О преобразованіи ультраэллиптическихъ интеграловъ перваго класса формы

$$\int \frac{\mathbf{Cy} + \mathbf{D}}{\sqrt{\mathbf{R(y)}}} \mathbf{dy} = \int \frac{\mathbf{Ax} + \mathbf{B}}{\sqrt{\mathbf{R(x)}}} \mathbf{dx}.$$

Д. Мордухай-Болтовского.

§ 1. Задача объ умноженіи эллиптическихъ интеграловъ состоитъ въ разысканіи условій, при которыхъ возможно удовлетворить уравненію

$$\int \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} = \triangle \int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}, \tag{1}$$

гдѣ $\triangle$ заданное постоянное число, $R(x)$ полиномъ 4-й степени, алгебраической функціей y отъ x и въ томъ случаѣ, когда условія эти удовлетворены, въ опредѣленіи этой функціи y.

Называя уравненіе (1) въ предположеніи, что y алгебраическая функція отъ x, *приведеніемъ*, а уравненіе, связующее y съ x *подстановкой*, мы можемъ формулировать эту задачу слѣдующимъ образомъ: *Найти уравненія, при которыхъ возможно приведеніе* (1) *и въ случаѣ, если оно возможно, найти отвѣчающую ему подстановку.*

Естественнымъ обобщеніемъ этой задачи на случай интеграловъ ультраэллиптическихъ перваго класса будетъ задача объ условіяхъ приведенія:

$$\sum_{i=1}^{i=2} \int \frac{Cy_i + D}{\sqrt{R(y_i)}} dy_i = \int \frac{Ax + B}{\sqrt{R(x)}} dx, \tag{2}$$

гдѣ A, B, C, D вполнѣ заданныя или связанныя заданными уравненіями постоянныя, $R(x)$ полиномъ 6-й степени, и объ опредѣленіи въ въ томъ случаѣ, когда оно возможно, y_1 и y_2 въ алгебраическихъ функціяхъ отъ x.

Другой болѣе спеціальной формой обобщенія будетъ задача о *разысканіи условій, при которыхъ возможно приведеніе*:

$$\int \frac{Cy+D}{\sqrt{R(y)}}\,dy = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{R(x)}}\,dx \tag{3}$$

и въ томъ случаѣ, когда оно возможно, опредѣленіи отвѣчающей ему подстановки.

Вторая форма получается изъ первой, если положить $y_2 = \text{const}$ или $y_1 = y_2$.

Можно найти безконечное множество приведеній типа (3).

Въ самомъ дѣлѣ, если мы возьмемъ ультраэллиптическій интегралъ

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{R(x)}}\,dx,$$

приводящійся къ эллиптическимъ

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{Q(\xi)}},$$

то приведеніе

$$\int \frac{d\eta}{\sqrt{Q(\eta)}} = \triangle \int \frac{d\xi}{\sqrt{Q(\xi)}},$$

гдѣ $\triangle$ какое угодно раціональное число, дастъ:

$$\int \frac{Ay+B}{\sqrt{R(y)}}\,dy = \triangle \int \frac{Ax+B}{\sqrt{R(x)}}\,dx. \tag{4}$$

Интегралъ [1])

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^3+\alpha x^2+\beta)(x^3+px+q)}}$$

при

$$4p\alpha + 12q = 3\beta \;(*)$$

приводится къ эллиптическому интегралу. Поэтому существуетъ y, алгебраическая функція отъ x, удовлетворяющая уравненію

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(y^3+\alpha y^2+\beta)(y^3+px+q)}} = \triangle \int \frac{dx}{\sqrt{(x^3+\alpha x^2+\beta)(x^2+px+q)}},$$

гдѣ $\triangle$ раціональное число, p, q, α, β связаны соотношеніемъ (*).

---

[1]) *Goursat.* Sur la reduction des intégrales hyperelliptiques. Bulletin de Société Mathématique de France, t. XIII, p. 155.

