^\infty \varphi(x)\,dx$$

ait un sens bien déterminé.

Or, en vertu de l'hypothèse faite sur $\varphi(x)$, la fonction

$$\psi(\alpha)=\frac{d}{d\alpha}\left(e^{-\frac{\alpha^2}{8}}\varphi(\alpha)\right)$$

est une fonction à variation bornée entre 0 et $+\infty$.

Il s'ensuit que

$$\left|\int_0^\infty \frac{d}{d\alpha}\left(e^{-\frac{\alpha^2}{8}}\varphi(\alpha)\right)\sin\alpha\sqrt{n}\,.\,d\alpha\right|<\frac{A}{\sqrt{n}},$$

A désignant un nombre assignable.

On a donc

$$\left|\frac{\cos t\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{8}}\varphi(\alpha)\cos\alpha\sqrt{n}\,.\,d\alpha\right|<\frac{A}{n\sqrt{n}},$$

ce qui montre que *la série (123) converge absolument et uniformément.*

On obtient ainsi, en tenant compte du théorème du n^0 23, la proposition suivante:

La série infinie de la forme (94), $u_n(x)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ désignant les polynomes de Hermite, ou ceux de Jacobi, ou, enfin, les polynomes du n^0 18, converge absolument et uniformément, quelle que soit la valeur donnée de la variable x, si la dérivée du premier ordre de la fonction continue $\varphi(x)$ est une fonction intégrable et à variation bornée.

Nous ferons plus loin l'usage des résultats, obtenus aux n^{os} précédents.

28. La méthode, indiquée aux n^{os} 2—10, peut être appliquée aussi à la recherche de certaines expressions asymptotiques des fonctions $J_\alpha(x)$ de Bessel pour très-grandes valeurs de la variable x, ce que nous allons montrer dans ce qui va suivre.

Les fonctions $J_\alpha(x)$ satisfont, comme on sait, à l'équation

$$\frac{d^2J_\alpha(x)}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dJ_\alpha(x)}{dx}+\left(1-\frac{\alpha^2}{x^2}\right)J_\alpha(x)=0. \tag{127}$$

Posons

$$x=nt,$$

n désignant un paramètre arbitraire, t une variable nouvelle.

L'équation (127) devient

$$\frac{d^2J_\alpha(nt)}{dt^2}+\frac{1}{t}\frac{dJ_\alpha(nt)}{dt}+\left(n^2-\frac{\alpha^2}{t^2}\right)J_\alpha(nt)=0.$$

Considérons la fonction $J_\alpha(nt)$ comme une fonction de deux arguments t et n et appliquons au cas considéré la transformation du n^0 2.

Posant

$$J_\alpha(nt) = \frac{v_n(t)}{\sqrt{t}} \tag{128}$$

on obtient cette équation pour $v_n(t)$

$$v_n''(t) + n^2 v_n(t) + \frac{1-4\alpha^2}{4t^2} v_n(t) = 0 \tag{129}$$

qui a la forme de l'équation (13) du n⁰ 2, si l'on y pose

$$\lambda_n^2 = n^2, \quad \mu(t) = \frac{4\alpha^2 - 1}{4t^2}.$$

Supposons que t se varie entre 0 et 1 et posons, dans la formule (17_1) du n⁰ 3,

$$A_n' = v(1), \quad B_n' = v_n'(1), \quad \tau = 1.$$

On trouve, eu égard à (128),

$$\sqrt{t}\, J_\alpha(nt) = v_n(1) \cos n(t-1) + \frac{v_n'(1)}{n} \sin n(t-1) + \frac{1-4\alpha^2}{4n} \int_1^t \frac{J_\alpha(n\xi)}{\xi\sqrt{\xi}} \sin n(\xi - \cdots \tag{130}$$

la formule qui a lieu pour toutes les valeurs du paramètre n.

29. Désignons maintenant par h une constante quelconque réelle et différente de zéro, par ξ_n la n'ième racine de l'équation transcendente de Dini

$$\xi \frac{dJ_\alpha(\xi)}{d\xi} - (h+\alpha) J_\alpha(\xi) = 0, \quad \alpha > -\frac{1}{2}. \tag{131}$$

On sait que cette équation admet une infinité des racines réelles et positives qui croissent indéfiniment, lorsque l'indice n tend vers l'infini.

Posons dans (130)

$$n = \xi_n.$$

On trouve, en vertu de (128),

$$v_n(1) = J_\alpha(\xi_n).$$

En remarquant ensuite que

$$\frac{v_n'(t)}{n\sqrt{t}} - \frac{v_n(t)}{2nt\sqrt{t}} = \frac{dJ_\alpha(\xi)}{d\xi}, \quad \xi = nt, \quad n = \xi_n$$

et en tenant compte de (131), on obtient

$$\frac{v_n'(1)}{n} = \frac{1 + 2(h+\alpha)}{2\xi_n} J_\alpha(\xi_n).$$

L'équation (130) devient

$$(132) \qquad \sqrt{t}\, J_\alpha(\xi_n t) = J_\alpha(\xi_n)\left[\cos \xi_n (t-1) + \frac{1+2(h+\alpha)}{2\xi_n} \sin \xi_n (t-1)\right] +$$

$$+ \frac{1-4\alpha^2}{4\xi_n} \int_1^t \frac{J_n(\xi_n \xi)}{\xi\sqrt{\xi}} \sin \xi_n(\xi - t)\, d\xi .$$

Or,

$$\left(\int_1^t \frac{J_\alpha(\xi_n\xi)}{\xi\sqrt{\xi}} \sin \xi_n (\xi - t)\, d\xi\right)^2 < \int_t^1 \xi J_\alpha^2(\xi_n \xi)\, d\xi \,.\int_t^1 \frac{\sin^2 \xi_n(\xi - t)}{\xi^4}\, d\xi < \frac{1}{3t^3}\int_0^1 \xi J_\alpha^2(\xi_n\xi)\, d\xi .$$

D'autre part, on a toujours, quel que soit le nombre λ,

$$\int_0^1 \xi J_\alpha^2(\lambda\xi)\, d\xi = \frac{1}{2}\left[J_\alpha^2(\lambda) - J_{\alpha+1}(\lambda)\, J_{\alpha-1}(\lambda)\right].$$

En remplaçant λ par ξ_n et en tenant compte de (131), on trouve

$$\int_0^1 \xi J_\alpha^2(\xi_n\xi)\, d\xi = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{h(h+2\alpha)}{\xi_n^2}\right) J_\alpha^2(\xi_n) < A J_\alpha^2(\xi_n),$$

A désignant un nombre fixe [1]).

On peut donc écrire

$$\int_1^t \frac{J_\alpha(\xi_n\xi)}{\xi\sqrt{\xi}} \sin \xi_n(\xi - t)\, dt = \vartheta_n \frac{A}{\sqrt{3}} \frac{J_\alpha(\xi_n)}{t\sqrt{t}},$$

où ϑ_n désigne une fonction de t satisfaisant à la condition

$$|\vartheta_n| < 1 .$$

L'équation (132) devient alors

$$(133) \qquad \sqrt{t}\, J_\alpha(\xi_n t) = J_\alpha(\xi_n)\left[\cos \xi_n (t-1) + \frac{\omega_n(t)}{\xi_n}\right],$$

où l'on a posé

$$\omega_n(t) = \frac{1+2(h+\alpha)}{2} \sin \xi_n (t-1) + \vartheta_n \frac{A(1-4\alpha^2)}{4\sqrt{3}\, t\sqrt{t}} .$$

---

[1]) Rappelons que les nombres ξ_n $(n=1, 2, \ldots)$ restent positifs et croissent en même temps que l'indice n.

La fonction $\omega_n(t)$ satisfait à l'inégalité suivante

$$|\omega_n(t)| < \frac{|1+2(h+\alpha)|}{2} + \frac{|1-4\alpha^2|A}{4\sqrt{3}\,t\sqrt{t}}$$

pour toutes les valeurs de t, comprises entre 0 et 1, et pour toutes les valeurs de n, plus grandes que l'unité.

Cette inégalité peut être remplacée par la suivante, plus simple,

$$(134) \qquad |\omega_n(t)| < \frac{\lambda}{t\sqrt{t}},$$

λ désignant un nombre fixe, car t reste toujours inférieur à l'unité.

30. Substituons maintenant (133) dans (132).

On obtient

$$(135) \quad \int_1^t \frac{J_\alpha(\xi_n\xi)}{\xi\sqrt{\xi}} \sin\xi_n(\xi-t)\,d\xi = J_\alpha(\xi_n)\left\{\int_1^t \frac{\cos\xi_n(\xi-1)\sin\xi_n(\xi-t)}{\xi^2}\,d\xi + \frac{1}{\xi_n}\int_1^t \frac{\omega_n(\xi)\sin\xi_n(\xi-t)}{\xi^2}\,d\xi\right.$$

Considérons l'intégrale

$$I = \int_1^t \frac{\cos\xi_n(\xi-1)\sin\xi_n(\xi-t)}{\xi^2}\,d\xi = \frac{1}{2}\int_1^t \frac{\sin\xi_n(2\xi-t-1)}{\xi^2}\,d\xi - \frac{\sin\xi_n(t-1)}{2}\int_1^t \frac{d\xi}{\xi^2}.$$

Le théorème de la moyenne donne

$$I_1 = \int_1^t \frac{\sin\xi_n(2\xi-t-1)}{\xi^2}\,d\xi = \frac{1}{t'^2}\int_1^{t'} \sin\xi_n(2\xi-t-1)\,d\xi,$$

où

$$1 > t' > t.$$

L'intégrale I_1 satisfait donc à l'inégalité

$$|I_1| < \frac{1}{\xi_n t^2}.$$

On peut donc écrire

$$(136) \qquad I = \frac{\mu_n(t)}{\xi_n} - \frac{t-1}{2t}\sin\xi_n(t-1),$$

où $\mu_n(t)$ est une fonction de t satisfaisant à la condition

$$(137) \qquad |\mu_n(t)| < \frac{1}{2t^2} < \frac{1}{2t^2\sqrt{t}}$$

pour les valeurs de t, plus petites que l'unité.

Remarquant maintenant que

$$\left| \int_1^t \frac{\omega_n(\xi) \sin \xi_n (\xi - t)}{\xi^2} d\xi \right| < \int_t^1 \frac{|\omega_n(\xi)|}{\xi^2} d\xi ,$$

d'où, en vertu de (134),

(138) $$\left| \int_1^t \frac{\omega_n(\xi) \sin \xi_n (\xi - t)}{\xi^2} d\xi \right| < \frac{\mu}{t^2\sqrt{t}},$$

μ désignant un nombre fixe, on obtient, en tenant compte de (135) et (136),

(139) $$\int_1^t \frac{J_\alpha(\xi_n\xi)}{\xi\sqrt{\xi}} \sin \xi_n(\xi - t) d\xi = J_\alpha(\xi_n)\left[-\frac{t-1}{2t}\sin \xi_n(t-1) + \frac{\vartheta'_n(t)}{\xi_n}\right],$$

où, en vertu de (137) et (138),

$$|\vartheta'_n(t)| < \frac{\lambda}{t^2\sqrt{t}},$$

λ désignant un nombre fixe.

Substituant maintenant (139) dans (132) on trouve cette expression asymptotique pour $J_\alpha(\xi_n t)$:

140) $$\sqrt{t} J_\alpha(\xi_n t) = J_\alpha(\xi_n)\left[\cos \xi_n(t-1) + \frac{\sin \xi_n(t-1)}{\xi_n}\left(\beta + \frac{\beta_1}{t}\right) + \frac{\vartheta_n(t)}{\xi_n^2}\right],$$

où

(141) $$\beta = \frac{3 + 4\alpha^2}{8} + h + \alpha, \quad \beta_1 = \frac{1 - 4\alpha^2}{8}, \quad |\vartheta_n(t)| < \frac{\gamma}{t^2\sqrt{t}},$$

γ désignant un nombre fixe.

31. Montrons que la méthode du n⁰ 23, étant appliquée à certaines séries procédant suivant les fonctions de Bessel, permet de déterminer les conditions générales de leur convergence.

Nous allons considérer le développement de Dini de la forme

(142) $$\sum_0^\infty \frac{J_\alpha(\xi_n t)\int_0^1 xf(x) J_\alpha(\xi_n x)\, dx}{\int_0^1 x J_\alpha^2(\xi_n x)\, dx} = \sum_0^\infty \frac{\xi_n^2 J_\alpha(\xi_n t)}{\left(h(h+2\alpha) + \xi_n^2\right) J_\alpha^2(\xi_n)} \int_0^1 xf(x) J_\alpha(\xi_n x)\, dx,$$

ξ_n désignant les racines de l'équation (131).

Substituant l'expression (140) de $J_\alpha(\xi_n x)$ dans le terme général de cette série, on trouve

$$(143)\quad \begin{aligned} \sqrt{t}\,\frac{J_\alpha(\xi_n t)}{J_\alpha^2(\xi_n)}\int_0^1 x f(x) J_\alpha(\xi_n x)\,dx &= \cos\xi_n(t-1)\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\cos\xi_n(x-1)\,dx + \\ &+ \frac{\sin\xi_n(t-1)}{\xi_n}\left(\beta+\frac{\beta_1}{t}\right)\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\cos\xi_n(x-1)\,dx + \\ + \frac{\beta}{\xi_n}\cos\xi_n(t-1)\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\sin\xi_n(x-1)\,dx &+ \beta_1\frac{\cos\xi_n(t-1)}{\xi_n}\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\sin\xi_n(x-1)\,dx + \frac{K_n}{\xi_n^2}, \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$(144)\quad \begin{aligned} K_n = a_n\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\sin\xi_n(x-1)\,d\xi &+ b_n\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\cos\xi_n(x-1)\,d\xi + \\ + c_n\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\sin\xi_n(x-1)\,dx &+ h_n\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\,\vartheta_n(x)\,dx, \end{aligned}$$

a_n, b_n, c_n et h_n désignant les fonctions de t dont les modules ne surpassent pas une certaine limite fixe, quelle que soit la valeur de t, prise entre 0 et 1.

Supposons que $f(x)$ est une fonction à variation bornée entre 0 et 1.

On aura, d'après le théorème connu,

$$(145)\quad \begin{aligned} \left|\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\cos\xi_n(x-1)\,dx\right| &< \frac{A}{\xi_n}, \\ \left|\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\sin\xi_n(x-1)\,dx\right| &< \frac{A}{\xi_n}, \end{aligned}$$

A désignant une constante positive.

Considérons l'intégrale

$$(146)\quad \int_0^1 \sqrt{x} f(x)\,\vartheta_n(x)\,dx.$$

Supposons que la fonction $f(x)$ satisfasse encore à la condition suivante: il existe un nombre assez petit, mais fixe, ε_0 tel qu'on ait

$$|f(x)| < Bx^{1+\mu},$$

pour toutes les valeurs de x, comprises entre 0 et ε_0, B et $\mu < 1$ étant des nombres fixes.

Cette condition étant remplie, on trouve, eu égard à (141),

$$\left|\int_{\varepsilon'}^{\varepsilon} \sqrt{x} f(x)\, \vartheta_n(x)\, dx\right| < B\gamma \int_{\varepsilon'}^{\varepsilon} x^{\mu-1}\, dx < \frac{B\gamma}{\mu}(\varepsilon^{\mu} - \varepsilon'^{\mu}),$$

ε et ε' étant deux nombres positifs, plus petits que ε_0.

Il s'ensuit que l'intégrale (146) a un sens bien déterminé.

En remarquant ensuite qu'en vertu de l'hypothèse, faite sur $f(x)$, la fonction

$$\psi(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x}}$$

est une fonction à variation bornée dans l'intervalle (0, 1), on trouve

$$(147) \qquad \left|\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} \sin \xi_n (x-1)\, dx\right| < \frac{A}{\xi_n}.$$

Les inégalités (145) et (147) montrent que, pour toute valeur donnée de la variable t, comprise entre 0 et 1,

$$(148) \qquad |K_n| < Q,$$

Q étant un nombre fixe, ne dépendant pas de n.

