Изслѣдованіе и интегрированіе дифференціальныхъ уравненій съ частными производными второго порядка эллиптическаго типа.

С. Бернштейна.

ВВЕДЕНІЕ.

Предлагая русскимъ читателямъ настоящее сочиненіе, считаю не лишнимъ сказать нѣсколько словъ о теоріи аналитическихъ функцій, лежащей въ его основѣ. Уже около пятидесяти лѣтъ эта теорія занимаетъ центральное мѣсто въ западной математикѣ: ей посвящено много замѣчательныхъ работъ и преподаванію ея удѣлено особенное вниманіе.

Такая исключительная роль теоріи аналитическихъ функцій объясняется тѣмъ, что *она является естественнымъ продолженіемъ, какъ алгебры, такъ и дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія.* Съ одной стороны алгебра конца XVIII столѣтія приводитъ математиковъ къ необходимости разсматривать комплексныя величины наравнѣ съ вещественными. Съ другой стороны, невозможность интегрировать огромное большинство дифференціальныхъ уравненій при помощи извѣстныхъ конечныхъ выраженій приводитъ къ употребленію безконечныхъ рядовъ и первымъ дѣломъ къ простѣйшему изъ нихъ, къ строкѣ Тэйлора. Но функція комплексной перемѣнной, лежащая въ основѣ алгебры, и функція, опредѣляемая сходящейся строкой Тэйлора, удовлетворяющая дифференціальному уравненію—это одно и тоже, это и есть такъ называемая аналитическая функція, которая объединяетъ такимъ образомъ противоположные полюсы математической мысли—анализъ конечный и анализъ безконечный.

Каждый изъ указанныхъ источниковъ оказалъ свое вліяніе и на дальнѣйшее развитіе теоріи аналитическихъ функцій. Но между тѣмъ, какъ интегрированіе дифференціальныхъ уравненій при помощи аналитическихъ функцій первоначально лишь передвигало центръ тяжести задачи, алгебраическія функціи вмѣстѣ съ ихъ интегралами представляли богатую область для изслѣдованія и обобщеній. Благодаря алгебраическимъ функціямъ, впервые было обращено вниманіе на роль такъ называемыхъ *критическихъ и особыхъ точекъ*, являющихся въ нѣкоторомъ смыслѣ *инваріантами* для аналитическихъ функцій. Благодаря имъ было установлено важное положеніе, что знаніе *всѣхъ* особенностей функціи позволяетъ [1]) найти для нея аналитическое выраженіе, имѣющее смыслъ при всѣхъ значеніяхъ перемѣнной. Отнынѣ всякая функція была вполнѣ охарактеризована своими особенностями; наличность или отсутствіе формальной зависимости опредѣленнаго вида между функціями также непосредственно обнаруживалась разсмотрѣніемъ свойствъ ихъ особенностей. Такимъ образомъ для полнаго изслѣдованія (аналитической) функціи, какъ для вычисленія ея значенія въ любой точкѣ, такъ и для обнаруженія существованія элементарныхъ зависимостей между ней и другими функціями, впервые найденъ былъ единый и непогрѣшимый путь.

Слѣдуя этому пути, который можно назвать алгебраическимъ или комплекснымъ направленіемъ, теорія аналитическихъ функцій отъ алгебраическихъ задачъ переходитъ къ трансцендентнымъ. Вслѣдъ за алгебраическими и логариѳмическими особенностями цѣлый рядъ различныхъ вопросовъ выдвигаетъ впередъ изученіе болѣе сложныхъ такъ называемыхъ существенныхъ особыхъ точекъ, образцомъ которыхъ является точка въ безконечности для цѣлой трансцендентной функціи. Устанавливаются важныя аналогіи между этими цѣлыми функціями и многочленами, а также замѣчательныя зависимости, нашедшія впослѣдствіи примѣненіе въ различныхъ отдѣлахъ математики, между ихъ возрастаніемъ въ безконечности, убываніемъ коэффиціентовъ ихъ строки Тэйлора и густотой ихъ нулей. Подобному же изслѣдованію подвергаются мероморфныя и другія функціи, обладающія извѣстными опредѣленными особенностями, выдвигающія вмѣстѣ съ тѣмъ основной вопросъ *аналитическаго продолженія*, т. е. изученія a priori функціи, которой дано разложеніе Тэйлора, сходящееся лишь въ ограниченной области, а также общую задачу суммированія расходящихся рядовъ.

Задача аналитическаго продолженія, равнозначная по существу многократному повторенію способа послѣдовательныхъ приближеній, къ которому можно свести огромное большинство задачъ, встрѣчающихся въ анализѣ, распадается на двѣ части [2]):

1. Опредѣлить всѣ особенности функціи, которой дано разложеніе Тэйлора.

---

[1]) При нѣкоторыхъ весьма общихъ предположеніяхъ относительно особенностей.

[2]) Для библіографіи по этому вопросу мы можемъ отослать читателя къ прекрасной книгѣ Hadamard'а „Sur la série de Taylor et son prolongement analytique“.

2. Вычислить во всякой обыкновенной точкѣ значеніе функціи, которой дано разложеніе Тэйлора.

Разностороннія изслѣдованія, посвященныя первой части задачи, установили, что вообще всякая особенность равнозначна опредѣленной инваріантной ассимптотической зависимости между коэффиціентами строки Тэйлора, и въ частности привели къ простымъ пріемамъ для распознаванія мероморфныхъ и нѣкоторыхъ другихъ функцій, обладающихъ извѣстными особенностями. Еслибъ, приступая къ изученію функціи, мы заранѣе могли предвидѣть ограниченное число типовъ особенностей, какими она можетъ обладать, то дѣйствительное опредѣленіе ихъ представляло бы сравнительно мало трудности. Но бѣда въ томъ, что не только мероморфныя, но и *функціи, обладающія лишь изолированными особыми точками, являются исключеніями во всей совокупности аналитическихъ функцій*, и у насъ нѣтъ *пока* руководящей нити, для того, чтобъ разобраться въ безконечномъ многообразіи возможныхъ особенностей. Отсюда выводъ, что *первая часть задачи аналитическаго продолженія, основная съ точки зрѣнія алгебраическаго направленія, по существу не допускаетъ общаго рѣшенія.*

Напротивъ, *для вычисленія значенія аналитической функціи въ любой точкѣ найденъ безусловно общій методъ—строка многочленовъ Миттагъ-Леффлера.* Строка Миттагъ-Леффлера, коэффиціенты которой опредѣляются непосредственно изъ коэффиціентовъ строки Тэйлора, сходится внутри такъ называемой *звѣзды*, т. е. во всей плоскости комплексной перемѣнной за исключеніемъ отрѣзковъ прямыхъ линій, идущихъ отъ каждой особой точки въ безконечность [1]). Напримѣръ если *функція, представленная строкой Тэйлора не имѣетъ вещественныхъ особыхъ точекъ, то каковы бы ни были ея комплексныя особенности, ея разложеніе въ строку Миттагъ-Леффлера будетъ сходиться при*

---

[1]) Строка Миттагъ-Леффлера можетъ принимать различныя формы. Приведемъ для примѣра ту изъ нихъ, которая была первою указана Миттагъ-Леффлеромъ въ Acta Mathematica 1900. Пусть $F(z)=F(0)+\overset{\prime}{F}(0)z+\ldots+\frac{1}{n!}\overset{(n)}{F}(0)z^n+\ldots$, данная строка Тэйлора, тогда строка Миттагъ-Леффлера представится въ видѣ

$$F(z)=P_0+(P_1-P_0)+(P_2-P_1)+\ldots+(P_n-P_{n-1})+\ldots$$

гдѣ

$$P_n(z)=\sum_{\lambda_1=0}^{n^2}\sum_{\lambda_2=0}^{n^4}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{n^{2n}}\frac{\overset{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}{F(0)}}{(\lambda_1)!\,(\lambda_2)!\ldots(\lambda_n)!}\cdot\left(\frac{z}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2\ldots+\lambda_n}$$

и будетъ сходиться въ указанной выше области. Придавая строкѣ Миттагъ-Леффлера другія формы, можно измѣнять непрерывно область сходимости и приспособить ее также къ вычисленію многозначныхъ функцій; но для изученія всѣхъ вѣтокъ этихъ послѣднихъ предпочтительно ввести (теоретически это всегда возможно) новую перемѣнную, относительно которой данная функція, какъ и первоначальная перемѣнная, были бы однозначными функціями.

всѣхъ вещественныхъ значеніяхъ перемѣнной. Такимъ образомъ для *вычисленія* аналитическихъ функцій найденъ другой путь, кромѣ указаннаго алгебраическимъ направленіемъ.

Съ усовершенствованіемъ своихъ методовъ, теорія аналитическихъ функцій приступаетъ наконецъ къ интегрированію дифференціальныхъ уравненій. Но, какъ и въ общей задачѣ аналитическаго продолженія, главная трудность заключается въ томъ, что намъ неизвѣстны a priori всѣ возможныя неявныя особенности [1]) искомыхъ функцій. Дѣлая относительно нихъ различныя предположенія, можно установить типы уравненій, рѣшенія которыхъ обладаютъ опредѣленными особенностями, такъ напр. въ настоящее время извѣстны всѣ дифференціальныя уравненія первыхъ двухъ порядковъ, всѣ рѣшенія которыхъ мероморфны. Какъ бы ни были интересны эти новыя простыя трансцендентныя функціи, отличныя отъ всѣхъ ранѣе извѣстныхъ, замѣчательно, что *число ихъ весьма ограниченно, такъ же какъ и число уравненій, которыя при ихъ помощи могутъ быть проинтегрированы*. Такимъ образомъ задача интегрированія съ точки зрѣнія комплекснаго направленія выдвигаетъ прежде всего трудный вопросъ объ изслѣдованіи a priori возможныхъ типовъ особенностей рѣшеній дифференціальныхъ уравненій. Но впредь до полнаго разрѣшенія этого еще мало разработаннаго вопроса, теоріи функцій приходится приступить къ интегрированію наиболѣе интересныхъ уравненій другимъ путемъ, который можно назвать *реалистическимъ направленіемъ*.

Это направленіе, исходя изъ того, что основная задача опредѣленія *всѣхъ* особенностей функціи *вообще* неразрѣшима, и что *большинство естественныхъ функцій не обладаетъ простыми съ алгебраической точки зрѣнія комплексными особенностями*, ставитъ своей *ближайшей задачей аналитическое продолженіе функціи лишь для вещественныхъ значеній перемѣнныхъ*. Пользуясь различными способами вычисленія и выраженія функцій (строка Миттагъ-Леффлера, нормальные ряды и т. д.), ключъ для изслѣдованія сходимости которыхъ даетъ общая теорія аналитическихъ функцій; пользуясь основнымъ свойствомъ этихъ функцій, что для полнаго ихъ опредѣленія достаточно знать величины всѣхъ ихъ производныхъ въ нѣкоторой точкѣ; пользуясь также общими результатами изученія особенностей и асимптотическимъ выраженіемъ функцій вблизи ихъ: реалистическое направленіе, ограничиваясь вещественными значеніями перемѣнныхъ, находитъ обыкновенно руководящую нить для разрѣшенія поставленныхъ аналитическихъ вопросовъ въ геометрическихъ или механическихъ явленіяхъ, съ ними связанныхъ.

---

[1]) Неявною особенностью называется особенность, измѣняющаяся вмѣстѣ съ постоянными интегрированія. Для ознакомленія съ теоріей аналитическаго интегрированія дифференціальныхъ уравненій и съ соотвѣтствующей литературой укажемъ на мемуаръ Пэнлевэ „Sur les équations différentielles и т. д.“ въ Acta Mathematica t. XXVI.

Не останавливаясь на разнообразныхъ и выдающихся результатахъ достигнутыхъ этимъ направленіемъ при интегрированіи обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, замѣтимъ лишь, что какова бы ни была система этихъ уравненій, всѣ неизвѣстныя функціи такъ же, какъ и первоначальная независимая перемѣнная, всегда и съ чрезвычайной легкостью могутъ быть представлены въ видѣ рядовъ многочленовъ нѣкоторой вспомогательной перемѣнной, сходящихся при всѣхъ ея вещественныхъ значеніяхъ: вся трудность интегрированія сводится формально къ изученію особой точки въ безконечности этихъ quasi-цѣлыхъ трансцендентныхъ функцій. Прибавимъ къ этому, что успѣхи изученія вещественныхъ особенностей, въ основѣ котораго лежатъ методы выработанные алгебраическимъ направленіемъ, съ своей стороны начинаютъ освѣщать путь конструированія a priori функцій, обладающихъ опредѣленными комплексными особенностями, при помощи которыхъ могли бы быть *комплексно* проинтегрированы болѣе широкіе классы дифференціальныхъ уравненій, чѣмъ при помощи извѣстныхъ до сихъ поръ элементарныхъ обобщеній алгебраическихъ функцій.

Переходя къ дифференціальнымъ уравненіямъ съ частными производными, которыя насъ въ настоящемъ сочиненіи спеціально интересуютъ, мы видимъ, что примѣненіе къ нимъ общихъ методовъ теоріи функцій еще болѣе необходимо, чѣмъ для обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій. Дѣйствительно, даже въ тѣхъ рѣдкихъ случаяхъ, когда для общаго интеграла ихъ можетъ быть найдено конечное выраженіе, содержащее *произвольныя функціи*, всякая конкретная задача при опредѣленныхъ первоначальныхъ условіяхъ приводитъ обыкновенно къ *функціональному уравненію не разрѣшимому вообще при помощи конечныхъ комбинацій извѣстныхъ функцій*. Аналитическое интегрированіе съ точки зрѣнія комплекснаго направленія обнаружило важность понятія *характеристикъ* [1]), но въ то время, какъ для *линейныхъ* уравненій онѣ являются единственно возможными случайными (т. е. мѣняющимися въ зависимости отъ первоначальныхъ условій) особенностями,—благодаря чему при первоначальныхъ условіяхъ Коши комплексное изученіе интеграловъ не представляетъ серьезныхъ затрудненій,—*не линейныя* уравненія обладаютъ отличными отъ характеристикъ неявными особенностями, изслѣдованіе которыхъ является, безъ сомнѣнія, одной изъ наиболѣе недоступныхъ задачъ современнаго анализа. Поэтому въ данномъ случаѣ вещественное интегрированіе пріобрѣтаетъ особенный интересъ.

Кромѣ того, уже давно извѣстно, что благодаря наличности произвольныхъ функцій, многія дифференціальныя уравненія съ частными

[1]) Для опредѣленности мы предполагаемъ двѣ независимыя перемѣнныя; характеристикой называются линіи, вдоль которыхъ условія Коши непригодны для опредѣленія интеграла.

производными допускаютъ неаналитическія вещественныя рѣшенія; въ силу этого приходится признать, что понятіе общаго интеграла Коши, гдѣ фигурируютъ лишь аналитическія произвольныя функціи, недостаточно (за исключеніемъ линейныхъ уравненій, гдѣ всякое рѣшеніе можетъ быть разсматриваемо, какъ сумма двухъ аналитическихъ рѣшеній, для которыхъ плоскость вещественныхъ перемѣнныхъ является особой поверхностью, и тѣхъ классовъ уравненій, которыя не допускаютъ вещественныхъ неаналитическихъ рѣшеній). Тѣмъ не менѣе изслѣдованіе вещественныхъ рѣшеній дифференціальныхъ уравненій и вообще теорія неаналитическихъ функцій находится въ настолько тѣсной связи съ теоріей аналитическихъ функцій, что можетъ быть разсматриваема какъ одно изъ развѣтвленій послѣдней. Причина этого лежитъ въ слѣдующемъ положеніи, которое полезно формулировать двумя способами:

Первая формулировка. Всякая непрерывная вещественная функція можетъ быть разсматриваема, какъ сумма двухъ аналитическихъ функцій, изъ которыхъ первая не имѣетъ особенностей въ верхней части плоскости комплексной перемѣнной, а вторая—въ нижней.

Примѣняя къ каждой изъ этихъ двухъ аналитическихъ функцій строку многочленовъ Миттагъ-Леффлера, мы приходимъ къ второй формулировкѣ Вейерштрасса:

Всякая непрерывная функція есть предѣлъ равномѣрно сходящейся строки многочленовъ.

Первая формулировка устанавливаетъ тѣсную связь между изслѣдованіемъ особенностей аналитическихъ функцій и теоріей вещественныхъ функцій, изучающей также и *разрывныя* функціи, для которыхъ удалось дать глубокую и простую классификацію, основанную на томъ, являются ли онѣ совокупностью особыхъ значеній аналитической функціи одной или нѣсколькихъ перемѣнныхъ.

Что же касается формулировки Вейерштрасса, то она естественно наводитъ на мысль о *сходствѣ между аналитическими функціями и раціональными числами.* Подобно тому, какъ раціональныя числа представляютъ группу замкнутую по отношенію ко всѣмъ раціональнымъ дѣйствіямъ и въ тоже время производная совокупность [1]) ихъ совпадаетъ съ совокупностью всѣхъ вещественныхъ чиселъ; аналитическія функціи также представляютъ замкнутую группу по отношенію ко всѣмъ аналитическимъ дѣйствіямъ, и производная совокупность ихъ совпадаетъ съ совокупностью всѣхъ непрерывныхъ функцій. Аналогія эта можетъ

---

[1]) Производной совокупностью данной совокупности называется совокупность предѣловъ элементовъ данной совокупности. Въ настоящемъ изложеніи мы для простоты разсматриваемъ, какъ предѣльныя функціи, лишь предѣлы *равномѣрно* сходящихся рядовъ.

быть проведена и дальше. Подобно тому, какъ иногда въ общихъ разсужденіяхъ о числѣ вопросъ о раціональности его не играетъ роли, въ другихъ же случаяхъ приходится вести разсужденіе при предположеніи, что число раціонально и затѣмъ переходить къ предѣлу; точно также и въ нашихъ разсужденіяхъ о функціяхъ иногда бываетъ проще не дѣлать никакихъ предположеній объ ихъ аналитическомъ характерѣ, но большею частью, оперируя съ неаналитическими функціями, мы должны разсматривать ихъ, какъ предѣлы тѣхъ или иныхъ рядовъ аналитическихъ функцій. Кромѣ того, важно обратить вниманіе на тѣ положенія, которыя являются вообще неправильными, если замѣнить въ нихъ аналитическія функціи произвольными. Не отрицая слѣдовательно теоретической важности изученія неаналитическихъ функцій, не отрицая того, что быть можетъ впослѣдствіи изучая функціи, удовлетворяющія опредѣленнымъ функціональнымъ условіямъ, анализъ естественнымъ путемъ прійдетъ къ практически важнымъ неаналитическимъ функціямъ, которыя будутъ играть въ теоріи функцій не меньшую роль, чѣмъ алгебраическія и простѣйшія трансцендентныя (e, π) числа въ теоріи чиселъ, мы должны признать, что въ настоящее время въ нашихъ рукахъ нѣтъ другого способа изслѣдованія неаналитическихъ функцій, какъ при посредствѣ аналитическихъ.

Такимъ образомъ передъ реалистическимъ направленіемъ выдвигается также важный вопросъ о критеріяхъ для распознаванія аналитическихъ функцій. Критеріи Коши, лежащіе въ основѣ теоріи дифференціальныхъ уравненій, относятся лишь къ функціямъ, которыхъ дано формальное разложеніе въ строку Тэйлора. Обобщенные Гарнакомъ эти критеріи позволили Пикару [1]) обнаружить *аналитическій характеръ рѣшеній линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ частными производными эллиптическаго типа* (т. е. съ мнимыми характеристиками). Однако эти критеріи, будучи достаточными, не необходимы, ибо они предполагаютъ *опредѣленную комплексную область вокругъ вещественныхъ значеній, гдѣ функція не должна имѣть особенностей*. Въ настоящемъ сочиненіи (глава II) мы указываемъ общіе критеріи *необходимые* и *достаточные*, которые въ частности позволяютъ намъ доказать основную теорему въ теоріи уравненій эллиптическаго типа, которая гласитъ:

Всякая функція z, удовлетворяющая аналитическому уравненію

$$F\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z, x, y\right) = 0 \qquad (1)$$

и неравенству

---

[1]) Первая глава настоящей работы.

$$F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}} \cdot F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}} - \frac{1}{4}\left(F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}\right)^2 > 0 \tag{2}$$

есть аналитическая функція. (Глава III).

Какъ приложенія этой теоремы укажемъ, что *всѣ минимальныя поверхности, а также всѣ поверхности положительной кривизны, накладывающіяся на аналитическую поверхность* (напримѣръ на эллипсоидъ) *аналитичны.*

Эта теорема, обобщающая теорему Пикара и предугаданная Hilbert'омъ [1]), является частнымъ случаемъ слѣдующаго положенія, которое формулировано мною въ статьѣ „Sur la déformation des surfaces" помѣщенной въ 1905 году въ Mathematische Annalen [2]):

Всякая функція $f(x_1\, x_2\, ..x_n)$ вещественныхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, ...x_n$, удовлетворяющая аналитическому дифференціальному уравненію съ частными производными, которая будучи дана при значеніяхъ перемѣнныхъ $|x_1| < p, |x_2| < p, ... |x_n| < p$, гдѣ p какое нибудь положительное число, вполнѣ опредѣлена при $|x_1| < p + \varepsilon$, $|x_2| < p, ... |x_n| < p$, гдѣ ε сколь угодно малое число, есть функція аналитическая относительно перемѣнной x_1.

Эти результаты, которые значительно расширяютъ область примѣненія собственно аналитическихъ функцій, выдвигаютъ вопросъ объ *аналитическомъ продолженіи* разсматриваемыхъ рѣшеній. И прежде всего слѣдуетъ рѣшить такой вопросъ: если рѣшеніе Z уравненія эллиптическаго типа существуетъ внутри вещественнаго круга C, напримѣръ, при какихъ условіяхъ оно можетъ быть продолжено за предѣлы этого круга? Отвѣтъ на это слѣдующій: *для того чтобы функція Z могла быть продолжена за предѣлы C, необходимо и достаточно, чтобъ на кругѣ C она обращалась въ аналитическую функцію дуги и имѣла конечныя производныя первыхъ двухъ порядковъ относительно обѣихъ перемѣнныхъ.* Вслѣдъ за этой теоремой, которая допускаетъ цѣлый рядъ интересныхъ обобщеній и особенно важна въ тѣхъ случаяхъ, когда условіе конечности производныхъ можетъ быть отброшено, слѣдуетъ приступить къ изученію особенностей функціи Z внѣ круга C. Этотъ вопросъ разсматривается мною въ четвертой главѣ только для приведенныхъ линейныхъ уравненій эллиптическаго типа

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a(x,\ y)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x,\ y)\frac{\partial z}{\partial y} + c(x,\ y)\, z = d(x,\ y);$$

---

[1]) Отчеты объ интернаціональномъ конгрессѣ математиковъ въ Парижѣ въ 1900 г.

[2]) Другой частный случай представляютъ уравненія параболическаго типа, рѣшенія которыхъ аналитичны относительно одной лишь перемѣнной. (Comptes Rendus 12-го января 1905 года).

одинъ изъ наиболѣе интересныхъ результатовъ его изученія заключается въ слѣдующемъ: при предположеніи, что *коэффиціенты уравненія представляютъ собой цѣлыя функціи, рѣшеніе Z, существующее внутри круга C будетъ само цѣлой функціей тогда и только тогда, когда на окружности оно будетъ обращаться въ цѣлую функцію дуги.* Полное изслѣдованіе a priori всѣхъ особенностей внѣ круга C является съ точки зрѣнія комплекснаго направленія также и наиболѣе правильнымъ путемъ къ разрѣшенію такъ называемой *задачи Дирикле: опредѣлить функцію, удовлетворяющую данному уравненію эллиптическаго типа, обращающуюся на окружности C, внутри которой она не имѣетъ особенностей, въ данную функцію дуги.* До настоящаго времени, на сколько мнѣ извѣстно, никакихъ попытокъ въ этомъ направленіи еще не было сдѣлано, но не подлежитъ сомнѣнію, что въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ (линейныя уравненія) онѣ должны увѣнчаться успѣхомъ и привести къ интереснымъ и изящнымъ результатамъ.

Однако имѣя въ виду въ настоящемъ сочиненіи указать главнымъ образомъ общіе принципы интегрированія *нелинейныхъ* уравненій при первоначальныхъ условіяхъ Дирикле, (которыя могутъ быть и не аналитичными) мы должны будемъ *отказаться отъ комплексной точки зрѣнія.* Точно также намъ не прійдется останавливаться на комплексной сторонѣ изслѣдованій Пуанкарэ и его школы, посвященныхъ интегрированію нѣкоторыхъ частныхъ видовъ линейныхъ уравненій, обобщенныхъ впослѣдствіи Фредгольмомъ и Гильбертомъ. Укажемъ лишь важнѣйшій результатъ этихъ работъ:

Если функція $z(x, y, \lambda)$ перемѣнныхъ x, y и параметра λ есть рѣшеніе задачи Дирикле для уравненія

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\lambda\left(a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}+cz\right)=d$$

гдѣ $c>0$ и функціи $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$, $d(x, y)$ имѣютъ конечныя производныя перваго порядка по x и y; то функція z мероморфна относительно λ и имѣетъ лишь простые положительные полюсы [1]).

Отсюда слѣдуетъ, что для линейныхъ уравненій задача Дирикле вообще возможна за исключеніемъ нѣкоторыхъ особыхъ значеній параметра λ. Изученіе этихъ особыхъ значеній, тѣсно связанное съ вопро-

---

[1]) Для ознакомленія съ вопросомъ укажемъ резюмирующія работы: *Hilbert,* Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. (Nachricht. von der Kön. Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen 1904—1906; *Steklow,* Théorie générale des fonctions fondamentales (Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse 1904); *Picard,* Sur quelques applications de l'équation fonctionnelle de Fredholm (Rendiconti del Circolo Math. di Palermo, 1906).

сомъ о разложеніи произвольныхъ функцій въ строки подобныя (тригонометрическому) ряду Фурье и необходимое для вычисленія рѣшенія при положительныхъ [1]) значеніяхъ λ, становится лишнимъ, если $\lambda < 0$, ибо въ данномъ случаѣ *возможно примѣнить строку Миттагъ-Лефффлера, коэффиціенты которой легко опредѣляются при* $\lambda = 0$. Для насъ это послѣднее обстоятельство особенно цѣнно, и его то мы кладемъ въ основу нашей методы интегрированія.

Дѣйствительно, если отъ линейныхъ уравненій мы перейдемъ къ нелинейнымъ и введемъ аналогичный вспомогательный параметръ λ, то окажется въ большинствѣ случаевъ, что искомое рѣшеніе, будучи аналитической функціей λ, не только не мероморфно, но обладаетъ ограниченной областью существованія, и комплексное изученіе ея представляетъ непреодолимыя препятствія; тѣмъ не менѣе при $\lambda = 0$ возможно вычислить всѣ ея послѣдовательныя производныя и построить строку Миттагъ-Лефффлера сходящуюся внутри *звѣзды*. Такимъ образомъ, *если будетъ доказано, что нѣкоторое значеніе* λ *находится внутри звѣзды, то тѣмъ самымъ будетъ не только обнаружена возможность соотвѣтствующей задачи Дирикле, но найдено также сходящееся выраженіе для ея рѣшенія.*

Это чисто формальное приведеніе задачи Дирикле къ задачѣ аналитическаго продолженія не даетъ, конечно, непосредственно ключа къ ея разрѣшенію, но, подобно приведенію различныхъ конкретныхъ задачъ къ алгебраическимъ или дифференціальнымъ уравненіямъ, *оно устанавливаетъ опредѣленную логическую схему для нашихъ разсужденій, указывая среди безчисленнаго множества слѣдствій изъ данныхъ задачи одну опредѣленную цѣпь силлогизмовъ, которая приведетъ насъ къ желанной цѣли. Такъ, въ интересующемъ насъ случаѣ сходимость строки Миттагъ-Лефффлера, а вмѣстѣ съ нею возможность задачи Дирикле стоитъ въ исключительной зависимости отъ возможности установить a priori высшіе предѣлы модулей послѣдовательныхъ производныхъ предполагаемаго рѣшенія при помощи данныхъ на контурѣ для всѣхъ промежуточныхъ значеній параметра. Ограниченіе послѣдовательныхъ частныхъ производныхъ и составляетъ такимъ образомъ истинную сущность задачи Дирикле.* Въ частности эти общія соображенія примѣняются мною къ интегрированію уравненія

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = D \tag{3}$$

---

[1]) Слѣдуетъ замѣтить, что съ измѣненіемъ контура, мѣняются полюсы (и въ этомъ главная трудность задачи), такъ что ни для какого *положительнаго* значенія λ задача Дирикле не является всегда возможной.