Можно найти приведенія типа (4), въ которыхъ $\triangle$ число ирраціональное мнимое. Полагая въ приведеніи:

$$\int \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^3}} = \alpha \int \frac{d\xi}{\sqrt{1+\xi^3}} \quad \eta = \alpha\xi$$

α первообразный корень двучленнаго уравненія

$$\alpha^3 = 1$$

и

$$\xi = 1 + x^2, \quad \eta = 1 + y^2,$$

имѣемъ:

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{y^6 + 3y^4 + 3y^2 + 2}} = \alpha \int \frac{xdx}{\sqrt{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 2}}.$$

§ 2. Теперь перейдемъ къ изслѣдованію приведенія (3), но только въ предположеніи, что

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{R(x)}} \alpha x$$

не приводится къ эллиптическому интегралу. Мы докажемъ, что *при этомъ предположеніи должны имѣть*

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta},$$

гдѣ α, β. γ, δ *постоянныя.*

Эту теорему мы выведемъ, какъ слѣдствіе болѣе общей теоремы, относящейся къ *одночленнымъ приведеніямъ Абелевыхъ интеграловъ къ Абелевымъ интеграламъ*

$$\int F(x, y)dx = \int \Phi(\xi, \eta)d\xi \tag{6}$$

Только въ томъ случаѣ, когда интегралъ $\int \Phi(\xi, \eta)d\xi$ Абелевъ интегралъ перваго рода и перваго порядка (въ частномъ случаѣ эллиптическій) можно высказать теорему, что *если приведеніе* (6) *возможно, то въ немъ всегда можно предполагать*:

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha(x, y) \\ \eta &= \beta(x, y) \end{aligned} \tag{7}$$

гдѣ $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ *раціональныя функціи отъ* (x, y) [1]).

---

[1]) *Appell* et *Goursat.* Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales. 1895. p. 369. *Koenigsberger.* Ueber die Reduction Abelscher Integrale auf niedere Integralformen speciell auf elliptische Integrale. Journ. de Crelle 89. 1880, s. 89 и другія его сочиненія.

Называя систему уравненій (7) *подстановкой, отвѣчающей приведенію* (6), мы можемъ сказать, что *при приведеніи Абелева интеграла къ эллиптическому, перваго рода, мы можемъ всегда предполагать подстановку раціональной.* Когда $\int\Phi(\xi, \eta)d\xi$ Абелевъ интегралъ высшаго порядка, то подстановка не должна быть обязательно раціональной. Такъ мы имѣемъ, напримѣръ,

$$\int\frac{y^2dy}{\sqrt{(1-y^6)(1-k^2y^6)}}=\frac{2}{3}\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^4)(1-k^2x^4)}},$$

если положить $y^3=x^2$, $y=\sqrt[3]{x^2}$.

Замѣтимъ, что въ этомъ примѣрѣ интегралы

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{(1-x^4)(1-k^2x^4)}}$$

подстановкой $z=x^2$,

$$\int\frac{y^2dy}{\sqrt{(1-y^6)(1-k^2y^6)}}$$

$z=y^3$ подстановкой приводятся къ эллиптическому интегралу

$$\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

Это свойство не является случайностью, но представляетъ слѣдствіе слѣдующей общей теоремы:

Приведеніе (6) *или возможно при помощи раціональной подстановки* (7) *или же предполагаетъ приведеніе:*

$$\int\Phi(\xi, \eta)d\xi=\int\Psi(\zeta, \omega)d\zeta \tag{8}$$

интеграла $\int\Phi(\xi, \eta)d\xi$ *къ интегралу порядка при помощи раціональнаго преобразованія* [1]).

Если $\int\frac{Ax+B}{\sqrt{R(x)}}dx$ не приводится къ эллиптическому интегралу, то должны по этой теоремѣ имѣть:

$$y=\alpha(x, \sqrt{R(x)})$$
$$\sqrt{R(y)}=\beta(x, \sqrt{R(x)})$$

откуда имѣемъ:

$$\int\frac{Ey+F}{\sqrt{R(y)}}dy=\int\Phi(x, \sqrt{R(x)})\,dx$$

---

[1]) Доказана въ работѣ: „О приведеніи Абелевыхъ интеграловъ къ нисшимъ трансцендентнымъ“. Ч. 2, кн. III, стр. 276. Извѣстія Варшав. Политехническаго Института за 1905 г.