Les mêmes inégalités et l'inégalité (148) conduisent à l'équation suivante [voir l'équation (143)]

$$(148_1) \quad \sqrt{t}\, \frac{J_\alpha(\xi_n t)}{J_\alpha^2(\xi_n)} \int_0^1 x f(x) J_\alpha(\xi_n x)\, dx = \cos \xi_n (t-1) \int_0^1 \sqrt{x} f(x) \cos \xi_n (x-1)\, dx + \frac{\varphi(t)}{\xi_n^2},$$

où $\varphi(t)$ est une fonction dont le module ne surpasse pas un certain nombre fixe.

On en conclut que la série (142) converge en même temps que la série

$$(149) \qquad \sum_1^\infty \frac{\xi_n^2}{\xi_n^2 + h(h+2\alpha)} \cos \xi_n (t-1) \int_0^1 \sqrt{x} f(x) \cos \xi_n (x-1)\, dx,$$

si la fonction $f(x)$ satisfait aux conditions énoncées plus haut, car la série

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\xi_n^2}$$

converge.

Cela résulte de ce que les racines positives de l'équation (131) de Dini se rapprochent, à partir d'une valeur de n assez grande, de plus en plus à

$$\left(2n+1+\frac{2\alpha+1}{2}\right)\frac{\pi}{2}.$$

Il est évident que la série (149) peut être remplacée par la suivante

$$(150) \qquad \sum_{1}^{\infty} \cos \xi_n (t-1) \int_0^1 \sqrt{x} f(x) \cos \xi_n (x-1)\, dx,$$

car on a, pour n assez grand,

$$\frac{\xi_n^2}{\xi_n^2 + h(h+2\alpha)} = 1 + \frac{\alpha_n}{\xi_n^2},$$

où α_n est une quantité dont le module ne surpasse pas un certain nombre fixe, ne dépendant pas de n.

Il est aisé de s'assurer enfin que les conditions de convergence de la série (150) sont les mêmes que celles de la série trigonométrique

$$(151) \qquad \sum_{1}^{\infty} \cos(n\pi+\delta)(t-1) \int_0^1 \sqrt{x} f(x) \cos(n\pi+\delta)(x-1)\, dx.$$

Considérons, pour fixer les idées, le cas le plus simple, où la constante h est égale à $-\alpha$.

L'équation (131) devient

$$\frac{dJ_\alpha}{d\xi} = 0.$$

On sait que, pour les valeurs de n assez grandes, les racines ξ_n de cette équation peuvent se présenter sous la forme suivante

$$\xi_n = n\pi + \frac{2\alpha+1}{4}\pi + \varepsilon_n = n\pi + \delta + \varepsilon_n,$$

ε_n désignant une quantité telle que

$$|\sin \varepsilon_n| < \frac{A}{\xi_n} < \frac{B}{n},$$

B désignant un nombre fixe.

Cela résulte de la formule asymptotique, etablie par Mrs Hankel et Dini, pour la fonction $J_\alpha(x)$.

Moyennant la méthode connue de Dirichlet on s'assure sans peine que la série (151) converge uniformément, si la fonction $f(x)$ est une fonction à variation bornée entre 0 et 1.

Les mêmes raisonnements s'appliquent au cas général, lorsque la constante h dans l'équation (131) a une valeur quelconque, différente de zéro.

L'analyse précédente conduit à la proposition suivante:

La série (142) converge uniformément, pourvu que la fonction $f(x)$ à variation bornée entre 0 et 1 satisfasse encore à la condition suivante: il existe un nombre positif ε_0, quoique assez petit mais fixe, tel qu'on ait

$$|f(x)| < Bx^{1+\mu}$$

pour les valeurs de x, comprises entre 0 et ε_0, B et $\mu < 1$ étant des nombres fixes.

32. Avant d'aller plus loin faisons une digression à la théorie générale des fonctions que j'ai appellées *fonctions fondamentales* dans mon Mémoire: „Théorie générale des fonctions fondamentales" (Annales de Toulouse, 1905).

En nous bornant au cas d'une seule variable réelle x, désignons par

$$V_0(x),\ V_1(x),\ V_2(x), \ldots,\ V_n(x), \ldots \tag{152}$$

une suite de fonctions fondamentales („Eigenfunctionen" de M. D. Hilbert) [1]), correspondant à la fonction génératrice $G(x, \xi)$ („Kern" de M. Hilbert), symétrique en x et ξ.

Les fonctions $V_k(x)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ satisfont aux conditions

$$V_k(x) = \lambda_k \int_a^b p(\xi)\, G(x, \xi)\, V_k(\xi)\, d\xi,$$

où λ_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ sont les nombres, caractéristiques pour les fonctions $V_k(x)$ („Eigenwerthe" de M. Hilbert), $p(\xi)$ est une fonction donnée, continue et positive dans l'intervalle (a, b).

Considérons le cas le plus simple, où les nombres λ_k restent positifs et croissent indéfiniment, lorsque l'indice k tend vers l'infini.

Supposons que les fonctions (152) forment un groupe, auquel s'applique le théorème général du n⁰ 13 du Chap. II de mon Mémoire, cité au début de ce n⁰.

J'énoncerai ce théorème, en l'appliquant au cas d'une seule variable, comme il suit:

---

[1]) Voir D. Hilbert: „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen". Göttingen Nachrichten, 1904, 1905.

Quelle que soit la fonction $f(x)$, bornée et intégrable dans l'intervalle (a, b), quelle que soit une autre fonction $\varphi(x)$, pouvant devenir infinie aux environs de certains points isolés de l'intervalle (a_1, b_1), intérieur à l'intervalle donné (a, b), mais telle que les integrales

$$\int_{a_1}^{b_1} pf\varphi\, dx, \quad \int_{a_1}^{b_1} p\varphi\, V_k\, dx, \quad \int_{a_1}^{b_1} p\varphi^2\, dx$$

aient un sens bien déterminé, on a toujours le développement suivant:

$$(153) \qquad \int_{a_1}^{b_1} pf\varphi\, dx = \sum_0^\infty A_k B_k, \quad A_k = \frac{\int_a^b pf V_k\, dx}{\int_a^b p\, V_k^2\, dx}, \quad B_k = \int_{a_1}^{b_1} p\varphi\, V_k\, dx.$$

Toutes les fonctions, étudiées plus haut: polynomes de Hermite et de Jacobi, ceux du n⁰ 18, fonctions de Bessel appartiennent à la classe des fonctions fondamentales, auxquelles s'applique le théorème que je viens d'énoncer, comme je l'ai déjà montré au n⁰ 8 de mon Mémoire: „Sur certaines égalités générales etc", publié dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de St-Pétersbourg en 1904 (p. 16).

33. De ce théorème nous déduirons un autre qui aura une application importante au problème du développement d'une fonction arbitraire en séries infinies.

Posons dans (153)

$$\varphi = \frac{\psi}{p}, \quad a_1 = x_0 - \eta, \quad b = x_0 + \eta,$$

x_0 désignant une valeur quelconque de x, prise arbitrairement dans l'intervalle (a, b), η désignant un nombre positif qu'on peut prendre si petit que l'on veut, ψ une fonction continue dans l'intervalle (a, b).

On trouve

$$(154) \qquad \frac{1}{2\eta}\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \psi f(x)\, dx = \sum \frac{A_k}{2\eta} \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \psi\, V_k(x)\, dx\, ^{1)}.$$

Supposons que la fonction $f(x)$ soit choisie de façon que la série

$$(155) \qquad \sum A_k V_k(x)$$

converge uniformément dans l'intervalle (a, b); la série (154) le sera aussi.

¹) Nous ommettons, pour simplifier l'écriture, les limites 0 et $+\infty$ de la somme Σ.

En remplaçant dans (154) x_0 par x, x par ξ et en intégrant de nouveau entre $x_0 - \eta$ et $x_0 + \eta$, on obtient

$$(156) \qquad \frac{1}{4\eta^2}\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} dx \int_{x-\eta}^{x+\eta} \psi f(\xi)\, d\xi = \sum \frac{A_k}{4\eta^2}\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} dx \int_{x-\eta}^{x+\eta} \psi\, V_k(\xi)\, d\xi\,,$$

la série du second membre étant uniformément convergente.

Supposons maintenant que chaque terme $A_k\, V_k(x)$ de la série (155) puisse se présenter sous la forme suivante

$$A_k\, V_k(x) = W_k(x) + \alpha_k\, w_k(x)\,,$$

où W_k et w_k sont des fonctions continues dont la dernière satisfait à l'inégalité

$$|w'_k(x)| < Q\,,$$

Q désignant une quantité positive ne dépendant pas de k, α_k sont des constantes telles que la série

$$\sum |\alpha_k|$$

converge.

Ces conditions étant remplies, on trouve, pour η assez petit,

$$\left| \frac{\alpha_k}{2\eta}\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \psi\, w_k(x)\, dx - \alpha_k\, w_k(x_0)\, \psi(x_0) \right| = \left| \frac{\alpha_k}{2\eta}\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \varepsilon_n\, dx \right| < \varepsilon\, |\alpha_n|\,,$$

ε étant un nombre positif qui s'annule pour $\eta = 0$.

On en conclut que

$$\lim_{\eta=0} \frac{1}{2\eta} \sum \alpha_k \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \psi\, w_k(x)\, dx = \sum \alpha_k\, w_k(x_0)\, \psi(x_0)$$

quelle que soit la valeur de x_0, prise dans l'intervalle $(a,\ b)$.

On aura de même

$$\lim_{\eta=0} \frac{1}{4\eta^2} \sum \alpha_k \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} dx \int_{x-\eta}^{x+\eta} \psi\, w_k(\xi)\, d\xi = \sum \alpha_k\, w_k(x_0)\, \psi(x_0)\,.$$

Supposons enfin que les fonctions $W_k(x)$ soient choisies de façon que l'on ait

$$\lim_{\eta=0} \frac{1}{4\eta^2} \sum \int_{x_0+\eta}^{x_0+\eta} dx \int_{x-\eta}^{x+\eta} \psi\, W_k(\xi)\, d\xi = \sum W_k(x_0)\, \psi(x_0)\,.$$

Ces conditions étant remplies, on trouve, eu égard à (156),

$$(157)\quad \psi(x_0)\left[\sum W_k(x_0)+\sum \alpha_k w_k(x_0)\right]=\sum A_k V_k(x_0)\psi(x_0)=\lim_{\eta=0}\frac{1}{4\eta^2}\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta}dx\int_{x-\eta}^{x+\eta}\psi f(\xi)\,d\xi.$$

Or, pour chaque point $x=x_0$ de l'intervalle (a, b), où les expressions

$$f(x_0+0) \text{ et } f(x_0-0)$$

de la fonction intégrable $f(x)$ ont des valeurs déterminées, la limite (pour $\eta=0$) du second membre de l'égalité précédente est égale à

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}\psi(x_0),$$

comme je l'ai déjà montré dans mon Mémoire: „Sur la théorie des séries trigonométriques“, publié dans le Bulletin de l'Académie de Cracovie en 1903 (Novembre).

On trouve donc, sous les hypothèses faites sur la série (155) ainsi que sur la fonction $f(x)$,

$$\sum A_k V_k(x_0)=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

Faisons encore la remarque suivante.

Si les constantes α_k et les fonctions $w_k(x)$ satisfont aux conditions, indiquées plus haut, on a toujours, quel que soit l'entier s,

$$\lim_{\eta=0}\frac{1}{(2\eta)^s}\sum \alpha_k\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta}dx_1\int_{x_1-\eta}^{x_1+\eta}dx_2\ldots\int_{x_{s-1}-\eta}^{x_{s-1}+\eta}w_k(x_s)\,\psi(x_s)\,dx_s=\sum \alpha_k w_k(x_0)\,\psi(x_0).$$

On en conclut, comme dans le cas précédent, que la somme de la série

$$\sum A_k V_k(x_0)$$

sera égale à

$$\lim_{\eta=0}\frac{1}{(2\eta)^s}\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta}dx_1\int_{x_1-\eta}^{x_1+\eta}dx_2\ldots\int_{x_{s-1}-\eta}^{x_{s-1}+\eta}\psi(x_s)\,f(x_s)\,dx_s=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}\psi(x_0)$$

toutes les fois que la série

$$\sum W_k(x)$$

soit telle que

$$\lim_{\eta=0}\frac{1}{(2\eta)^s}\sum\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta}dx_1\int_{x_1-\eta}^{x_1+\eta}dx_2\ldots\int_{x_{s-1}-\eta}^{x_{s-1}+\eta}\psi\,W_k(x_s)\,dx_s=\sum W_k(x_0)\,\psi(x_0).$$

Nous ferons l'usage de cette remarque plus loin.

34. Les recherches précédentes nous inspirent une méthode nouvelle pour résoudre le problème du développement d'une fonction donnée en séries procédant suivant les fonctions fondamentales. Cette méthode s'applique, comme nous verrons, à plusieurs suites de fonctions souvent employées dans l'Analyse.

J'exposerai d'abord les principes de cette méthode sous la forme générale en me réservant d'indiquer plus tard ses applications à certains cas particuliers les plus intéressants.

Désignons, comme précédemment, par

$$V_0(x),\ V_1(x),\ V_2(x),\ldots,\ V_k(x),\ldots$$

une suite de fonctions fondamentales qui satisfont, comme on sait, aux conditions

$$\int_a^b p(x)\,V_n(x)\,V_m(x)\,dx=0,\ ^{1)}\ \text{si } n\gtrless m,$$

a et b étant les limites de l'intervalle, où l'on définie les fonctions $V_k(x)$ $(k=0, 1, 2,\ldots)$, $p(x)$ est une fonction positive ne s'annulant pas dans l'intervalle (a, b).

Faisons les hypothèses suivantes:

1) Le théorème général, énoncé au début du n⁰ 32, s'applique aux fonctions $V_k(x)$ $(k=0, 1, 2,\ldots)$.

2) Chacune de ces fonctions $V_n(x)$ peut se représenter, au moins pour les valeurs de n, plus grandes qu'un nombre fixe ν, sous la forme suivante

(158) $$V_n(x)=\varphi(t)\,[\beta_n\cos(\lambda_n t+\tau)+\vartheta_n]\ ^{2)},$$

où t est une fonction de x, continue et bien déterminée dans l'intervalle (a, b), $\varphi(t)$ est une fonction de t jouissant les mêmes propriétés, β_n et τ sont des constantes, ϑ_n est une fonction de t qui s'annule pour $n=\infty$, λ_n $(n=0, 1, 2,\ldots)$ sont les nombres positifs indéfiniment croissants avec n.

---

1) On dit souvent que les fonctions $V_k(x)$ forment un système orthogonal.

2) Ou, plus généralement,

$$V_n(x)=\varphi(t)\,[\alpha_n\cos\lambda_n t+\beta_n\cos\lambda_n t+\vartheta_n].$$

Toutes les fonctions, étudiées plus haut [les polynomes de Hermite et de Jacobi, ceux du n⁰ 18, les fonctions de Bessel], satisfont, comme nous l'avons vu, aux conditions tout à l'heure énoncées.

Envisageons la série

$$(159) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} A_k V_k(x), \quad A_k = \frac{\int_a^b p(x) f(x) V_k(x) dx}{\int_a^b p V_k^2(x) dx},$$

$f(x)$ désignant une fonction arbitraire.

Le terme général $A_k V_k$ de cette série se représentera, en vertu de (158), sous la forme suivante

$$(160) \qquad A_k V_k(x) = \varphi(t) B_k \cos(\lambda_k t + \tau) + \alpha_n w_n(x),$$

où

$$B_k = \frac{\beta_n^2 \int_\alpha^\beta \psi(t) f(\theta_1(t)) \cos(\lambda_n t + \tau) dt}{\int_a^b p(x) V_k^2(x) dx},$$

α et β désignant les valeurs de t correspondant aux valeurs limites a et b de x, $\psi(t)$ et $\theta_1(t) = x$ étant des fonctions de t, continues dans l'intervalle (α, β), α_n étant des constantes.