гдѣ A, B, C, D аналитическія функціи x, y, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ (причемъ D можетъ зависѣть также и отъ z при условіи $D'_z \geqq 0$). Такимъ образомъ, *устанавливается возможность задачи Дирикле въ случаѣ, когда*

$$A - \frac{B^2}{C} > 0\,, \quad C - \frac{B^2}{A} > 0$$

и возрастаніе D, при $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ *безконечномъ, не быстрѣе квадратовъ этихъ величинъ.*

Напримѣръ, для уравненія минимальныхъ поверхностей

$$\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0\,.$$

находимъ

$$A - \frac{B^2}{C} = 1 + \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} > 0\,, \quad C - \frac{B^2}{A} = 1 + \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} > 0\,, \quad D = 0\,.$$

Случай *неаналитическихъ* коэффиціентовъ разсматривается, какъ предѣльный случай аналитическихъ, благодаря теоремѣ Вейерштрасса. И вмѣстѣ съ тѣмъ обнаруживается возможность задачи Дирикле, если окружность замѣнить произвольнымъ (съ нѣкоторыми ограниченіями) контуромъ.

Въ настоящемъ сочиненіи я ограничиваюсь изученіемъ уравненій съ одной неизвѣстной функціей отъ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ, но не подлежитъ сомнѣнію, что методы, изложенные здѣсь, примѣнимы и въ случаѣ нѣсколькихъ неизвѣстныхъ функцій и бóльшаго числа перемѣнныхъ. Особенный интересъ представляетъ примѣненіе метода аналитическаго продолженія при болѣе сложныхъ данныхъ на контурѣ, чѣмъ въ разсматриваемомъ мною случаѣ задачи Дирикле.

Вышеизложенное далеко, конечно, не исчерпываетъ всѣхъ дѣйствительныхъ и возможныхъ примѣненій теоріи аналитическихъ функцій, но я имѣлъ въ виду установить лишь два положенія: *общіе пріемы изученія, классификаціи и вычисленія функцій являются необходимымъ условіемъ дальнѣйшаго развитія анализа; теорія аналитическихъ функцій впервые открываетъ эти пріемы, указывая опредѣленный, хотя и не всегда кратчайшій путь къ разрѣшенію всякой задачи анализа—аналитическое продолженіе (съ комплексной или реалистической точки зрѣнія).*

Настоящее же сочиненіе, посвященное интегрированію и изслѣдованію уравненій съ частными производными эллиптическаго типа, является иллюстраціей примѣненія теоріи аналитическихъ функцій къ разрѣшенію вещественныхъ задачъ [1]).

---

[1]) Важнѣйшіе выводы были сообщены мною Парижской Академіи Наукъ 16 ноября 1903 г., 24 ноября 1904 г., 29 мая и 2 октября 1905 г., 5 марта 1906 г., 13 мая 1907 г. Кромѣ того, нѣкоторыя части настоящаго сочиненія представляютъ болѣе или менѣе измѣненный переводъ статей, помѣщенныхъ въ Mathematische Annalen въ 1904 г. „Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles du second ordre“, въ 1905 г. „Sur la déformation des surfaces“, въ 1906 г. „Sur la généralisation du problème de Dirichlet“.

ПЕРВАЯ ЧАСТЬ

Аналитическая природа рѣшеній дифференціальныхъ уравненій съ частными производными эллиптическаго типа.

Глава I.

Теорема Пикара.

§ 1. Коши первый обратилъ вниманіе геометровъ на замѣчательное свойство нѣкоторыхъ дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, что *ихъ интегралы аналитичны, каковы бы ни были входящія въ нихъ произвольныя функціи.*

Простѣйшимъ образцомъ такого уравненія является уравненіе Лапласа

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

(*всякое* рѣшеніе котораго можетъ быть представлено въ видѣ суммы

$$z = f(x + iy) + f_1(x - iy),$$

гдѣ f и f_1 функціи комплексной перемѣнной).

Въ 1890 году Пикаръ [1]) показалъ, что *указаннымъ свойствомъ обладаютъ всѣ дифференціальныя уравненія 2-го порядка эллиптическаго типа:*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0, \tag{5}$$

гдѣ a, b, c *аналитическія* функціи перемѣнныхъ x, y.

Мы приведемъ здѣсь съ нѣкоторыми измѣненіями изящное доказательство Пикара, въ основѣ котораго лежитъ слѣдующая мысль, являющаяся руководящей и для дальнѣйшихъ обобщеній.

---

[1]) Journal de l'Ecole Polytechnique, 1890. Въ 1895 въ C. R. de l'Ac. des Sc. Пикаръ показалъ, что тѣмъ же свойствомъ обладаютъ и *линейныя уравненія высшихъ порядковъ съ мнимыми характеристиками.* Но въ настоящей работѣ мы оставимъ въ сторонѣ уравненія высшаго порядка.

Каждое рѣшеніе z уравненія (5), разсматриваемое въ достаточно малой области, можетъ быть получено путемъ *послѣдовательныхъ приближеній*, т. е. представлено въ видѣ сходящагося ряда аналитическихъ функцій, къ которому примѣняются общіе критеріи для распознаванія аналитическаго характера.

Итакъ, допустимъ, что нѣкоторое рѣшеніе z уравненія (5) конечно внутри части S плоскости вещественныхъ перемѣнныхъ x, y такъ же, какъ и его производныя первыхъ двухъ порядковъ. Въ такомъ случаѣ, полагая начало координатъ O внутри S, для всякой точки внутри этой области будемъ очевидно имѣть:

$$z = z_0 + p_0 x + q_0 y + \frac{1}{2}\varphi_1 x^2 + \varphi_2 xy + \frac{1}{2}\varphi_3 y^2, \tag{6}$$

гдѣ z_0, p_0, q_0 постоянныя величины, а φ_1, φ_2, φ_3 функціи x, y, модуль которыхъ менѣе высшаго предѣла M производныхъ первыхъ двухъ порядковъ z.

Точно также

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p_0 + \psi_1 x + \psi_2 y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q_0 + \pi_1 x + \pi_2 y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \chi_1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \chi_2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \chi_3$$

гдѣ χ_1, χ_2, π_1, π_2, χ_1, χ_2 и χ_3 менѣе M.

Полагая затѣмъ $x = \varrho \cos \theta$, $y = \varrho \sin \theta$, получимъ

$$\begin{gathered} z = z_0 + \varrho (p_0 \cos \theta + q_0 \sin \theta) + \varrho^2 \Phi_0(\varrho, \theta) \\ \frac{\partial z}{\partial x} = p_0 + \varrho \Phi_1(\varrho, \theta) \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q_0 + \varrho \Phi_2(\varrho, \theta) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \Phi_3(\varrho, \theta) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \Phi_4(\varrho, \theta) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \Phi_5(\varrho, \theta), \end{gathered} \tag{7}$$

гдѣ $|\Phi_i| < 2M$, если ϱ менѣе радіуса R' нѣкотораго круга C', цѣликомъ лежащаго въ области S и имѣющаго центръ въ O.

Такимъ образомъ изъ равенства $\frac{\partial z}{\partial \theta} = -\frac{\partial z}{\partial x} y + \frac{\partial z}{\partial y} x$ вытекаетъ

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta} = -\Phi_1 \sin \theta + \Phi_2 \cos \theta.$$

И затѣмъ изъ равенства

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}y^2-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}xy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}x^2-\frac{\partial z}{\partial x}x-\frac{\partial z}{\partial y}y$$

выводимъ

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial\theta^2}=\Phi_3\sin^2\theta-2\Phi_4\sin\theta\cos\theta+\Phi_5\cos^2\theta-\Phi_1\cos\theta-\Phi_2\sin\theta\,.$$

Слѣдовательно

$$\left|\frac{\partial\Phi_0}{\partial\theta}\right|<4M\,,\qquad\left|\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\theta^2}\right|<10M.$$

Откуда заключаемъ, что на окружности C радіуса R меньшаго, чѣмъ R' (и внутри ея), $\Phi_0(\varrho,\ \theta)$ разлагается въ тригонометрическій рядъ

$$\Phi_0=c_0+\sum_1^\infty c_n\cos n\theta+d_n\sin n\theta\,,$$

причемъ имѣютъ мѣсто неравенства

$$\begin{aligned}&|c_0|+\sum_1^\infty|c_n|+|d_n|<82M<N\\&\sum_1^\infty n\{|c_n|+|d_n|\}<200M^2+4<N.\end{aligned}\tag{8}$$

Въ самомъ дѣлѣ

$$c_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi_0 d\theta$$

$$c_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi_0\cos n\theta\,d\theta=-\frac{1}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\theta^2}\cos n\theta\,d\theta$$

$$d_n=-\frac{1}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}\sin n\theta\,d\theta\,.$$

Слѣдовательно

$$|c_0|<2M,\quad|c_n|<\frac{20M}{n^2},\quad|d_n|<\frac{20M}{n^2}.$$

Отсюда непосредственно вытекаетъ первое изъ неравенствъ (8). Чтобы получить второе неравенство, воспользуемся замѣчательной формулой

$$\int_0^{2\pi}[f(\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta\right]^2 + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta\right]^2 + \left[\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta\, d\theta\right]^2\right\}.$$

Замѣняя въ ней $f(\theta)$ черезъ $\dfrac{\partial^2 \Phi_0}{\partial\theta^2}$, замѣчаемъ, что

$$\sum_1^{\infty}\{c_n^2 n^4 + d_n^2 n^4\} < 200M^2.$$

Но мы можемъ сдѣлать два предположенія относительно $|nc_n|$: либо $|nc_n| \geqq c_n^2 n^4$; либо $|nc_n| < c_n^2 n^4$. Поэтому замѣчая, что первое предположеніе равносильно $|c_n| \leqq \dfrac{1}{n^3}$, выводимъ искомое неравенство

$$\sum_1^{\infty} n\{|c_n| + |d_u|\} < 200M^2 + 4.$$

Такимъ образомъ, принимая во вниманіе формулы (7), заключаемъ, что на окружности C

$$z = \alpha_0 + \sum_1^{\infty}\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta,$$

причемъ

$$\begin{aligned}
&|\alpha_0 - z_0| + \sum_1^{\infty}|\alpha_n| + |\beta_n| < 2MR + NR^2 < LR \\
&\left|\frac{\alpha_1}{R} - p_0\right| + \sum_2^{\infty}\frac{n}{R}\{|\alpha_n| + |\beta_n|\} < NR < LR \qquad (9)\\
&\left|\frac{\beta_1}{R} - q_0\right| + \sum_2^{\infty}\frac{n}{R}\{|\alpha_n| + |\beta_u|\} < NR < LR.
\end{aligned}$$

Таковы весьма важныя неравенства, которыя мы хотѣли установить.

Примѣнимъ теперь способъ послѣдовательныхъ приближеній къ опредѣленію a priori рѣшенія u уравненія (5), которое на окружности C совпадало бы съ разсмотрѣннымъ рѣшеніемъ z и такъ же, какъ и это послѣднее, имѣло бы конечныя производныя первыхъ двухъ порядковъ внутри C. Далѣе мы увидимъ, и это весьма существенно, что, если кругъ C достаточно малъ, то $z = u$ при всѣхъ значеніяхъ перемѣнныхъ.

Напишемъ систему уравненій:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = 0, \\
&\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = a\frac{\partial u_0}{\partial x} + b\frac{\partial u_0}{\partial y} + cu_0, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} = a\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + cu_{n-1}. \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Опредѣляемъ сначала u_0, присовокупляя условіе, что на окружности C $u_0 = z$. Найденное такимъ образомъ значеніе u_0 подставляемъ во второе уравненіе, изъ котораго опредѣляемъ u_1 при условіи, что на окружности C $u_1 = z$. И такъ далѣе.

Очевидно, что, если при безконечномъ возрастаніи n, u_n вмѣстѣ съ производными первыхъ двухъ порядковъ стремятся равномѣрно къ нѣкоторымъ предѣламъ, то предѣлъ u_n будетъ нѣкоторой функціей, которая удовлетворяетъ уравненію (5) и на окружности C принимаетъ тѣ же значенія, что и z.

Итакъ нужно доказать, что u_n дѣйствительно стремится къ нѣкоторому предѣлу такъ же, какъ и ея производныя первыхъ двухъ порядковъ, т. е. доказать сходимость рядовъ

$$u = u_0 + (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \ldots\; (u_n - u_{n-1}) + \ldots$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial (u_1 - u_0)}{\partial x} + \ldots \qquad \frac{\partial (u_n - u_{n-1})}{\partial x} + \ldots$$

и т. д.

Кромѣ того, мы покажемъ, что эти ряды представляютъ собой аналитическія функціи. А затѣмъ останется лишь показать, что $u = z$ внутри круга C.

Вмѣсто функцій $u_1, u_2, \ldots, u_n$, удобно разсматривать ихъ разности $v_n = u_n - u_{n-1}$, такъ что

$$u = u_0 + v_1 + \ldots + v_n + \ldots \tag{11}$$

и система уравненій (10) приводится къ системѣ:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = a \frac{\partial u_0}{\partial x} + b \frac{\partial u_0}{\partial y} + c u_0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (12)$$

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2} = a \frac{\partial v_{n-1}}{\partial x} + b \frac{\partial v_{n-1}}{\partial y} + c v_{n-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

гдѣ v_n опредѣляется условіемъ, что на окружности C $v_n = 0$.

Мы видимъ, что на ряду со всѣмъ извѣстнымъ интегрированіемъ уравненія Лапласа при данныхъ значеніяхъ рѣшенія на окружности, наше доказательство требуетъ интегрированія уравненія Пуассона

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = F(x, y) \qquad (13)$$

и кромѣ того, намъ нуженъ критерій для того, чтобъ при разсмотрѣніи полученнаго ряда (11) быть въ состояніи узнать, что онъ представляетъ аналитическую функцію. Итакъ приступимъ сейчасъ къ установленію этого критерія (Гарнака).

§ 2. Лемма. *Положимъ, что* $F(x, y)$ *аналитическая функція комплексныхъ перемѣнныхъ* x *и* y, *правильная при всѣхъ значеніяхъ* x *и* y, *удовлетворяющихъ условіямъ* $|x + yi| \leqq R$ и $|x - yi| \leqq R$. *Если положимъ* $x = \varrho \cos\theta$ и $y = \varrho \sin\theta$, *то*

$$F(x, y) = F(\varrho\cos\theta,\ \varrho\sin\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta,$$

гдѣ

$$A_n = \varrho^n \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_{p,n} \varrho^{2p} \quad \text{и} \quad B_n = \varrho^n \sum_{p=0}^{\infty} \beta_{p,n} \varrho^{2p},$$

причемъ рядъ

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} R^{n+2p} [|\alpha_{p,n}| + |\beta_{p,n}|]$$

сходится.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы введемъ новыя перемѣнныя $z_1 = x + yi$ и $z_2 = x - yi$, то получимъ

$$F(x, y) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} b_{p,q} z_1^p z_2^q$$

При чемъ этотъ рядъ будетъ абсолютно сходящимся при $|z_1| \leq R$ и $|z_2| \leq R$. Но $z_1^p z_2^q = \varrho^{p+q}[\cos(p-q)\theta + i\sin(p-q)\theta]$.

Полагая затѣмъ $p - q = \pm n$, такъ чтобъ n всегда было положительнымъ, получаемъ

$$F(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\varrho)\cos n\theta + B_n(\varrho)\sin n\theta,$$

гдѣ

$$A_n = \varrho^n \sum_{p=0}^{\infty} [b_{p,p+n} + b_{p+n,p}]\varrho^{2p} = \varrho^n \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_{p,n}\varrho^{2p}$$

$$B_n = \varrho^n \sum_{p=0}^{\infty} i[b_{p+n,p} - b_{p,p+n}]\varrho^{2p} = \varrho^n \sum_{p=0}^{\infty} \beta_{p,n}\varrho^{2p}$$

Слѣдовательно, рядъ

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} R^{n+2p}[|\alpha_{p,n}| + |\beta_{p,n}|] \leq 2\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} R^{p+q}|b_{p,q}|$$

сходится, что и требовалось доказать.

Мы будемъ обозначать величину N символомъ $[F(x, y)]_R$ и будемъ называть ее нормою функціи $F(x, y)$ относительно R. Послѣ намъ прійдется обобщить это понятіе.

Обратная лемма. *Если данъ тригонометрическій рядъ*

$$\Phi(\varrho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta$$

гдѣ

$$A_n(\varrho) = \varrho^n \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_{p,n}\varrho^{2p} \qquad B_n(\varrho) = \varrho^n \sum_{p=0}^{\infty} \beta_{p,n}\varrho^{2p},$$

котораго норма N конечна, то полагая $x = \varrho\cos\theta$, $y = \varrho\sin\theta$, находимъ, что $\Phi(\varrho, \theta) = F(x, y)$ есть аналитическая функція правильная при всѣхъ комплексныхъ значеніяхъ x и y, удовлетворяющихъ неравенствамъ $|x + yi| < R$ и $|x - yi| < R$.

Въ самомъ дѣлѣ, полагая по прежнему $|x + yi| = z_1$ и $|x - yi| = z_2$ мы убѣждаемся, что

$$\Phi(\varrho, \theta) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} b_{p,q} z_1^p z_2^q,$$

гдѣ

$$b_{p,p+n} = \frac{\alpha_{p,n} + i\beta_{p,n}}{2}, \quad b_{p+n,p} = \frac{\alpha_{p,n} - i\beta_{p,n}}{2},$$

откуда слѣдуетъ сходимость ряда

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} R^{p+q}\,|\,b_{p,q}\,| \leqq \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} R^{n+2p}[\,|\,\alpha_{p,n}\,| + |\,\beta_{p,n}\,|\,] = N,$$

и обратная лемма такимъ образомъ доказана.

Введемъ еще новое обозначенiе.

Пусть дано разложенiе по степенямъ перемѣнныхъ $F(x_1 x_2 \ldots x_n)$; мы обозначимъ черезъ $\overset{+}{F}(a_1 a_2 \ldots a_n)$ рядъ, который получится, если замѣнить всѣ коэффицiенты ихъ модулями, а перемѣнныя $x_1 x_2 \ldots x_n$ соотвѣтственно числами $a_1 a_2 \ldots a_n$.

Нетрудно теперь доказать слѣдующее неравенство:

$$F[f_1(xy),\ f_2(xy),\ f_3(xy), \ldots f_n(xy)]_R \leqq \overset{+}{F}([f_1(xy)]_R \ldots) \tag{14}$$

Въ самомъ дѣлѣ, для этого достаточно убѣдиться, что

$$[f(xy) + \varphi(xy)]_R \leqq [f(xy)]_R + [\varphi(xy)]_R \tag{14'}$$

и

$$[f(xy) \cdot \varphi(xy)]_R \leqq [f(xy)]_R \cdot [\varphi(xy)]_R. \tag{14''}$$

Первое изъ этихъ неравенствъ очевидно; чтобъ доказать второе, положимъ

$$f(xy) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\varrho)\cos n\theta + B_n(\varrho)\sin n\theta$$

$$\varphi(xy) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\varrho)\cos n\theta + D_n(\varrho)\sin n\theta$$

Тогда произведенiе $f.\varphi$ выразится суммой членовъ подобныхъ

$$A_p(\varrho)\,.\,D_q(\varrho)\cos p\theta \sin q\theta = \frac{A_p D_q}{2}[\sin(p+q)\theta + \sin(q-p)\theta],$$

и замѣчая, что

$$\left[\frac{A_p D_q}{2}(\sin(p+q)\theta + \sin(q-p)\theta)\right]_R \leqq \overset{+}{A}_p(R)\,.\,\overset{+}{D}_q(R)$$

убѣждаемся въ правильности (14″).

§ 3. Мы можемъ приступить теперь къ рѣшенiю уравненiя (13) полагая, что $F(x, y)$ имѣетъ конечную *норму* $[F(x, y)]_R$ и, слѣдовательно, аналитична внутри круга C радiуса R.

Отъ замѣны $x = \varrho\cos\theta$, $y = \varrho\sin\theta$ уравненіе (13) получаетъ форму

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial v}{\partial\varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2} = F(x, y) = A_0(\varrho) + \sum_1^\infty A_n(\varrho)\cos n\theta + B_n(\varrho)\sin n\theta .$$

Откуда, полагая

$$v = C_0(\varrho) + \sum_1^\infty C_n(\varrho)\cos n\theta + D_n(\varrho)\sin n\theta ,$$

находимъ, что при всякомъ значеніи n (не исключая и $n = 0$), C_n и D_n удовлетворяютъ уравненіямъ

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 C_n}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dC}{d\varrho} - \frac{n^2}{\varrho^2} C_n = A_n(\varrho) \\ &\frac{d^2 D_n}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dD_n}{d\varrho} - \frac{n^2}{\varrho^2} D_n = B_n(\varrho) . \end{aligned} \tag{15}$$

Мы не будемъ останавливаться на интегрированіи этихъ уравненій, не представляющемъ трудностей, и дадимъ лишь готовыя формулы, которыя читатель провѣритъ безъ труда.

Если мы хотимъ, чтобъ v обращалось въ нуль при $\varrho = R$ и не имѣло никакихъ особенностей при $\varrho < R$, то мы должны взять рѣшенія уравненій (15), удовлетворяющія тѣмъ же условіямъ. Такимъ образомъ находимъ

$$\begin{aligned} &C_0(\varrho) = \int_R^\varrho \frac{d\varrho}{\varrho}\int_0^\varrho \varrho A_0 d\varrho \\ &2nC_n(\varrho) = \varrho^n \int_R^\varrho \frac{A_n}{\varrho^{n-1}}\, d\varrho - \frac{1}{\varrho^n}\int_0^\varrho A_n\varrho^{n+1} d\varrho + \frac{\varrho^n}{R^{2n}}\int_0^R A_n\varrho^{n+1} d\varrho \\ &2nD_n(\varrho) = \varrho^n \int_R^\varrho \frac{B_n}{\varrho^{n-1}}\, d\varrho - \frac{1}{\varrho^n}\int_0^\varrho B_n\varrho^{n+1} d\varrho + \frac{\varrho^n}{R^{2n}}\int_0^R B_n\varrho^{n+1} d\varrho . \end{aligned} \tag{16}$$

Полезно также привести и другія выраженія для C_n и D_n, имѣющія мѣсто и при $n = 0$. Полагая

$$A_n = \varrho^n \sum_{p=0}^\infty \alpha_{p,n}\varrho^{2p}, \quad B_n = \varrho^n \sum_{p=0}^\infty \beta_{n,p}\varrho^{2p},$$

получаемъ

$$
\begin{aligned}
C_n &= \varrho^n \sum_{p=0}^{\infty} \gamma_{p,n} \varrho^{2p} = \frac{\varrho^n}{R^{n-2}} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{\varrho^{2p+2}}{R^{2p+2}} - 1 \right) \frac{\alpha_{p,n}}{(2p+2)(2p+2n+2)} \\
D_n &= \varrho^n \sum_{p=0}^{\infty} \delta_{p,n} \varrho^{2p} = \frac{\varrho^n}{R^{n-2}} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{\varrho^{2p+2}}{R^{2p+2}} - 1 \right) \frac{\beta_{p,n}}{(2p+2)(2p+2n+2)}.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Изъ формулъ (17) выводимъ слѣдующія *чрезвычайно важныя неравенства*

$$
\begin{aligned}
&\overset{+}{C}_n(R) < \frac{R^2}{2n+2} \overset{+}{A}_n(R) \qquad \frac{d\overset{+}{C}_n(R)}{d\varrho} < \frac{R}{2} \overset{+}{A}_n(R) \\
&\overset{+}{D}_n(R) < \frac{R^2}{2n+2} \overset{+}{B}_n(R) \qquad \frac{d\overset{+}{C}_n(R)}{d\varrho} < \frac{R}{2} \overset{+}{A}_n(R)
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Изъ неравенства (18) вытекаетъ во-первыхъ непосредственно

$$
[v(x, y)]_R = \overset{+}{C}_0(R) + \sum_{n=1}^{\infty} [\overset{+}{C}_n(R) + \overset{+}{D}_n(R)] < R^2 [F(x, y)]_R. \tag{19}
$$

Далѣе, легко показать, что

$$
\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]_R < 2R[F(x, y)]_R, \quad \left[\frac{\partial v}{\partial y}\right]_R < 2R[F(x, y)_R. \tag{19bis}
$$

Въ самомъ дѣлѣ,

$$
\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \varrho} \cos\theta - \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\sin\theta}{\varrho}.
$$

Съ другой стороны

$$
\left[\frac{\partial v}{\partial \varrho} \cos\theta\right]_R < \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{d\overset{+}{C}_n(R)}{d\varrho} + \frac{d\overset{+}{D}_n(R)}{d\varrho} \right\} < R[F(x, y)]_R,
$$

а

$$
\left[\frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\sin\theta}{\varrho}\right]_R < \sum_{n=1}^{\infty} n \left\{ \frac{\overset{+}{C}_n(R)}{R} + \frac{\overset{+}{D}_n(R)}{R} \right\} < \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{d\overset{+}{C}_n(R)}{d\varrho} + \frac{d\overset{+}{D}_n(R)}{d\varrho} \right\} < R[F(x, y)]_R.
$$

Совершенно аналогичное разсужденіе приводитъ и ко второму изъ неравенствъ (19^{bis}).

§ 4. Такимъ образомъ мы закончили всѣ необходимыя приготовленія для того, чтобъ доказать, что, въ случаѣ, если радіусъ R круга C достаточно малъ, *строка* (11) *равномѣрно сходящаяся и представляетъ собой аналитическую функцію.*

Въ самомъ дѣлѣ, возвратимся къ системѣ уравненій (12). Мы замѣчаемъ прежде всего, что u_0, которое на окружности C равно $z = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta$, внутри круга C должно быть равно

$$u_0 = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n [\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta].$$

Но равенства (9) показываютъ намъ, что

$$[u_0(xy)]_R < P, \quad \left[\frac{\partial u_0}{\partial x}\right]_R < P, \quad \left[\frac{\partial u_0}{\partial y}\right]_R < P,$$

гдѣ P есть вполнѣ опредѣленное число.