$\int \Phi(x, \sqrt{R(x)}dx$, какъ интегралъ перваго рода равенъ

$$\int \frac{Gx+H}{\sqrt{R(x)}}dx.$$

Приведенiе (3) и приведенiе:

$$\int \frac{Ey+F}{\sqrt{R(y)}}dy = \int \frac{Gx+H}{\sqrt{R(x)}}dx \tag{9}$$

даютъ

$$\left.\begin{aligned} \int \frac{ydy}{\sqrt{R(y)}} &= \int \frac{\alpha x+\beta}{\sqrt{R(x)}}dx \\ \int \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} &= \int \frac{\gamma x+\delta}{\sqrt{R(x)}}dx \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

откуда получаемъ:

$$y = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}. \tag{11}$$

Кромѣ этого будемъ имѣть:

$$(\gamma x+\delta)^3 \sqrt{R(y)} = (\alpha\delta - \beta\gamma)\sqrt{R(x)}$$

откуда слѣдуетъ, что

$$\frac{\alpha a_i+\beta}{\gamma a_i+\beta} = a_k, \tag{12}$$

если черезъ a_i и a_k обозначить корни полинома $R(x)$. Обратно подстановка (5) при условiи, что корни $R(x)$ связаны соотношенiями (12) приводитъ

$$\int \frac{Cy+D}{\sqrt{R(y)}}dy \text{ къ } \int \frac{Ax+B}{\sqrt{R(x)}}dx$$

Располагая попарно (a_i, a_k), получаемыя преобразованiемъ (12) другъ изъ друга, мы будемъ имѣть возможныя комбинацiи, опредѣляемыя слѣдующими 8 таблицами

(6)	
a_1	a_2
a_2	a_3
a_3	a_4
a_4	a_5
a_5	a_6
a_6	a_1

(5.1)		(4.2)		(3.3)	
a_1	a_2	a_1	a_2	a_1	a_2
a_2	a_3	a_2	a_3	a_2	a_3
a_3	a_4	a_3	a_4	a_3	a_1
a_4	a_5	a_4	a_1	a_4	a_5
a_5	a_1	a_5	a_6	a_5	a_6
a_6	a_6	a_6	a_5	a_6	a_4

(4.1.1)		(3.2.1)		(2.2.2)	
a_1	a_2	a_1	a_2	a_1	a_2
a_2	a_3	a_2	a_3	a_2	a_1
a_3	a_4	a_3	a_1	a_3	a_4
a_4	a_1	a_4	a_5	a_4	a_3
a_5	a_5	a_5	a_4	a_5	a_6
a_6	a_6	a_6	a_6	a_6	a_5

(2.2.1.1)	
a_1	a_2
a_2	a_1
a_3	a_4
a_4	a_3
a_5	a_5
a_6	a_6

При составленіи этихъ таблицъ слѣдуетъ имѣть въ виду, что не можетъ быть соотвѣтствій

$$\left| \begin{array}{cc} a_i & a_i \\ a_{i+1} & a_{i+1} \\ \cdots & \cdots \\ a_{i+k} & a_{i+k} \end{array} \right|$$

гдѣ $k > 1$, ибо тогда, такъ какъ уравненіе:

$$\frac{\alpha a_i + \beta}{\gamma a_i + \delta} = a_i$$

имѣетъ только два корня, получили бы $a_i = a_j$ и интегралъ

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{R(x)}} dx$$

не былъ бы интеграломъ перваго порядка.

Преобразованіемъ

$$x = \frac{a\xi + b}{c\xi + d}$$
$$y = \frac{a\eta + b}{c\eta + d} \tag{13}$$

мы можемъ привести приведенія (10) и (11) къ слѣдующимъ:

$$\int \frac{d\eta}{\sqrt{\Theta(\eta)}} = \int \frac{\alpha\xi + \beta}{\sqrt{\Theta(\xi)}}\, d\xi$$
$$\int \frac{\eta d\eta}{\sqrt{\Theta(\eta)}} = \int \frac{\gamma\xi + \delta}{\sqrt{\Theta(\xi)}}\, d\xi \tag{14}$$

гдѣ $\Theta(\xi) = \xi(1-\xi)(1-\varkappa^2\xi)(1-\lambda^2\xi)(1-\mu^2\xi)$ причемъ *таблицу (6)* замѣнить слѣдующей