Faisons maintenant les suppositions suivantes:

3) Les fonctions $w_n(x)$ satisfont aux inégalités

$$|w_n'(x)| < Q,$$

Q désignant un nombre fixe ne dépendant pas de n.

4) La série

$$\sum_0^{\infty} |\alpha_n|$$

converge.

Ces conditions étant rémplies, la série (159) sera convergente sous les mêmes conditions par rapport à la fonction donnée $f(x)$ que la série

$$\sum_0^{\infty} B_k \cos(\lambda_k t + \tau).$$

Supposons enfin que 5) la fonction $f(x)$ satisfasse aux certaines conditions, que nous appellerons, en général, *conditions (A)*, telles que la série

$$\sum_{0}^{\infty} B_k \cos(\lambda_k t + \tau) \tag{161}$$

converge dans l'intervalle (α, β) [correspondant à l'intervalle (a, b) de la variable x].

Les hypothèses énoncées étant remplies, on s'assure tout d'abord que la série (159) converge dans l'intervalle (a, b), pourvu que la fonction $f(x)$ satisfasse aux conditions (A), et que les propriétés de convergence de la série primitive (159) sont les mêmes que celles de la série approchée (161).

35. Posons maintenant

$$f(x) = \sum_{0}^{n} A_k V_k(x) + R_n(x). \tag{162}$$

L'hypothèse 1) du n⁰ précédent étant remplie, on peut toujours trouver un nombre $n = n_0$ tel qu'on ait, pour $n \geqq n_0$,

$$\int_a^b R_n^2 \, dx < \varepsilon, \tag{163}$$

ε désignant un nombre positif donné à l'avance; cela nous conduit, comme au n⁰ précédent, à l'équation suivante

$$\frac{1}{2\eta} \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \psi(x) f(x) \, dx = \sum_{0}^{\infty} \frac{A_k}{2\eta} \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \psi(x) V_k(x) \, dx.$$

Introduisons une nouvelle variable t en posant

$$t = \Theta(x), \quad x = \Theta_1(t),$$

$\Theta(x)$ et $\Theta_1(t)$ étant des fonctions continues avec leurs dérivées du premier ordre dans les intervalles (a, b) et (α, β).

L'équation (162) devient, en vertu de (160),

$$f[\Theta_1(t)] = \sum_{0}^{n} B_k \varphi(t) \cos(\lambda_k t + \tau) + \sum_{0}^{n} \alpha_k w_k [\Theta_1(t)] + R_n[\Theta_1(t)] \ ^{1)},$$

---

1) Remarquons, pour éviter tout malentendu, que nous introduisons ici, pour simplifier l'écriture, une notation symbolique en écrivant simplement

$$\sum_{0}^{n} B_k \varphi(t) \cos(\lambda_k t + \tau) + \sum_{0}^{n} \alpha_n w_n [\Theta_1(t)]$$

au lieu de

d'où l'on tire, en divisant par $\varphi(t)$ et en intégrant le résultat entre les limites α_1 et β_1, α_1 et $\beta_1 > \alpha_1$ étant des nombres quelconques, pris à l'intérieur de l'intervalle (α, β),

$$(163_1) \quad \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{f[\Theta_1(t)]}{\varphi(t)} dt = \sum_0^n B_k \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \cos(\lambda_k t + \tau)\, dt + \sum_0^n \alpha_k \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{w_k[\Theta_1(t)]}{\varphi(t)} dt + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{R_n[\Theta_1(t)]}{\varphi(t)} dt.$$

Or,

$$\left| \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{R_n[\Theta_1(t)]}{\varphi(t)} dt \right| = \left| \int_{a_1}^{b_1} \frac{R_n(x)\Theta'(x)}{\varphi[\Theta(x)]} dx \right| < \left\{ \int_{a_1}^{b_1} \left(\frac{\Theta'(x)}{\varphi[\Theta(x)]} \right)^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_a^b R_n^2(x)\, dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

a_1 et b_1 étant les valeurs de x correspondantes à $t = \alpha_1$ et $t = \beta_1$.

Supposant que l'intégrale

$$\int_a^b \left[\frac{\Theta'(x)}{\varphi[\Theta(x)]} \right]^2 dx$$

ait une valeur bien déterminée M, on en conclut, eu égard à (163), que

$$(163_2) \quad \left| \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{R_n[\Theta_1(t)]}{\varphi(t)} dt \right| < M\sqrt{\varepsilon},$$

ce qui nous conduit à l'égalité suivante

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{f[\Theta_1(t)]}{\varphi(t)} dt = \sum_0^\infty B_k \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \cos(\lambda_k t + \tau)\, dt + \sum_0^\infty \alpha_k \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{w_k[\Theta_1(t)]}{\varphi(t)} dt.$$

Prenons un point quelconque $x = x_0$ à l'intérieur de l'intervalle (a, b) et soit t_0 la valeur correspondante de t.

Posons

$$\alpha_1 = t_0 - \eta, \quad \beta_1 = t_0 + \eta,$$

η désignant un nombre positif assez petit, donné à l'avance.

$$\sum_0^\nu A_k V_k = \sum_\nu^n B_k \varphi(t) \cos(\lambda_k t + \tau) + \sum_\nu^n \alpha_k w_k[\Theta_1(t)],$$

ν désignant l'entier, introduit dans l'hypothèse 2) du n° précédent.

Nous allons employer cette notation dans toutes les recherches qui vont suivre, car cela ne peut présenter aucun inconvénient.

En remarquant que

$$\frac{1}{2\eta}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}\cos(\lambda_k t+\tau)\,dt=\frac{\sin\lambda_k\eta}{\lambda_k\eta}\cos(\lambda_k t_0+\tau),$$

on trouve

$$(164)\quad \frac{1}{2\eta}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}\frac{f[\Theta_1(t)]}{\varphi(t)}dt=\sum_0^\infty B_k\frac{\sin\lambda_k\eta}{\lambda_k\eta}\cos(\lambda_k t_0+\tau)+\sum_0^\infty\frac{\alpha_k}{2\eta}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}\frac{w_k[\Theta_1(t)]}{\varphi(t)}dt.$$

Il est aisé de s'assurer que la série

$$(165)\qquad \sum_0^\infty B_k\frac{\sin\lambda_k\eta}{\lambda_k\eta}\cos(\lambda_k t+\tau)$$

converge uniformément dans l'intervalle (a, b), quel que soit le nombre donné η.

Remplaçons dans l'équation (163_1) n par $n+p$, p désignant un entier quelconque, et retranchons le résultat ainsi obtenu de cette équation. On obtient

$$r_n=\sum_{n+1}^{n+p}B_k\frac{\sin\lambda_k\eta}{\lambda_k\eta}\cos(\lambda_k t_0+\tau)=-\sum_{n+1}^{n+p}\frac{\alpha_k}{2\eta}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}\frac{w_k[\Theta_1(t)]}{\varphi(t)}dt+\frac{1}{2\eta}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}\frac{R_n-R_{n+p}}{\varphi(t)}dt.$$

La série $\sum\limits_0^\infty \alpha_k w_k(x)$ étant absolument convergente dans l'intervalle (a, b), on trouve, pour les valeurs de n, plus grandes qu'un entier n_0, convenablement choisi,

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p}\frac{\alpha_k}{2\eta}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}\frac{w_k[\Theta_1(t)]}{\varphi(t)}dt\right|<\varepsilon,$$

ε désignant un nombre positif, donné à l'avance.

D'autre part, en vertu de (163_2),

$$\left|\frac{1}{2\eta}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}\frac{R_n-R_{n+p}}{\varphi(t)}dt\right|<\frac{M\sqrt{\varepsilon}}{\eta}.$$

Il s'ensuit que

$$|r_n|<\varepsilon+\frac{M}{\eta}\sqrt{\varepsilon}=\delta,$$

δ désignant un nombre positif arbitraire, ne dépendant pas de t_0.

Donc, *la série (165) converge uniformément dans l'intervalle* (α, β).

Cette proposition nous permet d'écrire

$$(164_1)\quad \begin{aligned} \frac{1}{(2\eta)^s}\int\limits_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} dt_1 \int\limits_{t_1-\eta}^{t_1+\eta} dt_2 \ldots \int\limits_{t_{s-1}-\eta}^{t_{s-1}+\eta} \frac{f[\Theta_1(t_s)]}{\varphi(t_s)}\, dt_s = \sum_0^\infty B_k \frac{\sin^s \lambda_k \eta}{(\lambda_k \eta)^s} \cos(\lambda_k t_0 + \tau) + \\ + \sum_0^\infty \frac{\alpha_k}{(2\eta)^s} \int\limits_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} dt_1 \int\limits_{t_1-\eta}^{t_1+\eta} dt_2 \ldots \int\limits_{t_{s-1}-\eta}^{t_{s-1}+\eta} \frac{w_k[\Theta_1(t_s)]}{\varphi(t_s)}\, dt_s. \end{aligned}$$

Or, il est aisé de s'assurer, comme nous l'avons déjà indiqué au n^0 33, que, dans les hypothèses faites plus haut,

$$\lim_{\eta=0} \sum \frac{\alpha_k}{(2\eta)^s} \int\limits_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} dt_1 \int\limits_{t_1-\eta}^{t_1+\eta} dt_2 \ldots \int\limits_{t_{s-1}-\eta}^{t_{s-1}+\eta} \frac{w_k[\Theta_1(t_s)]}{\varphi(t_s)}\, dt_s = \sum \frac{\alpha_k w_k(x_0)}{\varphi(t_0)},$$

$$\lim_{\eta=0} \frac{1}{(2\eta)^s} \int\limits_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} dt_1 \int\limits_{t_1-\eta}^{t_1+\eta} dt_2 \ldots \int\limits_{t_{s-1}-\eta}^{t_{s-1}+\eta} \frac{f[\Theta_1(t)]}{\varphi(t_s)}\, dt_s = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2\varphi(t_0)}.$$

On a donc

$$(166)\quad \lim_{\eta=0} \sum_0^\infty B_k\, \varphi(t_0) \left(\frac{\sin \lambda_k \eta}{\lambda_k \eta}\right)^s \cos(\lambda_k t_0 + \tau) + \sum_0^\infty \alpha_k w_k(x_0) = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}.$$

36. Cherchons maintenant la limite, vers laquelle tend la série

$$(167)\quad \sum_0^\infty B_k \left(\frac{\sin \lambda_k \eta}{\lambda_k \eta}\right)^s \cos(\lambda_k t_0 + \tau) = \sum_0^\infty C_k \left(\frac{\sin \lambda_k \eta}{\lambda_k \eta}\right)^s$$

lorsque η tend vers zéro.

Nous nous bornerons au cas le plus simple, où les nombres λ_k se représentent sous la forme suivante

$$(168)\quad \lambda_k = a k^\beta,$$

a et β étant des nombres fixes.

En se rappelant que, d'après la supposition, la série (161) converge, désignons sa somme par S, et posons, en suivant une voie, indiquée par

Riemann dans son Mémoire connu: „Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe“,

$$\sum_{0}^{n-1} C_k = S + \varepsilon_n,$$

d'où

$$C_n = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n.$$

Substituant ces expressions de C_n dans (167), on obtient

$$(169)\qquad \sum_{0}^{\infty} C_k \left(\frac{\sin \lambda_k \eta}{\lambda_k \eta}\right)^s = S + \sum_{1}^{\infty} \varepsilon_k \left\{\left(\frac{\sin \lambda_{k-1} \eta}{\lambda_{k-1} \eta}\right)^s - \left(\frac{\sin \lambda_k \eta}{\lambda_k \eta}\right)^s\right\}.$$

Désignons par η un nombre positif, donné à l'avance.

On peut toujours choisir, le nombre η étant assez petit un entier m assez grand, satisfaisant à l'inégalité

$$(170)\qquad \lambda_m \eta = a m^\beta \eta < \pi$$

et tel qu'on ait, pour $k \overline{\gtrless} m$,

$$(171)\qquad \varepsilon_k < \varepsilon.$$

Désignons enfin par p un entier, plus grand que m, défini par les conditions

$$p < \left(\frac{\pi}{a\eta}\right)^{\frac{1}{\beta}} < p + 1,$$

qui donnent

$$(172)\qquad \eta \lambda_p = a p^\beta \eta < \pi, \quad 2p > (p+1) > \left(\frac{\pi}{a\eta}\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

d'où

$$(173)\qquad a \eta p^\beta > \frac{\pi}{2^\beta}.$$

Cela posé, décomposons la série du second membre de l'équation (169) en trois sommes suivantes

$$\sum_{1}^{m} + \sum_{m+1}^{p} + \sum_{p+1}^{\infty}.$$

Il est évident que la première somme, composée d'un nombre fini de termes, tend vers zéro en même temps que η. On trouve donc, en choisissant convenablement le nombre η,

$$(174)\qquad \left|\sum_{1}^{m}\right| < \varepsilon.$$

En remarquant ensuite que le rapport

$$\frac{\sin x}{x}$$

représente une fonction décroissante, pourvu que $x < \pi$, on en conclut que la différence

$$\left(\frac{\sin \lambda_{k-1}\eta}{\lambda_{k-1}\eta}\right)^s - \left(\frac{\sin \lambda_k \eta}{\lambda_k \eta}\right)^s$$

reste positive pour les valeurs de k, comprises entre $m+1$ et p, car, en vertu de (170) et (172),

$$\lambda_m \eta < \lambda_{m+1}\eta < \ldots < \lambda_p \eta < \pi.$$

On trouve donc, eu égard à (171),

$$\left|\sum_{m+1}^{p}\right| < \varepsilon \left\{\left(\frac{\sin \lambda_m \eta}{\lambda_m \eta}\right)^s - \left(\frac{\sin \lambda_p \eta}{\lambda_p \eta}\right)^s\right\} < \varepsilon.$$

Considérons enfin la troisième somme

$$\sum_{p+1}^{\infty} \varepsilon_k \left\{\left(\frac{\sin \lambda_{k-1}\eta}{\lambda_{k-1}\eta}\right)^s - \left(\frac{\sin \lambda_k \eta}{\lambda_k \eta}\right)^s\right\}.$$

Écrivons avec Riemann le terme général sous la forme

$$\varepsilon_k (\sin \lambda_{k-1}\eta)^s \left\{\frac{1}{(\lambda_{k-1}\eta)^s} - \frac{1}{(\lambda_k \eta)^s}\right\} + \frac{\varepsilon_k}{(\lambda_k \eta)^s}\left\{(\sin \lambda_{k-1}\eta)^s - (\sin \lambda_k \eta)^s\right\}.$$

Il est évident que [voir les inégalités (171) et (173)]

$$(175) \qquad \sum_{p+1}^{\infty} \varepsilon_k (\sin \lambda_{k-1}\eta)^s \left\{\frac{1}{(\lambda_{k-1}\eta)^s} - \frac{1}{(\lambda_k \eta)^s}\right\} < \frac{\varepsilon}{(\lambda_p \eta)^s} < \frac{\varepsilon 2^{\beta s}}{\pi^s} = \varepsilon M.$$

D'autre part,

$$|(\sin \lambda_{k-1}\eta)^s - (\sin \lambda_k \eta)^s| < s\,|\sin \lambda_{k-1}\eta - \sin \lambda_k \eta| < 2s\left|\sin \frac{\lambda_{k-1} - \lambda_k}{2}\eta\right| <$$
$$< s(\lambda_k - \lambda_{k-1})\eta.$$

Or, en vertu de (168),

$$\lambda_k - \lambda_{k-1} = a(k^\beta - (k-1)^\beta) < a\beta\, 2^{\beta+1} k^{\beta-1}.$$

On peut donc écrire

$$\left| \frac{\varepsilon_k}{(\lambda_k \eta)^s} \left\{ (\sin \lambda_{k-1} \eta)^s - (\sin \lambda_k \eta)^s \right\} \right| < \varepsilon \, s\beta \frac{2^{\beta+1}}{(a\eta)^{s-1} \, k^{\beta(s-1)-1+2}} <$$

$$< \varepsilon \frac{Q}{(a\eta)^{s-1} \, p^{\beta(s-1)-1}} \frac{1}{k^2}$$

pour toutes les valeurs de k, plus grandes que p.

