Координаты точки пересѣченія двухъ прямыхъ въ пространствѣ и плоскости, опредѣляемой этими двумя прямыми.

Д. М. Синцова.

1. Простая и элементарная задача: „*опредѣлить координаты точки пересѣченія двухъ пересѣкающихся прямыхъ*“ получаетъ нѣкоторый интересъ, если прямыя заданы ихъ однородными координатами, и требуется выразить съ помощью ихъ однородныя координаты точки пересѣченія. Пусть, дѣйствительно, даны прямая p шестью координатами p_{ik} ($i=1$, 2, 3, 4), связанными соотношеніемъ

$$\frac{1}{2}\,(p,p)\equiv p_{12}p_{34}+p_{13}p_{42}+p_{14}p_{23}=0 \tag{1}$$

и прямая p' — координатами p'_{ik}, связанными соотношеніемъ

$$\frac{1}{2}\,(p',p')\equiv p'_{12}p'_{34}+p'_{13}p'_{42}+p'_{14}p'_{23}=0 \tag{1'}$$

Если прямыя p и p' пересѣкаются, то

$$(p,p')\equiv p_{12}p'_{34}+p_{13}p'_{42}+p_{14}p'_{23}+p'_{12}p_{34}+p'_{13}p_{42}+p'_{14}p_{23}=0 \quad (2),$$

Координаты точки x, принадлежащей прямой p, удовлетворяютъ *четыремъ* уравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned}
1)\;& x_2p_{34}+x_3p_{42}+x_4p_{23}=0\\
2)\;& x_1p_{34}+x_3p_{41}+x_4p_{13}=0\\
3)\;& x_1p_{24}+x_2p_{41}+x_4p_{12}=0\\
4)\;& x_1p_{23}+x_2p_{31}+x_3p_{12}=0
\end{aligned}\right\} \tag{I}$$

независимыхъ между которыми въ силу (1) только два.

Если эта точка x принадлежитъ и второй прямой p', то выполняются еще четыре уравненія:

$$\left.\begin{aligned}
1)\;& x_2p'_{34}+x_3p'_{42}+x_4p'_{23}=0\\
2)\;& x_1p'_{34}+x_3p'_{41}+x_4p'_{13}=0\\
3)\;& x_1p'_{24}+x_2p'_{41}+x_4p'_{12}=0\\
4)\;& x_1p'_{23}+x_2p'_{31}+x_3p'_{12}=0
\end{aligned}\right\} \tag{II}$$

между которыми независимыхъ также только два.

Возьмемъ два какихъ-нибудь уравненія системы (I) и два какихъ нибудь уравненія системы (II). Сдѣлать это можно всего $\frac{4.3}{1.2}\times\frac{4.3}{1.2}=36$ способами. Всѣ получаемыя такимъ образомъ системы изъ четырехъ уравненій между четырьмя однородными перемѣнными $x_1x_2x_3x_4$ оказываются при условіи (2) совмѣстными. Такъ, если взять I: 1, 2, II: 3, 4, то опредѣлитель системы принимаетъ съ помощью (I) и (II) видъ: $p_{34}p'_{12}\ (p,p')$, т. е. обращается въ нуль въ силу (2). Такимъ образомъ достаточно брать одно уравненіе изъ одной группы и два уравненія изъ другой.

Спрашивается, сколько получается различныхъ системъ выраженій для $x_1 x_2 x_3 x_4$. Подробный подсчетъ показываетъ, что различныхъ выраженій получается только *четыре*, а именно: первая система:

$$
(A)\quad \begin{cases}
\varrho x_1 = -p_{12}p'_{34} - p_{13}p'_{42} - p_{14}p'_{23} \equiv p_{34}p'_{12} + p_{42}p'_{13} + p_{23}p'_{14};\\
\varrho x_2 = p_{23}p'_{24} - p_{24}p'_{23};\\
\varrho x_3 = p_{23}p'_{34} - p_{34}p'_{23};\\
\varrho x_4 = p_{24}p'_{34} - p_{34}p'_{24};
\end{cases}
$$

Эта система получается, если брать изъ 2-й группы уравненіе 1-ое и два какихъ-нибудь изъ 1-ой группы или наоборотъ (только тогда мѣняетъ знакъ множитель пропорціональности).

Вторая система:

$$
(B)\quad \begin{cases}
\varrho' x_1 = p_{13}p'_{14} - p_{14}p'_{13}\\
\varrho' x_2 = p_{23}p'_{14} + p_{42}p'_{13} + p_{12}p'_{34} \equiv -p'_{23}p_{14} - p_{13}p'_{42} - p_{34}p'_{12};\\
\varrho' x_3 = p_{13}p'_{34} - p'_{13}p_{34}\\
\varrho' x_4 = p_{14}p'_{34} - p'_{14}p_{34}
\end{cases}
$$

Эта система получается, если изъ 2-ой группы взять уравненіе 2-ое, и два какихъ-нибудь изъ 1-ой (или наоборотъ).