0	∞
∞	1
1	a
a	b
b	c
c	0

$$a = \frac{1}{\varkappa^2},\ b = \frac{1}{\lambda^2},\ c = \frac{1}{\mu^2},$$

что даетъ слѣдующія уравненія:

$$\frac{\beta}{\delta} = \infty,\ \frac{\alpha}{\gamma} = 1,\ \frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta} = \frac{1}{\varkappa^2},\ \frac{\alpha + \beta\varkappa^2}{\gamma + \delta\varkappa^2} = \frac{1}{\lambda^2},\ \frac{\alpha + \beta\lambda^2}{\gamma + \delta\lambda^2} = \frac{1}{\mu^2},\ \frac{\alpha + \beta\mu^2}{\gamma + \delta\mu^2} = 0,$$

откуда получаемъ *для* $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 *вполнѣ опредѣленныя значенія*

$$\chi^2 = \frac{3}{2},\ \lambda^2 = 2,\ \mu^2 = 3.$$

$$\eta = \frac{3\xi - 1}{3\xi}$$

$\varkappa^2$, λ^2, μ^2 *связаны соотношеніемъ*:

$$\varkappa^2\lambda^2 = \mu^2. \tag{15}$$

Согласно Якоби [1]) въ этомъ случаѣ *интегралъ*

$$J = \int \frac{\alpha\xi + \beta}{\sqrt{\Theta(\xi)}}\, d\xi$$

приводится къ суммѣ двухъ эллиптическихъ интеграловъ.

[1]) *Jacobi.* Journal de Crelle, t. 8. Упомянутая выше статья Гурса стр. 133.

Въ самомъ дѣлѣ

$$J = pJ' + qJ'', \tag{16}$$

гдѣ

$$p = \frac{\beta\mu + \alpha}{2\mu}, \quad q = \frac{\beta\mu - \alpha}{2\mu}$$

$$J' = \int \frac{(1 + \mu\xi)d\xi}{\sqrt{\xi(1-\xi)(1-\varkappa^2\xi)(1-\lambda^2\xi)(1-\mu^2\xi)}}$$

$$J'' = \int \frac{(1 - \mu\xi)d\xi}{\sqrt{\xi(1-\xi)(1-\varkappa^2\xi)(1-\lambda^2\xi)(1-\mu^2\xi)}}.$$

Выраженіе для J' преобразовываемъ слѣдующимъ образомъ:

$$J' = \int \frac{(1-\mu\xi)(1+\mu\xi)d\xi}{\sqrt{(1-2\mu\xi+\mu^2\xi^2)[1-(\mu^2+1)\xi+\mu^2\xi^2][1-(\varkappa^2+\lambda^2)\xi+\mu^2\xi^2]\xi}} =$$

$$= \int \frac{\frac{1-\mu^2\xi^2}{\xi^2}}{\sqrt{\left(\mu^2\xi + \frac{1}{\xi} - 2\mu\right)\left[\mu^2\xi + \frac{1}{\xi} - (\mu^2+1)\right]\left[\mu^2\xi + \frac{1}{\xi} - (\varkappa^2+\lambda^2)\right]}} d\xi.$$

Подстановкой

$$\zeta = \frac{1 + \mu^2\xi^2}{2\mu\xi}$$

интегралъ J' приводится къ эллиптическому интегралу

$$J' = -\frac{1}{\sqrt{2\mu}} \int \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta-1)(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)}},$$

гдѣ

$$\alpha = \frac{\mu^2+1}{2\mu}$$

$$\beta = \frac{\varkappa^2+\lambda^2}{2\mu}.$$

Такимъ же образомъ интегралъ J'' приводится къ эллиптическому интегралу:

$$\int \frac{\alpha\xi+\beta}{\sqrt{\Theta(\xi)}} d\xi = p' \int \frac{d\zeta}{\sqrt{H_1(\zeta)}} + q' \int \frac{d\zeta}{\sqrt{H_2(\zeta)}},$$

гдѣ

$$p' = -\frac{p}{\sqrt{2\mu}}, \quad q' = -\frac{q}{\sqrt{2\mu}}$$

постоянныя

$$H_1(\zeta) = (\zeta - 1)(\zeta - \alpha)(\zeta - \beta)$$

$$H_2(\zeta) = (\zeta + 1)(\zeta - \alpha)(\zeta - \beta)$$

$$\zeta = \frac{1 + \mu^2\xi^2}{2\mu\xi}.$$

Переходя отъ

$$\int \frac{\alpha\xi + \beta}{\sqrt{\Theta(\xi)}}\, d\xi$$

получаемъ слѣдующій результатъ:

Интегралы

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{R(x)}}\, dx$$

отвѣчающіе таблицѣ (6) приводящія къ суммѣ двухъ эллиптическихъ интеграловъ

$$p\int \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta - 1)(\zeta - \alpha)(\zeta - \beta)}} + q\int \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta + 1)(\zeta - \alpha)(\zeta - \beta)}} \tag{17}$$

подстановкой:

$$\zeta = \frac{ax^2 + bx + c}{cx^2 + fx + g} \tag{18}$$

Таблица (*5.1*) преобразовывается въ таблицу

0	1
1	a
a	b
b	c
c	0
∞	∞

$$\frac{\beta}{\delta} = 1,\ \frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta} = \frac{1}{\varkappa^2},\ \frac{\alpha + \beta\varkappa^2}{\gamma + \delta\varkappa^2} = \frac{1}{\lambda^2},\ \frac{\alpha + \beta\lambda^2}{\gamma + \delta\lambda^2} = \frac{1}{\mu^2},\ \frac{\alpha + \beta\mu^2}{\gamma + \delta\mu^2} = 0,\ \frac{\alpha}{\gamma} = \infty,$$

откуда опять получаемъ *для* $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 *вполнѣ опредѣленныя значенія:*

$$\mu^2 = \omega,\ \lambda^2 = \frac{\omega^2}{\omega - 1},\ \varkappa^2 = \frac{1}{1 - \omega},\ \eta = -\omega\xi + 1,$$

гдѣ ω корень уравненія:

$$\frac{\omega^5 + 1}{\omega + 1} = \omega^4 - \omega^3 + \omega^2 - \omega + 1 = 0.$$

При помощи тѣхъ же подстановокъ (13) таблицу (5.1) можно привести къ виду:

$$\left|\begin{array}{cc} 1 & \omega \\ \omega & a \\ a & b \\ b & c \\ c & 0 \\ \infty & \infty \end{array}\right|$$

гдѣ ω не нуль, а какое угодно напередъ назначенное число, отличное отъ 1 и ∞.

Положимъ, что ω первообразный корень двучленнаго уравненія:

$$\omega^5 = 1.$$

Такъ какъ тогда $\frac{\alpha}{\gamma} = \infty$, $\gamma = 0$, то можемъ имѣть рядъ уравненій:

$$p + q = \omega,\ p\omega + q = a,\ pa + q = b,\ pb + q = c,\ pc + q = 1, \tag{19}$$

откуда умножая 5-е на 1, $4 - p$, $3 - p^2$, $2 - p^3$ и $1 - p^4$, складывая и сокращая, получимъ:

$$q(p^4 + p^3 + p^2 + p + 1) = 1 - p^5$$

или

$$(p^4 + p^3 + p^2 + p + 1)(p + q - 1) = 0,$$

а такъ какъ

$$p + q = \omega \neq 1,$$

то

$$p^4 + p^3 + p^2 + p + 1 = 0$$

и

$$p = \omega^i,$$

гдѣ i равно одному изъ чиселъ 1, 2, 3, 4. Мы покажемъ, что $i = 1$. Подставляя вмѣсто $p - \omega^i$, а вмѣсто $q = \omega - \omega^i$ въ уравненіе (19), получаемъ по исключеніи a, b, c уравненіе

$$\omega^{4i+1} + \omega^{4i} - \omega^{3i+1} + \omega^{3i} - \omega^{2i+1} + \omega^{2i} - \omega^{i+1} + \omega^i - \omega = 1$$

или, имѣя въ виду, что

$$\omega^{4i} + \omega^{3i} + \omega^{2i} + \omega^i + 1 = 0$$

$$\omega^{4i+1} = 1,$$

откуда

$$4i + 1 \equiv 0 \pmod{5},$$

а потому

$$i = 1.$$

Слѣдовательно $p = \omega$, $q = \omega$ и уравненія (19) даютъ $a = \omega^2$, $b = \omega^3$, $c = \omega^4$.