Cela nous conduit à l'inégalité suivante

$$\left| \sum_{p+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{(\lambda_k \eta)^s} \left\{ (\sin \lambda_{k-1} \eta)^s - (\sin \lambda_k \eta)^s \right\} \right| < \varepsilon \frac{Q}{(a\eta)^{s-1} \, p^{\beta(s-1)-1}} \sum_{p+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \varepsilon \frac{Q}{(ap^{\beta}\eta)^{s-1}},$$

ou, en vertu de (173)

$$\left| \sum_{p+1}^{\infty} \right| < \varepsilon \frac{2^{\beta(s-1)} Q}{\pi^{s-1}} = \varepsilon N. \tag{176}$$

On suppose, sans doute, que l'entier s, qui restait arbitraire jusqu'à présent, soit assujeti à la condition

$$\beta(s-1) - 1 > 0, \tag{176$_1$}$$

ce qui nous permet de poser

$$s = E\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) + 1.$$

Le nombre s étant ainsi choisi, on trouve, en vertu de (174), (175) et (176),

$$\sum_{1}^{\infty} \varepsilon_k \left\{ \left(\frac{\sin \lambda_{k-1} \eta}{\lambda_{k-1} \eta} \right)^s - \left(\frac{\sin \lambda_k \eta}{\lambda_k \eta} \right)^s \right\} < \varepsilon (1 + M + N) = \delta.$$

Cette inégalité montre que

$$\lim_{\eta=0} \sum_{1}^{\infty} \varepsilon_k \left\{ \left(\frac{\sin \lambda_{k-1} \eta}{\lambda_{k-1} \eta} \right)^s - \left(\frac{\sin \lambda_k \eta}{\lambda_k \eta} \right)^s \right\} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{\eta=0} \sum_{0}^{\infty} B_k \left(\frac{\sin \lambda_k \eta}{\lambda_k \eta} \right)^s \cos(\lambda_k t_0 + \tau) = \sum_{0}^{\infty} B_k \cos(\lambda_k t_0 + \tau)$$

et, enfin, en vertu de (166),

$$\sum_0^\infty A_k V_k(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

37. *L'analyse précédente conduit à un théorème général que j'énoncerai comme il suit:*

(A). Soit $f(x)$ une fonction, bornée et intégrable dans un certain intervalle donné (a, b).

Soit $V_k(x)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ une suite de fonctions, définies dans l'intervalle (a, b) et formant un système orthogonal, auxquelles s'applique le théorème du n⁰ 32.

Supposons que les fonctions $V_k(x)$ admettent la représentation asymptotique de la forme (l'hypothèse 2) du n⁰ 34)

$$V_k(x) = \varphi(t)\,[\beta_k \cos(\lambda_k t+\tau)+\vartheta_k]\ ^{1)}, \tag{177}$$

qui permet de réduire le terme général $A_k V_k(x)$ de la série

$$\sum_0^\infty A_k V_k(x), \quad A_k = \frac{\int_a^b p(x) f(x) V_k(x)\,dx}{\int_a^b p(x) V_k^2(x)\,dx} \tag{178}$$

à la forme suivante (voir n⁰ 34)

$$A_k V_k(x) = \varphi(t) B_k \cos(\lambda_k t+\tau) + \alpha_k w_k(x), \tag{178$_2$}$$

où $w_k(x)$ est une fonction admettant la dérivée du premier ordre dont le module ne surpasse pas une certaine limite fixe Q, α_k sont des constantes telles que la série

$$\sum_0^\infty |\alpha_k|$$

converge.

Quant aux nombres λ_k, nous supposons qu'ils soient positifs et se représentent sous la forme suivante

$$\lambda_k = ak^\beta, \tag{179}$$

a et β étant deux nombres fixes.

---

[1] Ou, plus généralement,

$$V_k(x) = \varphi(t)[\alpha_k \cos\lambda_k t + \beta_k \sin\lambda_k t + \vartheta_k]. \tag{177$_1$}$$

Ces conditions étant remplies la somme de la série (177) est égale à l'expression

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} \tag{180}$$

pour tout point x_0 de l'intervalle (a, b), où la série approchée

$$\varphi(t)\sum_{0}^{\infty} B_k \cos(\lambda_k t+\tau), \tag{181}$$

ou, ce qui revient au même, la série primitive (178) converge, bien que cette convergence ne soit pas uniforme.

De ce théorème résulte encore le suivant:

(B). Si la série approchée (181) converge uniformément dans l'intervalle (α, β), correspondant à l'intervalle donné (a, b) de la variable x, la série primitive (178) est une série uniformément convergente et sa somme est égale à

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

en tout point x de l'intervalle (a, b).

38. Nous avons considéré jusqu'à présent le cas, où les expressions asymptotiques des fonctions $V_k(x)$ se représentent sous la forme (177) ou (177_1).

Il est aisé de comprendre, en se rappelant l'analyse qui nous a conduit aux expressions correspondantes pour les polynomes de Hermite, de Jacobi etc., que ces expressions ne représentent autre chose que la série (18_1) [ou celle de (31)] [1]), arrêtée à second terme.

Elles nous donnent donc les valeurs approchées des fonctions $V_k(x)$ [pour les valeurs de k assez grandes] dans la première approximation.

Cette première approximation est suffisante, comme nous l'avons déjà vu, pour en déduire certaines propriétés de plusieurs développements des fonctions arbitraires en séries.

Or, parmi les diverses questions de cette espèce se rencontrent telles qui exigent l'emploi des approximations de l'ordre plus élevé.

Revenant aux notations des articles 2—8, nous pouvons dire que la valeur approchée de la fonction $u_n(x)$, ou, ce qui revient au même, de la fonction $v_n(t)$, correspondant à l'approximation de l'ordre donné q, est égale à la somme de q premiers termes de la série (18_1) [ou celle de (31)].

Quant aux expressions asymptotiques de $v_n(t)$ correspondant à l'approximation de l'ordre donné, on en déduit de la manière suivante:

[1]) Voir nos 7 et 8.

Soit

$$v_n(t) = h_n \left[\alpha_n^{(q-1)} + \frac{\vartheta_n^{(q-1)}}{\lambda_n^{q-1}} \right] \tag{182}$$

l'expression asymptotique correspondant à l'approximation de l'ordre $(q-1)$, α_n^{q-1} désignant une certaine fonction de t, $\vartheta_n^{(q-1)}$ une autre fonction de t, satisfaisant à l'inégalité

$$|\vartheta_n^{(q-1)}| < \psi^{(q-1)}(t), \tag{183}$$

$\psi^{(q-1)}(t)$ étant une fonction positive et continue pour toutes les valeurs de t de l'intervalle (α_1, β_1), intérieur de l'intervalle donné (α, β).

Pour déduire la formule asymptotique correspondant à l'aproximation de l'ordre q, il suffit de substituer (182) dans la formule générale (17_1) du n^0 3 [1]), ce qui nous donne, en vertu de (10),

$$u_n(x) = u_n[\Theta_1(t)] = h_n \left[\alpha_n^{(q)} + \frac{\vartheta_n^{(q)}}{\lambda_n^q} \right], \tag{184}$$

où l'on a posé

$$\alpha_n^{(q)} = z(t)(\cos \lambda_n(t-\tau) - \frac{1}{\lambda_n} \int_\tau^t \mu(\xi)\, \alpha_n^{(q-1)}(\xi) \sin \lambda_n(\xi - t)\, d\xi),$$

$$\vartheta_n^{(q)} = -z(t) \int_\tau^t \mu(\xi)\, \vartheta_n^{(q-1)}(\xi) \sin \lambda_n(\xi - t)\, d\xi. \tag{185}$$

En prenant pour le point de départ la formule asymptotique correspondant à $q=1$, nous obtiendrons successivement, en répétant le procédé que nous venons d'indiquer, les formules asymptotiques correspondant aux approximations de l'ordre $2, 3, \ldots, q$.

Quant à la limite sepérieure de la fonction $\vartheta_n^{(q)}$, on trouve, en vertu de (183) et (185),

$$|\vartheta_n^{(q)}| < z(t) \left| \int_\tau^t |\mu(\xi)|\, \psi^{(q-1)}(t)\, dt \right| = \psi^{(q)}(t),$$

$\psi^{(q)}(t)$ étant une fonction positive.

Substituant (184) dans le terme général $A_k u_k$ de la série $\sum A_k u_k$ (ou $\sum A_k V_k$ conformément aux notations précédentes), on trouve

$$A_k u_k = \frac{h_k^2}{I_k} \alpha_k^{(q)} \int_a^b p f \alpha_k^{(q)}\, dx + \frac{h_k^2}{I_k} \frac{\omega_k^{(q)}}{\lambda_k^q},$$

---

[1]) Nous nous bornons, pour plus de simplicité au cas, où dans la formule (17_1) $A_n' = h_n$, $B_n' = 0$.

où, comme au n⁰ 21,

$$(185_1) \qquad \omega_k^{(q)} = \vartheta_k^{(q)} \int_a^b pf\left(\alpha_k^{(q)} + \frac{\vartheta_k^{(q)}}{\lambda_k^q}\right) dx + \alpha_k^{(q)} \int_a^b pf\,\vartheta_k^{(q)}\,dx \;{}^{1)}.$$

Supposons que le module de

$$\frac{h_k^2}{I_k}\,\omega_k^{(q)}$$

ne surpasse pas une certaine limite fixe Θ, ne dépendant pas de k, et que le nombre q soit choisi de façon que la série

$$\sum \frac{1}{\lambda_k^q}$$

converge.

Dans ce cas *la série*

$$\sum \frac{h_k^2}{I_k} \frac{\omega_k^{(q)}}{\lambda_k^q}$$

converge absolument.

On en conclut que *les conditions de convergence de la série*

$$\sum A_k u_k = \sum A_k V_k(x)$$

sont les mêmes que celles de la série approchée

$$(186) \qquad \sum \frac{h_k^2}{I_k}\,\alpha_k^{(q)} \int_a^b pf\,\alpha_k^{(q)}\,dx.$$

Nous avons ici une analogie complète avec le cas, étudié plus haut (nᵒˢ 21 et 22), où nous n'avons considéré que l'approximation du premier ordre.

Quant aux *conditions de convergence de la série approchée (186) correspondant à l'approximation d'ordre* q, nous remarquerons que *dans beaucoup de cas elles sont les mêmes que celles de la série approchée de la première approximation.*

L'emploi des séries approchées, correspondant aux approximations de l'ordre plus élevé, permet quelquefois de résoudre certaines questions dont la solution présente quelques difficultés dans la première approximation.

---

1) Voir l'équation (96) du n⁰ 21. On remplace ici f par p, φ par f, n par k, ϑ_n par $\vartheta_k^{(q)}$, α_n par $\alpha_k^{(q)}$.

Telle est, par exemple, la démonstration du théoreme (A) dans plusieurs cas particuliers, comme nous le verrons plus loin.

39. Expliquons ces remarques générales par quelques exemples particuliers.

Considérons les polynomes de Jacobi du n⁰ 15.

Supposons, pour fixer les idées, que n soit pair et que $t > \frac{\pi}{2}$.

La formule (75) peut s'écrire

$$v_n(t) = h_n \left[\cos \lambda_n \left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\vartheta_n}{\lambda_n}\right], \quad \lambda_n = n + \alpha.$$

Substituant cette expression dans (17_1), on trouve

$$v_n(t) = h_n \left[\cos \lambda_n \left(t - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2\lambda_n} \operatorname{cotg} t . \sin \lambda_n \left(t - \frac{\pi}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2\lambda_n} \int_{\frac{\pi}{2}}^{t} \frac{\sin \lambda_n \left(2\xi - t - \frac{\pi}{2}\right)}{\sin^2 \xi} d\xi - \frac{\alpha(\alpha - 1)}{\lambda_n^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{t} \frac{\sin \lambda_n (\xi - t) \vartheta_n(\xi)}{\sin^2 \xi} d\xi \right].$$

Or, le théorème de la moyenne donne

$$\left| \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{t} \frac{\sin \lambda_n \left(2\xi - t - \frac{\pi}{2}\right)}{\sin^2 \xi} d\xi \right| = \left| \frac{\sin \lambda_n \left(t' - \frac{\pi}{2}\right) \sin \lambda_n (t' - t)}{\lambda_n} \right| < \frac{1}{\lambda_n},$$

t' désignant un nombre, compris entre $\frac{\pi}{2}$ et t.

D'autre part, en vertu de (70) (n⁰ 17),

$$K = \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{t} \frac{\sin \lambda_n (\xi - t) \vartheta_n(\xi)}{\sin^2 \xi} \right| < \beta \int_{\frac{\pi}{2}}^{t} \frac{d\xi}{\sin^{7/2} \xi} - \gamma \int_{\frac{\pi}{2}}^{t} \frac{d\xi}{\sin^2 \xi \operatorname{tang} \xi},$$

β et γ étant des nombres positifs.

On a donc

$$K < -\frac{2\beta}{5} \frac{\cos t}{\sin^{5/2} t} - \frac{6\beta}{5} \frac{\cos t}{\sqrt{\sin t}} + \frac{\gamma}{2} \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} \overset{1)}{<} \frac{16\beta + 5\gamma}{10} \frac{1}{\sin^{5/2} t} = \frac{\sigma}{\sin^{5/2} t}$$

---

[1]) Cela résulte de la formule

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} \frac{d\xi}{\sin^{7/2} \xi} = -\frac{2}{5} \frac{\cos t}{\sin^{5/2} t} - \frac{6}{5} \frac{\cos t}{\sqrt{\sin t}} - \frac{3}{5} \int_{\frac{\pi}{2}}^{t} \sqrt{\sin x}\, dx.$$

On peut donc écrire

$$v_n(t) = h_n \left[\cos \lambda_n \left(t - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2\lambda_n} \operatorname{cotg} t . \sin \lambda_n \left(t - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\vartheta_n^{(2)}}{\lambda_n^2} \right],$$

où la fonction $\vartheta_n^{(2)}$ satisfait à l'inégalité

$$(187) \qquad | \vartheta_n^{(2)}(t) | < \frac{\mu}{\sin^{5/2} t} \quad \text{pour} \quad \frac{\pi}{2} < t < \pi,$$

μ designant un nombre fixe.

La même inégalité reste vraie aussi pour les valeurs de t, comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Supposons maintenant que n soit impair.

En se rappelant que dans le cas considéré

$$v_n(t) = h'_n \left[\sin \lambda_n \left(t - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\vartheta_n}{\lambda_n} \right]$$

et en répétant les raisonnements précédents, on trouve

$$v_n(t) = h'_n \left[\sin \lambda_n \left(t - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2\lambda_n} \operatorname{cotg} t . \cos \lambda_n \left(t - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\vartheta_n^{(2)}}{\lambda_n^2} \right],$$

où $\vartheta_n^{(2)}$ satisfait, comme précédemment, à l'inégalité (187).

Substituant ses expressions de $v_n(t)$ dans l'équation

$$u_n(\cos t) = \frac{v_n(t)}{\sin^\alpha t}$$

on obtient enfin, pour n pair,

$$(189) \quad u_n(t) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} h_n}{\sin^\alpha t} \left[\cos\left((n+\alpha)t - \frac{\alpha\pi}{2} \right) - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2(n+\alpha)} \operatorname{cotg} t . \sin\left((n+\alpha)t - \frac{\alpha\pi}{2} \right) + \frac{\vartheta_n^{(2)}(t)}{(n+\alpha)^2} \right]$$

et, pour n impair,

$$(190) \quad u_n(t) = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}} h'_n}{\sin^\alpha t} \left[\cos\left((n+\alpha)t - \frac{\alpha\pi}{2} \right) - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2(n+\alpha)} \operatorname{cotg} t . \sin\left((n+\alpha)t - \frac{\alpha\pi}{2} \right) + \frac{\vartheta_n^{(2)}(t)}{(n+\alpha)^2} \right],$$

les expressions asymptotiques pour les polynomes de Jacobi correspondant à l'approximation du second ordre.