Примѣняя затѣмъ неравенства (14′) и (14″) и означая буквою Q высшій предѣлъ $[a(xy)]_R$, $[b(xy)]_R$, $[c(xy)]_R$, получаемъ

$$\left[a\frac{\partial u_0}{\partial x} + b\frac{\partial u_0}{\partial y} + cu_0\right]_R < 3PQ.$$

При помощи же неравенствъ (19) и (19^{bis}) находимъ

$$[v_1]_R < 3PQ.R, \quad \left[\frac{\partial v_1}{\partial x}\right]_R < 3PQ.2R,$$
$$\left[\frac{\partial v_1}{\partial x}\right]_R < 3PQ.2R.$$

Если допустимъ, что $R < 1$, то легко найдемъ, что

$$\left[a\frac{\partial v_1}{\partial x} + b\frac{\partial v_1}{\partial y} + cv_1\right]_R < 3PQ.6QR.$$

Послѣдовательно примѣняя неравенства (19) и (19^{bis}), находимъ такимъ образомъ:

$$[v_2]_R < P.(6QR)^2, \quad \left[\frac{\partial v_2}{\partial x}\right]_R < P.(6QR)^2, \quad \left[\frac{\partial v_2}{\partial y}\right]_R < P.(6QR)^2$$

$$[v_3]_R < P.(6QR)^3, \quad \left[\frac{\partial v_3}{\partial x}\right]_R < P.(6QR)^3, \quad \left[\frac{\partial v_3}{\partial y}\right]_R < P.(6QR)^3$$

. . . .

$$[v_n]_R < P.(6QR)^n, \quad \left[\frac{\partial v_n}{\partial x}\right]_R < P.(6QR)^n, \quad \left[\frac{\partial v_n}{\partial y}\right]_R < P.(6QR)^n.$$

Достаточно такимъ образомъ предположить, что $R < \frac{1}{6Q}$, для того, чтобы строка $u = u_0 + v_1 + \ldots + v_n + \ldots$ была *равномѣрно сходящеюся и имѣла конечную норму внутри круга C и слѣдовательно* (на основаніи обратной леммы § 2) *была аналитической*. Наконецъ, чтобъ не было сомнѣній, что u дѣйствительно удовлетворяетъ уравненію (1), нужно показать сходимость рядовъ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial x} + \ldots, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \ldots, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \ldots \text{ и т. д.}$$

Но это, очевпдно, вытекаетъ, на основаніи извѣстной теоремы изъ теоріи функцій, изъ сходимости ряда u при $x + yi = R$ и $x - yi = R$.

Итакъ аналитическая функція u есть рѣшеніе уравненія (5), *которое на окружности C совпадаетъ съ z.* Остается показать, что u вообще тождественно съ z. Однако мы сдѣлаемъ это послѣ, а сначала покажемъ вслѣдъ за гг. Люткемейеръ [1]) и Гольмгренъ [2]), что разсужденіе Пикара безъ существенныхъ измѣненій можетъ быть примѣнено къ уравненіямъ вида

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f\left(xyz \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}\right), \tag{20}$$

гдѣ f есть нѣкоторая аналитическая функція перемѣнныхъ

$$x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}.$$

§ 5. Подобно системѣ уравненій (10) составляемъ систему

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = f(00 z_0 p_0 q_0) = A$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = f\left(xyu_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial y}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} = f\left(xyu_{n-1} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

---

[1]) Göttingen, Dissertation. 1902.

[2]) Mathematische Annalen. 1903.

гдѣ z_0, p_0, q_0 представляютъ значенія z и ея первыхъ производныхъ въ началѣ координатъ, а u_n попрежнему на окружности C достаточно малаго радіуса R совпадаетъ съ z. Мы можемъ опять положить $u = u_0 + v_1 + \ldots + v_n$, гдѣ $v_n = u_n - u_{n-1}$. Тогда задача сведется снова къ изслѣдованію ряда u, при чемъ для опредѣленія v_n мы имѣемъ систему

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = A, \\
&\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = f\left(xyu_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial y}\right) - A, \\
&\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} = f\left(xyu_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) - f\left(xyu_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial y}\right), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2} = f\left(xyu_{n-1} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}\right) - f\left(xyu_{n-2} \frac{\partial u_{n-2}}{\partial x} \frac{\partial u_{n-2}}{\partial y}\right). \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Замѣчая, что

$$A\,\frac{x^2 + y^2 - R^2}{4}$$

есть рѣшеніе уравненія

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = A,$$

гдѣ A постоянная величина, которая обращается въ нуль на окружности C, получаемъ благодаря неравенствамъ (9)

$$
\begin{aligned}
&[u_0 - z_0]_R < AR^2 + LR < \lambda, \\
&\left[\frac{\partial u_0}{\partial x} - p_0\right]_R < AR + LR < \lambda, \\
&\left[\frac{\partial u_0}{\partial y} - q_0\right]_R < AR + LR < \lambda.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Очевидно, беря R достаточно малымъ, можемъ сдѣлать λ сколь угодно малымъ. Но

$$
\begin{aligned}
f\left(x,\ y,\ u_0,\ \frac{\partial u_0}{\partial x},\ \frac{\partial u_0}{\partial y}\right) - f(0, 0, z_0, p_0, q_0) = P_0 . x + P_1 . y + P_2 . (u_0 - z_0) + \\
+ P_3 . \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - p_0\right) + P_4 . \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} - q_0\right),
\end{aligned}
$$

гдѣ

$$P_i\left(x,\ y,\ u_0 - z_0,\ \frac{\partial u_0}{\partial x} - p_0,\ \frac{\partial u_0}{\partial y} - q_0\right),$$

разлагаются въ строку Тэйлора; при чемъ, если R' менѣе радіуса сходимости P_i по каждой перемѣнной, то

$$\overset{+}{P}_i(R',\ R',\ R',\ R',\ R') < Q,$$

обозначая черезъ Q нѣкоторое опредѣленное число.

Вообще

$$f\left(xyu_n \frac{\partial u_n}{\partial x} \frac{\partial u_n}{\partial y}\right) - f\left(xyu_{n-1} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}\right) = P_2 v_n + P_3 \frac{\partial v_n}{\partial x} + P_4 \frac{\partial v_n}{\partial y},$$

гдѣ

$$P_i\left(x,\ y,\ u_n - z_0,\ \frac{\partial u_n}{\partial x} - p_0,\ \frac{\partial u_n}{\partial y} - q_0,\ u_{n-1} - z_0,\ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} - p_0,\ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} - q_0\right)$$

разлагаются въ строку Тэйлора и

$$\overset{+}{P}_i(R',\ R',\ R',\ R',\ R',\ R',\ R',\ R') < Q.$$

Тогда изъ неравенства (14) слѣдуетъ, что *норма* P_i *менѣе* Q.

Такимъ образомъ доказательство представляется въ слѣдующемъ видѣ.

На основаніи неравенствъ (22)

$$\left[f\left(x,\ y,\ u_0,\ \frac{\partial u_0}{\partial x},\ \frac{\partial u_0}{\partial y}\right) - f(0,\ 0,\ z,\ p_0,\ q_0)\right]_R < 2QR + 3Q\lambda = L_1$$

и вслѣдствіе (19) и (19^{bis}), полагая $R < 1$, находимъ

$$[v_1]_R < 2RL_1,\ \left[\frac{\partial v_1}{\partial x}\right]_R < 2RL_1,\ \left[\frac{\partial v_1}{\partial y}\right]_R < 2RL_1,$$

откуда

$$\left[f\left(xyu_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) - f\left(xyu_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial y}\right)\right]_R < 6QRL_1,$$

такъ что послѣдовательно находимъ:

$$[v_2]_R < 2RL_1 . 6QR,\ \left[\frac{\partial v_2}{\partial x}\right]_R < 2RL_1 . 6QR,\ \left[\frac{\partial v_2}{\partial y}\right]_R < 2RL . 6QR$$

. . . .

$$[v_n]_R < 2RL_1 . (6QR)^{n-1},\ \left[\frac{\partial v_n}{\partial x}\right]_R < 2RL_1 . (6QR)^{n-1},\ \left[\frac{\partial v_n}{\partial y}\right]_R < 2RL . (6QR)^{n-1}$$

Очевидно, чтобъ наше разсужденіе было правильно, необходимо только предположить, что

$$[u_0 - z_0]_R + [v_1]_R + \dots [v_n]_R < R'$$
$$\left[\frac{\partial u_0}{\partial x} - p_0\right]_R + \left[\frac{\partial v_1}{\partial x}\right]_R + \dots + \left[\frac{\partial v_n}{\partial x}\right]_R < R'$$
$$\left[\frac{\partial u_0}{\partial y} - q_0\right]_R + \left[\frac{\partial v_1}{\partial y}\right]_R + \dots + \left[\frac{\partial v_n}{\partial y}\right]_R < R'$$

или, полагая $R < \frac{1}{6Q}$, предположить, что

$$\lambda + \frac{2RL_1}{1 - 6QR} < R'.$$

Но это предположеніе будетъ осуществленно, если R возьмемъ достаточно малымъ. Слѣдовательно, рядъ $u = u_0 + v_1 + \dots + v_n + \dots$ сходится, и норма его конечна, откуда по примѣру предыдущаго § вытекаетъ во-первыхъ, что *u есть рѣшеніе уравненія* (20), *которое на контурѣ маленькаго круга C совпадаетъ съ z* и во-вторыхъ, что *u есть аналитическая функція.*

Однако все наше разсужденіе окажется недостаточнымъ для доказательства теоремы Пикара, если мы не обнаружимъ полную тождественность найденнаго рѣшенія и даннаго рѣшенія z; для этого поступимъ слѣдующимъ образомъ. По предположенію

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f\left(xyz\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(xyu\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Вычитая первое уравненіе изъ второго и полагая $\delta = u - z$, получимъ

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} = A\frac{\partial \delta}{\partial x} + B\frac{\partial \delta}{\partial y} + C\delta, \tag{23}$$

гдѣ A, B, C суть конечныя функціи x, y, имѣющія конечныя производныя перваго порядка по этимъ перемѣннымъ. [Въ случаѣ линейности f, функціи A, B, C, совпадаютъ съ коэффиціентами a, b, c уравненія (5)]. Съ другой стороны, модуль

$$\left| A\frac{\partial \delta}{\partial x} + B\frac{\partial \delta}{\partial y} + C\delta \right| < 3\mu N,$$

гдѣ μ наибольшій изъ модулей $|A|$, $|B|$, $|C|$, а N наибольшій изъ модулей $\left|\frac{\partial\delta}{\partial x}\right|$, $\left|\frac{\partial\delta}{\partial y}\right|$, $|\delta|$. Но, такъ какъ δ обращается въ нуль на окружности C, то, примѣняя формулу Грина [1]), получимъ

$$N \leqq h\mu RN,$$

гдѣ h нѣкоторый постоянный множитель. Полученное неравенство, очевидно, не допускаетъ иного рѣшенія, какъ $N = 0$, если $R < \frac{1}{h\mu}$. Отсюда заключаемъ, что $\delta = u - z = 0$, *и теорема Пикара съ обобщеніемъ Люткемейера и Гольмгрена вполнѣ доказана.*

Прежде, чѣмъ приступить къ доказательству основной теоремы теоріи уравненій эллиптическаго типа въ самой общей формѣ, мы должны прослѣдить главные моменты только что даннаго доказательства. Мы видимъ, что намъ приходилось примѣнять способъ послѣдовательныхъ приближеній при условіяхъ, когда *вторая часть равенства не содержитъ вторыхъ производныхъ*; благодаря неравенствамъ (19) и (19^{bis}), возможно было всегда находить высшіе предѣлы нормъ рѣшенія уравненія Пуассона и его первыхъ производныхъ. Но задача наша весьма затруднилась бы, еслибъ, во второй части равенства находились и вторыя производныя, *такъ какъ ограничить нормы вторыхъ производныхъ мы не можемъ.* Естественно поэтому возникаетъ мысль, такъ видоизмѣнить понятіе нормы (которою обусловливается аналитическій характеръ функціи), чтобы *нормы вторыхъ производныхъ рѣшенія могли также быть ограничены при помощи нормы второй части равенства въ уравненіи Пуассона.* Но возможно ли такое видоизмѣненіе? Въ этомъ, конечно, можно убѣдиться, только совершивши его на самомъ дѣлѣ. Изъ предыдущаго мы можемъ уже, однако, увидѣть, что если изъ конечности употребленной нами нормы вытекаетъ аналитическій характеръ функціи, то обратное утвержденіе не вѣрно, ибо, какъ это слѣдуетъ изъ § 2 *конечность нормы свидѣтельствуетъ о томъ, что функція не имѣетъ особенностей при* $|x + iy| < R$ *и* $|x - iy| < R$, *гдѣ* x, y *берутъ какія угодно комплексныя значенія.* Естественно, поэтому, что *вообще* указанный критерій (Гарнака) неудовлетворителенъ.

Въ слѣдующей главѣ мы займемся вопросомъ объ общихъ способахъ выраженія вещественныхъ функцій и о критеріяхъ для опредѣленія аналитической ихъ природы.

---

[1]) Holmgren, Mathematische Annalen. 1903.

Глава II.

Нормальные ряды.

§ 6. Если нѣкоторая функція

$$f(x) = P_0(x) + P_1(x) + \ldots + P_n(x) + \ldots$$

получена не *искусственно*, а какъ результатъ рѣшенія опредѣленной задачи, то рядъ, ее выражающій, обыкновенно составляется слѣдующимъ образомъ: $P_0(x)$ есть нѣкоторая аналитическая комбинація изъ нѣсколькихъ данныхъ функцій (т. е. содержитъ кромѣ собственно аналитическихъ функцій отъ данныхъ функцій, производныя и интегралы этихъ послѣднихъ), $P_1(x)$ аналитическая комбинація изъ $P_0(x)$ и данныхъ функцій и т. д. Таково напримѣръ выраженіе, которое мы нашли для рѣшенія *u* въ первой главѣ. Естественно поэтому выражать функціи при помощи такихъ выраженій, чтобъ всѣ возможныя аналитическія дѣйствія (сложеніе, умноженіе, дифференцированіе, интегрированіе) могли совершаться надъ ними *почленно*, приводя къ выраженіямъ такой же формы. Легко убѣдиться, что единственнымъ выраженіемъ, обладающимъ этимъ свойствомъ является *рядъ, расположенный по степенямъ линейныхъ функцій перемѣнной*. Если такая линейная функція взята лишь одна, то получается *рядъ Тэйлора*, и въ этомъ его свойствѣ кроется причина его важной роли въ анализѣ. Но къ сожалѣнію въ примѣненіи къ функціямъ вещественной перемѣнной, строка Тэйлора обладаетъ крупнымъ недостаткомъ, что сходимость ея обусловливается *отсутствіемъ особыхъ точекъ внутри цѣлой окружности*; такъ что, напримѣръ функція $\frac{1}{1+2x^2}$ не можетъ быть представлена въ видѣ сходящейся на отрѣзкѣ $(-1, +1)$ строки Тэйлора, несмотря на то, что она не имѣетъ никакихъ вещественныхъ особенностей. Понятно, поэтому, что, если мы хотимъ получить, непремѣнно, рѣшеніе той или иной задачи въ видѣ строки Тэйлора, то мы по большей части, для коэффиціентовъ различныхъ степеней строки получимъ формальныя расходящіяся выраженія. Желая сохранить цѣнныя свойства строки Тэйлора для вещественныхъ функцій, мы должны замѣнить ее двойнымъ рядомъ, расположеннымъ *по возрастающимъ степенямъ двухъ линейныхъ функцій*. Такимъ образомъ мы приходимъ къ *нормальнымъ рядамъ*, которые мы назвали такъ, считая ихъ въ силу указанныхъ свойствъ весьма удобными выраженіями вещественныхъ функцій. Между способами изученія функцій, разложенныхъ въ нормальные ряды, и функцій, представленныхъ строкой Тэйлора, много точекъ соприкосновенія; разница вытекаетъ лишь изъ того, что на каждомъ отрѣзкѣ функція допускаетъ безчисленное множество нормальныхъ разложеній.

Итакъ *нормальнымъ рядомъ мы назовемъ рядъ*

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} A_{p,q} x^p (R-x)^q$$

абсолютно и равномѣрно сходящійся при $0 \leqq x \leqq R$. Нормальный рядъ, очевидно, обладаетъ формальными свойствами строки Тэйлора—а именно, всѣ аналитическія дѣйствія надъ нормальными рядами: сложеніе, умноженіе, дифференцированіе, интегрированіе приводятъ къ тѣмъ же нормальнымъ рядамъ. Эта цѣнная особенность нормальныхъ рядовъ не разъ будетъ использована нами. Но сначала мы покажемъ, что всякая вещественная (аналитическая или не аналитическая) функція, обладающая конечной и непрерывной *первой* производной, можетъ быть представлена въ видѣ нормальнаго ряда, а затѣмъ укажемъ критерій необходимый и достаточный, для того чтобъ этотъ рядъ представлялъ аналитическую функцію.

Теорема. *Всякая вещественная функція* $f(x)$, *имѣющая конечную вторую производную на отрѣзкѣ* 01, *разлагается въ нормальный рядъ на этомъ отрѣзкѣ.*

Въ самомъ дѣлѣ, дифференцируя два раза равенство

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 f''(\alpha)\,|x-\alpha|\,d\alpha + A + Bx,$$

гдѣ $|x-\alpha|$ означаетъ модуль $x-\alpha$, A и B постоянныя величины [1]), легко провѣрить его правильность, ибо прійдемъ къ тождествамъ:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\int_0^x f''(\alpha)d\alpha - \frac{1}{2}\int_x^1 f''(\alpha)d\alpha + B$$

или

$$f''(x) = f''(x).$$

Такимъ образомъ наша теорема будетъ доказана, если намъ удастся разложить въ нормальный рядъ $|x-\alpha|$ при всякомъ значеніи α, удовлетворяющемъ условію $0 \leqq \alpha \leqq 1$.

---

[1]) Значенія A и B слѣдующія: $A = \frac{1}{2}\{f(1)+f(0)-f'(1)\}$, $B = \frac{1}{2}\{f'(0)+f'(1)\}$. (См. мою замѣтку въ Bulletin de la Société Mathématique de France 1905 г. „Sur l'interpolation").

Но для этого достаточно замѣтить, что

$$|x-\alpha| = +\sqrt{1+\alpha^2-(1-x^2+2\alpha x)} =$$
$$= \sqrt{1+\alpha^2}\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{1-x^2+2\alpha x}{1+\alpha^2}\right)-\sum_{K=2}^{\infty}\frac{1.3\ldots 2K-3}{2^K.K!}\left(\frac{1-x^2+2\alpha x}{1+\alpha^2}\right)^K\right\}.$$

Полученный рядъ, какъ извѣстно изъ теоріи бинома Ньютона, *абсолютно и равномѣрно* сходится при значеніяхъ x удовлетворяющихъ неравенствамъ

$$-1 \leqq \frac{1-x^2+2\alpha x}{1+\alpha^2} \leqq 1,$$

что въ частности имѣетъ мѣсто, если $0 \leqq x \leqq 1$. Слѣдовательно, замѣчая, что $(1-x^2)$, такъ же какъ и $2\alpha x$ положительны, заключаемъ, что абсолютная сходимость не нарушится, если разобьемъ нашъ простой рядъ на двойной, полагая

$$(1-x^2+2\alpha x)^K = (1-x^2)^K + K.2\alpha x(1-x^2)^{K-1} + \ldots (2\alpha x)^K,$$

такъ что получимъ наконецъ

$$|x-\alpha| = \sqrt{1+\alpha^2}.\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{1-x^2+2\alpha x}{1+\alpha^2}\right)-\sum_p^{\infty}\sum_q^{\infty} B_{p,q}x^p(1-x^2)^q\right\},$$

гдѣ двойная сумма относится ко всѣмъ положительнымъ числамъ p и q, удовлетворяющимъ условію $p+q \geqq 2$, при чемъ

$$B_{p,q} = \frac{1.3\ldots[2(p+q)-3].\alpha^p}{p!\,q!\,2^q.(1+\alpha^2)^{p+q}}.$$

Откуда

$$f(x) = a+bx+cx^2+\sum_p^{\infty}\sum_q^{\infty} A_{p,q}x^p(1-x^2)^q,$$

гдѣ двойная сумма относится къ положительнымъ числамъ p, q, удовлетворяющимъ условію $p+q \geqq 2$, при чемъ

$$A_{p,q} = -\frac{1.3\ldots[2(p+q)-3]}{p!\,q!\,2^{q+1}}\int_0^1 f''(\alpha)\frac{\alpha^p d\alpha}{(1+\alpha^2)^{p+q-\frac{1}{2}}}. \qquad (24)$$

Что касается коэффиціентовъ a, b, c, то ихъ выраженіе читатель найдетъ самъ, но сейчасъ для насъ они не представляютъ интереса. Такимъ образомъ теорема доказана, и найдено фактически разложеніе данной функціи въ нормальный рядъ.

Не останавливаясь на весьма интересномъ изученіи a priori нормальнаго ряда, котораго коэффиціенты даны формулой (24), что отвлекло бы насъ слишкомъ далеко въ сторону, придадимъ лишь этимъ коэффиціентамъ при помощи интегрированія по частямъ [1]) новую форму, изъ которой видно будетъ, что *всякая функція, имѣющая непрерывную и конечную первую производную, разлагается въ нормальный рядъ*. Очевидно,

$$A_{pq} = -\frac{1.3\ldots[2(p+q)-3]}{p\,!\,q\,!\,2^{q+1}}\left[\frac{f'(1)}{2^{p+q-\frac{1}{2}}} - \int_0^1 f'(\alpha) d\frac{\alpha^p}{(1+\alpha^2)^{p+q-\frac{1}{2}}}\right],$$

если $p \neq 0$, и

$$A_{0q} = -\frac{1.3\ldots(2q-3)}{q\,!\,2^{q+1}}\left[\frac{f'(1)}{2^{q-\frac{1}{2}}} - f'(0) - \int_0^1 f'(\alpha) d\frac{1}{(1+\alpha^2)^{q-\frac{1}{2}}}\right]$$

или, полагая для простоты $f'(1) = f'(0) = 0$ (чего всегда можно достигнуть измѣненіемъ коэффиціентовъ a, b, c)

$$A_{p,q} = \frac{1.3\ldots[2(p+q)-3]}{2^{q+1}\,!\,p\,!\,q\,!}\int_0^1 f'(\alpha).d\frac{\alpha^p}{(1+\alpha^2)^{p+q-\frac{1}{2}}} \tag{24$^{\text{bis}}$}$$

Полагая $|f'(\alpha)| < M$ и замѣчая, что

$$\frac{\alpha^p}{(1+\alpha^2)^{p+q-\frac{1}{2}}}$$

имѣетъ лишь одинъ максимумъ равный

$$\frac{\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{p}{2}}.\left[\frac{p}{2}+q-\frac{1}{2}\right]^{\frac{p}{2}+q-\frac{1}{2}}}{\left(p+q-\frac{1}{2}\right)^{p+q-\frac{1}{2}}},$$

находимъ, что

$$|A_{p,q}| < \frac{1.3\ldots[2(p+q)-3]}{2^q.p\,!\,q\,!}.\frac{\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{p}{2}}.\left(\frac{p}{2}+q-\frac{1}{2}\right)^{\frac{p}{2}+q-\frac{1}{2}}}{\left(p+q-\frac{1}{2}\right)^{p+q-\frac{1}{2}}}.M.$$

---

[1]) Легко видѣть, что коэффиціенты (24) имѣютъ смыслъ для всякой *интегрируемой* функціи.

Разсмотримъ сначала коэффиціенты A_{pq}, соотвѣтствующіе p *четному*, и положимъ

$$C_{p,q}=\frac{\left(\frac{p}{2}+q\right)!}{\left(\frac{p}{2}\right)!\,q!}$$

Тогда, замѣчая, что

$$1.3\ldots[2(p+q)-3]=\frac{[2(p+q-1)]!}{2^{p+q-1}.(p+q-1)!},$$

получимъ

$$|A_{p,q}|<\frac{[2(p+q-2)]!\left(\frac{p}{2}\right)!}{2^{p+2q-1}.(p+q-1)!\,p!\left(\frac{p}{2}+q\right)!}\cdot\frac{\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{p}{2}}\left(\frac{p}{2}+q-\frac{1}{2}\right)^{\frac{p}{2}+q-\frac{1}{2}}}{\left(p+q-\frac{1}{2}\right)^{p+q-\frac{1}{2}}}C_{p,q}M.$$

Примѣняя извѣстную формулу Стирлинга, находимъ такимъ образомъ, означая черезъ λ нѣкоторое опредѣленное (т. е. независящее отъ p, q и M) конечное число:

$$|A_{p,q}|<\frac{(p+q-1)^{p+q-1}.\left(\frac{p}{2}+q-\frac{1}{2}\right)^{\frac{p}{2}+q-\frac{1}{2}}}{\left(\frac{p}{2}+q\right)^{\frac{p}{2}+q}.\left(p+q-\frac{1}{2}\right)^{p+q-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\lambda C_{p,q}M}{\sqrt{\frac{p}{2}+q}}$$

или еще, означая черезъ μ нѣкоторое новое опредѣленное конечное число,

$$|A_{p,q}|<\frac{\mu C_{pq}M}{\left(\frac{p}{2}+q\right)\sqrt{p+q}}.$$

Но сумма

$$\sum C_{p,q}x^p(1-x^2)^q=1,$$

если p и q принимаютъ всевозможныя цѣлыя положительныя значенія, удовлетворяющія условію $\frac{p}{2}+q=m$, гдѣ m есть какое-нибудь опредѣленное цѣлое положительное число. Слѣдовательно, приходимъ къ выводу, что двойная сумма, относящаяся лишь къ четнымъ значеніямъ p

$$\sum_p^{\infty}\sum_q^{\infty}|A_{pq}|x^p(1-x^2)^q<\mu\sum_m^{\infty}\frac{1}{m^{3/2}}<k_1M.$$

Точно такимъ же образомъ обнаруживается абсолютная и равномѣрная сходимость ряда при p нечетномъ, такъ что для всѣхъ значеній p и q

$$\sum_p^{\infty}\sum_q^{\infty}|A_{p,q}|x^p(1-x^2)^q < kM,$$

гдѣ k нѣкоторый опредѣленный коэффиціентъ.

Итакъ сходимость зависитъ исключительно отъ существованія высшаго предѣла модуля первой производной. Однако мы предполагали, что функція $f(x)$ обладаетъ и второй производной. Чтобъ избавиться отъ этого лишняго условія, приведемъ слѣдующее элементарное соображеніе, въ которомъ мы сохраняемъ для простоты предположеніе, что *первая производная $f'(x)$ непрерывна*. Пусть

$$f(x) = f_1(x) + [f_2(x) - f_1(x)] + \ldots + [f_n - f_{n-1}] + \cdots$$

и

$$f'(x) = f_1'(x) + [f_2'(x) - f_1'(x)] + \ldots \quad [f_n' - f_{n-1}'] + \cdots$$

ряды, которые сходятся абсолютно и равномѣрно при $0 \leq x \leq 1$. Причемъ можемъ выбрать функціи $f_n(x)$ слѣдующимъ образомъ: раздѣлимъ отрѣзокъ 01 на 2^n равныя части; и пусть $f_n(x)$ опредѣляется условіями: чтобъ во-первыхъ $f_n'\left(\frac{k}{2^n}\right) = m_k$, гдѣ k цѣлое положительное число (или 0), и m_k минимальное значеніе $f'(x)$ на отрѣзкѣ равномъ $\frac{1}{2^{n-1}}$, котораго середина въ точкѣ $\frac{k}{2^n}$, во-вторыхъ $f_n(0) = f(0)$, и наконецъ, въ третьихъ, въ промежуткахъ между точками дѣленія кривая $y = f_n(x)$ совпадаетъ съ дугой окружности; такъ что вся кривая $y = f_n(x)$ является цѣпью дугъ окружностей, соприкасающихся въ точкахъ соединенія.

Слѣдовательно, согласно предыдущему $f_n(x)$ разлагается въ нормальный рядъ

$$f_n(x) = \sum_p^{\infty}\sum_q^{\infty} A_{p,q}^{(n)} x^p(1-x^2)^q.$$

Но съ другой стороны мы можемъ написать *a priori*

$$F(x) = \sum_p^{\infty}\sum_q^{\infty} A_{p,q} x^p(1-x)^q,$$

гдѣ коэффиціенты $A_{p,q}$ опредѣляются формулой (24^{bis}). Тогда

$$F(x) - f_n(x) = \sum_p^{\infty}\sum_q^{\infty}(A_{p,q} - A_{p,q}^{(n)})x^p(1-x^2)^q,$$

при чемъ, на основаніи предыдущаго,

$$\sum_p^\infty \sum_q^\infty \left| A_{p,q} - A_{p,q}^{(n)} \right| x^p (1-x^2)^q < k\varepsilon_n,$$

гдѣ ε_n означаетъ максимумъ модуля разности $f'(x) - f'_n(x)$. Слѣдовательно,

$$F(x) = f_1(x) + [f_2(x) - f_1(x)] + \dots \; [f_n(x) - f_{n-1}(x)] + \dots,$$

или

$$F(x) = f(x).$$

Что и требовалось доказать.