Третья система:

$$
(C)\quad \begin{cases}
\varrho'' x_1 = p_{12}p'_{14} - p'_{12}p_{14};\\
\varrho'' x_2 = p_{12}p'_{24} - p'_{12}p_{24};\\
\varrho'' x_3 = p'_{13}p_{42} + p'_{23}p_{14} + p'_{34}p_{12} \equiv -p_{13}p'_{42} - p_{23}p'_{14} - p_{34}p'_{12};\\
\varrho'' x_4 = p_{14}p'_{24} - p'_{14}p_{24}.
\end{cases}
$$

Эта система получается, если изъ 2-ой группы взять уравненіе 3-ье и какія-нибудь два уравненія 1-й группы (или наоборотъ).

Наконецъ, взявъ изъ 2-й группы уравненіе 4-ое и какія-нибудь два уравненія 1-ой группы, приходимъ къ 4-ой системѣ выраженій:

$$
(D)\quad \begin{cases}
\varrho''' x_1 = p_{12}p'_{13} - p'_{12}p_{13};\\
\varrho''' x_2 = p_{12}p'_{23} - p_{23}p'_{12};\\
\varrho''' x_3 = p_{13}p'_{23} - p'_{13}p_{23}\\
\varrho''' x_4 = p'_{12}p_{34} + p'_{13}p_{42} + p_{14}p'_{23} \equiv -p_{12}p'_{34} - p_{13}p'_{42} - p_{23}p'_{14}.
\end{cases}
$$

2. Не трудно произвести слѣдующую повѣрку этихъ результатовъ, полученныхъ непосредственнымъ рѣшеніемъ указанныхъ системъ линей-

ныхъ уравненій. Пусть y — какая-нибудь точка прямой p и z — какая-нибудь точка прямой p', — тогда можно принять

$$p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i \text{ и } p'_{ik} = x_i z_k - x_k z_i. \tag{3}$$

Если эти значенія подставимъ въ уравненія системы (A), то получимъ $\varrho = (x_2 y_3 z_4)$. Подстановка въ (B) доставитъ $\varrho' = (x_1 y_3 z_4)$, подстановка въ (C): $\varrho'' = (x_1 y_2 z_4)$ и подстановка въ (D) $\varrho''' = (x_1 y_2 z_3)$.

3. Полученные результаты по принципу двойственности непосредственно переносятся на задачу опредѣленія координатъ плоскости, опредѣляемой двумя пересѣкающимися прямыми.

Пусть осевыя координаты прямой p суть π_{ik}, связанныя съ плоскостными координатами двухъ опредѣляющихъ прямую плоскостей u, v равенствами

$$\pi_{ik} = u_i v_k - u_k v_i, \tag{4}$$

и съ лучевыми — соотношеніями

$$\pi_{12} : \pi_{13} : \pi_{14} : \pi_{34} : \pi_{42} : \pi_{13} = p_{34} : p_{42} : p_{23} : p_{12} : p_{13} : p_{14} \tag{5}$$

Въ этихъ координатахъ соотношенія (1), (1′) и (2) перепишутся

$$\tfrac{1}{2}(\pi, \pi) \equiv \pi_{12}\pi_{34} + \pi_{13}\pi_{42} + \pi_{14}\pi_{23} = 0$$

$$\tfrac{1}{2}(\pi', \pi') \equiv \pi'_{12}\pi'_{34} + \pi'_{13}\pi'_{42} + \pi'_{14}\pi'_{23} = 0$$

$$(\pi, \pi') \equiv \pi_{12}\pi'_{34} + \pi'_{12}\pi_{34} + \pi_{13}\pi'_{42} + \pi'_{13}\pi_{42} + \pi_{14}\pi'_{13} + \pi'_{14}\pi_{23} = 0$$

Если u — плоскость, проходящая черезъ прямыя π и π', то рѣшая системы, аналогичныя (I) и (II) найдемъ четыре вида выраженій $u_1 u_2 u_3 u_4$:

$$(A_1) \left\{ \begin{aligned} &\sigma . u_1 = \pi'_{12}\pi_{34} + \pi'_{13}\pi_{42} + \pi'_{14}\pi_{23} \equiv -\pi_{12}\pi'_{34} - \pi_{13}\pi'_{42} - \pi_{14}\pi'_{23}; \\ &\sigma . u_2 = \pi_{23}\pi'_{24} - \pi'_{23}\pi_{24}; \\ &\sigma . u_3 = \pi_{23}\pi'_{34} - \pi'_{23}\pi_{34}; \\ &\sigma . u_4 = \pi_{24}\pi'_{34} - \pi_{34}\pi'_{24}; \end{aligned} \right.$$