La série approchée (186) correspondant aux formules (189) et (190) prend la forme suivante

$$
(191) \quad \frac{1}{\sin^\alpha t}\sum \frac{h_{2k}^2}{I_{2k}}\left\{\cos\left((2k+\alpha)t-\frac{\alpha\pi}{2}\right)-\frac{\alpha(\alpha-1)}{2(2k+\alpha)}\operatorname{cotg} t . \sin\left((2k+\alpha)t-\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right\}B_{2k}+
$$

$$
+\frac{1}{\sin^\alpha t}\sum \frac{h'^2_{2k+1}}{I_{2k+1}}\left\{\cos\left((2k+1+\alpha)t-\frac{\alpha\pi}{2}\right)-\frac{\alpha(\alpha-1)}{2(2k+1+\alpha)}\operatorname{cotg} t . \sin\left((2k+1+\alpha)t-\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right\}B_{2k+1}
$$

où

$$
B_{2k}=\int_0^\pi f(\cos t)\sin^\alpha t\left\{\cos\left((2k+\alpha)t-\frac{\alpha\pi}{2}\right)-\frac{\alpha(\alpha-1)}{2(2k+\alpha)}\operatorname{cotg} t . \sin\left((2k+\alpha)t-\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right\}dt,
$$

$$
B_{2k+1}=\int_0^\pi f(\cos t)\sin^\alpha t\left\{\cos\left((2k+1+\alpha)t-\frac{\alpha\pi}{2}\right)-\frac{\alpha(\alpha-1)}{2(2k+1+\alpha)}\operatorname{cotg} t . \sin\left((2k+1+\alpha)t-\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right\}dt.
$$

En se rappelant les recherches du n⁰ 23, on s'assure aisément que *les conditions de convergence de la série (191) sont les mêmes que celles de la série approchée correspondant à l'approximation du premier ordre.*

Écrivons le terme général de la série $\sum A_k u_k$ sous la forme suivante

$$
A_k u_k = \frac{h_k^2}{I_k}\alpha_k^{(2)}\int_0^\pi \sin^\alpha t\, f(\cos t)\, \alpha_k^{(2)}(t)\, dt + \frac{h_k^2}{I_k}\frac{\omega_k^{(2)}}{(k+\alpha)^2}.
$$

En tenant compte de ce que le rapport

$$
\frac{h_k^2}{I_k}
$$

tend vers une limite fixe, lorsque n croît indéfiniment (voir n⁰ 25), on peut affirmer que la série

$$
(192) \qquad \sum \frac{h_k^2}{I_k}\frac{\omega_k^{(2)}}{(k+\alpha)^2}
$$

converge, pourvu que les fonctions $\omega_k^{(2)}$ satisfassent à la condition

$$
(193) \qquad |\omega_k^{(2)}| < Q,
$$

Q désignant un nombre fixe.

L'égalité (185_1) montre que cette dernière condition sera remplie, si les intégrales

$$
\int_{-1}^{+1} p f \alpha_k^{(2)}\, dx \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{+1} p f \vartheta_k^{(2)}\, dx
$$

restent finies, quel que soit l'indice k.

Il est évident que la première de ces intégrales a toujours un sens bien déterminé, quelle que soit la fonction $f(x)$ bornée et intégrable dans l'intervalle $(-1, +1)$ [1].

Quant à la seconde, elle se représente sous la forme

$$\int_0^\pi \sin^\alpha t\, f(\cos t)\, \vartheta_k^{(2)}\, dt, \tag{194}$$

d'où l'on tire, en tenant compte de (187),

$$\left| \int_0^\pi \sin^\alpha t\, f(\cos t)\, \vartheta_k^{(2)}\, dt \right| < \mu \int_0^\pi \sin^{\alpha - \frac{5}{2}} t \,.\, f(\cos t)\, dt.$$

Il s'ensuit que le module de l'intégrale (194) ne surpasse pas une limite fixe, pourvu que

$$\alpha - \frac{5}{2} > -1, \quad \alpha > \frac{3}{2},$$

quelle que soit la fonction $f(x)$, bornée et intégrable dans l'intervalle $(-1, +1)$.

On en conclut que l'inégalité (193) aura lieu toujours, quelle que soit la fonction $f(x)$ bornée et intégrable, au moins si la constante α est plus grande que $\frac{3}{2}$.

Donc la série (192) converge et *la série primitive* $\sum A_k u_k(x)$ *converge sous les mêmes conditions que la série (191), quelle que soit la fonction $f(x)$ bornée et intégrable dans l'intervalle $(-1, +1)$.*

40. Appliquons maintenant le théorème du n⁰ 32 aux cas considéré, ce qui est possible, comme je l'ai montré dans mon Mémoire: „Sur certaines égalités communes etc", cité plus haut.

Posons, en général,

$$\frac{h_n^2}{I_n} B_n = C_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

On peut écrire

$$\sum A_n u_n = \sum C_n \alpha_n^{(2)} + \sum \alpha_n w_n(t),$$

---

[1] Il est aisé de s'assurer que cette intégrale tend vers zéro, lorsque k tend vers l'infini.

où l'on a posé

$$\alpha_n^{(2)} = \frac{1}{\sin^\alpha t}\left\{\cos\left((n+\alpha)t - \frac{\alpha\pi}{2}\right) - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2(n+\alpha)}\operatorname{cotg} t \,.\, \sin\left((n+\alpha)t - \frac{\alpha\pi}{2}\right)\right\},$$

$$a_n = \frac{1}{(n+\alpha)^2}, \quad w_n(t) = \frac{h_n^2\, \omega_n^{(2)}}{I_n}.$$

En répétant les raisonnements du n° 35, nous obtiendrons l'égalité suivante

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \sin^{\alpha+1} t \,.\, f(\cos t)\,dt = \sum C_n \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \sin t \,.\, \cos\left((n+\alpha)t - \frac{\alpha\pi}{2}\right) dt -$$

$$- \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \sum \frac{C_n}{n+\alpha} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \cos t \,.\, \sin\left((n+\alpha)t - \frac{\alpha\pi}{2}\right) dt + \sum a_n \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \sin^{\alpha+1} t \,.\, w_n(t)\,dt,$$

α_1 et β_1 ayant la même signification qu'au n° 35, ou

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \sin^{\alpha+1} t \,.\, f(\cos t)\,dt = \sum P_n \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \sin\left((n+\alpha+1)t - \frac{\alpha\pi}{2}\right) dt -$$

$$- \sum Q_n \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \sin\left((n+\alpha-1)t - \frac{\alpha\pi}{2}\right) dt + \sum a_n \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \sin^{\alpha+1} t \,.\, w_n(t)\,dt,$$

$$P_n = \frac{C_n}{2}\left(1 - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2(n+\alpha)}\right), \quad Q_n = \frac{C_n}{2}\left(1 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2(n+\alpha)}\right).$$

Posant ensuite

$$\alpha_1 = t_0 - \eta, \quad \beta_1 = t_0 + \eta,$$

on obtient, comme au n° 35,

$$\frac{1}{2\eta}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} \sin^{\alpha+1} t \,.\, f[\cos t]\,dt = -\sum P_n \cos\left((n+\alpha+1)t - \frac{\alpha\pi}{2}\right)\frac{\sin \eta\mu_n}{\eta\mu_n} +$$

$$+ \sum Q_n \sin\left((n+\alpha-1)t - \frac{\alpha\pi}{2}\right)\frac{\sin \eta\sigma_n}{\eta\sigma_n} + \sum \frac{a_n}{2\eta}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} \sin^{\alpha+1} t \,.\, w_n(t)\,dt.$$

Supposons que $f(x)$ *soit une fonction à variation bornée entre* -1 *et* $+1$.

Il est aisé de s'assurer, que dans ce cas

$$|w_n(t)| < \frac{A}{n}, \quad |w'_n(t)| < B,$$

A et B étant des nombres fixes.

On a donc

$$\lim_{\eta=0} \sum \frac{\alpha_n}{2\eta} \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} \sin^{\alpha+1} t \,.\, w_n(t)\, dt = \sum \alpha_n \sin^{\alpha+1} t_0 \,.\, w_n(t_0).$$

Cette égalité étant établie, on trouve ensuite, en répétant les raisonnements du n⁰ 35,

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} = \sum C_n \alpha_n^{(2)} + \sum \alpha_n w_n(t_0) = \sum A_k u_k(x_0).$$

En se rappelant que, sous la supposition faite sur $f(x)$, la série approchée

$$\sum C_n \alpha_n^{(2)}$$

converge uniformément dans l'intervalle $(-1, +1)$, on obtient le théorème suivant:

La série

$$(194_1) \qquad \sum A_k u_k(x), \quad A_k = \frac{\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} f(x)\, u_k(x)\, dx}{\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} u_k^2(x)\, dx},$$

$u_k(x)$ étant les polynomes de Jacobi, correspondant au paramètre α plus grand que $3/2$, converge uniformément dans l'intervalle $(-1, +1)$ et la somme de cette série est égale à

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

en tout point x de l'intervalle considéré, si la fonction $f(x)$ est une fonction à variation bornée entre -1 et $+1$.

La restriction

$$\alpha > \frac{3}{2},$$

introduite par l'analyse précédente, n'a rien d'essentiel et le théorème reste vrai pour toutes les valeurs positives du paramètre α.

Laissant de côté les recherches générales sur ce sujet, je me bornerai seulement par la remarque suivante:

Quel que soit le nombre positif α, la série (194_1) converge uniformément, pourvu que $f(x)$ satisfasse aux conditions du théorème tout à l'heure enoncé, ce qui résulte des recherches du n⁰ 25.

Supposons encore que $f(x)$ reste continue au voisinage d'un point quelconque x_0 de l'intervalle $(-1, +1)$.

Cette condition étant remplie, le théorème du n⁰ 11 de mon Mémoire: „Sur certaines égalités générales etc." s'applique à la série (194_1) et conduit au théorème suivant:

La série (194_1), $u_k(x)$ étant les polynomes de Jacobi (n⁰ 15), a $f(x)$ pour somme en tout point x de l'intervalle $(-1, +1)$ aux environs duquel la fonction à variation bornée $f(x)$ reste continue.

41. Envisageons maintenant les polynomes de Hermite et ceux du n⁰ 18.

Il suffit de considérer l'un de ces cas, car l'analyse s'étend sans aucune difficulté à l'autre.

Etudions, pour fixer les idées, les polynomes du n⁰ 18.

Reprenons l'expression asymptotique, établie plus haut et correspondant à l'approximation du premier ordre.

On peut écrire (la formule (88) du n⁰ 18)

$$v_n = h_n\left(\cos t\sqrt{n} + \frac{\vartheta_n}{\sqrt{n}}\right), \quad h_n = (-1)^n\, 1.3.5\ldots(2n-1),$$

où, comme nous l'avons démontré,

$$|\vartheta_n| < \alpha_1 t^{\frac{11}{2}} + \alpha_2 t^3 + \alpha_3 t^2 + \alpha_4 t + \alpha_5,$$

α_j étant des constantes positives.

Appliquant au cas considéré la méthode, indiquée au n⁰ 38, on obtient cette expression asymptotique, correspondant à l'approximation du second ordre, de la fonction u_n:

$$u_n\left(\frac{t^2}{2}\right) = h_n\left[\alpha_n^{(2)} + \frac{\vartheta_n^{(2)}}{n}\right] e^{\frac{t^2}{8}}, \tag{195}$$

où

$$\alpha_n^{(2)} = \cos t\sqrt{n} + \frac{t(t^2-12)}{96\sqrt{n}} \sin t\sqrt{n}, \tag{196}$$

$\vartheta_n^{(2)}$ est une fonction satisfaisant à la condition

$$(197) \qquad |\vartheta_n^{(2)}| < \beta_1 t^{\frac{17}{2}} + \beta_2 t^{\frac{13}{2}} + \beta_3 t^6 + \beta_4 t^5 + \beta_5 t^4 + \beta_6 t^3 + \beta_7 t^2 + \beta_8 t,$$

β_j étant des nombres positifs.

Substituant (195) dans la série $\sum A_k u_k(x)$, on trouve

$$(198) \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \sum A_k u_k(x) = e^{\frac{t^2}{8}} \sum \frac{h_k^2}{I_k} \alpha_k^{(2)} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{8}} f\left(\frac{t^2}{2}\right) \alpha_k^{(2)}\, dt + \sum \frac{h_k^2}{I_k} \frac{\omega_k^{(2)}}{k} e^{\frac{t^2}{8}},$$

$\omega_k^{(2)}$ étant une fonction, définie par la formule générale (185_1), où il faut poser

$$q = 2, \quad \lambda_k = \sqrt{k}, \quad a = 0, \quad b = +\infty, \quad p = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}, \quad x = \frac{t^2}{2},$$

et remplacer $\alpha_k^{(2)}$ par son expression (196).

En se rappelant que, pour les valeurs de k assez grandes (voir n^0 23),

$$\frac{h_k^2}{I_k} < \frac{\lambda}{\sqrt{k}},$$

on s'assure, que *la série*

$$\sum \frac{h_k^2}{I_k} \frac{\omega_k^{(2)}}{k} e^{\frac{t^2}{8}}$$

converge absolument, pourvu que

$$|\omega_k^{(2)}| < Q,$$

Q désignant un nombre fixe.

Cette condition sera remplie [voir la formule (185_1)], si les intégrales

$$\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{8}} f\left(\frac{t^2}{2}\right) \alpha_n^{(2)}\, dt \quad \text{et} \quad \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{8}} f\left(\frac{t^2}{2}\right) \vartheta_n^{(2)}\, dt$$

restent finies, ce qui aura lieu, en particulier, *si la fonction $f(x)$ est une fonction bornée pour toutes les valeurs positives de la variable x.*

Pour s'en assurer, il suffit de rappeler les formules (196) et (197).

Donc *les conditions de convergence de la série (198) sont les mêmes que celles de la série approchée*

$$(199) \qquad e^{\frac{t^2}{8}} \sum \frac{h_k^2}{I_k} \alpha_k^{(2)} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{8}} f\left(\frac{t^2}{2}\right) \alpha_k^{(2)}\, dt,$$

quelle que soit la fonction $f(x)$, bornée dans l'intervalle $(0, +\infty)$.

42. Supposons maintenant que la série (198) converge au voisinage d'un point quelconque t_0 de l'intervalle $(0, +\infty)$. Il en sera de même de la série approchée (199) qui peut se représenter sous la forme

$$(200) \quad S = e^{\frac{t^2}{8}} \left\{ \sum B_k \cos t\sqrt{k} + \varphi(t) \sum \frac{\sin t\sqrt{k}}{\sqrt{k}} B_k + \sum \frac{\cos t\sqrt{k}}{\sqrt{k}} C_k + \varphi(t) \sum \frac{\sin t\sqrt{k}}{k} C_k \right\},$$

où

$$(200_1) \quad B_k = \frac{h_k^2}{I_k} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{8}} f\left(\frac{t^2}{2}\right) \cos t\sqrt{k}\, dt, \quad C_k = \frac{h_k^2}{I_k} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{8}} f\left(\frac{t^2}{2}\right) \varphi(t) \sin t\sqrt{k} . dt,$$

$$(201) \quad \varphi(t) = \frac{t(t^2 - 12)}{96}.$$

Posant

$$\frac{1}{\sqrt{2}} f\left(\frac{t^2}{2}\right) = S_n + e^{\frac{t^2}{8}} \sum_0^n \frac{h_k^2}{I_k} \frac{\omega_k^{(2)}}{k} + R_n \text{ [1]}$$

et en tenant compte de ce que le théorème du n⁰ 32 s'applique à tous les polynomes de Tchébicheff, auxquels appartiennent les polynomes considérés, on trouve, en répétant les raisonnements du n⁰ 35,

$$\frac{1}{2\sqrt{2}\eta} \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} e^{-\frac{t^2}{8}} f\left(\frac{t^2}{2}\right) dt = \sum \left(\frac{B_k}{2\eta} \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} \cos t\sqrt{k} . dt + \frac{B_k}{2\eta\sqrt{k}} \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} \varphi(t) \sin t\sqrt{k} . dt \right) +$$

$$+ \sum \left(\frac{C_k}{2\eta\sqrt{k}} \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} \cos t\sqrt{k} . dt + \frac{C_k}{2\eta k} \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} \varphi(t) \sin t\sqrt{k} . dt \right) + \frac{1}{2\eta} \sum \frac{h_k^2}{I_k k} \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} \omega_k^{(2)} dt.$$

De cette égalité nous tirerons, en intégrant encore $s - 1$ fois par rapport à t, l'égalité de la forme (164_1).