Изъ предыдущаго видно съ достаточной ясностью, что нормальные ряды вполнѣ приспособлены для выраженія произвольныхъ функцій. Замѣтимъ также, что полагая $y = \frac{x}{1-x}$, можно придать нормальному ряду форму

$$\sum_p^\infty \sum_q^\infty \frac{A_{p,q} y^p}{(1+y)^{p+q}},$$

которая должна быть употреблена для изображенія функцій при всѣхъ положительныхъ значеніяхъ перемѣнныхъ.

§ 7. Въ нашу задачу не входитъ останавливаться на различныхъ примѣненіяхъ нормальныхъ рядовъ, изъ которыхъ наибольшій интересъ представляетъ суммированіе расходящихся при всѣхъ значеніяхъ перемѣнной строкъ Тэйлора, къ которому мы надѣемся вернуться въ ближайшемъ будущемъ.

Въ настоящій моментъ мы ограничимся изученіемъ особыхъ свойствъ характеризующихъ нормальные ряды, изображающіе *аналитическія* функціи. Изъ доказанной выше теоремы слѣдуетъ, *что аналитическая функція, не имѣющая особенностей на отрѣзкѣ* 01, *разлагается въ нормальный рядъ на этомъ отрѣзкѣ.* Въ виду важности этой послѣдней теоремы, мы дадимъ еще одно ея доказательство, основанное на примѣненіи интеграла Коши, которое естественнымъ путемъ приведетъ насъ къ искомымъ критеріямъ аналитическаго характера.

Для этого окружимъ отрѣзокъ 01 контуромъ S, внутри котораго $f(x)$ по предположенію не имѣетъ особенностей. Въ такомъ случаѣ значеніе функціи въ любой точкѣ x отрѣзка 01 дано интеграломъ Коши:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{f(z)dz}{z-x}.$$

Мы видимъ такимъ образомъ, что достаточно доказать нашу теорему для простой дроби $\frac{A}{a+bi-x}$, гдѣ A есть постоянная величина (по отношенію къ x), а $a+bi$ какая нибудь точка контура S. Но, если $a<0$, то строка Тэйлора по степенямъ $(1-x)$, будучи абсолютно и равномѣрно сходящейся при $0\leqq x\leqq 1$, сама является нормальнымъ рядомъ, точно такъ же, какъ строка расположенная по степенямъ x — въ случаѣ, когда $a>1$. Остается разсмотрѣть случай, когда $0\leqq a\leqq 1$. Для этого замѣтимъ, что

$$\frac{1}{a+bi-x}=\frac{a-x-bi}{x^2-2ax+a^2+b^2}.$$

Поэтому мы, очевидно, можемъ ограничиться разсмотрѣніемъ дроби

$$v=\frac{1}{x^2-2ax+a^2+b^2},$$

гдѣ $0\leqq a\leqq 1$ и $b\neq 0$. Въ такомъ случаѣ

$$v=\frac{1}{1+a^2+b^2-[2ax+1-x^2]}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a^2+b^2+1}\left(\frac{2ax+1-x^2}{a^2+b^2+1}\right)^n=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^n(1+x)^n}{(a^2+b^2+1)^{n+1}}\left[1+(n+1)\frac{2ax}{a^2+b^2+1}+\ldots\right]$$

Но полагая

$$P_n(x)=\frac{(1+x)^n}{(a^2+b^2+1)^{n+1}}\left[1+(n+1)\frac{2ax}{a^2+b^2+1}+\ldots\right]=$$

$$=\frac{(1+x)^n}{(a^2+b^2+1-2ax)^{n+1}},$$

замѣчаемъ, что всѣ члены ряда $P_n(x)$, при $0\leqq x\leqq 1$, положительны и

$$|(1-x)^n\overset{+}{P}_n(x)|=\frac{(1-x^2)^n}{(a^2+b^2+1-2ax)^{n+1}}<\frac{1}{b^2}\left(\frac{1}{1+b^2}\right)^n.$$

Такимъ образомъ v разлагается въ нормальный рядъ, и наша теорема доказана.

Очевидно, нѣтъ надобности прибавлять, что отрѣзокъ 01 можетъ быть замѣненъ любымъ отрѣзкомъ ab.

§ 8. Послѣднее доказательство приводитъ насъ къ особой группировкѣ членовъ нормальнаго ряда, которая равно возможна для *аналитическихъ* и *неаналитическихъ* функцій. А именно всегда можно написать

$$f(x) = \sum_p^\infty \sum_q^\infty A_{pq} x^p (1-x)^q = \sum_n^\infty P_n (1-x)^n,$$

гдѣ $P_n(x)$ строка Тэйлора, разложенная по степенямъ x. Радіусъ сходимости $P_n(1-x)$ не менѣе единицы; и если $n>0$, $\overset{+}{P}_n(1-x)^n$, при приближеніи x къ единицѣ, стремится къ нулю. Очевидно, что функція $\overset{+}{P}_n \cdot (1-x)^n$ имѣетъ абсолютный максимумъ при нѣкоторомъ значеніи x, заключенномъ между нулемъ и единицей. Пусть M_n будетъ этотъ максимумъ. Въ моей работѣ „Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles du second ordre", я разсматриваю рядъ этихъ максимумовъ

$$M = M_0 + M_1 + M_2 + \ldots + M_n + \ldots$$

который я называю *вещественной нормой* функціи $f(x)$. Изъ этого понятія выводится цѣлый рядъ производныхъ понятій и устанавливаются существенныя свойства ихъ. Несмотря на то, что въ большинствѣ случаевъ эти понятія вполнѣ приспособлены для достиженія той цѣли, къ которой они предназначены, я нахожу нужнымъ ввести въ нихъ нѣкоторыя измѣненія, сохраняя прежнюю терминологію и обозначенія. Дѣйствительно, приведенное выше понятіе обладаетъ крупнымъ недостаткомъ: оно не допускаетъ простого *формальнаго* опредѣленія; *фактическое вычисленіе каждаго изъ чиселъ M_n требуетъ разрѣшенія особаго трансцедентнаго уравненія.* Напротивъ, если мы разсмотримъ какой нибудь изъ членовъ двойного ряда $f(x)$

$$A_{pq} x^p (1-x)^q,$$

то максимумъ его модуля m_{pq} достигается при вполнѣ опредѣленномъ значеніи

$$x = \frac{p}{p+q},$$

такъ что

$$m_{p,q} = |A_{pq}| \frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}}.$$

Вмѣсто максимума M_q функціи $\overset{+}{P}_q \cdot (1-x)^q$ мы введемъ вполнѣ опредѣленное выраженіе

$$m_q = \sum_{p=0}^{p=\infty} m_{pq} = \sum_{p=0}^{p=\infty} |A_{pq}| \frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}}.$$

Итакъ, отнынѣ *вещественной нормой* $f(x)$ *будемъ называть вполнѣ опредѣленную сумму*

$$m = m_0 + m_1 + m_2 + \ldots = \sum_p^\infty \sum_q^\infty | A_{pq} | \frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}}.$$

Очевидно, что вообще $m_i \geqq M_i$, и норма можетъ быть безконечна, хотя бы рядъ $f(x)$ и былъ сходящимся. Разсматривая совокупность всѣхъ нормальныхъ разложенiй $f(x)$, мы получимъ совокупность положительныхъ величинъ, образованную соотвѣтственными *нормами*. Эта совокупность должна имѣть низшiй предѣлъ [1]), который назовемъ *низшей вещественной нормой* $f(x)$ и обозначимъ черезъ $[f(x)]_{10}$. Все сказанное, конечно, остается въ силѣ, если отрѣзокъ 01 замѣнить отрѣзкомъ $0R$; низшую норму на $0R$ обозначимъ черезъ $[f(x)]_{R0}$.

Въ частности, если $f(x)$ разлагается въ строку Тэйлора съ положительными коэффицiентами, сходящуюся при $x = R$, такъ что $f(x) = |a_0| + |a_1| x + \ldots + |a_n| x^n + \ldots$, то низшая вещественная норма ея

$$[f(x)]_{R0} = \overset{+}{f}(R) = |a_0| + |a_1| R + \ldots |a_n| R^n + \ldots$$

Но, еслибъ всѣ члены не были положительными, строка Тэйлора давала бы норму значительно превышающую низшую норму. И даже, когда радiусъ сходимости менѣе R, строкѣ Тэйлора $f(x)$ соотвѣтствуетъ безконечная норма, между тѣмъ какъ *низшая* норма ея можетъ быть конечна. Разсмотримъ, напримѣръ, функцiю

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2ax + a^2 + b^2} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(1-x^2)^n}{(1+a^2+b^2)^{n+1}} \left[1 + \frac{n+1}{1} \frac{2ax}{a^2+b^2+1} + \ldots \frac{(n+K)!}{n!\,K!} \left(\frac{2ax}{a^2+b^2+1} \right)^K + \ldots \right]$$

Ясно, что норма функцiи

$$\frac{(n+K)!\,(1-x^2)^n.(2ax)^K}{n!\,K!\,(1+a^2+b^2)^{n+K+1}}$$

менѣе, чѣмъ

$$(n+1) \frac{(n+K)!\,n^n.\left(\frac{K}{2}\right)^{\frac{K}{2}}}{n!\,K!\left(n+\frac{K}{2}\right)^{n+\frac{K}{2}}} . \frac{(2a)^K}{(1+a^2+b^2)^{n+K+1}}$$

---

[1]) Число A называется *низшимъ предѣломъ* совокупности чиселъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, если какъ бы мало ни было число ε, $A - \varepsilon$ менѣе всякаго числа изъ совокупности, и $A + \varepsilon$ болѣе по крайней мѣрѣ одного числа изъ этой совокупности.

или, примѣняя формулу Стирлинга, менѣе, чѣмъ

$$\mu.(n+1)\frac{(n+K)!}{\left(n+\frac{K}{2}\right)!\left(\frac{K}{2}\right)!}\cdot\frac{a^K}{(1+a^2+b^2)^{n+K+1}},$$

гдѣ μ нѣкоторое конечное число.

Группируя члены, для которыхъ $n+K=p$, получимъ, слѣдовательно,

$$[f(x)]_{10}<\mu.\sum_p^\infty p\left(\frac{1+a^2}{1+a^2+b^2}\right)^p<\mu.\left(\frac{1+a^2+b^2}{b^2}\right)^2.$$

Такимъ образомъ норма функціи $f(x)=\frac{1}{x^2-2ax+a^2+b^2}$ конечна, если только b не равно нулю, между тѣмъ какъ для сходимости строки Тэйлора необходимо, чтобы $a^2+b^2>1$. Примѣняя разсужденіе § 7, мы можемъ также заключить, что вещественная норма всякой аналитической функціи конечна на отрѣзкѣ, гдѣ она не имѣетъ особенностей. Но этого мало, не этимъ характеризуется аналитическая функція. Дѣйствительно, слѣдуетъ обратить вниманіе на *способъ сходимости* ряда

$$m=m_0+m_1+\ldots+m_n+\ldots,$$

представляющаго вещественную норму функціи. *Для аналитической функціи сходимость этого ряда подобна сходимости геометрической прогрессіи.* Чтобы въ этомъ убѣдиться, замѣтимъ, что разсматривая вмѣсто функціи

$$f(x)=\frac{1}{x^2-2ax+a^2+b^2}=\sum_{n=0}^\infty\frac{(1-x^2)^n}{(1+a^2+b^2)^{n+1}}\left[1+\frac{n+1}{1}\frac{2ax}{a^2+b^2+1}+\ldots\right.$$
$$\left.\frac{(n+K)!}{n!\,K!}\left(\frac{2ax}{a^2+b^2+1}\right)^K+\ldots\right]$$

функцію

$$f_1(x)=\sum_{n=0}^\infty(1+\lambda)^n\frac{(1-x^2)^n}{(1+a^2+b^2)^{n+1}}\left[1+\frac{n+1}{1}\frac{2ax}{a^2+b^2+1}+\ldots\right.$$
$$\left.\frac{(n+K)!}{n!\,K!}\left(\frac{2ax}{a^2+b^2+1}\right)^K+\ldots\right]$$

найдемъ также при $\lambda<b^2$

$$[f_1(x)]_{10}<\mu.\left(\frac{1+a^2+b^2}{b^2-\lambda}\right)^2.$$

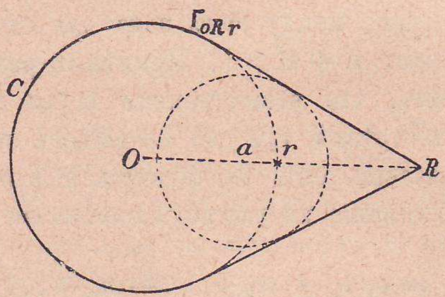
Итакъ, вообще говоря, всегда можно найти такое нормальное разложенiе аналитической функцiи, чтобъ не только его вещественная норма на отрѣзкѣ $0R$ $m = m_0 + m_1 + \ldots + m_n + \ldots$ была конечна, но, чтобъ при нѣкоторомъ положительномъ значенiи λ былъ также сходящимся и рядъ

$$N = m_0 + (1+\lambda) m_1 + \ldots + (1+\lambda)^n m_n + \ldots,$$

которому полезно придать форму

$$N = m_0 + \left(\frac{R+r}{R-r}\right) m_1 + \ldots + \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n m_n + \ldots$$

Рядъ N называется нормою $f(x)$ внутри контура Γ_{0Rr}, образованнаго обѣими касательными изъ точки R къ окружности C радiуса r и большею дугой круга C, заключеннаго между точками соприкосновенiя.



Совокупность нормъ N въ свою очередь имѣетъ низшiй предѣлъ, который называется *низшей нормой внутри* Γ_{0Rr} и который мы обозначимъ символомъ $[f(x)]_{Rr}$. Резюмируя все вышесказанное, приходимъ къ новой формулировкѣ теоремы предыдущаго §.

Если аналитическая функцiя $f(x)$ не имѣетъ особенностей на отрѣзкѣ $0R$, можно найти достаточно малое число r, чтобъ низшая норма $f(x)$ была конечна.

Весьма существенно доказать теперь обратную теорему:

Теорема. *Если нормальный на отрѣзкѣ $0R$ рядъ $f(x)$ имѣетъ конечную норму N внутри контура Γ_{0Rr}, то онъ равномѣрно и абсолютно сходится на контурѣ Γ_{0Rr} и внутри его и представляетъ аналитическую функцiю.*

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что

$$f(x) = \sum_n^\infty \sum_p^\infty a_{np} x^p (R-x)^n = \sum_n^\infty P_n . (R-x)^n$$

и пусть

$$M_n = \max. |a_{n0}(R-x)^n| + \max. |a_{n1} x (R-x)^n| + \max. |a_{n2} x^2 (R-x)^n| + \ldots$$
$$\max. |a_{np} x^p (R-x)^n| + \ldots$$

при

$$0 \leq x \leq R.$$

По предположенію рядъ

$$N = M_0 + M_1\left(\frac{R+r}{R-r}\right) + \ldots M_n\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n + \ldots$$

сходится. Но при $|x|$ равномъ r, имѣемъ

$$|R-x|^n\{|a_{n0}| + |a_{n1}x| + \ldots + |a_{np}x^p| + \ldots\} < M_n\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n.$$

Такимъ образомъ ясно во-первыхъ, что нашъ рядъ абсолютно и равномѣрно сходится на кругѣ C и внутри его.

Далѣе положимъ

$$r_1 = r \cdot \frac{R-a}{R},$$

гдѣ

$$0 < a < R.$$

Тогда мы видимъ, что всякой точкѣ на контурѣ Γ_{0Rr} и внутри его соотвѣтствуетъ значеніе $x = a + r_1(\cos\theta + i\sin\theta)$. Но

$$|R-x|^n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}x^k| < (R-a+r_1)^n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}|(r_1+a)^k$$

$$= \left(\frac{R-a+r_1}{R-a-r_1}\right)^n (R-a-r_1)^n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}|(r_1+a)^k$$

$$< \left(\frac{R-a+r_1}{R-a-r_1}\right)^n M_n = \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n M_n.$$

Слѣдовательно, абсолютная и равномѣрная сходимость нашего ряда обнаружена, какъ на контурѣ Γ_{0Rr}, такъ и внутри его.

Поэтому, замѣчая, что $P_n \cdot (R-x)^n$ правильная аналитическая функція внутри контура Γ_{0Rr}, заключаемъ на основаніи извѣстной теоремы изъ теоріи этихъ функцій, что функція $f(x)$ аналитична внутри разсматриваемаго контура.

Что и требовалось доказать.

Таковъ интересующій насъ критерій, необходимый и достаточный для того, чтобы функція разлагающаяся въ нормальный рядъ была аналитической. Изъ послѣдующаго видно будетъ, что пользованіе найденнымъ критеріемъ совершенно аналогично примѣненію элементарнаго критерія Коши, относящагося лишь къ строкамъ Тэйлора.

§ 9. Теорема. *Если $f_1(x)$ имѣетъ норму N_1 внутри контура Γ_{0Rr}, а $f_2(x)$— норму N_2, то сумма $f_1(x) + f_2(x)$ имѣетъ внутри того же контура норму не большую, чѣмъ $N_1 + N_2$.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$f_1(x)=\sum_n^\infty \sum_p^\infty A_{np}^{(1)} x^p (R-x)^n = \sum_n^\infty P_n^{(1)} (R-x)^n,$$

$$f_2(x)=\sum_n^\infty \sum_p^\infty A_{np}^{(1)} x^p (R-x)^n = \sum_n^\infty P_n^{(1)} (R-x)^n,$$

$$M_n^{(1)}=\sum_p^\infty |A_{np}^{(1)}| \frac{p^p n^n R^{n+p}}{(p+n)^{p+n}}, \quad M_n^{(2)}=\sum_p^\infty |A_{np}^{(2)}| \frac{p^p n^n R^{n+p}}{(p+n)^{p+n}}.$$

Въ такомъ случаѣ

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)=\sum_n^\infty \sum_p^\infty [A_{np}^{(1)}+A_{np}^{(2)}] x^p (R-x)^n = \sum_n^\infty \sum_p^\infty A_{np} x^p (R-x)^n$$

и

$$M_n=\sum_p^\infty |A_{np}| \frac{p^p x^n R^{n+p}}{(p+n)^{p+n}} \leqq M_n^{(1)}+M_n^{(1)}.$$

Слѣдовательно,

$$M_0+M_1\left(\frac{R+r}{R-r}\right)+\ldots+M_n\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n+\ldots$$

$$\leqq M_0^{(1)}+M_0^{(2)}+[M_1^{(1)}+M_1^{(2)}]\left(\frac{R+r}{R-r}\right)+\ldots$$

$$=N_1+N_2.$$

Найденный результатъ удобно выразить при помощи *низшихъ* нормъ. Получимъ, очевидно,

$$[f_1(x)+f_2(x)]_{Rr} \leqq [f_1(x)]_{Rr}+[f_2(x)]_{Rr}. \tag{25'}$$

Теорема. *Если* $f_1(x)$ *имѣетъ норму* N_1 *внутри контура* Γ_{0Rr}, *а* $f_2(x)$ — *норму* N_2, *то произведеніе* $f_1(x).f_2(x)$ *имѣетъ внутри того же контура норму не большую, чѣмъ* $N_1 . N_2$.

Сохраняя обозначенія предыдущей теоремы легко видѣть, что

$$\Phi(x)=f_1(x).f_2(x)=\sum_{n=0}^\infty [P_0^{(1)}P_n^{(2)}+P_1^{(1)}P_{n-1}^{(2)}+\ldots+P_n^{(1)}P_0^{(2)}].(R-x)^n.$$

Слѣдовательно норма

$$[\Phi(x)]_{Rr} \leqq \sum_{n=0}^\infty [M_0^{(1)}M_n^{(2)}+\ldots+M_n^{(1)}M_0^{(2)}]\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n = N_1 . N_2.$$

Вводя низшіе предѣлы, получаемъ

$$[f_1(x).f_2(x)]_{Rr} \leqq [f_1(x)]_{Rr}.[f_2(x)]_{Rr}. \tag{25''}$$

Изъ неравенствъ (25′) и (25″) вытекаетъ наконецъ важное общее неравенство

$$[F(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_n)]_{Rr} \leqq \overset{+}{F}([\varphi_1(x)]_{Rr}, [\varphi_2(x)]_{Rr}, \ldots [\varphi_n(x)]_{Rr}), \quad (25)$$

гдѣ $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n)$ обозначаетъ произвольную аналитическую функцію, разложенную по возрастающимъ степенямъ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$.

Переходимъ теперь къ выраженіямъ, содержащимъ интегралы.

Теорема. *Пусть*

$$I(x) = x^p \int_0^x F(x) . x^q dx.$$

Если цѣлыя числа p *и* q *удовлетворяютъ неравенствамъ* $q \geqq 0$, $p + q + 1 \geqq 0$, *то имѣетъ мѣсто неравенство:*

$$[I(x)]_{Rr} < \frac{R+r}{2r} . \frac{R^{p+q+1}}{q+1} [F(x)]_{Rr}. \quad (26)$$

Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$F(x) = \sum_n^\infty \sum_k^\infty A_{nk} x^k (R-x)^n = \sum_n^\infty P_n (R-x)^n$$

и

$$[F(x)]_{Rr} = M_0 + M_1 \left(\frac{R+r}{R-r}\right) + \ldots + M^n \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n + \ldots,$$

гдѣ

$$M_n = \sum_k^\infty |A_{nk}| \frac{n^n k^k R^{n+k}}{(n+k)^{n+k}}.$$

Интегрируя по частямъ, находимъ, что

$$x^p \int_0^x A_{nk} x^{q+k} (R-x)^n dx = A_{nk} [a_{nk}^{(n)} x^{p+q+k+1} (R-x)^n + \\ + a_{nk}^{(n-1)} x^{p+q+k+2} (R-x)^{n-1} + \ldots a_{nk}^{(0)} x^{p+q+k+n+1}],$$

гдѣ $a_{nk}^{(n)}$, $a_{nk}^{(n-1)}$ и т. д. положительныя числа; откуда заключаемъ, что максимумъ каждаго изъ членовъ второй части равенства, менѣе максимума первой части, т. е. *a fortiori* менѣе чѣмъ

$$|A_{nk}| . \frac{n^n k^k R^{n+k+p+q+1}}{(q+1).(n+k)^{n+k}}.$$

Слѣдовательно, если мы положимъ

$$I(x)=\sum_n^\infty\sum_k^\infty B_{nk}x^k(R-x)^n$$

и

$$L_n=\sum_k^\infty |B_{nk}|\frac{n^n k^k R^{n+k}}{(n+k)^{n+k}},$$

то найдемъ, что

$$L_n<\frac{R^{p+q+1}}{q+1}(M_n+M_{n+1}+\ldots).$$

Поэтому

$$L_0+L_1\left(\frac{R+r}{R-r}\right)+\ldots+L_n\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n+\ldots$$

$$<\frac{R^{p+q+1}}{q+1}\left\{[M_0+M_1+M_2+\ldots]+[M_1+M_2+\ldots]\left(\frac{R+r}{R-r}\right)\right.$$

$$\left.+[M_2+\ldots]\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^2+\ldots\right\}$$

$$=\frac{R^{p+q+1}}{q+1}\left\{M_0+M_1\left[1+\frac{R+r}{R-r}\right]+M_2\left[1+\frac{R+r}{R-r}+\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^2\right]+\ldots\right\}$$

$$<\frac{R^{p+q+1}}{q+1}\cdot\frac{R+r}{R-r}\left\{M_0+M_1\left(\frac{R+r}{R-r}\right)+\ldots M_n\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n+\ldots\right\}$$

и наконецъ, вводя нижнія нормы, приходимъ къ требуемому неравенству

$$[I(x)]_{Rr}<\frac{R+r}{R-r}\cdot\frac{R^{p+q+1}}{q+1}[F(x)]_{Rr}.$$

Теорема. *Пусть*

$$g(x)=x^p.\int_x^R F(x).x^q dx.$$

Если цѣлыя числа p и q удовлетворяютъ условіямъ $p\geqq 0$, $p+q+1\geqq 0$ и кромѣ того функція $F(x).x^q$ не имѣетъ особенности въ точкѣ $x=0$, то во-первыхъ, при $q\neq -1$, имѣетъ мѣсто неравенство

$$[g(x)]_{Rr}<\frac{R+r}{2r}\cdot\frac{R^{p+q+1}}{|q+1|}|F(x)|_{Rr} \tag{27}$$

и во-вторыхъ, при $q=-1$, имѣетъ мѣсто неравенство

$$[g(x)]_{Rr}<4\frac{R+r}{r}R^p|F(x)|_{Rr}. \tag{27bis}$$

Сохраняя обозначенія доказательства предыдущей теоремы, мы видимъ, что

$$x^p\int_x^R A_{nk}x^{q+k}(R-x)^n dx = -A_{nk}[a_{nk}^{(n)}x^{p+q+k+1}(R-x)^n + \dots$$
$$a_{nk}^{(0)}x^{p+q+k+n+1}] + A_{nk}a_{nk}^{(0)}x^p R^{q+k+n+1},$$

такъ какъ по предположенію $q+k \geqq 0$.

Слѣдовательно, ограничиваясь пока случаемъ, когда $q \neq -1$, находимъ также на основаніи выше указанныхъ соображеній

$$L_n < \frac{2R^{p+q+1}}{|q+1|}(M_n + M_{n+1} + \dots),$$

откуда вытекаетъ, какъ и раньше, неравенство (27).

Для доказательства неравенства (27^{bis}), мы должны замѣтить, что максимумъ интеграла

$$\int_x^R x^{k-1}(R-x)^n dx$$

равенъ

$$\int_0^R x^{k-1}(R-x)^n dx = \frac{n!(k-1)!}{(k+n)!}R^{k+n} = \mu\,.\frac{n^n k^k}{(k+n)^{k+n}}\sqrt{\frac{n}{k(k+n)}}\,R^{k+n},$$

гдѣ μ нѣкоторый *конечный* коэффиціентъ, который менѣе, чѣмъ 4 на основаніи формулы Стирлинга [1]). Поэтому, повторяя прежнее разсужденіе, получимъ

$$L_n < 8R^p(M_n + M_{n+1} + \dots),$$

откуда вытекаетъ неравенство (27^{bis}).

Примѣчаніе. Неравенства (26), (27), (27^{bis}) будутъ играть существенную роль въ нашемъ дальнѣйшемъ изслѣдованіи, поэтому интересно выяснить, въ какой мѣрѣ они связаны съ нормальными рядами. Весьма легко убѣдиться, что, еслибъ вмѣсто нормы $F(x)$ мы знали, каковъ максимумъ ея модуля на отрѣзкѣ $0R$, то для $I(x)$ и $g(x)$ на томъ же отрѣзкѣ мы получили бы неравенства, подобныя неравенствамъ (26) и (27). *Однако ничего подобнаго неравенству* (27^{bis}) *при замѣнѣ нормъ модулями не можетъ быть дано, если* $p=0$.

---

[1]) Seliwanoff. Differenzenrechnung. Стр. 61.

Перейдемъ теперь къ функціямъ двухъ перемѣнныхъ.