$$(B_1) \left\{ \begin{aligned} &\sigma' u_1 = \pi_{13}\pi'_{14} - \pi_{14}\pi'_{13}; \\ &\sigma' u_2 = \pi'_{14}\pi_{23} + \pi'_{13}\pi_{42} + \pi_{34}\pi_{12} \equiv -\pi_{14}\pi'_{23} - \pi_{13}\pi'_{42} - \pi_{34}\pi'_{12}; \\ &\sigma' . u_3 = \pi_{23}\pi'_{34} - \pi_{34}\pi'_{23}; \\ &\sigma' . u_4 = \pi_{24}\pi'_{34} - \pi_{34}\pi'_{24}. \end{aligned} \right.$$

$$(C_1) \left\{ \begin{aligned} &\sigma'' u_1 = \pi_{12}\pi'_{14} - \pi_{14}\pi'_{12}; \\ &\sigma'' u_2 = \pi_{12}\pi'_{24} - \pi_{24}\pi'_{12}; \\ &\sigma'' . u_3 = -\pi_{13}\pi'_{42} - \pi_{23}\pi'_{14} - \pi_{34}\pi'_{12} \equiv \pi_{12}\pi'_{34} + \pi'_{13}\pi_{42} + \pi_{1k}\pi'_{23}; \\ &\sigma'' . u_4 = \pi_{14}\pi'_{24} - \pi_{24}\pi'_{14}. \end{aligned} \right.$$

$$(D_1)\quad \begin{cases} \sigma'''u_1 = \pi_{12}\pi'_{13} - \pi_{13}\pi'_{12}; \\ \sigma'''u_2 = \pi_{12}\pi'_{23} - \pi_{23}\pi'_{12}; \\ \sigma'''u_3 = \pi_{13}\pi'_{23} - \pi_{23}\pi'_{13}; \\ \sigma'''u_4 = \pi'_{12}\pi_{34} + \pi'_{13}\pi_{42} + \pi_{14}\pi'_{23} \equiv -\pi_{12}\pi'_{34} - \pi_{13}\pi'_{42} - \pi'_{14}\pi_{23} \end{cases}$$

Этимъ выраженіямъ съ помощью (5) можно дать еще другой видъ:

$$(A_1)\quad \begin{cases} \sigma_1 u_1 = p_{12}p'_{34} + p_{13}p'_{42} + p_{14}p'_{23} \equiv -p'_{12}p_{34} - p'_{13}p_{42} - p'_{14}p_{23} \\ \sigma_1 u_2 = p_{13}p'_{14} - p_{14}p'_{13} \\ \sigma_1 u_3 = p_{14}p'_{12} - p_{12}p'_{14} \\ \sigma_1 u_4 = p_{12}p'_{13} - p_{13}p'_{13} \end{cases}$$

$$(B_1)\quad \begin{cases} \sigma'_1 . u_1 = p_{23}p'_{24} - p_{24}p'_{23} \\ \sigma'_1 u_2 = p'_{12}p_{34} + p_{13}p'_{42} + p_{14}p'_{23} \equiv -p_{12}p'_{34} - p'_{13}p_{42} - p'_{14}p_{23} \\ \sigma'_1 u_3 = p_{14}p'_{12} - p_{12}p'_{14} \\ \sigma'_1 u_4 = p_{12}p'_{13} - p_{13}p'_{12} \end{cases}$$

$$(C_1)\quad \begin{cases} \sigma''_1 u_1 = p_{34}p'_{23} - p'_{34}p_{23} \\ \sigma''_1 u_2 = p_{13}p'_{34} - p_{34}p'_{13} \\ \sigma'' u_3 = p'_{12}p_{34} + p_{13}p'_{42} + p'_{14}p_{23} \equiv -p_{12}p'_{34} - p'_{13}p_{42} - p_{14}p'_{23} \\ \sigma''_1 u_4 = p_{13}p'_{23} - p_{23}p'_{13} \end{cases}$$

$$(D_1)\quad \begin{cases} \sigma'''_1 u_1 = p_{34}p'_{42} - p_{42}p'_{34} \\ \sigma'''_1 u_2 = p_{34}p'_{14} - p_{34}p'_{34} \\ \sigma'''_1 u_3 = p_{42}p'_{14} - p_{14}p'_{42} \\ \sigma'''_1 . u_4 = p_{12}p'_{34} + p_{13}p'_{42} + p'_{14}p_{23} \equiv -p'_{12}p_{34} - p'_{13}p_{41} - p_{14}p'_{23} \end{cases}$$

Не трудно убѣдиться, что полученныя выраженія для x_i и u_k опредѣляютъ точку и прямую въ соединенномъ положеніи.

Такъ взявъ системы (A) и (A_1) получаемъ:

$$\varrho\sigma_1 \Sigma u_i x_i \equiv -(p_{12}p'_{34} + p_{13}p'_{42} + p_{14}p'_{23})\,(p_1 p') = 0 \text{ въ силу } (2).$$

Все это, конечно, вещи очень простыя, но необходимыя при пользованіи координатами прямой. Тѣмъ не менѣе мнѣ не приводилось встрѣчать ихъ гдѣ-либо.

Августъ 1909 г.