En remarquant que dans le cas considéré

$$\lambda_k = \sqrt{k} = k^\beta, \quad \beta = \frac{1}{2},$$

on s'assure qu'on peut prendre pour s le nombre 3, car cette supposition satisfait à la condition (176_1).

---

[1] S_n désigne la somme de n premiers termes de la série S.

On obtient ainsi

(202) $$\frac{1}{(2\eta)^3\sqrt{2}}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} dt \int_{t-\eta}^{t+\eta} dt_1 \int_{t_1-\eta}^{t_1+\eta} e^{-\frac{t^2}{8}} f\left(\frac{t^2}{2}\right) dt =$$

$$= \sum\left(\frac{B_k}{(2\eta)^3}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} dt \int_{t-\eta}^{t+\eta} dt_1 \int_{t_1-\eta}^{t_1+\eta} \cos t\sqrt{k}\,.\,dt + \frac{B_k}{(2\eta)^3\sqrt{k}}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} dt \int_{t-\eta}^{t+\eta} dt_1 \int_{t_1-\eta}^{t_1+\eta} \varphi(t)\sin t\sqrt{k}\,.\,dt\right) +$$

$$+ \sum\left(\frac{C_k}{(2\eta)^3\sqrt{k}}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} dt \int_{t-\eta}^{t+\eta} dt_1 \int_{t_1-\eta}^{t_1+\eta} \cos t\sqrt{k}\,.\,dt + \frac{C_k}{(2\eta)^3 k}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} dt \int_{t-\eta}^{t+\eta} dt_1 \int_{t_1-\eta}^{t_1+\eta} \varphi(t)\sin t\sqrt{k}\,.\,dt\right) +$$

$$+ \frac{1}{(2\eta)^3}\sum \frac{h_k^2}{I_k k}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} dt \int_{t-\eta}^{t+\eta} dt_1 \int_{t_1-\eta}^{t_1+\eta} \omega_k^{(2)}\, dt.$$

Supposons, pour plus de simplicité, que $f(x)$ *soit une fonction à variation bornée.*

Considérons d'abord la série

(203) $$\sum \frac{C_k}{(2\eta)^3 k}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} dt \int_{t-\eta}^{t+\eta} dt_1 \int_{t_1-\eta}^{t_1+\eta} \varphi(t)\sin t\sqrt{k}\,.\,dt.$$

En se rappelant que pour les valeurs de k assez grandes

$$\frac{h_k^2}{I_k} < \frac{\lambda}{\sqrt{k}},$$

on trouve, eu égard à l'expression (200_1) de C_k,

(204) $$|C_k| < \frac{\beta}{k},$$

β étant un nombre fixe.

Cherchons la limite, vers laquelle tend la série

$$S_1 = \sum \frac{C_k}{2\eta k}\int_{t_1-\eta}^{t_1+\eta} \varphi(t)\sin t\sqrt{k}\,.\,dt,$$

lorsque η tend vers zéro.

On a, pour toutes les valeurs de t, comprises entre $t_1-\eta$ et $t_1+\eta$

$$\varphi(t)\sin t\sqrt{k} = \varphi(t_1)\sin t_1\sqrt{k} + \eta\sqrt{k}\,\Theta,$$

où Θ est une fonction, dont le module ne surpasse pas une certaine limite fixe A.

Il s'ensuit que

$$S_1 = \sum \frac{C_k}{k} \varphi(t_1) \sin t_1 \sqrt{k} + \sum \frac{C_k}{\sqrt{k}} \eta \frac{1}{2\eta} \int_{t_1-\eta}^{t_1+\eta} \Theta\, dt.$$

Or, en vertu de (204),

$$\left| \eta \sum \frac{C_k}{\sqrt{k}} \frac{1}{2\eta} \int_{t_1-\eta}^{t_1+\eta} \Theta\, dt \right| < \eta \beta A \sum \frac{1}{k\sqrt{k}}.$$

On voit donc que

$$\lim_{\eta=0} \sum \frac{C_k}{\sqrt{k}} \eta \frac{1}{2\eta} \int_{t_1-\eta}^{t_1+\eta} \Theta\, dt = 0$$

et que

$$\lim_{\eta=0} S_1 = \sum \frac{C_k}{k} \varphi(t_1) \sin t_1 \sqrt{k}.$$

Par conséquent,

$$(205)\quad \lim_{\eta=0} \sum \frac{C_k}{(2\eta)^3 k} \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} dt \int_{t-\eta}^{t+\eta} dt_1 \int_{t_1-\eta}^{t_1+\eta} \varphi(t) \sin t \sqrt{k}\,.\,dt = \sum \frac{C_k}{k} \varphi(t_0) \sin t_0 \sqrt{k}.$$

Cette égalité étant établie on s'assure sans peine que

$$(206)\quad \lim_{\eta=0} \frac{1}{(2\eta)^3} \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} dt \int_{t-\eta}^{t+\eta} dt_1 \int_{t_1-\eta}^{t_1+\eta} \omega_k^{(2)}\, dt = \sum \frac{h_k^2}{I_k k} \omega_k^{(2)}(t_0).$$

En effet, il est aisé de comprendre que le terme général

$$\frac{h_k^2}{I_k k} \omega_k^{(2)}$$

se représente sous la forme

$$D_k \psi(t) \frac{\cos t \sqrt{k}}{k} + E_k \Theta(t) \frac{\sin t \sqrt{k}}{k\sqrt{k}} + \frac{h_k^2}{I_k k \sqrt{k}} \omega_k^{(3)}, \text{[1]}$$

où $\omega_k^{(3)}$ est une fonction satisfaisant à la condition

$$|\omega_k^{(3)}(t) - \omega_k^{(3)}(t_1)| < A\eta\sqrt{k},$$

A désignant un nombre fixe.

[1]) D_k et E_k sont des constantes.

Ces remarques suffisent pour faire comprendre l'exactitude de l'égalité (206).

43. Considérons la série

$$S_2 = \sum \frac{B_k}{2\eta\sqrt{k}} \int_{t_1-\eta}^{t_1+\eta} \varphi(t) \sin t\sqrt{k} \, . \, dt \, ,$$

où B_k sont des constantes satisfaisant à la condition [voir l'équation (200_1)]

$$(207) \qquad\qquad |B_k| < \frac{\beta}{k} \, ,$$

pour les valeurs de n assez grandes.

On trouve, en effectuant l'intégration,

$$\frac{1}{2\eta} \int_{t-\eta}^{t+\eta} \varphi(t) \sin t\sqrt{k} \, dt = \varphi \sin t\sqrt{k} \frac{\sin \eta\sqrt{k}}{\eta\sqrt{k}} +$$

$$+ \frac{\cos t\sqrt{k}}{\sqrt{k}} \left(\frac{\varphi'''}{k} - \varphi' \right) \left(\cos \eta\sqrt{k} - \frac{\sin \eta\sqrt{k}}{\eta\sqrt{k}} \right) + \sin t\sqrt{k} \frac{\varphi''}{k} \left(\cos \eta\sqrt{k} - \frac{\sin \eta\sqrt{k}}{\eta\sqrt{k}} \right) +$$

$$+ \frac{\eta^2}{2} \varphi'' \sin t\sqrt{k} \frac{\sin \eta\sqrt{k}}{\eta\sqrt{k}} + \frac{\eta^2}{2} \varphi''' \left(\frac{\sin \eta\sqrt{k}}{\eta\sqrt{k}} - \frac{\cos \eta\sqrt{k}}{3} \right) \frac{\cos t\sqrt{k}}{\sqrt{k}} \, .$$

En remarquant que

$$\left| \cos \eta\sqrt{k} - \frac{\sin \eta\sqrt{k}}{\eta\sqrt{k}} \right| < \eta\sqrt{k} \, . \, \Theta \, ,$$

Θ étant un nombre fixe, on en conclut, en tenant compte de (207) et (201), que

$$\left| \sum \frac{B_k}{k} \left(\frac{\varphi'''}{k} - \varphi' \right) \left(\cos \eta\sqrt{k} - \frac{\sin \eta\sqrt{k}}{\eta\sqrt{k}} \right) \cos t\sqrt{k} \right| < \eta \sum \frac{A}{k\sqrt{k}} \, .$$

Donc la série entre les crochêttes tend vers zéro pour $\eta = 0$.

On démontrera de la même manière que

$$\lim_{\eta=0} \sum \frac{B_k}{k\sqrt{k}} \varphi'' \left(\cos \eta\sqrt{k} - \frac{\sin \eta\sqrt{k}}{\eta\sqrt{k}} \right) \sin t\sqrt{k} = 0 \, ,$$

et, a fortiori,

$$\lim_{\eta=0} \frac{\eta^2}{2} \sum \frac{B_k}{\sqrt{k}} \left\{ \varphi'' \sin t\sqrt{k} \frac{\sin \eta\sqrt{k}}{\eta\sqrt{k}} + \varphi''' \frac{\cos t\sqrt{k}}{\sqrt{k}} \left(\frac{\sin \eta\sqrt{k}}{\eta\sqrt{k}} - \frac{\cos \eta\sqrt{k}}{3} \right) \right\} = 0 \, .$$

On trouve donc

$$\lim_{\eta=0}\sum\frac{B_k}{2\eta\sqrt{k}}\int\limits_{t-\eta}^{t+\eta}\varphi(t)\sin t\sqrt{k}\,dt=\lim_{\eta=0}\sum\frac{B_k}{\sqrt{k}}\varphi(t)\sin t\sqrt{k}\,\frac{\sin\eta\sqrt{k}}{\eta\sqrt{k}}.$$

Cette égalité étant établie, on en tire ensuite

$$(208)\qquad \lim_{\eta=0}\sum\frac{B_k}{(2\eta)^3\sqrt{k}}\int\limits_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}dt\int\limits_{t-\eta}^{t+\eta}dt_1\int\limits_{t_1-\eta}^{t_1+\eta}\varphi(t)\sin t\sqrt{k}\,.\,dt=$$
$$=\lim_{\eta=0}\sum\frac{B_k}{(2\eta)^3\sqrt{k}}\varphi(t_0)\sin t_0\sqrt{k}\left(\frac{\sin\eta\sqrt{k}}{\eta\sqrt{k}}\right)^3$$

et, enfin, en se rappelant les raisonnements du n^0 36,

$$(208_1)\ \lim_{\eta=0}\sum\frac{B_k}{(2\eta)^3\sqrt{k}}\varphi(t_0)\sin t_0\sqrt{k}\left(\frac{\sin\eta\sqrt{k}}{\eta\sqrt{k}}\right)^3=\sum\frac{B_k}{(2\eta)^3\sqrt{k}}\varphi(t_0)\sin t_0\sqrt{k}\,.$$

Les égalités (200), (202), (205), (206), (208) et (208_1) conduisent à la suivante

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}=\sqrt{2}\left(S+\sum\frac{h_k^2}{I_k k}\omega_k^2\right)=\sum A_k u_k(x_0),$$

x_0 désignant la valeur de x correspondant à $t=t_0$.

On obtient ainsi le théorème suivant:

La somme de la série

$$(209)\qquad \sum A_k u_k(x),\quad A_k=\frac{\displaystyle\int\limits_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}\frac{f(x)}{\sqrt{x}}u_k(x)\,dx}{\displaystyle\int\limits_0^\infty\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}u_k^2\,dx},$$

$u_k(x)$ désignant les polynomes du n^0 18, $f(x)$ une fonction à variation bornée entre 0 et $+\infty$, est égale à

$$(210)\qquad \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

en tout point de l'intervalle $(0, +\infty)$, où cette série converge [1]).

[1]) Nous avons supposé, pour simplifier les raisonnements, que $f(x)$ soit une fonction à variation bornée, mais on pourra déduire les équations (205), (206) et (208) sous

Or, on sait que la série (209) converge uniformément pour les valeurs positives de x, si $f(x)$ est une fonction à variation bornée.

On peut donc énoncer la proposition suivante:

La série (209) converge uniformément dans l'intervalle $(0, +\infty)$, *si* $f(x)$ *est une fonction à variation bornée, et la somme de cette série est égale à l'expression (210) en tout point* x_0 *de cet intervalle.*

Si la fonction $f(x)$ *reste continue et satisfait aux conditions du* n⁰ *27, la série (209) converge non seulement uniformément, mais encore absolument, et sa somme est égale à* $f(x)$.

44. La même analyse s'applique, avec des modifications légères, à la série

$$(211) \qquad \sum A_k u_k, \quad A_k = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha x^2}{2}} f(x)\, u_k(x)\, dx}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha x^2}{2}} u_k^2\, dx},$$

u_k désignant les polynomes de Hermite.

En répétant les raisonnements de nᵒˢ 41—44, on obtient le théorème suivant que j'énoncerai sans démonstration:

La série (211), $u_k(x)$ *étant les polynomes de Hermite, converge uniformément, pourvu que* $f(x)$ *soit une fonction à variation bornée, et la somme de cette série est égale à*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

en tout point de l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

45. Considérons maintenant la série de Dini (142) [n⁰ 31].

Supposons que *la fonction* $f(x)$ *satisfasse aux conditions du théorème, énoncé à la fin du* n⁰ *31.*

Les fonctions $J_\alpha(\xi_k t)$ de Bessel satisfont à l'hypothèse 1) du n⁰ 34, comme je l'ai montré autrefois dans mon Mémoire: „Sur certaines égalités générales etc“, cité plus haut.

D'autre part, l'égalité (133) du n⁰ 30 montre que l'expression asymptotique des fonctions de Bessel a précisément la forme (177_1), où il faut poser

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad \lambda_k = \xi_k,$$
$$\alpha_k = J_\alpha(\xi_k) \cos \xi_k, \quad \beta_k = J_\alpha(\xi_k) \sin \xi_k.$$

---

la seule supposition que la série approchée converge et la fonction $f(x)$ soit bornée et intégrable dans l'intervalle $(0, +\infty)$.

On en pourra déduire une propriété de la série (209), analogue à celle des séries trigonométriques, établie par Riemann, mais nous n'insistons pas sur ce point.

Le terme général $A_k V_k(x)$ de la série

$$\sum A_k V_k(x),$$

où

$$V_k(x) = J_\alpha(\xi_k t),$$

se représente, en vertu de (142) et (143) [n⁰ 31], sous la forme

$$A_k V_k(x) = \frac{1}{\sqrt{t}}\left[\alpha_k \cos \xi_k (t-1) + \beta_k \sin \xi_k (t-1) + \frac{K_k}{\xi_k^2}\right],$$

où l'on a posé

$$\alpha_k = \frac{\xi_k^2}{\xi_k^2 + h(h+2\alpha)}\left\{\int_0^1 \sqrt{x} f(x) \cos \xi_k (x-1)\,dx + \frac{\beta}{\xi_k}\int_0^1 \sqrt{x} f(x) \sin \xi_k (x-1)\,dx + \frac{\beta_k}{\xi_k}\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} \sin \xi_k (x-1)\,dx\right\},$$

$$\beta_k = \frac{\xi_k}{\xi_k^2 + h(h+2\alpha)}\left(\beta + \frac{\beta_1}{t}\right)\int_0^1 \sqrt{x} f(x) \cos \xi_k (x-1)\,dx,$$

K_k désignant une fonction définie par l'équation (144).

Il importe de remarquer que K_k satisfait non seulement à l'inégalité (148) (n⁰ 31), mais encore aux suivantes

$$|K_k| < \frac{A}{\xi_k}, \quad |K_k'| < B,$$

A et B étant des nombres fixes.

Il est aisé de voir, en effet, que $\vartheta_k(x)$ [voir l'équation (140) du n⁰ 30] a la forme suivante

$$\vartheta_k(x) = \varrho_k \cos \xi_k (x-1) + \sigma_k \sin \xi_k (x-1),$$

ϱ_k et σ_k désignant des fonctions continues de t.