§ 10. Пусть ϱ и θ полярныя координаты вещественной точки M, прямолинейныя координаты которой x и y. Въ дальнѣйшемъ мы будемъ предполагать, что x и y могутъ становиться мнимыми величинами, но всегда будутъ имѣть мѣсто равенства

$$x = \varrho \cos \theta, \quad y = \varrho \sin \theta.$$

Разсмотримъ тригонометрическій рядъ

$$S_{\varrho,\theta} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta,$$

гдѣ A_n и B_n нормальные ряды по перемѣнной ϱ на нѣкоторомъ отрѣзкѣ $0R$, особаго вида, а именно:

$$A_n = \varrho^n \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \alpha_{pq}^{(n)} \varrho^{2p} (R^2 - \varrho^2)^q, \quad B_n = \varrho^n \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \beta_{pq}^{(n)} \varrho^{2p} (R^2 - \varrho^2)^q.$$

Во-первыхъ, ясно, что рядъ $S_{\varrho,\theta}$ *формально* можетъ быть отождествленъ съ рядомъ, содержащимъ лишь цѣлыя и положительныя степени x, y, потому что

$$\varrho^n \cos n\theta = \frac{(x+iy)^n + (x-iy)^n}{2}$$

$$\varrho^n \sin n\theta = \frac{(x+iy)^n - (x-iy)^n}{2i}$$

$$\varrho^2 = x^2 + y^2.$$

Мы будемъ называть рядъ $S_{\varrho,\theta}$ *нормальнымъ* рядомъ относительно перемѣнныхъ ϱ, θ или x, y внутри круга C радіуса R съ центромъ въ 0, если рядъ

$$[S_{\varrho,\theta}]_{R0} = [A_0]_{R0} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n]_{R0} + [B_n]_{R0}$$

сходящійся. Этотъ послѣдній рядъ называется *низшей нормой* $S_{\varrho,\theta}$ *на отрѣзкѣ* $R0$.

Если кромѣ того для нѣкотораго r рядъ

$$[S_{\varrho,\theta}]_{Rr} = [A_0]_{Rr} + \sum_{1}^{\infty} [A_n]_{Rr} + [B_n]_{Rr}$$

также сходится, то онъ называется *низшей нормой* $S_{\varrho,\theta}$ *внутри контура* Γ_{0Rr}, *расположеннаго въ плоскости комплексной перемѣнной* ϱ.

Мы можемъ теперь доказать слѣдующую важную теорему.

Теорема. *Если нормальный рядъ* $S_{\rho,\theta} = F(xy)$ *имѣетъ конечную норму внутри контура* Γ_{R0r}, *то онъ представляетъ аналитическую функцію внутри круга* C.

Въ самомъ дѣлѣ, любой изъ рядовъ A_n и B_n можетъ быть превращенъ на основаніи теоремы § 8 въ строку Тэйлора вида $\varrho^n \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p \varrho^{2p}$, сходящуюся при $|\varrho| \leq r$, такъ что вслѣдствіе теоремы § 2 $F(xy)$ аналитична внутри круга C' радіуса r. Но если мы возьмемъ какую-нибудь точку $M(R' < R, \theta_0)$ внутри C, то въ силу той же теоремы § 8, A_n и B_n разлагаются въ строку Тэйлора по степенямъ $\varrho - R'$ съ радіусомъ сходимости не менѣе $r\dfrac{R-R'}{R}$. Мы заключаемъ отсюда, что постепенно увеличивая R' мы получимъ *аналитическое продолженіе* $F(xy)$ въ любой точкѣ внутри C. Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Вышеприведенное разсужденіе показываетъ, что еслибъ мы при помощи строки Тэйлора стали совершать аналитическое продолженіе $F(xy)$, то, чтобъ достигнуть самой окружности C, потребовалось бы вообще безконечное число строкъ Тэйлора. Однако благодаря равномѣрной сходимости нормальнаго разложенія $F(xy)$ на окружности C, какъ и внутри ея, это разложеніе представляетъ во всякой точкѣ M окружности C предѣлъ, къ которому $F(xy)$ стремится при безконечномъ приближеніи къ этой точкѣ.

Обратная теорема.

Если аналитическая функція $F(xy)$ *не имѣетъ особенностей въ нѣкоторой области* S *(на плоскости вещественныхъ перемѣнныхъ* x, y*), то она разлагается въ нормальный рядъ внутри всякаго круга* C *расположеннаго въ области* S *и кромѣ того возможно выбрать* r *достаточно малымъ, чтобъ норма* $[F(xy)]_{Rr}$ *была конечна.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть R будетъ радіусомъ круга C расположеннаго въ области S и 0 его центръ. Тогда

$$F(xy) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta$$

съ

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\varrho\cos\theta,\ \varrho\sin\theta)\cos n\theta d\theta = -\frac{1}{n^2\pi}\int_0^{2\pi} F''_{\theta^2}(\varrho\cos\theta,\ \varrho\sin\theta)\cos n\theta d\theta,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\varrho\cos\theta,\ \varrho\sin\theta)\sin n\theta d\theta = -\frac{1}{n^2\pi}\int_0^{2\pi} F''_{\theta^2}(\varrho\cos\theta,\ \varrho\sin\theta)\sin n\theta d\theta,$$

такъ что A_n и B_n аналитическія функціи ϱ, правильныя, пока комплексная перемѣнная ϱ находится внутри нѣкоторой области (въ плоскости комплексной перемѣнной ϱ), заключающей въ себѣ отрѣзокъ $0R$. Слѣдовательно A_n и B_n разлагаются въ нормальные ряды и при томъ спеціальнаго вида, указаннаго на страницѣ 46. Кромѣ того, для всѣхъ n можно опредѣлить одно и то же число r такъ, чтобъ $[A_n]_{Rr}$ и $[B_n]_{Rr}$ были конечны. Болѣе того, если разсматривать $F''_{\theta^2}(\varrho\cos\theta_0, \varrho\sin\theta_0)$ какъ функцію одной перемѣнной ϱ, можно опредѣлить конечное число N такъ, чтобъ при всякомъ θ_0 имѣть

$$[F''_{\theta^2}(\varrho\cos\theta_0, \varrho\sin\theta_0)]_{Rr} < N.$$

Тогда очевидно

$$[A_n]_{Rr} < \frac{2N}{n^2}, \quad [B_n]_{Rr} < \frac{2N}{n^2},$$

и слѣдовательно

$$[F(xy)]_{Rr} < 10N.$$

Ч. и т. д.

Эти двѣ важныя теоремы подобны тѣмъ, которыя нами доказаны во 2-мъ § первой главы, но онѣ представляютъ то существенное преимущество, что онѣ совершенно не зависятъ отъ мнимыхъ особенностей функцій.

Наконецъ, намъ остается доказать еще послѣднюю теорему.

Теорема. *Если* $F(v_1v_2\ldots v_m)$ *аналитическая функція*, а $v_1v_2\ldots v_m$ *разлагаются въ нормальные ряды внутри круга* C, *то имѣетъ мѣсто неравенство*:

$$[F(v_1v_2\ldots v_m]_{Rr} \leqq F([v_1]_{Rr}, \ldots [v_m]_{Rr}). \tag{28}$$

Очевидно, теорема будетъ доказана, если мы докажемъ ее въ двухъ частныхъ случаяхъ

$$F(v_1v_2) = v_1 + v_2 \quad \text{и} \quad \Phi(v_1v_2) = v_1v_2.$$

Но изъ (25′) вытекаетъ непосредственно

$$[v_1 + v_2]_{Rr} \leqq [v_1]_{Rr} + [v_2]_{Rr}.$$

Съ другой стороны, пусть

$$v_1 = A_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(1)} \cos n\theta + B_n^{(1)} \sin n\theta$$

$$v_2 = A_0^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(2)} \cos n\theta + B_n^{(2)} \sin n\theta.$$

Умножая и группируя члены (благодаря абсолютной сходимости), получаемъ

$$v_1v_2 = \left[A_0^{(1)}A_0^{(2)} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(A_n^{(1)}A_n^{(2)} + B_n^{(1)}B_n^{(2)}\right]$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{n+m=k}^{\infty}(A_n^{(1)}A_m^{(2)} - B_n^{(1)}B_m^{(2)})\right.$$
$$\left.+\sum_{n-m=k}^{\infty}(A_n^{(1)}A_m^{(2)} + A_m^{(1)}A_n^{(1)} + B_n^{(1)}B_m^{(2)} + B_m^{(1)}B_n^{(2)})\right]\cos k\theta$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{n+m=k}^{\infty}(A_n^{(1)}B_m^{(2)} + B_n^{(1)}A_m^{(2)})\right.$$
$$\left.+\sum_{n-m=k}^{\infty}(A_m^{(1)}B_n^{(2)} - A_n^{(1)}B_m^{(2)} + B_n^{(1)}A_m^{(2)} - B_m^{(1)}A_n^{(2)})\right]\sin k\theta.$$

Отсюда вслѣдствіе (25′) и (25″) находимъ:

$$[v_1v_2]_{Rr} \leq \left\{[A_0^{(1)}]_{Rr} + \sum_{n=1}^{\infty}[A_n^{(1)}]_{Rr} + [B_n^{(1)}]_{Rr}\right\}\cdot\left\{[A_0^{(2)}]_{Rr} + \sum_{n=1}^{\infty}[A_n^{(2)}]_{Rr} + [B_n^{(2)}]_{Rr}\right\}$$
$$= [v_1]_{Rr}\cdot[v_2]_{Rr}.$$

Теорема такимъ образомъ доказана. Неравенство (28) вполнѣ замѣняетъ неравенство (14). Слѣдовательно, пользованіе новымъ критеріемъ для распознаванія аналитическихъ функцій тождественно пользованію критеріемъ Гарнака, но въ то время какъ, согласно заключенію конца прошлой главы, область примѣненія критерія Гарнака весьма ограничена, въ настоящей главѣ установлены безусловно общія начала для распознаванія аналитическихъ функцій.

Въ частности, разсмотрѣніе постоянной величины, связанной съ нормальнымъ рядомъ, которую мы назвали *нормой*, часто вполнѣ достаточно для указанной цѣли; однако въ иныхъ случаяхъ необходимо нѣсколько видоизмѣнить упомянутое понятіе. Пусть

$$N = m_0 + m_1\left(\frac{R+r}{R-r}\right) + \ldots m_n\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n + \ldots$$

норма нѣкотораго ряда внутри опредѣленнаго контура Γ_{0Rr}. Вводя новую перемѣнную $\dfrac{R+r}{R-r} = y$, мы получимъ функцію

$$N(y) = m_0 + m_1y + \ldots + m_ny^n + \ldots,$$

которая является болѣе тонкимъ и совершеннымъ орудіемъ изслѣдованія, чѣмъ постоянная норма. Однако мы не будемъ останавливаться здѣсь на дальнѣйшемъ развитіи теоріи нормальныхъ рядовъ, такъ какъ и изложеннаго вполнѣ достаточно для разрѣшенія интересующихъ насъ въ настоящемъ сочиненіи вопросовъ.

Въ заключеніе отвѣтимъ лишь на вопросъ, который, вѣроятно, возникаетъ у читателя, особенно, если онъ обладаетъ геометрическимъ складомъ ума. Не проще ли вмѣсто всей этой теоріи нормальныхъ рядовъ, разсматривать *модули* функцій внутри той или иной комплексной области, не заботясь объ ея формальномъ выраженіи? Въ нѣкоторыхъ случаяхъ это вполнѣ допустимо: въ частности это тотъ путь, который мною былъ выбранъ при доказательствѣ аналитическаго характера рѣшеній уравненій *параболическаго* типа относительно *одной* лишь перемѣнной [1]). Однако часто геометрическія разсужденія, не имѣющія подъ собой опредѣленной *формально аналитической* основы, слишкомъ грубы и поверхностны, и либо вовсе не выдерживаютъ строгой математической критики, либо требуютъ искусственныхъ, не лежащихъ въ существѣ дѣла, ограниченій.

Въ слѣдующей главѣ будетъ указано, какъ аналитическое, основанное на примѣненіи нормальныхъ рядовъ, такъ и геометрическое доказательство основной теоремы теоріи уравненій эллиптическаго типа. Преимущество второго въ томъ, что оно не опирается ни на какія новыя понятія, но первое доказательство глубже проникаетъ въ природу уравненій эллиптическаго типа, устанавливая прочный фундаментъ для дальнѣйшихъ изслѣдованій. Это и является причиной, побудившей меня удѣлить въ настоящей работѣ столь значительное мѣсто нормальнымъ рядамъ.

---

[1]) Comptes rendus de l'Acad. des Sciences. Janvier 1905.

Глава III.

Основная теорема.

§ 11. Примѣнимъ общія соображенія предыдущей главы къ доказательству слѣдующей важной теоремы:

Теорема. *Если z есть рѣшеніе аналитическаго уравненія съ частными производными второго порядка*

$$F\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z, x, y\right)=0, \tag{1}$$

обладающее внутри нѣкоторой области S конечными производными первыхъ трехъ порядковъ и удовлетворяющее въ этой области неравенству

$$4F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}} \cdot F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}} - \left(F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}\right)^2 > 0, \tag{2}$$

то функція z аналитична въ области S.

Условіе конечности третьихъ производныхъ несущественно; но отъ устраненія его доказательство значительно усложняется. Поэтому мы приступимъ къ доказательству сохраняя упомянутое условіе. Прежде всего приведемъ наше уравненіе къ виду болѣе удобному для примѣненія способа послѣдовательныхъ приближеній. Въ самомъ дѣлѣ, нетрудно доказать, что данное уравненіе всегда можетъ быть приведено къ виду

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z, x, y\right), \tag{29}$$

обозначая черезъ f аналитическую функцію, разлагающуюся въ строку Тэйлора по степенямъ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-r_0,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}-s_0,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-t_0,\ \frac{\partial z}{\partial x}-p_0,\ \frac{\partial z}{\partial y}-q_0,\ z-z_0,\ x,\ y,$$

гдѣ z_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0 соотвѣтственныя значенія функціи z и ея производныхъ первыхъ двухъ порядковъ при $x=y=0$. Кромѣ того, въ точкѣ $x=y=0$ возможно предположить (и это особенно важно) $f'_{r_0}=f'_{s_0}=f'_{t_0}=0$. Дѣйствительно, пусть z будетъ рѣшеніемъ уравненія

$$F\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x' \partial y'}, \frac{\partial^2 z}{\partial y'^2} \ldots, z, x', y'\right) = 0$$

и пусть z_0, p'_0, q'_0, r'_0, s'_0, t'_0 значенія z и его производныхъ по x' и y' въ точкѣ $x' = y' = 0$, такъ что

$$F = bx' + cy' + d(z - z'_0) + e\left(\frac{\partial z}{\partial x'} - p'_0\right) + f\left(\frac{\partial z}{\partial y'} - q'_0\right) + g\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2} - v'_0\right) +$$

$$+ 2h\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x' \partial y'} - s'_0\right) + i\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y'^2} - t'_0\right) + kx'^2 + tx'y' + \ldots$$

и

$$F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2}} = g + b_1 x' + c_1 y' + \ldots$$

$$F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x' \partial y'}} = 2h + b_2 x' + c_2 y' + \ldots$$

$$F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial y'^2}} = i + b_3 x' + c_3 y' + \ldots$$

Изъ неравенства (2) выводимъ

$$gi - h^2 > 0.$$

Отсюда слѣдуетъ, что коэффиціенты подстановки

$$x = \frac{-h}{\sqrt{g(ig - h^2)}} x' + \sqrt{\frac{g}{ig - h^2}} . y', \quad y = \frac{1}{\sqrt{g}} x'$$

вещественны. Далѣе имѣемъ, очевидно,

$$\frac{\partial z}{\partial x'} = \frac{-h}{\sqrt{g(ig - h^2)}} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y'} = \sqrt{\frac{g}{ig - h^2}} . \frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2} = \frac{h^2}{g(ig - h^2)} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{2h}{g\sqrt{ig - h^2}} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x' \partial y'} = \frac{-h}{ig - h^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{\sqrt{ig - h^2}} . \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y'^2} = \frac{g}{ig - h^2} . \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Слѣдовательно,

$$g\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2}-r_0'\right)+2h\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x'\partial y'}-s_0'\right)+i\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y'^2}-t_0'\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-v_0-t_0$$

и

$$F=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-f\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ldots,x,y\right)=0,$$

гдѣ f не содержитъ болѣе линейныхъ членовъ по

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-r_0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-s_0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-t_0,$$

или, какъ мы сказали выше, $f'_{r_0}=f'_{s_0}=f'_{t_0}=0$.

Къ уравненію (29) способъ послѣдовательныхъ приближеній можетъ быть примѣненъ слѣдующимъ образомъ. Составимъ систему уравненій:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}=f(r_0 s_0 t_0 p_0 q_0 z_0 00)=r_0+t_0=A_0\\
&\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}=f\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2},\frac{\partial u_0}{\partial x},\frac{\partial u_0}{\partial y},z,x,y\right)-A_0\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2}=f\left(\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x\partial y},\ldots,x,y\right)-f\left(\frac{\partial^2 u_{n-2}}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u_{n-2}}{\partial x\partial y},\ldots,x,y\right)\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\tag{30}$$

Опредѣлимъ затѣмъ послѣдовательно u_0, $v_1=u_1-u_0$, $v_2=u_2-u_1$ и т. д. при совокупности условій, что $u_0=u_1=\ldots=u_n=z$ на нѣкоторой окружности C произвольно малаго радіуса R; такъ что на той же окружности $v_n=0$. Въ такомъ случаѣ очевидно, что, если рядъ

$$u=u_0+v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots\tag{31}$$

такъ же, какъ и его производныя первыхъ двухъ порядковъ, равномѣрно сходится на окружности C и внутри ея, то u есть рѣшеніе уравненія (29), которое на окружности C совпадаетъ съ z.

§ 12. Но прежде чѣмъ приступить къ этому вычисленію, намъ необходимо предпринять изслѣдованіе свойствъ z, вытекающихъ изъ предположенія о существованіи производныхъ первыхъ трехъ порядковъ.

Положимъ, что производныя z первыхъ трехъ порядковъ меньше M по абсолютной величинѣ. Тогда

$$z=z_0+p_0x+q_0y+\frac{1}{2}(r_0x^2+2s_0xy+t_0y^2)+\frac{1}{3\,!}(f_0x^3+3f_1x^2y+3f_2xy^2+f_3y^3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p_0+r_0x+s_0y+\frac{1}{2}(\varphi_0x^2+2\varphi_1xy+\varphi_2y^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=q_0+s_0x+t_0y+\frac{1}{2}(\psi_0x^2+2\psi_1xy+\psi_2y^2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=r_0+\chi_0x+\chi_1y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=s_0+\theta_0x+\theta_1y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=t_0+\eta_0x+\eta_1y$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=\pi_0,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=\pi_1,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=\pi_2,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=\pi_3,$$

гдѣ f_i, φ_i, ψ_i, χ_i, θ_i, η_i, π_i обозначаютъ функціи x и y, меньшія по абсолютной величинѣ, чѣмъ M.

Полагая $x=\varrho\cos\theta$, $y=\varrho\sin\theta$, находимъ далѣе:

$$z=z_0+\varrho(p_0\cos\theta+q_0\sin\theta)+\frac{\varrho^2}{2}(r_0\cos^2\theta+2s_0\cos\theta\sin\theta+t_0\sin^2\theta)+\varrho^3\Phi_0(\varrho,\theta)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p_0+\varrho(r_0\cos\theta+s_0\sin\theta)+\varrho^3\Phi_1(\varrho,\theta)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=q_0+\varrho(s_0\cos\theta+t_0\sin\theta)+\varrho^2\Phi_2(\varrho,\theta)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=r_0+\varrho\Phi_3(\varrho,\theta),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=s_0+\varrho\Phi_4(\varrho,\theta),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=t_0+\varrho\Phi_5(\varrho,\theta)$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=\Phi_6(\varrho,\theta),\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=\Phi_7(\varrho,\theta),\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=\Phi_8(\varrho,\theta),\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=\Phi_9(\varrho,\theta),$$

гдѣ Φ_i всѣ менѣе по абсолютной величинѣ, чѣмъ $2M$, внутри круга C' радіуса $R'<1$, находящагося въ области S. Поэтому изъ равенствъ

$$\frac{\partial z}{\partial\theta}=-\frac{\partial z}{\partial x}y+\frac{\partial z}{\partial y}x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}y^2-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}xy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}x^2-\frac{\partial z}{\partial x}x-\frac{\partial z}{\partial y}y$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial\theta^3}=-\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}y^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}xy^2-3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}x^2y+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}x^3+3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}xy+$$

$$+3\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(y^2-x^2)-3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}xy+\frac{\partial z}{\partial x}y-\frac{\partial z}{\partial y}x$$

выводимъ

$$\frac{\partial \Phi_0(\varrho, \theta)}{\partial \theta} = - \Phi_1 \sin\theta + \Phi_2 \cos\theta < 4M$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_0(\varrho, \theta)}{\partial \theta^2} = \Phi_3 \sin^2\theta - 2\Phi_4 \sin\theta\cos\theta + \Phi_5 \cos^2\theta - \Phi_1\cos\theta - \Phi_2 \sin\theta < 10M$$

$$\frac{\partial^3 \Phi_0(\varrho, \theta)}{\partial \theta^3} = - \Phi_6 \sin^3\theta + 3\Phi_7 \sin^2\theta\cos\theta - 3\Phi_8 \sin\theta\cos^2\theta + \Phi_9\cos^3\theta +$$
$$+ 3\Phi_3 \sin\theta\cos\theta + 3\Phi_4(\sin^2\theta - \cos^2\theta) - 3\Phi_5\cos\theta\sin\theta +$$
$$+ \Phi_1 \sin\theta - \Phi_2\cos\theta < 24M.$$

Отсюда слѣдуетъ, что на окружности C радіуса $R < R'$, Φ_0 разлагается въ тригонометрическій рядъ

$$\Phi_0 = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta,$$

при чемъ коэффиціенты удовлетворяютъ неравенствамъ

$$|c_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| + |d_n| < 82M < N,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\{|c_n| + |d_n|\} < 200M^2 + 4 < N,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\{|c_n| + |d_n|\} < 1152M^2 + 4 < N.$$

Первыя два изъ этихъ неравенствъ нами были уже выведены въ 1-й главѣ. Правильность третьяго мы обнаружимъ тѣмъ же способомъ.

Въ самомъ дѣлѣ

$$c_n = -\frac{1}{n^3\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial\theta^3} \sin n\theta \, d\theta, \quad d_n = \frac{1}{n^3\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial\theta^3} \cos n\theta \, d\theta.$$

Но изъ тождества

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial\theta^3}\right)^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} \frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial\theta^3} \, d\theta\right]^2$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\int_0^{2\pi} \frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial\theta^3} \cos n\theta \, d\theta\right]^2 + \left[\int_0^{2\pi} \frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial\theta^3} \sin n\theta \, d\theta\right]^2\right\}$$

вытекаетъ, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 n^6 + d_n^2 n^6 < 2(24M)^2.$$

Слѣдовательно, разбивая коэффиціенты c_n и d_n на двѣ группы: въ первой $|c_n| \leqq \frac{1}{n^4}$, и во второй $|c_n| > \frac{1}{n^4}$, т. е. $n^6 c_n^2 > n^2 |c_n|$, заключаемъ, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \{|c_n| + |d_n|\} < 1152 M^2 + 4 .$$

Ч. и т. д.

Такимъ образомъ на окружности C радіуса $R < R'$ находимъ для z тригонометрическое разложеніе

$$z = z_0 + \frac{R^2}{4}(r_0 + t_0) + R^3 c + (Rp_0 + R^3 c_1)\cos\theta + (Rq_0 + R^3 d_1)\sin\theta +$$

$$+ \left[R^2 \frac{r_0 - t_0}{4} + R^3 c_2\right]\cos 2\theta + \left[\frac{R^2 s_0}{2} + R^3 d_2\right]\sin 2\theta + \sum_{n=1}^{\infty} R^3 \{c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta\} =$$

$$= \alpha_0 + \sum_{n-1}^{\infty} \alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta ,$$

при чемъ

$$|\alpha_0 - z_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| + |\beta_n| < LR,$$

$$\left|\frac{\alpha_1}{R} - p_0\right| + \left|\frac{\beta_1}{R} - q_0\right| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{R}\{|\alpha_n| + |\beta_n|\} < LR, \tag{31}$$

$$\left|\frac{4\alpha_2}{R^2} - r_0 + t_0\right| + \left|\frac{4\beta_2}{R^2} - 2s_0\right| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{R^2}\{|\alpha_n| + |\beta_n|\} < LR,$$

гдѣ L есть опредѣленное конечное число, которое зависитъ только отъ M.

Приступимъ теперь къ рѣшенію перваго изъ уравненій (30)

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = A_0 = r_0 + t_0$$

при условіи, что u_0 на окружности C равно

$$z = \alpha_0 + \sum_{n=!}^{\infty} \alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta .$$

Это рѣшеніе очевидно будетъ дано формулой

$$u_0 = \frac{A_0}{4}(\varrho^2 - R^2) + \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n [\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta]. \tag{33}$$

Дифференцируя, находимъ

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}=\frac{A_0}{2}\varrho\cos\theta+\frac{\alpha_1}{R}+\sum_{n=2}^{\infty}n\frac{\varrho^{n-1}}{R^n}[\alpha_n\cos\overline{n-1}\,\theta+\beta_n\sin\overline{n-1}\,\theta]$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial y}=\frac{A_0}{2}\varrho\sin\theta+\frac{\beta_1}{R}+\sum_{n=2}^{\infty}n\frac{\varrho^{n-1}}{R^n}[\beta_n\cos\overline{n-1}\,\theta-\alpha_n\sin\overline{n-1}\,\theta]$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}=\frac{A_0}{2}+\frac{2\alpha_2}{R^2}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n(n-1)\varrho^{n-2}}{R^n}[\alpha_n\cos\overline{n-2}\,\theta+\beta_n\sin\overline{n-2}\,\theta]\qquad(33^{\text{bis}})$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}=\frac{2\beta_2}{R^2}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n(n-1)\varrho^{n-2}}{R^n}[\beta_n\cos\overline{n-2}\,\theta-\alpha_n\sin\overline{n-2}\,\theta]$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}=\frac{A_0}{2}-\frac{2\alpha_2}{R^2}-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n(n-1)\varrho^{n-2}}{R^n}[\alpha_n\cos\overline{n-2}\,\theta+\beta_n\sin\overline{n-2}\,\theta].$$

Примѣняя къ формуламъ (33) и (33^{bis}) обозначенія предыдущей главы, находимъ на основаніи неравенствъ (32) для низшихъ нормъ разсматриваемыхъ функцій слѣдующія неравенства, въ которыхъ r *какъ и во всѣхъ послѣдующихъ формулахъ положено равнымъ* $\frac{R}{2}$:

$$[u_0-z_0]_{Rr}<\frac{15\,|A_0|\,R^2}{16}+LR<HR,$$

$$\left[\frac{\partial u_0}{\partial x}-p_0\right]_{Rr}<\frac{|A_0|\,R}{2}+LR<HR,$$

$$\left[\frac{\partial u_0}{\partial y}-q_0\right]_{Rr}<\frac{|A_0|\,R}{2}+LR<HR,$$

$$\left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}-r_0\right]_{Rr}<\left|\frac{A_0}{2}+\frac{2\alpha_2}{R^2}-r_0\right|+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n(n-1)\varrho^{n-1}}{R^2}\{|\alpha_n|+|\beta_n|\}<HR,\qquad(34)$$

$$\left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}-s_0\right]_{Rr}<HR,$$

$$\left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}-t_0\right]_{Rr}<HR,$$

гдѣ H постоянная величина, зависящая только отъ M.

§ 13. Разсматривая слѣдующія уравненія нашей системы, мы видимъ, что имѣемъ дѣло съ уравненіями Пуассона

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=F(xy).\qquad(34)$$

Положимъ, что F разлагается въ нормальный рядъ съ конечной нормой. Покажемъ, что въ такомъ случаѣ и функція v, обращающаяся въ нуль на окружности C, разлагается въ нормальный рядъ, при чемъ норма ея, такъ же какъ и нормы ея производныхъ первыхъ двухъ порядковъ могутъ быть ограничены посредствомъ нормы $F(xy)$.