Интегралы

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{R(x)}}\, dx,$$

отвѣчающіе таблицѣ (5.1), приводятся при помощи подстановки:

$$\zeta = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

къ интегралу:

$$\int \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^5 - 1}}. \tag{20}$$

Таблица (4.2) преобразуется въ таблицу:

∞	a
a	b
b	c
c	∞
0	1
1	0

$$\frac{\beta}{\delta} = 1, \quad \frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta} = 0, \quad \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{1}{\varkappa^2}, \quad \frac{\alpha + \beta\varkappa^2}{\gamma + \delta\varkappa^2} = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \frac{\alpha + \beta\lambda^2}{\gamma + \delta\lambda^2} = \frac{1}{\mu^2}, \quad \frac{\alpha + \beta\mu^2}{\gamma + \delta\mu^2} = \infty,$$

откуда $\varkappa^2 = \mu^2$, чего быть не можетъ, если

$$\int \frac{\alpha\xi + \beta}{\sqrt{\Theta(\xi)}}\, d\xi$$

перваго рода.

Таблица (4.2) не даетъ вовсе приведенія (3).

Таблица *(3.3)* или

1	a
a	0
0	1
∞	b
b	c
c	∞

даетъ уравненія:

$$\frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta} = \frac{1}{\varkappa^2}, \quad \frac{\alpha + \beta\varkappa^2}{\gamma + \delta\varkappa^2} = 0, \quad \frac{\beta}{\delta} = 1, \quad \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \frac{\alpha + \beta\lambda^2}{\gamma + \delta\lambda^2} = \frac{1}{\mu^2}, \quad \frac{\alpha + \beta\mu^2}{\gamma + \delta\mu^2} = \infty,$$

откуда для $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 *получаемъ два условныхъ уравненія:*

$$\varkappa^2 = \frac{\lambda^2+1}{\lambda^4+1},\ \mu^2 = \frac{\lambda^2(\lambda^2+1)}{\lambda^4+1},\ \eta = \frac{\mu^2\xi-\lambda^2}{\lambda^2\mu^2(1-\mu^2\xi)},$$

гдѣ λ остается произвольнымъ.

Здѣсь опять $\varkappa^2\lambda^2 = \mu^2$ и интегралъ

$$\int \frac{\alpha\xi+\beta}{\sqrt{\Theta(\xi)}}\,d\zeta$$

приводится къ суммѣ эллиптическихъ интеграловъ (17).

Тоже имѣетъ мѣсто для таблицъ (*4.1.1*) *и* (*2.2.2*), изъ которыхъ первая или

$$\left|\begin{matrix} 1 & a \\ a & b \\ b & c \\ c & 1 \\ 0 & 0 \\ \infty & \infty \end{matrix}\right|$$

даетъ уравненія:

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}=\frac{1}{\varkappa^2},\ \frac{\alpha+\beta\varkappa^2}{\gamma+\delta\varkappa^2}=\frac{1}{\lambda^2},\ \frac{\alpha+\beta\lambda^2}{\gamma+\delta\lambda^2}=\frac{1}{\mu^2},\ \frac{\alpha+\beta\mu^2}{\gamma+\delta\mu^2}=1,\ \frac{\beta}{\delta}=0,\ \frac{\alpha}{\gamma}=\infty,$$

опредѣляющія для $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 *два условныхъ уравненія:*

$$\lambda^2=\frac{1}{\varkappa^4},\ \mu^2=\frac{1}{\varkappa^2},\ \eta=\frac{\xi}{\varkappa^2},\ \varkappa^2\lambda^2=\mu^2$$

$\varkappa$ произвольно, а вторая или

$$\left|\begin{matrix} \infty & 0 \\ 0 & \infty \\ 1 & a \\ a & 1 \\ b & c \\ c & b \end{matrix}\right|$$

даетъ уравненія:

$$\frac{\alpha}{\gamma}=0,\ \frac{\beta}{\delta}=\infty,\ \frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}=\frac{1}{\varkappa^2},\ \frac{\alpha+\beta\varkappa^2}{\gamma+\delta\varkappa^2}=1,\ \frac{\alpha+\beta\lambda^2}{\gamma+\delta\lambda^2}=\frac{1}{\mu^2},\ \frac{\alpha+\beta\mu^2}{\gamma+\delta\mu^2}=\frac{1}{\lambda^2},$$

дающія для $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 *одно условное уравненіе:*

$$\varkappa^2=\lambda^2\mu^2$$

$$\eta=\frac{1}{\varkappa^2\xi},$$

гдѣ λ, μ остаются произвольными.