En se rappelant ensuite que, d'après la supposition faite, $f(x)$ et $\frac{f(x)}{\sqrt{x}}$ sont les fonctions à variation bornée, on en tire, en tenant compte de l'expression (144) de K_k, les inégalités précédentes.

Quant aux nombres $\xi_k = \lambda_k$, ils se représentent comme il suit

$$\lambda_k = \xi_k = k\pi + \delta + \varepsilon_k, \quad |\sin \varepsilon_k| < \frac{B}{k}.$$

Toutes les conditions du théorème (B) du n⁰ 37 sont satisfaites.

Nous avons supposé au n⁰ 35 que

$$\lambda_k = ak^\beta.$$

Or, il est évident que les raisonnements de ce n⁰ s'appliquent aussi bien au cas considéré, où λ_k est égal à $k\pi + \delta + \varepsilon_k$.

On obtient donc immédiatement, en se rappelant les recherches du n⁰ 31 et employant les raisonnements, analogues à ceux de n^os 42 et 43, le théorème suivant:

Soit $f(x)$ une fonction donnée jouissant les propriétés suivantes:

1) Il existe un nombre positif ε_0 assez petit, mais fixe, tel que l'on ait

$$|f(x)| < Ax^{1+\mu},$$

A et $\mu < 1$ etant des nombres fixes, pour toutes les valeurs positives de x, plus petites que ε_0.

2) La fonction $f(x)$ est une fonction à variation bornée entre 0 et 1.

Ces conditions étant remplies, la série de Dini

$$\sum_0^\infty \frac{\xi_n^2 J_\alpha(\xi_n t)}{[\xi_n^2 + h(h+2\alpha)] J_\alpha^2(\xi_n)} \int_0^1 x f(x) J_\alpha(\xi_n x)\, dx$$

converge uniformément dans l'intervalle $(0, 1)$ et sa somme est égale à

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

en tout point x, intérieur à l'intervalle $(0, 1)$.

46. Considérons enfin une classe très étendue de fonctions

$$V_n(x), \qquad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

définies par l'équation (compar. n⁰ 1)

$$\frac{d}{dx}\left(k \frac{dV_n}{dx}\right) + (g\lambda_n^2 - l)\, V_n = 0 \tag{212}$$

jointe aux conditions aux limites

$$\begin{aligned} V_n'(a) - h\, V_n(a) &= 0, \\ V_n'(b) + H\, V_n(b) &= 0, \end{aligned} \tag{213}$$

k, g et l étant des fonctions positives de x, h et H deux constantes positives.

L'existence des nombres positifs λ_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ et des fonctions correspondantes $V_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ à été établie, pour la première fois, par Sturm-Liouville en 1836 (Journal de Liouville, T. I).

Ils ont essayé aussi de résoudre le probléme du développement d'une fonction arbitraire en séries des fonctions $V_k(x)$ que nous appellerons dès à présent „fonctions de Sturm-Liouville".

Liouville a consacré à ce sujet trois Mémoires qui méritent une attention particulière.

Quoiqu'il n'ait pas réussi à résoudre le problème en toute rigueur, néanmoins il a imaginé une méthode remarquable, susceptible d'une généralisation essentielle, comme nous l'avons déjà remarqué au commencement de ce Mémoire (n^0 1).

Les recherches de Liouville ont été développées ensuite par M. A. Kneser [1]), qui a résolu le problème, dont il s'agit, moyennant la méthode de Du-Bois-Raymond et Dini dont nous avons exposé les principes au n^0 19.

Remarquons, en profitant de l'occasion, que la méthode de M. Kneser, fondée en partie sur les recherches de Liouville, impose certaines restrictions sur les fonctions k, g et l, à savoir: elle exige que ces fonctions soient continues avec ses dérivées de quatre premiers ordres, mais, pourtant, elle résout le problème sous la seule supposition générale que la fonction développable $f(x)$ soit une fonction à variation bornée.

Je me suis occupé moi-même à ce problème et j'ai proposé, en 1896—97 [2]), une méthode tout à fait différente qui permet de résoudre le problème sous les suppositions moins générales par rapport à la fonction $f(x)$.

J'ai repris, l'année courante [3]), ce problème et j'ai montré que ma méthode s'applique toutes les fois que $f(x)$ sera une fonction continue admettant la dérivée du premier ordre qui n'est que bornée et intégrable.

Or, ma méthode conduit, d'un autre côté, au résultat plus général que celle de M. Kneser, car elle n'exige pas l'existence des dérivées de quatre premiers ordres des fonctions k, g et l et résout le problème sous la seule supposition que ces fonctions restent continues dans un certain intervalle.

Outre les recherches déjà méntionnées, je rappellerai encore les derniers travaux de Mrs Kneser et Schmidt [4]), où ils considèrent le problème à un nouveau point de vue en y appliquant la théorie des équations intégrales (Integralgleichungen) de Mrs S. Freedholm et D. Hilbert.

---

[1]) A. Kneser: „Untersuchung über die Darstellung willkürlicher Functionen in der mathematischen Physik". Mathemat. Annalen, Bd. 58.

Idem: „Beiträge zur Theorie der Sturm-Liouvilleschen Darstellung willkürlicher Functionen". Ibid. Bd. 60.

[2]) W. Stekloff: „Problème de refroidissement d'une barre hétérogène". Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, T. III, série 2.

[3]) Idem: „Sur un problème d'Analyse intimement lié avec le problème de refroidissement d'une barre hétérogène". Comptes Rendus, 8 avr., 1907.

[4]) A. Kneser: „Die Theorie der Integralgleichnungen und die Darstellung willkürlicher Functionen in der mathematischen Physik". Mathemat. Annalen, Bd. 63.

Schmidt: „Entwicklung willkürlicher Functionen nach Systemen vorgeschribener". Göttingen, 1905, et Mathemat. Annalen, Bd. 63.

Bien qu'on puisse maintenant considérer le problème en question comme résolu par diverses méthodes différentes, néanmoins je me permets de le traiter encore une fois comme l'un des exemples les plus importants de l'application de la méthode dont nous avons exposé les principes aux nos 32—39.

47. Formons tout d'abord l'expression asymptotique de la fonction $V_n(x)$ moyennant la transformation du n⁰ 2, qui ne présente qu'une généralisation de celle de Liouville, appliquée par cet illustre géomètre en 1837 à l'équation (212).

Nous pouvons donc emprunter les résultats déjà obtenus par Liouville dans son Mémoire: „Sur le développement des fonctions en séries dont divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre contenant un paramètre variable" (Journal de Liouville, T. II, p. 16 etc.), sans répéter le calcul.

Supposant que k, g et l admettent les dérivées de deux premiers ordres, posons

$$t = \int_a^x \sqrt{\frac{g}{k}}\, dx,$$

$$V_n(x) = z(t) . u_n(z),$$

où

$$z = \frac{1}{\sqrt[4]{gk}}.$$

L'équation (212) devient

$$u_n'' + \lambda_n^2 u_n = \mu u_n, \tag{214}$$

où

$$\mu = \frac{1}{z\sqrt{gk}}\left(lz\sqrt{\frac{k}{g}} - \frac{d\sqrt{gk}}{dt}\frac{dz}{dt} - \frac{d^2 z}{dt^2}\sqrt{gk}\right).$$

Les conditions (213) prendront la forme

$$\begin{aligned} &\frac{du_n}{dt} - h' u_n = 0 \qquad \text{pour } t = 0 \\ &\frac{du_n}{dt} + H' u_n = 0 \qquad \text{pour } t = T, \end{aligned} \tag{215}$$

h' et H' étant des constantes différentes de h et H, $t = 0$ et $t = T$ étant les valeurs de la variable t correspondant à $x = a$ et $x = b$.

L'équation (214) a précisément la forme de celle de (13) du n⁰ 2.

Supposant que

$$u_n(0) = 1,$$

ce qui est toujours possible, on tire de (17_1), moyennant la première des équations (215),

$$(216) \qquad u_n = \cos \lambda_n t + \frac{h}{\lambda_n} \sin \lambda_n t - \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \mu(\xi) \, u_n(\xi) \sin \lambda_n (\xi - t) \, d\xi ,$$

où nous avons écrit, pour simplifier l'écriture, h au lieu de h'.

C'est la formule déduite par Liouville dans son Mémoire, cité plus haut.

Quant aux nombres λ_n, caractéristiques pour les fonctions V_k, ils sont des racines positives d'une équation transcendente et se représentent sous la forme

$$(217) \qquad \lambda_n = \frac{n\pi}{T} + \frac{B_n}{n},$$

B_n étant des constantes dont le module reste toujours inférieur à un nombre fixe B.

La formule (216) montre que le module de u_n ne surpasse pas une certaine limite fixe A (comp. n⁰ 5).

Soit $f(x)$ une fonction arbitraire.

Posons, avec Liouville (voir aussi A. Kneser, Mathem. Ann. Bd. 58, s. 121),

$$\varphi(t) = f(x) \sqrt[4]{gk}.$$

La série

$$(218) \qquad \sum \frac{V_n(x) \int_a^b g f(x) V_n(x) \, dx}{\int_a^b g V_n^2(x) \, dx} = \sum A_n V_n(x)$$

devient

$$(219) \qquad \frac{1}{\sqrt[4]{gk}} \sum \frac{u_n \int_0^T u_n(\xi) \varphi(\xi) \, d\xi}{\int_0^T u_n^2(\xi) \, d\xi}.$$

Les fonctions $u_n(t)$ satisfont aux conditions

$$\int_0^T u_n(\xi) \, u_m(\xi) \, d\xi = 0 , \quad \text{si } n \gtrless m ,$$

c'est à dire elles forment un système orthogonal.

Remarquons enfin que la constante, définie par l'intégrale

$$\int_0^T u_n^2(\xi) \, d\xi ,$$

peut se représenter sous la forme

$$\int_0^T u_n^2(\xi)\,d\xi = \frac{T}{2} + \frac{K_n}{\lambda_n}, \tag{220}$$

où K_n sont des constantes dont le module ne surpasse pas un nombre fixe K.

Tous les résultats, que nous venons d'indiquer sans démonstration, le lecteur trouvera dans les Mémoires de Liouville, mentionnés plus haut (Voir aussi A. Kneser, Mathem. Annalen, Bd. 58).

48. Ecrivons l'équation (216) sous la forme

$$u_n = \cos\lambda_n t + \frac{\vartheta_n(t)}{\lambda_n}, \tag{221}$$

où, évidemment,

$$|\vartheta_n(t)| < A,$$

A désignant un nombre fixe.

Substituant cette expression dans (216) on obtient

$$u_n = \cos\lambda_n t + \frac{\psi(t)\sin\lambda_n t}{\lambda_n} + \frac{\vartheta_n^{(2)}(t)}{\lambda_n^2}, \tag{222}$$

où l'on a posé

$$\vartheta_n^{(2)}(t) = -\frac{\lambda_n}{2}\int_0^t \mu(\xi)\sin\lambda_n(2\xi - t)\,d\xi - \int_0^t \mu(\xi)\sin\lambda_n(\xi - t)\,\vartheta_n(\xi)\,d\xi,$$

$$\psi(t) = h + \frac{1}{2}\int_0^t \mu(\xi)\,d\xi. \tag{223}$$

Supposons que k, l *et* g *ainsi que ses dérivées de deux premiers ordres soient les fonctions à variation bornée entre* 0 *et* T.

Ces conditions étant remplies, on trouve

$$|\vartheta_n^{(2)}(t)| < Q, \tag{224}$$

Q étant un nombre fixe.

Il est évident ensuite que $\vartheta_n^{(2)}(t)$ admet la dérivée du premier ordre qui satisfait à la condition

$$|(\vartheta_n^{(2)}(t))'| < \lambda_n Q_1, \tag{225}$$

Q_1 désignant un nombre fixe.

La formule (221) représente l'expression asymptotique de u_n correspondant à l'approximation du premier ordre, celle de (222)—l'expression asymptotique correspondant à l'approximation du second ordre.

49. Posons maintenant, comme au n⁰ 35,

$$f(x) = \sum_0^n A_n V_n(x) + R_n,$$

d'où, en vertu de (218) et (219),

$$\varphi(t) = \sum_0^n \frac{u_n \int_0^T u_n(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi}{\int_0^T u_n^2(\xi)\,d\xi} + R_n \sqrt[4]{gk}\,.$$

J'ai démontré dans mon Mémoire: „Sur certaines égalités générales, communes etc“ que le théorème du n⁰ 32 s'applique aux fonctions fondamentales $V_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

On a donc, pour les valeurs de n assez grandes,

$$\int_a^b g R_n^2\,dx < \varepsilon\,,$$

ε étant un nombre positif donné à l'avance.

Cette inégalité étant établie, on trouve, comme au n⁰ 35,

$$\frac{1}{(2\eta)^2} \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} dt \int_{t-\eta}^{t+\eta} \varphi(t)\,dt = \sum_0^\infty \frac{A_n}{(2\eta)^2} \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} dt \int_{t-\eta}^{t+\eta} u_n(t)\,dt\,, \tag{226}$$

où l'on a posé maintenant

$$A_n = \frac{\int_0^T \varphi(\xi)\,u_n(\xi)\,d\xi}{\int_0^T u_n^2(\xi)\,d\xi}\,.$$

50. Cela posé, substituons (221) dans la série

$$\sum A_n u_n(x)\,. \tag{227}$$

Le terme général $A_n u_n(x)$ prendra, en vertu de (220), la forme

$$A_n u_n(x) = \left(\cos\lambda_n t + \frac{\vartheta_n}{\lambda_n}\right) \int_0^T \varphi(\xi) \left(\cos\lambda_n \xi + \frac{\vartheta_n}{\lambda_n}\right) d\xi \cdot \frac{1}{\frac{T}{2} + \frac{K_n}{\lambda_n}}\,.$$

Supposons que *$f(x)$ et, par suite, $\varphi(t)$ soit une fonction à variation bornée entre 0 et T.*

Cette condition étant remplie, on trouve

$$A_n u_n(x) = \frac{2}{T} \cos\lambda_n t \int_0^T \varphi(\xi) \cos\lambda_n \xi\,d\xi + \frac{\alpha_n}{\lambda_n^2}\,,$$

α_n étant une fonction de t dont le module ne surpasse pas une certaine limite fixe [1]).

On en conclut que *la série (227) converge sous les mêmes conditions que la série approchée*

$$\frac{2}{T}\sum_0^\infty \cos\lambda_n t \int_0^T \varphi(\xi)\cos\lambda_n \xi \, d\xi .$$

Or, cette série, en vertu de (217), converge en même temps que la série trigonométrique

$$\frac{2}{T}\sum_0^\infty \cos\frac{n\pi}{T} t \int_0^T \varphi(\xi)\cos\frac{n\pi}{T} \xi \, d\xi ,$$

qui converge uniformément, pourvu que $\varphi(\xi)$ soit une fonction à variation bornée.

Donc *la série (227) et, par suite, la série (218) converge toutes les fois que la fonction $f(x)$ sera une fonction à variation bornée entre a et b.*

C'est un théorème, analogue à celui de M. Kneser, établi dans son Mémoire, cité plus haut (Mathem. Annal. Bd. 60).

51. Il ne nous reste qu'à déterminer la somme de la série (227).

L'équation

$$A_n = \int_0^T \varphi(\xi)\left(\cos\lambda_n \xi + \frac{\vartheta_n(\xi)}{\lambda_n}\right) d\xi \frac{1}{\frac{T}{2}+\frac{K_n}{\lambda_n}}$$

montre que

$$|A_n| < \frac{A}{\lambda_n} \tag{228}$$

pour les valeurs de n, plus grandes qu'un entier fixe ν.