Итакъ, пусть въ полярныхъ координатахъ

$$F(xy) = A_0(\varrho) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\varrho)\cos n\theta + B_n(\varrho)\sin n\theta,$$

гдѣ

$$A_n = \varrho^n \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} a_{pq}^{(n)} \varrho^{2p}(R^2 - \varrho^2)^q,$$

$$B_n = \varrho^n \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} b_{pq}^{(n)} \varrho^{2p}(R^2 - \varrho^2)^q,$$

и пусть

$$[F(xy)]_{Rr} = [A_0(\varrho)]_{Rr} + \sum_{1}^{\infty} [A_n(\varrho)]_{Rr} + [B_n(\varrho)]_{Rr} < P,$$

полагая по прежнему $r = \frac{R}{2}$.

Мы уже видѣли, что полагая a priori

$$v = C_0(\varrho) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\varrho)\cos n\theta + D_n(\varrho)\sin n\theta,$$

для C_n и D_n получаются значенія

$$C_0(\varrho) = \int_R^{\varrho}\frac{d\varrho}{\varrho}\int_0^{\varrho}\varrho A_0 d\varrho,$$

$$2nC_n(\varrho) = \varrho^n\int_R^{\varrho}\frac{A_n}{\varrho^{n-1}}d\varrho - \frac{1}{\varrho^n}\int_0^{\varrho}A_n\varrho^{n+1}d\varrho + \frac{\varrho^n}{R^{2n}}\int_0^{R}A_n\varrho^{n+1}d\varrho, \qquad (16)$$

$$2nD_n(\varrho) = \varrho^n\int_R^{\varrho}\frac{B_n}{\varrho^{n-1}}d\varrho - \frac{1}{\varrho^n}\int_0^{\varrho}B_n\varrho^{n+1} + \frac{\varrho^n}{R^{2n}}\int_0^{R}B_n\varrho^{n+1}d\varrho.$$

Дифференцируя, находимъ

$$\frac{dC_0}{d\varrho} = \frac{1}{\varrho}\int_0^{\varrho}\varrho A_0 d\varrho,\quad \frac{d^2C_0}{d\varrho^2} = A_0 - \frac{1}{\varrho^2}\int_0^{\varrho}\varrho A_0 d\varrho,$$

$$2\frac{dC_n}{d\varrho} = \varrho^{n-1}\int_R^{\varrho}\frac{A_n d\varrho}{\varrho^{n-1}} + \frac{1}{\varrho^{n+1}}\int_0^{\varrho}A_n\varrho^{n+1}d\varrho + \frac{\varrho^{n-1}}{R^{2n}}\int_0^{R}A_n\varrho^{n+1}d\varrho, \qquad (16^{\text{bis}})$$

$$2\frac{d^2C_n}{d\varrho^2} = (n-1)\varrho^{n-2}\int_R^{\varrho}\frac{A_n}{\varrho^{n-1}}d\varrho - \frac{n+1}{\varrho^{n+2}}\int_0^{\varrho}A_n\varrho^{n+1}d\varrho + \frac{(n-1)\varrho^{n-2}}{R^{2n}}\int_0^{R}A_n\varrho^{n+1}d\varrho + 2A_n$$

и аналогичныя формулы для производныхъ D_n. Изъ этихъ выраженій мы заключаемъ прежде всего, что C_n и D_n разлагаются въ нормальные ряды вида:

$$C_n = \varrho^n \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} c_{pq}^{(n)} \varrho^{2p} (R^2 - \varrho^2)^q,$$

$$D_n = \varrho^n \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} d_{pq}^{(n)} \varrho^{2p} (R^2 - \varrho^2)^q.$$

Сдѣлаемъ затѣмъ предположеніе, что во второй части уравненія Пуассона фигурируютъ лишь члены, для которыхъ $n > 2$. Въ такомъ случаѣ примѣненіе неравенствъ (26) и (27) даетъ безъ затрудненій $\left(\text{при предположеніи, что } r = \frac{R}{2}\right)$

$$\left[\frac{C_n}{\varrho^2}\right]_{Rr} < \frac{1}{2n}\left[\frac{(R+r)}{(n-2)r} + \frac{R+r}{2(n+2)r} + \frac{1}{n+2}\right][A_n]_{Rr} < \frac{6}{n^2}[A_n]_{Rr},$$

$$\left[\frac{dC_n}{\varrho d\varrho}\right]_{Rr} < \frac{1}{2}\left[\frac{R+r}{(n-2)r} + \frac{R+r}{2(n+2)r} + \frac{1}{n+2}\right][A_n]_{Rr} < \frac{6}{n}[A_n]_{Rr},$$

$$\left[\frac{d^2C_n}{d\varrho^2}\right]_{Rr} < \frac{1}{2}\left[\frac{(n-1)(R+r)}{(n-2)r} + \frac{(n+1)(R+r)}{2(n+2)r} + \frac{n-1}{n-2} + 2\right][A_n]_{Rr} < 6[A_n]_{Rr}$$

и аналогичныя неравенства для D_n и его производныхъ.

Слѣдовательно, изъ тождествъ

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \varrho}\cos\theta - \frac{\partial v}{\varrho\partial\theta}\sin\theta, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \varrho}\sin\theta + \frac{\partial v}{\varrho\partial\theta}\cos\theta,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \varrho^2}\cos^2\theta - 2\frac{\partial^2 v}{\varrho\partial\varrho\partial\theta}\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 v}{\varrho^2\partial\theta^2}\sin^2\theta + \frac{\partial v}{\varrho\partial\varrho}\sin\theta$$
$$+ 2\frac{\partial v}{\varrho^2\partial\theta}\cos\theta\sin\theta,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial \varrho^2}\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 v}{\varrho\partial\varrho\partial\theta}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - \frac{\partial^2 v}{\varrho^2\partial\theta^2}\sin\theta\cos\theta$$
$$- \frac{\partial v}{\varrho\partial\varrho}\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial v}{\varrho^2\partial\theta}(\sin^2\theta - \cos^2\theta),$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \varrho^2}\sin^2\theta + 2\frac{\partial^2 v}{\varrho\partial\varrho\partial\theta}\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 v}{\varrho^2\partial\theta^2}\cos^2\theta + \frac{\partial v}{\varrho\partial\varrho}\cos^2\theta$$
$$- 2\frac{\partial v}{\varrho^2\partial\theta}\sin\theta\cos\theta$$

вытекаютъ важныя неравенства

$$
\begin{gathered}
[v]_{Rr} < hR^2[F]_{Rr}, \quad \left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{Rr} < hR[F]_{Rr}, \quad \left[\frac{\partial v}{\partial y}\right]_{Rr} < hR[F]_{Rr}, \\
\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]_{Rr} < h[F]_{Rr}, \quad \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right]_{Rr} < h[F]_{Rr}, \quad \left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right]_{Rr} < h[F]_{Rr},
\end{gathered} \tag{36}
$$

гдѣ h нѣкоторый постоянный множитель, (который можетъ быть взятъ равнымъ *42*).

Однако до сихъ поръ неравенства (36) доказаны нами лишь при предположеніи, что тригонометрическое разложеніе F не содержитъ членовъ, для которыхъ $n \leqq 2$. Особаго разсмотрѣнія требуютъ еще случаи, когда $n=0$, $n=1$, $n=2$. Мы можемъ ограничиться лишь *косинусоидальными* членами, ибо замѣна косинусовъ синусами равносильна повороту на *90*^{0} осей координатъ.

1. *Пусть* $F = A_0(\varrho)$. Въ такомъ случаѣ

$$v = C_0(\varrho),$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dC_0}{d\varrho}\cos\theta, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{dC_0}{d\varrho}\sin\theta, \\
&\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{d^2 C_0}{d\varrho^2}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) + \frac{dC_0}{\varrho d\varrho}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) = \frac{A_0}{2} + \left(\frac{d^2 C_0}{d\varrho^2} - \frac{A_0}{2}\right)\cos 2\theta, \\
&\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \left(\frac{d^2 C_0}{d\varrho^2} - \frac{A_0}{2}\right)\sin 2\theta, \\
&\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{A_0}{2} - \left(\frac{d^2 C_0}{d\varrho^2} - \frac{A_0}{2}\right)\cos 2\theta.
\end{aligned}
$$

Мы видимъ, что полюсы, присутствія которыхъ можно было бы опасаться, на самомъ дѣлѣ отсутствуютъ.

Поэтому, замѣчая (при помощи неравенствъ 26 и 27), что

$$[C_0(\varrho)]_{Rr} < \frac{9R^2}{4}[A_0]_{Rr}, \quad \left[\frac{dC_0}{d\varrho}\right]_{Rr} < \frac{3}{4}R[A_0]_{Rr}, \quad \left[\frac{d^2 C_0}{d\varrho}\right]_{Rr} < \frac{7}{4}[A_0]_{Rr},$$

заключаемъ, что неравенства (36) остаются въ силѣ и въ этомъ случаѣ.

2. *Пусть* $F = A_1(\varrho)\cos\theta$. Тогда

$$v = C_1 \cos\theta,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dC_1}{d\varrho}\cos^2\theta + \frac{C_1}{\varrho}\sin^2\theta, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{dC_1}{d\varrho}\cos\theta\sin\theta - \frac{C_1}{\varrho}\cos\theta\sin\theta,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{d^2C_1}{d\varrho^2}\cos^3\theta + 3\left(A_1 - \frac{d^2C_1}{d\varrho^2}\right)\cos\theta\sin\theta,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} = \left(3\frac{d^2C_1}{d\varrho^2} - 2A_1\right)\sin\theta\cos^2\theta + \left(A_1 - \frac{d^2C_1}{d\varrho^2}\right)\sin^3\theta,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \left(3\frac{d^2C_1}{d\varrho^2} - 2A_1\right)\cos\theta\sin^2\theta + \left(A_1 - \frac{d^2C_1}{d\varrho^2}\right)\cos^3\theta.$$

Полюсы и въ данномъ случаѣ отсутствуютъ.

Поэтому замѣчая, что

$$\left[\frac{C_1}{\varrho}\right]_{Rr} < 2R[A_1]_{Rr}, \quad \left[\frac{dC_1}{d\varrho}\right]_{Rr} < 2R[A_1]_{Rr}, \quad \left[\frac{d^2C_1}{d\varrho^2}\right]_{Rr} < \frac{3}{2}[A_1]_{Rr}$$

приходимъ опять къ неравенствамъ (36). Наконецъ

3. *Пусть* $F = A_2\cos 2\theta$. Слѣдовательно

$$v = C_2\cos 2\theta,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dC_2}{d\varrho}\cos\theta\cos 2\theta + \frac{2C_2}{\varrho}\sin\theta\sin 2\theta, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{dC_2}{d\varrho}\sin\theta\cos 2\theta - \frac{2C_2}{\varrho}\cos\theta\sin 2\theta,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{d^2C_2}{d\varrho^2}\cos 2\theta\cos^2\theta + 4\frac{dC_2}{\varrho d\varrho}\sin 2\theta\cos\theta\sin\theta - \frac{4C_2}{\varrho^2}\cos 2\theta\sin^2\theta$$
$$+ \frac{dC_2}{\varrho d\varrho}\cos 2\theta\sin^2\theta - 4\frac{C_2}{\varrho^2}\sin 2\theta\cos\theta\sin\theta,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} = \frac{d^2C_2}{d\varrho^2}\cos 2\theta\cos\theta\sin\theta + \ldots + \frac{2C_2}{\varrho^2}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sin 2\theta,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{d^2C_2}{d\varrho^2}\cos 2\theta\sin^2\theta + \ldots \qquad + \frac{4C_2}{\varrho^2}\sin\theta\cos\theta\sin 2\theta.$$

И такъ какъ въ силу неравенствъ (26) и (27^{bis}) находимъ,

$$\left[\frac{C_2}{\varrho^2}\right]_{Rr} < 4[A_2]_{Rr} \quad \left[\frac{dC_2}{\varrho d\varrho}\right] < 7[A_2]_{Rr} \quad \left[\frac{d^2C_2}{d\varrho^2}\right] < 8[A_2]_{Rr},$$

то неравенства (36) снова остаются въ силѣ (множитель h можетъ быть взятъ равнымъ 89).

Мы могли бы немедленно пойти дальше, такъ какъ *неравенства* (36) *даютъ ключъ къ доказательству нашей основной теоремы,* но здѣсь умѣстно будетъ болѣе разносторонне изслѣдовать уравненіе Пуассона.

До опубликованія представленныхъ здѣсь результатовъ (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, ноябрь 1903 г.), было извѣстно, что при помощи модуля второй части уравненія Пуассона невозможно установить высшаго предѣла модулей вторыхъ производныхъ рѣшенія v этого уравненія, которое обращается въ нуль на данномъ контурѣ. Въ этомъ была *существенная разница между уравненіями эллиптическаго типа и обыкновенными дифференціальными уравненіями второго порядка съ одной независимой перемѣнной; здѣсь скрывалась истинная причина трудности рѣшенія такъ называемой задачи Дирикле и непримѣнимости къ ней съ большими или меньшими измѣненіями общихъ методовъ Коши для интегрированія дифференціальныхъ уравненій при болѣе простыхъ первоначальныхъ условіяхъ.*

Въ своемъ замѣчательномъ изслѣдованіи, помѣщенномъ въ Journal de l'Ecole Polytechnique въ 1890 году, о которомъ мы говорили въ 1-й главѣ, Пикаръ примѣнилъ счастливую мысль разсматривать вмѣсто модулей функцій нѣкоторыя опредѣленныя выраженія, съ ними связанныя. Но эти выраженія (*нормы* Пикара) оказались также недостаточны съ точки зрѣнія интересующей насъ сейчасъ цѣли, какъ и простые модули, и придали къ тому же значительную вѣроятность предположенію, что вообще неравенствъ, аналогичныхъ нашимъ неравенствамъ (36), не можетъ быть дано, какъ бы ни видоизмѣнять разсматриваемыя вмѣсто модулей выраженія. Однако легко построить выраженія, которыя *почти* осуществляютъ поставленную цѣль. Выраженія эти получаются слѣдующимъ образомъ.

Пусть

$$F(x, y) = A_0(\varrho) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\varrho) \cos n\theta + B_n(\varrho) \sin n\theta .$$

Я называю *тригонометрическимъ модулемъ* функціи $F(x, y)$ внутри контура σ рядъ

$$\{F(x, y)\}_\sigma = \{A_0\}_\sigma + \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n\}_\sigma + \{B_n\}_\sigma ,$$

гдѣ каждое изъ выраженій второй части равенства $\{A_n\}_\sigma$ означаетъ максимумъ модуля функціи A_n комплексной перемѣнной ϱ внутри контура σ, находящагося въ плоскости этой перемѣнной. Очевидно, также, что *въ случаѣ конечности тригонометрическаго модуля внутри комплексной области, $F(x, y)$ есть аналитическая функція относительно перемѣнной ϱ внутри этой области.* Вмѣсто контура σ можно разсматривать вещественный отрѣзокъ $0R$. (Конечность тригонометрическаго модуля на опредѣленномъ отрѣзкѣ не является, разумѣется, признакомъ аналитическаго характера функціи). Легко видѣть въ этомъ случаѣ, что неравенства (36) остаются въ силѣ, если замѣнить нормы тригонометрическими модулями на отрѣзкѣ $0R$, или внутри соотвѣтствующимъ образомъ выбраннаго контура σ, при условіи однако, что *n неравно двумъ*. Дѣйствительно, достаточно предположить въ уравненіи $F = \cos 2\theta$, чтобъ замѣтить, что несмотря на конечность тригонометрическаго могуля F (на отрѣзкѣ $0R$, какъ и вообще при всѣхъ значеніяхъ ϱ), вторыя производныя рѣшенія v безконечны при $\varrho = 0$. Я считаю это обстоятельство заслуживающимъ чрезвычайнаго внимапія, такъ какъ оно показываетъ, *съ какой осторожностью нужно отдѣлять перемѣнныя ϱ и θ для того, чтобъ не ввести критической точки $\varrho = 0$, которая отсутствуетъ, пока обѣ перемѣнныя соединены.*

Единственное безусловно общее и логически совершенное средство избѣжать этого затрудненія заключается въ разсмотрѣніи такихъ выраженій, которыя бы по самой своей формѣ исключали въ случаѣ своей сходимости возможность существованія особенности въ точкѣ $\varrho = 0$; это осуществляется *нормами*. Но и сохраняя тригонометрическіе модули, можно указать болѣе или менѣе общіе искусственные пріемы, которые въ иныхъ случаяхъ приводятъ къ тѣмъ же результатамъ, что и примѣненіе нормъ. Напримѣръ, весьма интересно, что на основаніи формулъ (16) и (16^{bis}) можно всетаки вывести изъ конечности тригонометрическаго модуля $\{\varrho^k F(x, y)\}_{0R}$ конечность [1]) тригонометричоскихъ модулей

$$\left\{\varrho^k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\}_{0R}, \quad \left\{\varrho^k \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right\}_{0R}, \quad \left\{\varrho^k \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right\}_{0R},$$

если k положительное, но не цѣлое число.

---

[1]) Легко убѣдиться, что тотъ же выводъ останется въ силѣ, если замѣнить отрѣзокъ $0R$ тупоугольнымъ ромбомъ, котораго большею діагональю является $0R$. Дѣйствительно, намъ достаточно разсмотрѣть интегралы $\mathrm{I} = x^p \int_0^x F(x) x^q dx$, при условіи, что $q > 0$ и $p + q + 1 = 0$, и $G = x^p \int_x^R F(x) . x^q dx$, гдѣ $p > 0$ и $p + q + 1 = 0$, (такъ что $q \neq -1$) и показать, что

$$\{\mathrm{I}\}_\sigma \leqq \frac{1}{q+1} \{F(x)\}_\sigma, \quad \{G_\sigma\} < \frac{2}{|q+1|} \{F(x)\}_\sigma$$

(для опредѣленности я предположилъ, что острые углы ромба σ равны каждый 60^0). Ясно, что

$$\{\mathrm{I}\}_\sigma \leqq | x^p | . \int_0^x \{F(x)\}_\sigma . | x |^q . | dx | = | x |^p . \{F(x)\}_\sigma . \int_0^x | x |^q . | dx | =$$
$$= \{F(x)\}_\sigma . \frac{| x |^{p+q+1}}{q+1} \leqq \frac{1}{q+1} \{F(x)\}_\sigma .$$

Другой пріемъ заключается въ томъ, что уравненіе Пуассона интегрируется при иныхъ предѣльныхъ условіяхъ, а именно при предположеніи, что значенія рѣшенія даны *на двухъ концентрическихъ окружностяхъ*, такъ что точка $\varrho = 0$ находится внѣ кольца, внутри котораго искомое рѣшеніе не должно имѣть особенностей. Но такъ какъ для примѣненія этого пріема намъ понадобятся новыя формулы, то мы отложимъ его разсмотрѣніе на конецъ главы.

§ 14. Теперь же примѣнимъ неравенства (36) къ системѣ уравненій (30) и прежде всего разсмотримъ уравненіе

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = f\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}\frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial u_0}{\partial y} u_0 xy\right) - f(r_0 s_0 t_0 p_0 q_0 z_0 00) = F_0(xy),$$

гдѣ u_0 дано формулой (33).

Полагая

$$u_0 - z_0 = a_1,\ \frac{\partial u_0}{\partial x} - p_0 = b_1,\ \frac{\partial u_0}{\partial y} - q_0 = c_1,$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - r_0 = a_0,\ \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - s_0 = b_0,\ \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - t_0 = c_0,$$

имѣемъ очевидно

$$F_0(xy) = A_0 a_0 + B_0 b_0 + C_0 c_0 + D_0 b_1 + E_0 c_1 + G_0 a_1 + H_0 x_1 + I_0 y_1,$$

гдѣ

$$A_0 = f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}(r_0 + \theta a_0,\ s_0 + \theta b_0,\ t_0 + \theta c_0,\ p_0 + \theta b_1,\ q_0 + \theta c_1,\ z_0 + \theta a_1,\ \theta x,\ \theta y),$$

$$B_0 = f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}(r_0 + \theta a_0,\ s_0 + \theta b_0, \ldots \theta y),$$

$$C_0 = f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}(r_0 + \theta a_0,\ s_0 + \theta b_0, \ldots),$$

и т. д. $(0 < \theta < 1)$.

Съ другой стороны

$$\{G\}_\sigma \leqq |x|^p \int_x^R \{F(x)\}_\sigma |x|^q . |dx| = |x|^p . \{F(x)\}_\sigma \cdot \int_x^R |x|^q dx$$

и замѣчая, что

$$\int_x^R |x|^q dx < \frac{1}{\cos 60^0} \int_{|x|}^R x^q dx = 2\frac{R^{q+1} - |x|^{q+1}}{q+1},$$

находимъ

$$\{G\}_\sigma < \frac{2}{|q+1|}\{F\}_\sigma .$$

Кромѣ того ясно, что A_0, B_0, C_0 и т. д. разлагаются въ строку Тэйлора по степенямъ a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, x, y.

Поэтому на основанiи § 9 и неравенствъ (34) находимъ

$$[A_0]_{Rr} < \overset{+}{f}'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}(HR,\ HR,\ HR,\ HR,\ HR,\ HR,\ R,\ R),$$

$$[B_0]_{Rr} < \overset{+}{f}'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}(HR,\ HR,\ HR,\ HR,\ HR,\ HR,\ R,\ R),$$

$$[C_0]_{Rr} < \overset{+}{f}'_{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}(HR,\ HR,\ HR,\ HR,\ HR,\ HR,\ R,\ R),$$

и т. д., гдѣ символъ $\overset{+}{f}$ относится къ строкѣ Тэйлора около значенiй r_0, s_0, t_0, p_0, q_0, z_0, 0, 0. Такимъ образомъ, если вспомнимъ, что при этихъ значенiяхъ

$$f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} = f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}} = f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} = 0\,,$$

то увидимъ, что, какъ бы мало ни было ε, можно выбрать R достаточно малымъ, чтобъ

$$[A_0]_{Rr} < \varepsilon, \quad [B_0]_{Rr} < \varepsilon, \quad [C_0]_{Rr} < \varepsilon,$$

$$[D_0]_{Rr} < P, \quad [E_0]_{Rr} < P, \quad [G_0]_{Rr} < P, \quad [H_0]_{Rr} < P, \quad [I_0]_{Rr} < P,$$

гдѣ P есть нѣкоторое опредѣленное конечное число.

Слѣдовательно,

$$[F_0]_{Rr} < 3\,(P+\varepsilon)\,HR + 2\,PR = \mu.$$

И наконецъ изъ неравенствъ (36) выводимъ, что

$$[v_1]_{Rr} < hR^2\mu, \quad \left[\frac{\partial v_1}{\partial x}\right]_{Rr} < hR\mu, \quad \left[\frac{\partial v_1}{\partial y}\right]_{Rr} < hR\mu,$$

$$\left[\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right]_{Rr} < h\mu, \quad \left[\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y}\right]_{Rr} < h\mu, \quad \left[\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}\right]_{Rr} < h\mu.$$

Обозначая черезъ F_n вторую часть равенства $(n+2)^{\text{го}}$ уравненiя системы (30), докажемъ, что вообще можно R взять достаточно малымъ для того, чтобъ

$$[F_n]_{Rr} < \frac{\mu}{2^n}.$$

Для этого намъ можно употребить прiемъ, извѣстный подъ названiемъ математической индукцiи: а именно, полагая наше неравенство доказаннымъ для $n-1$, выведемъ отсюда его правильность для n, и такъ какъ для $n=0$, правильность неравенства доказана, то слѣдовательно оно будетъ выведено для всякаго n.

Итакъ допустимъ, что извѣстно, что

$$[F_0]_{Rr} < \mu, \quad [F_1]_{Rr} < \frac{\mu}{2}, \ldots [F_{n-1}]_{Rr} < \frac{\mu}{2^{n-1}}$$

и покажемъ, что можно дать R опредѣленное (не зависящее отъ n) достаточно малое значеніе, чтобъ отсюда вытекало

$$[F_n]_{Rr} < \frac{\mu}{2^n}.$$

Во-первыхъ изъ неравенствъ (36) вытекаетъ

$$\left.\begin{aligned} &[v_i]_{Rr} < \frac{h\mu R^2}{2^{i-1}}, \quad \left[\frac{\partial v_i}{\partial x}\right]_{Rr} < \frac{h\mu R}{2^{i-1}}, \quad \left[\frac{\partial v_i}{\partial y}\right]_{Rr} < \frac{h\mu R}{2^{i-1}}, \\ &\left[\frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2}\right]_{Rr} < \frac{h\mu}{2^{i-1}}, \quad \left[\frac{\partial^2 v_i}{\partial x \partial y}\right]_{Rr} < \frac{h\mu}{2^{i-1}}, \quad \left[\frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2}\right]_{Rr} < \frac{h\mu}{2^{i-1}} \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

при всякомъ i отъ единицы до n включительно.

Далѣе имѣемъ, очевидно:

$$F_n = \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} A_n + \frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial y} B_n + \frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2} C_n + \frac{\partial v_n}{\partial x} D_n + \frac{\partial v_n}{\partial y} E_n + v_n G_n,$$

гдѣ

$$A_n = f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}\left(\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2} + \theta \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x \partial y} + \theta \frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial y^2} + \theta \frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2}, \ldots, u_{n-1} + \theta v_n\right)$$

$$B_n = f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}\left(\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2} + \theta \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}, \ldots u_{n-1} + \theta v_n\right)$$

и т. д. $(0 < \theta < 1)$.

Замѣтимъ также, что A_n, B_n и т. д. разлагаются въ строку Тэйлора по степенямъ

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - r_0, \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2} - r_0, \frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y} - s_0, \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x \partial y} - s_0, \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} - t_0, \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial y^2} - t_0,$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} - p_0, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} - p_0, \frac{\partial u_n}{\partial y} - q_0, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} - q_0, u_n - z_0, u_{n-1} - z_0,$$

симметричную относительно функцій u_n и u_{n-1}.

Но

$$u_n = z_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n\,,$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = p_0 + \frac{\partial v_1}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial v_n}{\partial x}$$

и т. д., такъ что, какъ бы велико ни было n, изъ неравенствъ (37) вытекаетъ

$$[u_n - z_0]_{Rr} < 2h\mu\,,$$

$$\left[\frac{\partial u_n}{\partial x} - p_0\right]_{Rr} < 2h\mu\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\left[\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} - t_0\right]_{Rr} < 2h\mu.$$

Слѣдовательно,

$$[A_n]_{Rr} < \overset{+}{f}{}'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}(2h\mu,\ 2h\mu,\ 2h\mu,\ 2h\mu,\ 2h\mu,\ 2h\mu,\ R,\ R),$$

$$[B_n]_{Rr} < \overset{+}{f}{}'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}(2h\mu,\ 2h\mu,\ 2h\mu,\ 2h\mu,\ 2h\mu,\ 2h\mu,\ R,\ R),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$[G_n]_{Rr} < \overset{+}{f}{}'_{u}(2h\mu,\ 2h\mu,\ 2h\mu,\ 2h\mu,\ 2h\mu,\ 2h\mu,\ R,\ R),$$

гдѣ во второй части неравенствъ символъ $\overset{+}{f}$ относится къ разложенію Тэйлора около r_0, s_0, t_0, p_0, q_0, z_0, 0, 0.

Очевидно, поэтому, что, если R было взято достаточно малымъ, будемъ также имѣть:

$$[A_n]_{Rr} < \varepsilon,\quad [B_n]_{Rr} < \varepsilon,\quad [C_n]_{Rr} < \varepsilon,\quad [D_n]_{Rr} < P,\quad [E_n]_{Rr} < P,$$
$$[G_n]_{Rr} < P.$$

Откуда

$$[F_n]_{Rr} < \frac{h\mu}{2^{n-1}}(3\varepsilon + 3RP).$$

Но ясно, что при R достаточно маломъ $3\varepsilon + 3RP < \frac{1}{2}$.