Таблицы (3.2.1) и (2.2.1.1) не даютъ вовсе приведенія типа (3), ибо первая или

$$\begin{array}{|cc|} a & b \\ b & c \\ c & a \\ 0 & \infty \\ \infty & 1 \\ 1 & 0 \end{array}$$

даетъ:

$$\frac{\alpha+\beta\varkappa^2}{\gamma+\delta\varkappa^2}=\frac{1}{\lambda^2},\ \frac{\alpha+\beta\lambda^2}{\gamma+\delta\lambda^2}=\frac{1}{\mu^2},\ \frac{\alpha+\beta\mu^2}{\gamma+\delta\mu^2}=\frac{1}{\varkappa^2},\ \frac{\beta}{\delta}=\infty,\ \frac{\alpha}{\gamma}=1,\ \frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}=0,$$

откуда $\varkappa^2=\lambda^2=\mu^2=1$; вторая или

$$\begin{array}{|cc|} 1 & a \\ a & 1 \\ b & c \\ c & b \\ 0 & 0 \\ \infty & \infty \end{array}$$

даетъ:

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}=\frac{1}{\varkappa^2},\ \frac{\alpha+\beta\varkappa^2}{\gamma+\delta\varkappa^2}=1,\ \frac{\alpha+\beta\lambda^2}{\gamma+\delta\lambda^2}=\frac{1}{\mu^2},\ \frac{\alpha+\beta\mu^2}{\gamma+\beta\mu^2}=\frac{1}{\lambda^2},\ \frac{\beta}{\delta}=0,\ \frac{\alpha}{\gamma}=\infty,$$

откуда $\varkappa^2=1$, $\lambda^2=\mu^2$.

Результаты, нами полученные, можно слѣдующимъ образомъ формулировать:

Приведеніе:

$$\int\frac{Cy+D}{\sqrt{R(y)}}\,dy=\int\frac{Ax+B}{\sqrt{R(x)}}\,dx \tag{3}$$

возможно только тогда, когда

$$\int\frac{Ax+B}{\sqrt{R(x)}}\,dx$$

принадлежитъ къ одному изъ слѣдующихъ типовъ:

1) *Къ интеграламъ, приводящимся къ эллиптическимъ*

$$\int\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}},$$

2) *приводящимся къ суммѣ двухъ эллиптическихъ интеграловъ:*

$$p\int\frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta-1)(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)}}+q\int\frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta+1)(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)}}$$

подстановкой:

$$\zeta=\frac{ax^2+bx+c}{ex^2+fx+g},$$

3) *приводящимся къ интегралу*

$$\int\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(\zeta^5-1)}}$$

при помощи подстановки

$$\zeta=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}.$$

Совершенно такимъ же образомъ изслѣдуемъ частный случай приведенія (3)

$$\int\frac{dy}{\sqrt{R(y)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}. \tag{20}$$

Такъ какъ здѣсь $\gamma=0$, то подстановка (5) замѣняется еще болѣе простой

$$y=\alpha x+\beta \tag{22}$$

гдѣ, какъ легко видѣть $\alpha^2=1$. Легко видѣть, что въ этомъ случаѣ интегралъ

$$\int\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

долженъ обязательно принадлежать къ первому изъ вышеупомянутыхъ типовъ.

Полагая

$$y=\frac{a\eta+b}{c\eta+\partial},\quad x=\frac{a\xi+b}{c\xi+\partial}$$

мы обобщаемъ этотъ результатъ на случай приведенія:

$$\int\frac{Ay+B}{\sqrt{R(y)}}\,dy=\int\frac{Ax+B}{\sqrt{R(x)}}\,dx \tag{23}$$

и мы можемъ этотъ результатъ формулировать еще слѣдующимъ образомъ.

Дифференціальное уравненіе перваго порядка

$$\frac{Ay+B}{\sqrt{R(y)}}\,dy=\frac{Ax+B}{\sqrt{R(x)}}\,dx,$$

гдѣ $R(x)=a_0x^6+a_1x^5+a_2x^4+a_3x^3+a_4x^2+a_5x+a_6$ *имѣетъ алгебраическое рѣшеніе иное, чѣмъ* $y=x$, *въ томъ и только въ томъ случаѣ, когда интегралъ*

$$\int\frac{Ax+B}{\sqrt{R(x)}}\,dx$$

приводится къ эллиптическому интегралу.

Варшава.
17 марта 1905 г.