Substituant maintenant dans la série (227) au lieu de u_n son expression asymptotique (222), on trouve

$$\sum A_n u_n = \sum A_n \cos\lambda_n t + \sum \frac{A_n}{\lambda_n}\psi(t)\sin\lambda_n t + \sum \frac{A_n}{\lambda_n^2}\vartheta_n^{(2)}(t) .$$

Il est évident que chacune de deux dernières séries du second membre de cette égalité converge absolument, car, en vertu de (224) et (228),

[1]) Voir A. Kneser, Mathemat. Annalen, Bd. 58, p. 125.

$$\left| \frac{A_n}{\lambda_n} \psi(t) \sin \lambda_n t \right| < \frac{AQ}{\lambda_n^2},$$

$$\left| \frac{A_n}{\lambda_n^2} \vartheta_n^{(2)}(t) \right| < \frac{AQ}{\lambda_n^3},$$

Q désignant un nombre fixe.

Considérons la différence

$$D = \sum \frac{A_n}{2\eta\, \lambda_n^2} \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} \vartheta_n^{(2)}(t)\, dt - \sum \frac{A_n}{\lambda_n^2} \vartheta_n^{(2)}(t_0).$$

En remarquant que

$$\vartheta_n^{(2)}(t) - \vartheta_n^{(2)}(t_0) = (t - t_0)\,[\vartheta_n^{(2)}(t + \theta\, t_0)]'$$

on trouve, eu égard à (225),

$$| \vartheta_n^{(2)}(t) - \vartheta_n^{(2)}(t_0) | < 2\eta\, \lambda_n\, Q_1$$

pour toutes les valeurs de t, comprises entre $t_0 - \eta$ et $t_0 + \eta$.

On a donc, en tenant compte de (228),

$$| D | < 2\eta\, AQ_1 \sum \frac{1}{\lambda_n^2}.$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{\eta=0} D = 0,$$

car la série

$$\sum \frac{1}{\lambda_n^2}$$

converge.

On voit donc que

$$\lim_{\eta=0} \sum \frac{A_n}{2\eta\, \lambda_n^2} \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} \vartheta_n^{(2)}(t)\, dt = \sum \frac{A_n}{\lambda_n^2} \vartheta_n^{(2)}(t_0).$$

On en conclut ensuite que

$$\lim_{\eta=0} \sum \frac{A_n}{(2\eta)^2\, \lambda_n^2} \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} dt \int_{t-\eta}^{t+\eta} \vartheta_n^{(2)}(t)\, dt = \sum \frac{A_n}{\lambda_n^2} \vartheta_n^{(2)}(t_0). \tag{229}$$

52. Supposons maintenant que *les fonctions k, l et g admettent les dérivées de trois premiers ordres, continues dans l'intervalle (a, b).*

La fonction $\psi(t)$ admettra les dérivées de deux premiers ordres, continues entre 0 et T [voir l'égalité (223)].

L'intégration par parties donne

$$\frac{1}{2\eta}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}\psi(t)\sin\lambda_n t\,dt = \frac{1}{2\lambda_n\eta}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}\psi'\cos\lambda_n t\,dt - \frac{\psi(t)\cos\lambda_n t}{2\lambda_n\eta}\Bigg|_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}.$$

On peut donc écrire

$$(230)\qquad \sum\frac{A_n}{2\eta\lambda_n}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}\psi(t)\sin\lambda_n t\,dt = \sum\frac{A_n}{2\eta\lambda_n^2}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}\psi'\cos\lambda_n t\,dt -$$

$$-\sum\frac{A_n}{2\eta\lambda_n^2}\psi(t)\cos\lambda_n t\Bigg|_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}.$$

Considérons la différence

$$D_1 = \sum\frac{A_n}{2\eta\lambda_n^2}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}\psi'\cos\lambda_n t\,dt - \sum\frac{A_n}{\lambda_n^2}\psi'(t_0)\cos\lambda_n t_0.$$

L'égalité

$$\psi'\cos\lambda_n t - \psi'(t_0)\cos\lambda_n t_0 = (t-t_0)\frac{d}{dt}(\psi'\cos\lambda_n t)\Bigg|_{t=t+\theta t_0}$$

montre que, pour toutes les valeurs de t, comprises entre $t_0-\eta$ et $t_0+\eta$,

$$|\psi'\cos\lambda_n t - \psi'(t_0)\cos\lambda_n t_0| < 2\eta\lambda_n K,$$

K désignant un nombre fixe.

Il s'ensuit que

$$|D_1| < 2\eta AK\sum\frac{1}{\lambda_n^2},$$

c'est à dire

$$(231)\qquad \lim_{\eta=0}\sum\frac{A_n}{2\eta\lambda_n^2}\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}\psi'\cos\lambda_n t\,dt = \sum\frac{A_n}{\lambda_n^2}\psi'(t_0)\cos\lambda_n t_0.$$

53. Cherchons la limite, vers laquelle tend la somme

$$\sum\frac{A_n}{2\eta\lambda_n^2}\psi(t)\cos\lambda_n t\Bigg|_{t_0-\eta}^{t_0+\eta},$$

lorsque η tend vers zéro.

Il est aisé de s'assurer que

$$\frac{1}{2\eta}\psi(t)\cos\lambda_n t\Bigg|_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} = -\psi(t_0)\sin\lambda_n t_0\frac{\sin\lambda_n\eta}{\eta} + \psi'(t_0)\cos\lambda_n t_0 . \cos\lambda_n\eta +$$

$$+\frac{\eta}{4}\Big(\psi''(t_0+\Theta\eta)\cos\lambda_n(t_0+\eta) - \psi''(t_0-\Theta_1\eta)\cos\lambda_n(t_0-\eta)\Big).$$

Θ et Θ_1 désignant deux constantes positives, plus petites que l'unité.

On a, en tenant compte de (228) et de l'hypothèse, faite sur ψ,

$$|S| = \left|\sum\frac{A_n}{\lambda_n^2}\frac{\eta}{4}\Big(\psi''(t_0+\Theta\eta)\cos\lambda_n(t_0+\eta) - \psi''(t_0-\Theta_1\eta)\cos\lambda_n(t_0-\eta)\Big)\right| <$$

$$< \eta MA\sum\frac{1}{\lambda_n^3},$$

d'où l'on conclut que

(232) $$\lim_{\eta=0} S = 0.$$

Formons la différence

$$D_2 = \sum\frac{A_n}{\lambda_n^2}\psi'(t_0)\cos\lambda_n t_0 . \cos\lambda_n\eta - \sum\frac{A_n}{\lambda_n^2}\psi'(t_0)\cos\lambda_n t_0 .$$

En remarquant que

$$\left|1-\cos\lambda_n\eta\right| = \left|2\sin^2\frac{\lambda_n\eta}{2}\right| < \lambda_n\eta$$

on obtient l'inégalité suivante

$$|D_2| < \eta A\,|\psi'(t_0)|\sum\frac{1}{\lambda_n^2},$$

c'est à dire

(233) $$\lim_{\eta=0}\sum\frac{A_n}{\lambda_n^2}\psi'(t_0)\cos\lambda_n t_0 . \cos\lambda_n\eta = \sum\frac{A_n}{\lambda_n^2}\psi'(t_0)\cos\lambda_n t_0 .$$

On a donc, en vertu de (232) et (233),

$$\lim_{\eta=0}\sum\frac{A_n}{2\eta\lambda_n^2}\psi(t)\cos\lambda_n t\Bigg|_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} = -\lim_{\eta=0}\sum\frac{A_n}{\lambda_n}\psi(t_0)\sin\lambda_n t_0\frac{\sin\lambda_n\eta}{\lambda_n\eta} +$$

$$+\sum\frac{A_n}{\lambda_n^2}\psi'(t_0)\cos\lambda_n t_0$$

et, puis, en vertu de (230) et (231),

$$\lim_{\eta=0}\sum\frac{A_n}{2\eta\,\lambda_n}\int\limits_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}\psi(t)\sin\lambda_n t\,dt=\lim_{\eta=0}\sum\frac{A_n}{\lambda_n}\psi(t_0)\sin\lambda_n t_0\,\frac{\sin\lambda_n\eta}{\lambda_n\eta}.$$

Cette égalité étant établie, on s'assure ensuite que

$$\lim_{\eta=0}\sum\frac{A_n}{(2\eta)^2\lambda_n}\int\limits_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}dt\int\limits_{t-\eta}^{t+\eta}\psi(t)\sin\lambda_n t\,dt=\lim_{\eta=0}\sum\frac{A_n}{\lambda_n}\psi(t_0)\sin\lambda_n t_0\left(\frac{\sin\lambda_n\eta}{\lambda_n\eta}\right)^2.$$

54. Cette égalité et celle de (229), combinées avec l'égalité évidente

$$\lim_{\eta=0}\sum\frac{A_n}{(2\eta)^2}\int\limits_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}dt\int\limits_{t-\eta}^{t+\eta}\cos\lambda_n t\,dt=\lim_{\eta=0}\sum A_n\cos\lambda_n t_0\left(\frac{\sin\lambda_n\eta}{\lambda_n\eta}\right)^2,$$

conduisent au résultat suivant

$$\begin{aligned}(234)\quad &\lim_{\eta=0}\sum\frac{A_n}{(2\eta)^2}\int\limits_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}dt\int\limits_{t-\eta}^{t+\eta}u_n(t)\,dt=\lim_{\eta=0}\sum A_n\cos\lambda_n t_0\left(\frac{\sin\lambda_n\eta}{\lambda_n\eta}\right)^2+\\ &+\lim_{\eta=0}\sum\frac{A_n}{\lambda_n}\psi(t_0)\sin\lambda_n t_0\left(\frac{\sin\lambda_n\eta}{\lambda_n\eta}\right)^2+\sum\frac{A_n}{\lambda_n^2}\vartheta_n^{(2)}(t).\end{aligned}$$

Il est aisé de voir, en se rappelant l'expression (217) de λ_n, que la méthode du n^0 36 s'applique au cas considéré.

On a donc

$$\lim_{\eta=0}\sum A_n\cos\lambda_n t_0\left(\frac{\sin\lambda_n\eta}{\lambda_n\eta}\right)^2=\sum A_n\cos\lambda_n t_0,$$

$$\lim_{\eta=0}\sum\frac{A_n}{\lambda_n}\psi(t_0)\sin\lambda_n t_0\left(\frac{\sin\lambda_n\eta}{\lambda_n\eta}\right)^2=\sum\frac{A_n}{\lambda_n}\psi(t_0)\sin\lambda_n t_0,$$

car chacune des séries de secondes membres de ces égalités converge, pourvu que $\varphi(t)$ soit une fonction à variation bornée, ce que nous avons supposé.

Ces égalités et celles de (234) et (226) conduisent à la suivante

$$\lim_{\eta=0}\frac{1}{(2\eta)^2}\int\limits_{t_0-\eta}^{t_0+\eta}dt\int\limits_{t-\eta}^{t+\eta}\varphi(\overline{t})\,dt=\frac{\varphi(t_0+0)+\varphi(t_0-0)}{2}=\sum A_n u_n(t),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}=\sum_0^{\infty} V_n(x_0)\frac{\int\limits_a^b g f(x)\, V_n(x)\, dx}{\int\limits_a^b g\, V_n^2(x)\, dx}.$$

Cette égalité a lieu pour tout point x_0, intérieur à l'intervalle (a, b).

Le théorème suivant est donc démontré:

Soit $V_n(x)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ une suite de fonctions de Sturm-Liouville, définies par les équations

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dV_n}{dx}\right)+(g\lambda_n^2-l)\, V_n=0, \qquad a<x<b$$

$$V_n'(a)-h\, V_n(a)=0, \qquad V_n'(b)+H\, V_n(b)=0,$$

où k, g et l sont des fonctions positives, dont les deux premières ne s'annulent pas dans l'intervalle (a, b), continues et à variation bornée admettant les dérivées de trois premiers ordres jouissant les mêmes propriétés, h et H sont des constantes positives, λ_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ désignent les constantes positives, caractéristiques pour les fonctions $V_n(x)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$.

La série

$$\sum_0^{\infty} V_n(x)\frac{\int\limits_a^b g(x)\, f(x)\, V_n(x)\, dx}{\int\limits_a^b g(x)\, V_n^2(x)\, dx}$$

converge uniformément dans l'intervalle (a, b) et la somme de cette série est égale à

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

en tout point x de l'intervalle considéré.

55. Je terminerai mes recherches par les remarques suivantes:

La méthode indiquée plus haut s'applique bien à plusieurs autres suites de fonctions qui peuvent servir de développement à une fonction arbitraire; signalons, pour exemple, les fonctions de Lamé, le cas général des polynomes de Jacobi satisfaisant à l'équation

(235) $(1-x^2)u_n''+[\alpha_1-\beta_1-(\alpha_1+\beta_1)x]u_n'+n(n-1+\alpha_1+\beta_1)u_n=0,$

α_1 et β_1 étant des constantes positives et, enfin, les polynomes de Tchébischeff, définis par l'équation

(236) $$x u_n''+(\alpha-\beta x)\, u_n'+n u_n=0.$$

C'est seulement pour simplifier le caclul que nous nous sommes bornés aux cas particuliers en supposant que

$$\alpha_1 = \beta_1 = \alpha + \frac{1}{2} \tag{237}$$

dans le premier et

$$\beta = \frac{1}{2} \tag{238}$$

dans le second cas.

Or, il n'est pas difficile de comprendre que les raisonnements précédents, convenablement généralisés, peuvent être étendus aussi aux cas généraux, où α et β ont des valeurs positives quelconques.

Les théorèmes de nos 40 et 43, établis dans les suppositions particulières (237) et (238), *s'appliquent bien au cas général des polynomes u_n, définis par les équations (235) et (236).*

Remarquons enfin qu'on peut considérer tous les résultats, obtenus dans ce Mémoire comme des exemples nouveaux de l'application du théorème général, énoncé au n⁰ 32 et démontré en 1904 dans mon Mémoire: „Sur certaines égalités générales, communes aux plusieurs suites de fonctions souvent employées dans l'Analyse".

On voit, de ce qui précède, que *ce théorème permet de résoudre plusieurs problèmes sur le développement des fonctions arbitraires en séries avec le même degré de généralité que dans le cas classique des séries trigonométriques.*

Errata.

Pages	*Lignes*	*Au lieu de:*	*lisez:*
1	6 en remontant	u''_u	u''_n
„	2 en remontant	verifiant	vérifiant
4	11	mèthode	méthode
11	12	une moyenne	un moyen
19	11	I_u	I_n
	3 en remontant	n⁰ 9	n⁰ 10
26	10	18.	18_1.
27	7 en remontant	$\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)$	$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+\alpha\right)$
30	11 en remontant	19.	19_1.
32	2	$\frac{t(t^2+80)}{5.16^2}$	$\frac{t(t^4+80)}{5.16^2}$
„	8	$\sqrt{\xi(\xi^2+80)}$	$\sqrt{\xi(\xi^4+80)}$
„	12	(80)	(90)
33	17	$\int_v^b f(\alpha)\, u_k^2(\alpha)\, d\alpha$	$\int_a^b f(\alpha)\, u_k^2(\alpha)\, d\alpha$
41	6	$e^{-\frac{t^2}{4}}$	$e^{-\frac{t^2}{8}}$
„	9	$e^{-\frac{t^2}{4}}$	$e^{-\frac{t^2}{8}}$
42	7	$e^{-\frac{t^2}{4}}$	$e^{-\frac{t^2}{8}}$
43	9 en remontant	nᵒˢ 11—18.	nᵒˢ 12—18.
50	16 en remontant	positif quoique	positif, quoique
55	12 en remontant	140)	(140)
61	10 en remontant	ε_n	ε_k
„	„ „	α_n	α_k
64	9	$\alpha_n w_n(x)$	$\alpha_k w_k(x)$
„	11	$\beta_n^2 \int_\alpha^\beta \psi(t) f(\theta_1(t)) \cos(\lambda_n t+\tau)\, dt$	$\beta_k^2 \int_\alpha^\beta \psi(t) f(\theta_1(t)) \cos(\lambda_k t+\tau)\, dt$
„	14	α_n	α_k
„	17	$w'_n(x)$	$w'_k(x)$
„	20	α_n	α_k
66	4 en remontant	$\sum_0^\nu A_k V_k =$	$\sum_0^\nu A_k V_k +$