Слѣдовательно правильность неравенства

$$[F_n]_{Rr} < \frac{h\mu}{2^n}$$

доказана для всякаго n.

Отсюда вытекаетъ уже не только сходимость рядовъ $u_0 + v_1 + \dots + v_n + \dots$ и его производныхъ, но и сходимость нормъ:

$$[u]_{Rr} < [u_0]_{Rr} + [v_1]_{Rr} + [v_2]_{Rr} + \dots [v_n]_{Rr} + \dots,$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{Rr} < \left[\frac{\partial u_0}{\partial x}\right]_{Rr} + \left[\frac{\partial v_1}{\partial x}\right]_{Rr} + \dots + \left[\frac{\partial v_n}{\partial x}\right]_{Rr} + \dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

и т. д.

И наконецъ, примѣняя теорему § 8 приходимъ къ заключенію, что *рѣшеніе уравненія и есть функція аналитическая.*

Теперь намъ остается еще показать, что найденное рѣшеніе u есть ничто иное, какъ произвольное рѣшеніе z, изъ котораго мы исходили, съ которымъ u совпадаетъ на окружности C малаго радіуса R. Съ этой цѣлью напишемъ:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - f\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z, x, y\right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - f\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, u, x, y\right) = 0.$$

Вычитая почленно и полагая $z - u = t$, находимъ

$$A(xy)\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + 2B(xy)\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} + C(xy)\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial t}{\partial x} + 2E\frac{\partial t}{\partial y} + Ft = 0, \quad (38)$$

гдѣ

$$A(xy) = 1 - f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \theta\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \theta\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y}, \dots u + \theta t, x, y\right)$$

$$B(xy) = -\frac{1}{2} f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \theta\frac{\partial^2 t}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \theta\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y}, \dots\right)$$

$$C(xy) = 1 - f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \theta\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \dots\right)$$

и т. д., при $0 < \theta < 1$.

Мы получили такимъ образомъ линейное уравненіе относительно t. Можно показать, что если радіусъ R достаточно малъ, оно будетъ *эллиптическаго* типа, т. е. будетъ соблюдено неравенство $AC - B^2 > 0$.

Въ самомъ дѣлѣ для этого достаточно, чтобъ

$$\left|f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}\right| + \left|f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}\right| + \left|f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \cdot f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}\right| + \frac{1}{4}\left(f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}\right)^2 < 1, \quad (39)$$

при замѣнѣ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ черезъ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \theta \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ черезъ $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \theta \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ черезъ $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \theta \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$ и т. д., гдѣ θ произвольная правильная дробь.

Но въ силу предположеній $f'_{r_0} = f'_{s_0} = f'_{t_0} = 0$ неравенство (39) очевидно будетъ соблюдено, если только

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \theta \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} - r_0\right| < \beta, \quad \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \theta \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} - s_0\right| < \beta$$

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \theta \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} - t_0\right| < \beta, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x} + \theta \frac{\partial t}{\partial x} - p_0\right| < \beta$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y} + \theta \frac{\partial t}{\partial y} - q_0\right| < \beta, \quad |u + \theta t - t_0| < \beta, \quad |x| < |\beta, \quad |y| < \beta,$$

гдѣ β достаточно малое число.

Въ силу же непрерывности z и ея производныхъ первыхъ двухъ порядковъ, можно взять R достаточно малымъ, чтобъ

$$|z - z_0| < \frac{\beta}{3}, \quad \left|\frac{\partial z}{\partial x} - p_0\right| < \frac{\beta}{3}, \ldots; \left|\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - t_0\right| < \frac{\beta}{3}.$$

Съ другой стороны изъ нашего доказательства явствуетъ, что рѣшеніе u, найденное способомъ послѣдовательныхъ приближеній, также удовлетворяетъ неравенствамъ

$$|u - z_0| < \frac{\beta}{3}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x} - p_0\right| < \frac{\beta}{3}, \ldots, \left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - t_0\right| < \frac{\beta}{3}.$$

Такъ что

$$|t| < \frac{2\beta}{3}, \quad \left|\frac{\partial t}{\partial x}\right| < \frac{2\beta}{3}, \ldots, \left|\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right| < \frac{2\beta}{3}.$$

Слѣдовательно

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \theta \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} - r_0\right| < \beta, \quad \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \theta \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} - s_0\right| < \beta$$

и т. д.

Итакъ уравненіе (38) относительно t эллиптическаго типа.

Теперь нетрудно будетъ доказать, что функція t, удовлетворяющая уравненію (38), которая на нѣкоторомъ достаточно маломъ контурѣ C обращается въ нуль, тождественно равна нулю.

Для этого разсмотримъ двойной интегралъ [1]) взятый въ области ограниченной контуромъ C

[1]) Аналогичное разсужденіе читатель найдетъ у Пикара „Traité d'analyse“, t. II. Ch. 1, p. 24.

$$I=\iint t\left\{\left(A\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 t}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+2D\frac{\partial t}{\partial x}+2E\frac{\partial t}{\partial y}+Ft\right)-\right.$$
$$\left.-M\left(t+2x\frac{\partial t}{\partial x}\right)\right\}dx\,dy=-M\iint\frac{\partial(t^2x)}{\partial x}dx\,dy=0\,,$$

гдѣ M нѣкоторая постоянная величина.

Съ другой стороны:

$$I=-\iint\left\{A\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2+2B\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)+C\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}\right)t\frac{\partial t}{\partial x}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}\right)t\frac{\partial t}{\partial y}-2Dt\frac{\partial t}{\partial x}-2Et\frac{\partial t}{\partial y}-Ft^2+M\left(t^2+2xt\frac{\partial t}{\partial x}\right)\right\}dx\,dy.$$

Подъ знакомъ интегрированія у насъ квадратичная форма, которая, какъ мы сейчасъ увидимъ, можетъ стать опредѣленной, если извѣстнымъ образомъ выберемъ контуръ C и число M. Въ самомъ дѣлѣ, дискриминантъ этой формы равенъ

$$\varDelta=8(AC-B^2)(M-F)+4B\left(\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}-2E\right)\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}-2D+2Mx\right)-$$
$$-2C\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}-2D+2Mx\right)^2-2A\left(\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}-2E\right)^2.$$

Слѣдовательно, полагая

$$AC-B^2=\delta\,,\quad \frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}-2D=\alpha\,,\quad \frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}-2E=\beta,$$

видимъ, что условіе $\varDelta>0$, для того чтобъ разсматриваемая форма была опредѣленной, равнозначно неравенству

$$4M\delta>A\beta^2+C(\alpha+2Mx)^2-2B(\alpha+2Mx)\beta+4\delta F.$$

Но это послѣднее неравенство будетъ очевидно удовлетворено, если

$$|x|<\frac{2\delta_1}{N}\,,\qquad M=\frac{N}{2\delta_1}\,,$$

гдѣ δ_1 означаетъ минимумъ δ, а N максимумъ выраженія

$$|A\beta^2|+|C|.(|\alpha|+2)^2+2|B|(|\alpha|+2)|\beta|+4\delta|F|.$$

Итакъ достаточно, чтобъ на контурѣ C, $|x|<\dfrac{2\delta_1}{N}$, для того чтобъ рѣшеніе t, равное нулю на этомъ контурѣ, было тождественно равно нулю.

Отсюда слѣдуетъ, что $z=u$.

Такимъ образомъ *основная теорема доказана.*

§ 15. Укажемъ еще второе доказательство этой теоремы, не основанное на примѣненіи нормальныхъ рядовъ.

Пусть z будетъ по прежнему произвольнымъ рѣшеніемъ уравненія (29). Вмѣсто того, чтобъ искать по способу послѣдовательныхъ приближеній рѣшеніе уравненія (29) которое совпадало бы съ z на окружности C, обладая внутри окружности конечными производными первыхъ двухъ порядковъ, мы будемъ искать рѣшеніе u, которое бы *на двухъ концентрическихъ окружностяхъ весьма малыхъ радіусовъ совпадало бы съ* z.

Обозначимъ черезъ R и R_1 $(R_1 < R)$ соотвѣтственные радіусы разсматриваемыхъ окружностей. Тогда, на основаніи вычисленій сдѣланныхъ въ началѣ главы, видимъ, что на окружности C

$$z = z_0 + \frac{R^2}{4}(r_0 + t_0) + R^3 c_0 + (Rp_0 + R^3 c_1)\cos\theta + (Rq_0 + R^3 d_1)\sin\theta +$$

$$+ [R^2 \frac{r_0 - t_0}{4} + R^3 c_2]\cos 2\theta + \left[\frac{R^2 s_0}{2} + R^3 d_2\right]\sin 2\theta +$$

$$+ \sum_{n=3}^{\infty} R^3 [c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta] = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin \theta$$

и на окружности C_1

$$z = z_0 + \frac{R_1^2}{4}(r_0 + t_0) + R_1^3 c_0 + (R_1 p_0 + R_1^3 c_1)\cos\theta + (R_1 q_0 + R_1^3 d_1)\sin\theta +$$

$$+ [R_1^2 \frac{r_0 - t_0}{4} + R_1^3 c_2]\cos 2\theta + \left[\frac{R_1^2 s_0}{2} + R_1^3 d_2\right]\sin 2\theta +$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} R_1^3 [c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta] = \alpha'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha'_n \cos n\theta + \beta'_n \sin n\theta.$$

Но рѣшеніе u_0 перваго изъ уравненій (30)

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = r_0 + t_0 = A_0,$$

которое на окружностяхъ C и C_1 принимаетъ указанныя значенія, равно

$$u_0 = \frac{A_0}{4}(\varrho^2 - R^2) + \alpha_0 + c_0(R_1^3 - R^3)\frac{\log\frac{\varrho}{R}}{\log\frac{R_1}{R}} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{R_1}{R}\right)^{2n}} \left\{ \frac{\varrho^n}{R^n} \left[\left(\alpha_n - \alpha'_n \frac{R_1^n}{R^n}\right)\cos n\theta + \left(\beta_n - \beta'_n \frac{R_1^n}{R^n}\right)\sin n\theta \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{R_1^n}{\varrho^n} \left[\left(\alpha'_n - \alpha_n \frac{R_1^n}{R^n}\right)\cos n\theta + \left(\beta'_n - \beta_n \frac{R_1^n}{R^n}\right)\sin n\theta \right] \right\}.$$

Полагая для опредѣленности $R_1 = \frac{R}{2}$, найдемъ на основаніи неравенствъ (32)

$$\begin{aligned}
&\left\{u_0 - z_0\right\}_\sigma < \frac{|A_0|R^2}{2} + 4LR < HR \\
&\left\{\frac{\partial u_0}{\partial x} - p_0\right\}_\sigma < \frac{|A_0|R}{2} + 4LR < HR \\
&\left\{\frac{\partial u_0}{\partial y} - q_0\right\}_\sigma < \frac{|A_0|R}{2} + 4LR < HR \\
&\left\{\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - r_0\right\}_\sigma < \frac{|A_0|R}{2} + 4LR < HR \\
&\left\{\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - s_0\right\}_\sigma < \frac{|A_0|R}{2} + 4LR < HR \\
&\left\{\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - t_0\right\}_\sigma < \frac{|A_0|R}{2} + 4LR < HR.
\end{aligned} \tag{34'}$$

Лѣвая часть этихъ неравенствъ представляетъ тригонометрическіе модули внутри ромба σ, построеннаго на отрѣзкѣ RR_1, какъ на бо́льшей діагонали, причемъ острые углы ромба мы предположимъ равными 60^0. Неравенства (34′) вполнѣ равнозначны неравенствамъ (34).

Намъ остается вывести еще неравенства, замѣняющія неравенства (36). Для этого вернемся къ уравненію (35), и укажемъ формулы аналогичныя формуламъ (16), которыми опредѣлялись бы коэффиціенты тригонометрическаго разложенія рѣшенія, обращающагося въ нуль на окружностяхъ C и C_1. Сохраняя прежнія обозначенія, найдемъ безъ труда

$$\begin{aligned}
2n\left[R^{2n} - R_1^{2n}\right] C_n &= \left[\varrho^n - \frac{R_1^{2n}}{\varrho^n}\right] \int_R^\varrho A_n \left[\frac{R^{2n}}{\varrho^{n-1}} - \varrho^{n+1}\right] d\varrho + \\
&+ \left[\varrho^n - \frac{R^{2n}}{\varrho^n}\right] \int_\varrho^{R_1} A_n \left[\frac{R_1^{2n}}{\varrho^{n-1}} - \varrho^{n+1}\right] d\varrho, \\
2n\left[R^{2n} - R_1^{2n}\right] D_n &= \left[\varrho^n - \frac{R_1^{2n}}{\varrho^n}\right] \int_R^\varrho B_n \left[\frac{R^{2n}}{\varrho^{n-1}} - \varrho^{n+1}\right] d\varrho + \\
&+ \left[\varrho^n - \frac{R^{2n}}{\varrho^n}\right] \int_\varrho^{R_1} B_n \left[\frac{R_1^{2n}}{\varrho^{n-1}} - \varrho^{n+1}\right] d\varrho,
\end{aligned} \tag{40}$$

и, при $n = 0$,

$$C_0 = \int_R^\varrho \frac{d\varrho}{\varrho} \int_0^\varrho \varrho A_0 \, d\varrho + \frac{\log \frac{\varrho}{R}}{\log \frac{R_1}{R}} \int_{R_1}^R \frac{d\varrho}{\varrho} \int_0^\varrho \varrho A_0 \, d\varrho.$$

Слѣдовательно [1]),

$$\{C_n\}_\sigma < \frac{12R^2}{n^2}\{A_n\}_\sigma,\ \{D_n\}_\sigma < \frac{12R^2}{n^2}\{B_n\}_\sigma,\ \{C_0\}_\sigma < 2R^2\{A_0\}_\sigma \quad (41)$$

Дифференцируя формулы (40), найдемъ также

$$2(R^{2n}-R_1^{2n})\frac{dC_n}{d\varrho} = \left[\varrho^{n-1}+\frac{R_1^{2n}}{\varrho^{n+1}}\right]\int\limits_R^\varrho A_n\left[\frac{R^{2n}}{\varrho^{n-1}}-\varrho^{n+1}\right]d\varrho +$$
$$+\left[\varrho^{n-1}+\frac{R^{2n}}{\varrho^{n+1}}\right]\int\limits_\varrho^{R_1} A_n\left[\frac{R_1^{2n}}{\varrho^{n-1}}-\varrho^{n+1}\right]d\varrho,$$
$$(40^{\text{bis}})$$
$$2(R^{2n}-R_1^{2n})\frac{d^2C_n}{d\varrho^2} = \left[(n-1)\varrho^{n-2}-(n+1)\frac{R_1^{2n}}{\varrho^{n+2}}\right]\int\limits_R^\varrho A_n\left[\frac{R^{2n}}{\varrho^{n-1}}-\varrho^{n+1}\right]d\varrho +$$
$$+\left[(n-1)\varrho^{n-2}-(n+1)\frac{R^{2n}}{\varrho^{n+2}}\right]\int\limits_\varrho^{R_1} A_n\left[\frac{R_1^{2n}}{\varrho^{n-1}}-\varrho^{n-1}\right]d\varrho + 2(R^{2n}-R_1^{2n})A_n.$$

Слѣдовательно,

$$\left\{\frac{dC_n}{d\varrho}\right\}_\sigma < \frac{24R}{n}\{A_n\}_\sigma,\quad \left\{\frac{d^2C_n}{d\varrho^2}\right\}_\sigma < 25\{A_n\}_\sigma. \quad (41^{\text{bis}})$$

Такъ какъ точка $\varrho = 0$ лежитъ внѣ ромба σ, то изъ неравенствъ (41) и (41^{bis}) безъ всякихъ затрудненій вытекаетъ

$$\begin{gathered}\{v\}_\sigma < hR^2\{F(x,y)\}_\sigma,\ \left\{\frac{\partial v}{\partial x}\right\}_\sigma < hR\{F(x,y)\}_\sigma,\ \left\{\frac{\partial v}{\partial y}\right\}_\sigma < hR\{F(x,y)\}_\sigma,\\ \left\{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\}_\sigma < h\{F(x,y)\}_\sigma,\ \left\{\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right\}_\sigma < h\{F(x,y)\}_\sigma,\ \left\{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right\}_\sigma < h\{F(x,y)\}_\sigma.\end{gathered} \quad (42)$$

Неравенства (42) могутъ вполнѣ замѣнить неравенства (36) при примѣненіи способа послѣдовательныхъ приближеній, благодаря чему нѣтъ надобности воспроизводить еще разъ сдѣланное выше разсужденіе. Мы получимъ такимъ образомъ рѣшеніе u даннаго уравненія, имѣющее конечный тригонометрическій модуль внутри контура σ. Отсюда ясно, что функція u, а также всѣ ея производныя первыхъ двухъ порядковъ суть *аналитическія функціи относительно перемѣнной* ϱ, но a priori не оче-

[1]) Неравенства (41) получаются при помощи соображеній указанныхъ въ выноскѣ на страницѣ 36-й съ той разницей, что намъ не приходится безпокоиться относительно точки $\rho = 0$ (которая лежитъ внѣ контура σ).

видно, что рѣшеніе u должно быть аналитическимъ относительно обѣихъ перемѣнныхъ. Для того, чтобъ это доказать, замѣтимъ прежде всего, что тѣ же соображенія [1]), что и въ первомъ доказательствѣ, позволяютъ установить тождественность найденнаго рѣшенія u и рѣшенія z, изъ котораго мы исходили. Слѣдовательно, передвигая по произволу центръ окружностей C и C_1, мы приходимъ къ заключенію, что z и ея производныя первыхъ двухъ порядковъ суть аналитическія функціи относительно каждой изъ перемѣнныхъ x и y взятой въ отдѣльности. На основаніи теоремы Коши мы можемъ построить аналитическое рѣшеніе z_1, которое при $y=0$ вмѣстѣ со своей первой производной по y совпадало бы съ z и ея производной по y. Въ такомъ случаѣ при $y=0$ всѣ производныя z_1 совпадутъ съ соотвѣтственными производными z; и, такъ какъ z, разсматриваемая, какъ функція одного только y, не имѣетъ особенности при $y=0$, то $z-z_1$ при всякомъ опредѣленномъ x является аналитической функціей y, которой всѣ производныя равны нулю, а потому z тождественно равно z_1 при всякомъ x и y.

Таково второе доказательство аналитической природы рѣшенія z.

§ 16. Въ заключеніе укажемъ примѣненіе основной теоремы къ нѣкоторымъ интереснымъ частнымъ случаямъ.

1. *Всѣ минимальныя поверхности аналитичны.*

Въ самомъ дѣлѣ онѣ опредѣляются уравненіемъ

$$f=(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0.$$

Но всѣ рѣшенія этого уравненія [2]) удовлетворяютъ неравенству (2), такъ какъ

$$\delta=f'_r f'_t-\frac{1}{4}(f'_s)^2=1+p^2+q^2>0.$$

2. *Всѣ поверхности постоянной положительной кривизны аналитичны.*

Въ самомъ дѣлѣ онѣ удовлетворяютъ уравненію

$$f=rt-s^2-C^2(1+p^2+q^2)^2=0.$$

Но

$$\delta=f'_r f'_t-\frac{1}{4}(f'_s)^2=tr-s^2=C^2(1+p^2+q^2)^2>0.$$

3. *Всѣ поверхности, налагающіяся на какую нибудь аналитическую поверхность положительной кривизны, аналитичны.*

---

[1]) Въ интегралѣ I на страницѣ 70 слѣдуетъ лишь замѣнить x и y соотвѣтственно черезъ ρ и θ, не обращая вниманія на то, что коэффиціенты нѣкоторыхъ членовъ становятся безконечными при $\rho=0$, такъ какъ эта точка находится *внѣ* области интегрированія.

[2]) Такого рода уравненія называются, какъ извѣстно, уравненіями *эллиптическаго* типа.

Пусть

$$d\sigma^2 = du^2 + C^2 dv^2$$

представляетъ линейный элементъ аналитической поверхности положительной кривизны въ геодезическихъ координатахъ, на которую накладывается разсматриваемая поверхность $\sum$, такъ что C аналитическая функція u и v и кромѣ того

$$\frac{1}{C}\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} < 0,$$

такъ какъ кривизна $\frac{1}{RR'}$ выражается формулой

$$\frac{1}{RR'} = -\frac{1}{C}\frac{\partial^2 C}{\partial u^2}.$$

Съ другой стороны, координаты x, y, z поверхности $\sum$ разсматриваемыя, какъ функціи параметровъ u и v удовлетворяютъ уравненію

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\sigma^2 = du^2 + C^2 dv^2,$$

изъ котораго выводится, что каждая изъ координатъ x, y, z удовлетворяетъ также уравненію [1])

$$F = C\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right)^2\right] + \left(C^2\frac{\partial C}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial C}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + 2\frac{\partial C}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} -$$

$$- C^2\frac{\partial^2 C}{\partial u^2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 - \left[\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} + \frac{1}{C}\left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)^2\right]\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + C^2\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} = 0.$$

Легко видѣть, что это послѣднее уравненіе эллиптическаго типа. Въ самомъ дѣлѣ

$$\delta = F'_r F'_t - \frac{1}{4}(F'_s)^2 = C^2(rt - s^2) + \left(C^3\frac{\partial C}{\partial u}p - C\frac{\partial C}{\partial v}q\right)r +$$

$$+ 2C\frac{\partial C}{\partial u}qs - \left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)^2 q^2 = C\frac{\partial^2 C}{\partial u^2}[C^2p^2 + q^2 - C^2].$$

Но

$$[C^2p^2 + q^2 - C^2] = [(1 - p^2)(C^2 - q^2) - p^2q^2]$$

дискримантъ опредѣленной квадратичной формы

$$du^2 + C^2 dv^2 - [p\,du + q\,dv]^2.$$

Слѣдовательно,

$$\delta > 0.$$

---

[1]) Darboux „Théorie des surfaces“ t. III, стр. 262.

ВТОРАЯ ЧАСТЬ

Задача Дирикле.

Глава IV.

Каноническія линейныя уравненія эллиптическаго типа.

§ 17. Задачей Дирикле мы будемъ называть слѣдующую задачу: *Опредѣлить функцію z, удовлетворяющую данному уравненію эллиптическаго типа, обладающую конечными и непрерывными производными первыхъ двухъ порядковъ внутри даннаго контура C, и обращающуюся на этомъ контурѣ въ данную функцію дуги.*

Эта задача не всегда возможна, а если возможна, то не всегда допускаетъ только одно рѣшеніе. Мы ограничимся лишь тѣми уравненіями относительно которыхъ можно *a priori* утверждать, что двухъ безконечно близкихъ рѣшеній задача Дирикле не допускаетъ. Достаточно взять простой примѣръ уравненія $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}+z=0$, чтобъ убѣдиться, что это не общее правило. Въ самомъ дѣлѣ, при всякомъ значеніи A функція

$$z=A\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\sin\frac{y}{\sqrt{2}}$$

удовлетворяетъ нашему уравненію и обращается въ нуль на контурѣ квадрата, котораго стороны $x=0$, $y=0$, $x=\pi\sqrt{2}$, $y=\pi\sqrt{2}$.

Если

$$F\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ z,\ x,\ y\right)=0 \qquad (1)$$

разсматриваемое уравненіе эллиптическаго типа, приходится сдѣлать ограниченіе, что всякое рѣшеніе его удовлетворяетъ также неравенству

$$F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}\cdot F'_z \leqq 0. \qquad (43)$$

Лишнее, пожалуй, напоминать, что $F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}} \gtrless 0$, вслѣдствіе характеристичнаго для уравненій эллиптическаго типа неравенства (2)

$$4F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}\cdot F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}-\left(F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}}\right)^2>0.$$

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ всегда предполагать $F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}} > 0$. Поэтому неравенство (43) замѣняется неравенствомъ

$$F'_z \leqq 0. \tag{43 bis}$$

Итакъ пусть условіе (43) соблюдено. Еслибъ задача Дирикле допускала 2 рѣшенія z и z', то можно было бы написать

$$F\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z, x, y\right) = 0,$$

$$F\left(\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z'}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z'}{\partial y^2}, \frac{\partial z'}{\partial x}, \frac{\partial z'}{\partial y}, z', x, y\right) = 0.$$

Откуда, полагая $z - z' = t$, находимъ

$$A\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial t}{\partial x} + 2E\frac{\partial t}{\partial y} + Gt = 0, \tag{44}$$

гдѣ

$$A = F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}\left(\frac{\partial z'}{\partial x^2} + \theta\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z'}{\partial x \partial y} + \theta\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y}, \ldots\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$G = F'_z\left(\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2} + \theta\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z'}{\partial x \partial y} + \theta\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y}, \ldots\right),$$

причемъ $0 < \theta < 1$.

Но, если въ уравненіи (44) допустимъ, что

$$AC - B^2 > 0, \quad G \leqq 0, \tag{45}$$

то рѣшеніе его $t = z - z'$, обращающееся въ нуль на контурѣ C какихъ угодно размѣровъ, должно быть тождественно нулю [1]). Слѣдовательно *условіе (43) не только исключаетъ возможность двухъ безконечно близкихъ рѣшеній задачи Дирикле, но позволяетъ утверждать, что, если вообще задача Дирикле допускаетъ два различныя рѣшенія z и z', должно существовать значеніе θ, при которомъ неравенства (45) не были бы соблюдены.*

Отсюда слѣдуетъ, что задача Дирикле не можетъ допускать болѣе одного рѣшенія, если для разсматриваемаго уравненія условія (2) и (43) соблюдены *тождественно* (она, конечно, можетъ въ этомъ случаѣ также и вовсе не имѣть рѣшенія). Таковы напримѣръ, уравненія

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0,$$

---

[1]) См. Picard „Traité d'analyse" t. II. Ch. I.

или
$$e^r + e^t + r + t = 2,$$
гдѣ мы согласно принятому обозначенію полагаемъ $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; такъ какъ въ обоихъ случаяхъ F'_z тождественно равно нулю, а дискриминантъ $\delta = F'_r F'_t - \frac{1}{4}(F'_s)^2 = (1 + p^2 + q^2) > 0$ въ первомъ случаѣ, и $\delta = (e^r + 1)(e^t + 1) > 0$ во второмъ случаѣ.

При помощи тѣхъ же соображеній можно иногда показать, что задача Дирикле не допускаетъ болѣе двухъ рѣшеній.

Разсмотримъ, напримѣръ, уравненіе поверхностей постоянной положительной кривизны
$$rt - s^2 = C^2 (1 + p^2 + q^2)^2$$
гдѣ C постоянная величина. Второе неравенство (45), очевидно соблюдено при всякомъ θ; что касается перваго, то оно лишь въ томъ случаѣ можетъ не имѣть мѣста, если выпуклости обѣихъ поверхностей, соотвѣтствующихъ рѣшеніямъ z и z' направлены въ противоположныя стороны. Поэтому болѣе двухъ рѣшеній въ настоящемъ случаѣ наша задача не допускаетъ. Изъ подобныхъ же элементарныхъ соображеній можетъ быть выведена интересная теорема Либманна (Миндинга): *Единственная вездѣ правильная (т. е. не имѣющая особенностей) закрытая поверхность постоянной кривизны есть шаръ.*

Гораздо болѣе трудно отвѣтить на вопросъ, имѣетъ ли задача Дирикле хотя бы одно рѣшеніе.

Впервые пытались разрѣшить этотъ вопросъ Гауссъ, а за нимъ Дирикле и Риманнъ, ограничиваясь уравненіемъ Лапласа $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. Замѣчая, что рѣшеніе z, если оно существуетъ, обращаетъ въ *минимумъ* нѣкоторый положительный двойной интегралъ, они считали очевиднымъ, что должна существовать функція (обладающая требуемыми условіями непрерывности), которая дѣйствительно обращаетъ разсматриваемый интегралъ въ минимумъ. Отсюда они умозаключали, что задача Дирикле имѣетъ рѣшеніе. Однако несостоятельность этого способа разсужденія, который сыгралъ крупную роль въ анализѣ, была ясно обнаружена Вейерштрассомъ. Подъ его вліяніемъ лучшіе математики конца прошлаго столѣтія [1]) направили свои усилія на то, чтобъ въ случаѣ уравненія Лапласа доказать возможность, задачи Дирикле. За послѣдніе годы эти изслѣдованія пополнились интересной работой Гильберта [2]), который вернулся

---

[1]) См. Picard „Traité d'analyse“ t. I и II, а также Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften Bd. II, Heft. IV и V.

[2]) Слѣдуетъ также отмѣтить работы Леви и Лебегà въ томъ же направленіи, появившіяся во время редактированія и печатанія настоящаго сочиненія въ „Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo“.

къ принципу Гаусса и придалъ ему необходимую съ точки зрѣнія современнаго анализа, математическую строгость. Я не буду останавливаться на этихъ изслѣдованіяхъ, которыя можно считать классическими, какъ и на работахъ, посвященныхъ болѣе или менѣе частнымъ случаямъ линейныхъ уравненій, и перейду сейчасъ къ приведеннымъ или каноническимъ линейнымъ уравненіямъ эллиптическаго типа

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+a(x\,,\,y)\frac{\partial z}{\partial x}+b(x\,,\,y)\frac{\partial z}{\partial y}+c(x\,,\,y)z=d(x\,,\,y) \qquad (46)$$

гдѣ я предполагаю, что a, b, c, d имѣютъ конечныя производныя перваго порядка, и кромѣ того $c \leq 0$. Задача Дирикле для этихъ уравненій рѣшена Пикаромъ (Acta Mathematica t. XXV) при предположеніи, что контуръ, на которомъ даны значенія рѣшенія, аналитиченъ.

Альтернирующій способъ, при помощи котораго французскій геометръ рѣшаетъ эту задачу, былъ еще ранѣе примѣненъ имъ къ интегрированію уравненія [1])

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f(x\,,\,y\,,\,z) \qquad (f'_z \geq 0).$$

Но, повидимому, къ болѣе сложнымъ уравненіямъ метода Пикара не примѣнима. Пикаръ далъ въ прошломъ году еще другое изящное рѣшеніе [2]) задачи Дирикле для уравненія (46), основанное на послѣднихъ изслѣдованіяхъ Гильберта и Фредгольма о линейныхъ интегральныхъ уравненіяхъ.

Для цѣльности и простоты изложенія я не буду пользоваться ни одной изъ упомянутыхъ методъ, и попытаюсь построить всю теорію задачи Дирикле, какъ для линейныхъ, такъ и для не линейныхъ уравненій, на единой основѣ—*методъ вещественнаго аналитическаго продолженія*. Такъ же, какъ Пикаръ въ своей статьѣ изъ „Rendiconti" введемъ въ уравненіе (46) параметръ λ и напишемъ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\lambda\left(a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}+cz\right)=0. \qquad (47)$$

Но вмѣсто того, чтобъ замѣнять это уравненіе соотвѣтствующимъ интегральнымъ уравненіемъ и получить изъ этого послѣдняго искомое рѣшеніе z въ видѣ мероморфной функціи параметра λ, мы непосредственно рѣшимъ наше уравненіе по способу послѣдовательныхъ приближеній для достаточно малыхъ значеній λ и покажемъ затѣмъ, что z разсматриваемая, какъ функція λ, аналитична и не имѣетъ положительныхъ

---

[1]) Journal de Mathématiques, 1896 г., 1898 г.

[2]) Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo, 1906 г.

особенностей; *разложенiе z въ строку Миттагъ-Леффлера по λ будетъ поэтому сходящимся при всѣхъ его положительныхъ значенiяхъ, и, въ частности, при $\lambda = 1$, дастъ намъ искомое рѣшенiе уравненiя (46).*

Въ настоящей главѣ мы ограничимся предположенiемъ, что контуръ C', на которомъ даны значенiя искомаго рѣшенiя *аналитиченъ*. Въ такомъ случаѣ, если требуется рѣшить задачу Дирикле для уравненiя

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f\left(x\,,\ y\,,\ z\,,\ \frac{\partial z}{\partial x}\,,\ \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

гдѣ f вообще функцiя конечная (при x, y, z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ конечныхъ) также, какъ и ея частныя производныя перваго порядка, нужно прежде всего ввести новыя перемѣнныя x', y' такъ, чтобъ форма уравненiя не измѣнилась, контуръ же C' преобразовался бы въ окружность C радiуса R. Это достигается конформнымъ преобразованiемъ [1]) площади, ограниченной контуромъ C' въ площадь круга C. Въ частности, если функцiя f линейна, то она остается линейной и послѣ преобразованiя. Такимъ образомъ мы приведены къ рѣшенiю задачи Дирикле при заданiяхъ на окружности C радiуса R. Слѣдовательно въ случаѣ уравненiя (47) возможно примѣнить при λ достаточно маломъ разсужденiе подобное тому, какое нами сдѣлано въ первой главѣ. Но лучше придать этому разсужденiю иную форму, которая намъ позволитъ вычислить послѣдовательныя производныя искомой функцiи z по λ при $\lambda = 0$, т. е. получить ея формальное разложенiе въ строку Миттагъ-Леффлера и вмѣстѣ съ тѣмъ показать, что при $\lambda = 0$ она представляетъ аналитическую функцiю λ.

Пусть $\varphi(\theta)$ представляетъ собой совокупность значенiй z на окружности C при всякомъ λ. Мы предположимъ тригонометрическое разложенiе производной $\varphi(\theta)$ абсолютно сходящимся. Послѣдовательныя производныя z по λ на окружности C очевидно равны нулю. Отсюда легко видѣть, что при $\lambda = 0$, $z = z_0$, которое удовлетворяетъ уравненiю Пуассона

$$\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} = d(x\,,\ y)$$

на окружности C обращается въ $\varphi(\theta)$. Функцiя z_0 вычисляется, какъ показано въ первой главѣ. Далѣе, очевидно, что, если уравненiе относительно z_1

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} = -\left(a\frac{\partial z_0}{\partial x} + b\frac{\partial z_0}{\partial y} + cz_0\right)$$

---

[1]) Picard „Traité d'analyse“ t. II.

имѣетъ рѣшеніе z_1 обращающееся въ нуль на окружности, то z_1 есть ничто иное, какъ производная $\frac{dz}{d\lambda}$ функціи z при $\lambda=0$. Но тутъ мы опять имѣемъ уравненіе Пуассона, которое мы умѣемъ интегрировать при данныхъ условіяхъ. Точно также для послѣдовательнаго вычисленія послѣдовательныхъ производныхъ z по λ, находимъ рядъ уравненій Пуассона

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z_2}{\partial y^2}=-2\left(a\frac{\partial z_1}{\partial x}+b\frac{\partial z_1}{\partial y}+cz_1\right),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2}=-n\left(a\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}+b\frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}+cz_{n-1}\right),\end{gathered}\tag{48}$$

гдѣ z_n представляетъ собой $n^{\text{ую}}$ производную $\frac{d^n z}{d\lambda^n}$ функціи z по λ при $\lambda=0$, если на окружности $z_n=0$. Остается лишь показать, что рядъ

$$z=z_0+\lambda z_1+\frac{\lambda^2}{2!}z_2+\ldots+\frac{\lambda^n}{n!}z_n+\ldots$$

сходится при достаточно малыхъ значеніяхъ λ.

Для этого мы выведемъ слѣдующія общія неравенства.

§ 18. *Если z есть рѣшеніе* [1]) *задачи Дирикле для уравненія* ($c_0\leqq 0$)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+a_0(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+b_0(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}+c_0(x,y)\,z=d(x,y),\tag{46bis}$$

обращающееся въ нуль на окружности C радіуса R, то тригонометрическіе модули на отрѣзкѣ $0R$ удовлетворяютъ неравенствамъ

$$\{z\}_{0R}<k\{d\}_{0R},\quad \left\{\frac{\partial z}{\partial x}\right\}_{0R}<k\{d\}_{0R},\quad \left\{\frac{\partial z}{\partial y}\right\}_{0R}<k\{d\}_{0R},\tag{50}$$

гдѣ k не зависитъ отъ d.

Прежде всего легко видѣть, что

$$\bar z<\mu.\bar d,\tag{49}$$

гдѣ $\bar z$ высшій предѣлъ обыкновеннаго модуля z, $\bar d$ высшій предѣлъ обыкновеннаго модуля d, и μ, независящая отъ d постоянная. Для этого замѣтимъ, что, если въ уравненіи (46^{bis}) въ нѣкоторой области d менѣе нуля, то z въ этой области не можетъ имѣть отрицательнаго минимума;

---

[1]) a_0, b_0, c_0 соотвѣтственно равны $\lambda_0 a$, $\lambda_0 b$, $\lambda_0 c$, гдѣ $0\leqq\lambda_0\leqq 1$.

если же въ нѣкоторой области $d > 0$, то z не имѣетъ въ ней положительнаго максимума.

Но мы можемъ положить

$$z = v + \overline{d}e^{s(x+R)} = v' - \overline{d}e^{s(x+R)},$$

причемъ постоянная s выбрана такъ, что она удовлетворяетъ неравенству

$$s^2 - |a_0| s + c_0 > 1 .$$

Тогда внутри круга C

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} + a_0 \frac{\partial v'}{\partial x} + b_0 \frac{\partial v'}{\partial y} + c_0 v' > 0 ,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + a_0 \frac{\partial v}{\partial x} + b_0 \frac{\partial v}{\partial y} + c_0 v < 0$$

и на основаніи только что сдѣланнаго замѣчанія, заключаемъ, что

$$v > -\overline{d}e^{2sR}, \quad v' < \overline{d}e^{2sR}$$

внутри C. Слѣдовательно

$$-\overline{d}e^{sR}(e^{sR} - e^{sx}) \leq z \leq \overline{d}e^{sR}(e^{sR} - e^{sx})$$

или

$$\bar{z} < \mu . \overline{d} \tag{49}$$

гдѣ $\mu = e^{2sR}$.

Пользуясь сокращенными обозначеніями производныхъ, покажемъ далѣе, что интегралъ взятый внутри круга C

$$I = \iint (rt - s^2)\, dx dy > 0 \tag{51}$$

для всякой функціи, обращающейся въ нуль на окружности C.

Въ самомъ дѣлѣ

$$\iint rt dx dy = \int_c pt dy - \iint p \frac{\partial t}{\partial x} dx dy = -\int_c qr dx - \iint q \frac{\partial r}{\partial y} dx dy$$

и

$$\iint s^2 dx dy = -\int_c ps dx - \iint p \frac{\partial t}{\partial x} dx dy = -\int_c qs dy - \iint q \frac{\partial r}{\partial y} dx dy .$$

Слѣдовательно

$$I = \int_c ps dx + pt dy = \int_c p dq = -\int_c q dp = \frac{1}{2}\int_c p dq - q dp .$$

Эта формула остается въ силѣ, каковъ бы ни былъ контуръ и значенія z на немъ.

Но, такъ какъ C окружность, то

$$p = \frac{\partial z}{\partial \varrho}\cos\theta - \frac{\partial z}{R\partial\theta}\sin\theta\,, \quad dp = \left(-q + \frac{\partial^2 z}{\partial\varrho\partial\theta}\cos\theta - \frac{\partial^2 z}{R\partial\theta^2}\sin\theta\right)d\theta$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial \varrho}\sin\theta + \frac{\partial z}{R\partial\theta}\cos\theta\,, \quad dq = \left(p + \frac{\partial^2 z}{\partial\varrho\partial\theta}\sin\theta + \frac{\partial^2 z}{R\partial\theta^2}\cos\theta\right)d\theta\,.$$

Поэтому

$$I = \frac{1}{2}\int_c \left[(p^2+q^2) - \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2\right]d\theta$$

и въ частности, если $z = 0$ на окружности, то

$$I = \frac{1}{2}\int_c \left(\frac{\partial z}{\partial \varrho}\right)^2 d\theta > 0\,.$$

Съ другой стороны изъ уравненія (46^{bis}) слѣдуетъ, что

$$\iint (r+t)^2\,dx\,dy = \iint (a_0p + b_0q + c_0z - d)^2\,dx\,dy\,.$$

И благодаря неравенству (51) получаемъ

$$\iint (r^2 + 2s^2 + t^2)\,dx\,dy > \iint (a_0p + b_0q + c_0z - d)^2\,dx\,dy\,. \qquad (51^{\text{bis}})$$

Но

$$\iint z(r + t + a_0p + b_0q + c_0z)\,dx\,dy = \iint zd\,dx\,dy =$$
$$= -\iint (p^2 + q^2 - a_0pz - b_0qz - c_0z^2)\,dx\,dy\,.$$

Слѣдовательно

$$\iint (p^2+q^2)\,dx\,dy < \mu_1\overline{d^2}$$

гдѣ двойной интегралъ, какъ и прежде относится къ площади круга C, а μ_1 постоянный множитель. Отсюда

$$\iint (r^2 + 2s^2 + t^2)\,dx\,dy < k_1\overline{d^2}$$

гдѣ k_1 постоянный множитель. Чтобъ не вводить новыхъ символовъ, *мы и въ дальнѣйшихъ неравенствахъ обозначаемъ той же буквой k_1 постоянные множители*, такъ какъ простыя зависимости между этими множителями не представляютъ никакого интереса.

Итакъ можемъ написать также

$$\iint r^2 dx dy < k_1 \overline{d}^2, \quad \iint s^2 dx dy < k_1 \overline{d}^2, \quad \iint t^2 dx dy < k_1 \overline{d}^2$$

и, вводя полярныя координаты,

$$\iint \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \varrho^2}\right)^2 \varrho\, d\varrho\, d\theta < k_1 \overline{d}^2, \quad \iint \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \varrho \partial \theta}\right)^2 \varrho\, d\varrho\, d\theta < k_1 \overline{d}^2, \quad \iint \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}\right)^2 \frac{d\varrho}{\varrho}\, d\theta < k_1 \overline{d}^2.$$

Полагая затѣмъ

$$z = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta,$$

получимъ

$$\int_0^{R'} [\alpha_0''^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n''^2 + \beta_n''^2]\, \varrho\, d\varrho < k_1 \overline{d}^2, \quad \int_0^{R'} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (\alpha_n'^2 + \beta_n'^2)\, \varrho\, d\varrho < k_1 \overline{d}^2,$$

$$\int_0^{R'} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \frac{d\varrho}{\varrho} < k_1 \overline{d}^2,$$

гдѣ $R' \leqq R$, а α_n', β_n', α_n'', β_n'' представляютъ соотвѣтственно первыя и вторыя производныя α_n и β_n по ϱ.

Но, замѣчая, что либо $\alpha_n''^2 > (k_1 \overline{d}^2)^{\frac{1}{2}} \frac{|\alpha_n''|}{n}$, либо $\frac{|\alpha_n''|}{n} < \frac{(k_1 \overline{d}^2)^{\frac{1}{2}}}{n^2}$, находимъ

$$\int_0^{R'} [\,|\alpha_0''| + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (|\alpha_n''| + |\beta_n''|)]\, \varrho\, d\varrho < k_1 \overline{d}$$

и точно также,

$$\int_0^{R'} \sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n'| + |\beta_n'|)\, \varrho^{\frac{1}{2}} d\varrho < k_1 \overline{d}, \quad \int_0^{R'} \sum_{n=1}^{\infty} n (|\alpha_n| + |\beta_n|) \frac{d\varrho}{\varrho^{1/2}} < k_1 \overline{d}.$$

Наконецъ интегрируя и вводя тригонометрическіе модули, получимъ [1])

$$\{ \varrho \int_0^{\theta} \frac{\partial z}{\partial \varrho} d\theta \}_{0R} < k_1 \overline{d}, \quad \{ z \varrho^{\frac{1}{2}} \}_{0R} < k_1 \overline{d}. \tag{52}$$

Неравенствами (52) мы воспользуемся слѣдующимъ образомъ.

---

[1]) Если функція содержитъ линейный членъ относительно θ, то мы условимся, что модуль коэффиціента θ наравнѣ съ модулями коэффиціентовъ cos и sin входитъ въ выраженіе ея тригонометрическаго модуля.

Напишемъ наше уравненіе (46^{bis}) въ полярныхъ координатахъ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial z}{\partial \varrho}+\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}=$$

$$-\left[(a_0\cos\theta+b_0\sin\theta)\frac{\partial z}{\partial \varrho}+(b_0\cos\theta-a_0\sin\theta)\frac{\partial z}{\varrho\partial\theta}\right]-c_0 z+d.$$

Интегрируя обѣ части равенства относительно θ и полагая

$$u=\int_0^\theta z\,d\theta$$

получимъ уравненіе вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial \varrho}+\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=A_0+A\theta+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta=F. \qquad (53)$$

Причемъ изъ неравенствъ (52) вытекаетъ, что

$$\{\varrho^{3/2}F\}_{0R}<k_1\{d\}_{0R}. \qquad (54)$$

Но уравненіе (53) можно разсматривать какъ уравненіе Пуассона, рѣшеніе котораго u обращается въ нуль на окружности C и представляется въ видѣ ряда

$$u=c_0+c\theta+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos n\theta+d_n\sin n\theta,$$

гдѣ c_0, c, c_n, d_n конечныя функціи ϱ, имѣющія конечныя производныя первыхъ двухъ порядковъ внутри C.

c_0, c_n, d_n опредѣляются формулами (16); легко убѣдиться, что c находится въ такой же зависимости отъ A, какъ c_0 отъ A_0, а именно

$$c=\int_R^\varrho\frac{d\varrho}{\varrho}\int_0^\varrho \varrho A\,d\varrho.$$

Слѣдовательно, на основаніи неравенства (54) заключаемъ, что

$$\left\{\frac{\partial u}{\partial\theta}\right\}_{0R}=\{c\}_{0R}+\sum_{n=1}^{\infty}n\left[\{c_n\}_{0R}+\{d_n\}_{0R}\right]<k_1\{d\}_{0R},$$

$$\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right\}_{0R}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left[\{c_n\}_{0R}+\{d_n\}_{0R}\right]<k_1\{d\}_{0R},$$

$$\left\{\varrho\frac{\partial^2 u}{\partial\varrho\partial\theta}\right\}_{0R}=\{\varrho c'\}_{0R}+\sum_{n=1}^{\infty}n\left[\{\varrho c_n'\}_{0R}+\{\varrho d_n'\}_{0R}\right]<k_1\{d\}_{0R}$$

и, возвращаясь къ $z = \frac{\partial u}{\partial \theta}$,

$$\{ z \}_{0R} < k_1 \{ d \}_{0R}, \quad \left\{ \varrho \frac{\partial z}{\partial x} \right\}_{0R} < k_1 \{ d \}_{0R}, \quad \left\{ \varrho \frac{\partial z}{\partial y} \right\}_{0R} < k_1 \{ d \}_{0R}. \qquad (55)$$

Неудобство этихъ неравенствъ, изъ за котораго мы не можемъ ими удовлетвориться, это присутствіе множителя ϱ. Чтобъ избавиться отъ него, разсуждаемъ слѣдующимъ образомъ.

Обозначимъ черезъ H гармоническую функцію [1]), которая на концентрической къ C окружности C' малаго радіуса R' совпадаетъ съ z. Изъ неравенствъ (55) можемъ заключить, что

$$\{ H \}_{0R'} < k_1 \{ d \}_{0R'}, \quad \left\{ \frac{\partial H}{\partial x} \right\}_{0R'} < k_1 \frac{\{ d \}_{0R}}{R'}, \quad \left\{ \frac{\partial H}{\partial y} \right\}_{0R'} < k_1 \frac{\{ d \}_{0R}}{R'}.$$

Поэтому, полагая

$$v = z - H,$$

находимъ

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = - a_0 \frac{\partial v}{\partial x} - b_0 \frac{\partial v}{\partial y} - c_0 v + d_1 = P,$$

гдѣ

$$\{ d_1 \}_{0R'} < \frac{k_1}{R'} \{ d \}_{0R}.$$

Но изъ формулъ (16) вытекаетъ, что

$$\{ v \}_{0R'} < h R'^2 \{ P \}_{0R'}, \quad \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} \right\}_{0R'} < h R' \{ P \}_{0R'}, \quad \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} \right\}_{0R'} < h R' \{ P \}_{0R'}$$

гдѣ h независящій отъ R' постоянный множитель.

Слѣдовательно, полагая $\{ a_0 \}_{0R'} < Q$, $\{ b_0 \}_{0R'} < Q$, $\{ c_0 \}_{0R'} < Q$, получимъ

$$\{ v \}_{0R'} + \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} \right\}_{0R'} + \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} \right\}_{0R'} < 3hR' \left[Q \left(\{ v \}_{0R'} + \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} \right\}_{0R'} + \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} \right\}_{0R'} \right) + \{ d_1 \}_{0R'} \right],$$

откуда, при предположеніи, что $R' < \frac{1}{3hQ}$, выводимъ

$$\{ v \}_{0R'} + \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} \right\}_{0R'} + \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} \right\}_{0R'} < \frac{3hR' \{ d \}_{0R}}{1 - 3hQR'}.$$

---

[1]) Замѣтимъ, что вообще, когда мы говоримъ о рѣшеніи какого нибудь уравненія, которое на нѣкоторомъ контурѣ принимаетъ данныя значенія, безъ дальнѣйшихъ условій, то мы имѣемъ въ виду рѣшеніе, обладающее конечными производными первыхъ двухъ порядковъ *внутри* контура.

Введя новую постоянную k, можемъ написать, возвращаясь къ z

$$\{z\}_{0R'} < \frac{k}{2}\{d\}_{0R}, \quad \left\{\frac{\partial z}{\partial x}\right\}_{0R'} < \frac{k}{2}\{d\}_{0R}, \quad \left\{\frac{\partial z}{\partial y}\right\}_{0R'} < \frac{k}{2}\{d\}_{0R}.$$

Но неравенства (55) позволяютъ непосредственно ограничить тригонометрическіе модули z и ея производныхъ на отрѣзкѣ RR', такъ что можемъ тоже написать

$$\{z\}_{R'R} < \frac{k}{2}\{d\}_{0R}, \quad \left\{\frac{\partial z}{\partial x}\right\}_{R'R} < \frac{k}{2}\{d\}_{0R}, \quad \left\{\frac{\partial z}{\partial y}\right\}_{R'R} < \frac{k}{2}\{d\}_{0R},$$

откуда наконецъ

$$\{z\}_{0R} < k\{d\}_{0R}, \quad \left\{\frac{\partial z}{\partial x}\right\}_{0R} < k\{d\}_{0R}, \quad \left\{\frac{\partial z}{\partial y}\right\}_{0R} < k\{d\}_{0R}, \tag{50}$$

гдѣ k постоянный, не зависящій [1]) отъ d коэффиціентъ.

Неравенства (50) весьма важны; впослѣдствіи мы изъ нихъ выведемъ новыя неравенства, но для того, чтобъ не утомлять читателя выводами, не имѣющими немедленнаго примѣненія, мы сейчасъ же используемъ ихъ для интегрированія линейнаго уравненія.

§ 19. Прежде всего возвращаясь къ системѣ (48) мы безъ дальнѣйшихъ объясненій, выводимъ изъ неравенствъ (50)

$$\{z_n\}_{0R} < k^n Q^n \{d\}_{0R} . n!, \quad \left\{\frac{\partial z_n}{\partial x}\right\}_{0R} < k^n Q^n \{d\}_{0R} . n!, \quad \left\{\frac{\partial z_n}{\partial y}\right\}_{0R} < k^n Q^n \{d\}_{0R} . n!,$$

откуда слѣдуетъ, что радіусъ сходимости строки

$$z = z_0 + \lambda z_1 + \frac{\lambda^2}{2!} z_2 + \ldots \frac{\lambda^n}{n!} z_n + \ldots \tag{56}$$

не менѣе $\dfrac{1}{kQ}$, слѣдовательно, функція z аналитична относительно λ.

Соотвѣтствующая строка Миттагъ-Леффлера будетъ

$$z(x, y, \lambda) = P_1 + (P_2 - P_1) + \ldots (P_m - P_{m-1}) + \ldots, \tag{56'}$$

гдѣ [2])

$$P_m = \sum_k \frac{z_k}{k!} \lambda^k . \theta_{m,k}.$$

---

[1]) Коэффиціентъ k зависитъ конечно, отъ радіуса R круга C, какъ и отъ высшаго предѣла Q тригонометрическихъ модулей a_0, b_0, c_0; во всякомъ случаѣ, если R и Q имѣютъ опредѣленныя конечныя значенія (а также, если $Q = 0$), то и k—опредѣленное конечное число.

[2]) Приводимъ здѣсь значенія $\theta_{m,k}$ (см. Введеніе):

$$\theta_{m_1 k} = \sum_{\alpha_1=0}^{m^2} \sum_{\alpha_2=0}^{m^4} \ldots \sum_{\alpha_m=0}^{m^{2m}} \frac{1}{m^k} . \frac{k!}{\alpha_1! \alpha_2! .. \alpha_m!}$$

при условіи, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = k$.

Рядъ $(56')$ такимъ образомъ вполнѣ опредѣляется вычисленными значеніями функцій z_0, z_1 и т. д., и въ силу извѣстныхъ свойствъ строки Миттагъ-Лефлера, онъ въ частности будетъ сходиться для всѣхъ положительныхъ значеній λ, если мы покажемъ, что найденная аналитическая функція z не можетъ имѣть положительныхъ особенностей; слѣдовательно, полагая въ рядѣ $(56')$ $\lambda = 1$, мы получимъ искомое рѣшеніе задачи Дирикле. Но доказать отсутствіе положительныхъ особенностей очень легко, благодаря неравенствамъ (50).

Въ самомъ дѣлѣ, изъ того, что радіусъ сходимости $z\ (x,\ y,\ \lambda)$ относительно λ при $\lambda = 0$ не менѣе $\frac{1}{kQ}$, вытекаетъ между прочимъ, что задача Дирикле возможна также для уравненія (46^{bis}) при $0 < \lambda < \frac{1}{kQ}$, какова бы ни была къ тому же вторая часть равенства d, которой тригонометрическій модуль конеченъ. Поэтому придавая λ значеніе λ_0, удовлетворяющее этому неравенству, мы получимъ для опредѣленія послѣдовательныхъ производныхъ z при $\lambda = \lambda_0$, систему уравненій аналогичную той, какую получили при $\lambda = 0$.

А именно

$$\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} + \lambda_0 \left(a \frac{\partial z_0}{\partial x} + b \frac{\partial z_0}{\partial y} + e z_0 \right) = d$$

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} + \lambda_0 \left(a \frac{\partial z_1}{\partial x} + b \frac{\partial z_1}{\partial y} + c z_1 \right) = -\left(a \frac{\partial z_0}{\partial x} + b \frac{\partial z_0}{\partial y} + c z_0 \right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (57)$$

$$\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2} + \lambda_0 \left(a \frac{\partial z_n}{\partial x} + b \frac{\partial z_n}{\partial y} + c z_n \right) = -n \left(a \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + b \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + c z_{n-1} \right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

гдѣ z_0 равно $z(x,\ y,\ \lambda_0)$, а z_1, z_2 и т. д., удовлетворяя системѣ (57) при условіи, что на окружности C они обращаются въ нуль, представляютъ собой послѣдовательныя производныя z при $\lambda = \lambda_0$. Но примѣняя неравенства (50), мы видимъ, что радіусъ сходимости при $\lambda = \lambda_0$ не менѣе $\frac{1}{kQ}$; слѣдовательно точка $\lambda_0 + \frac{1}{kQ}$ не можетъ быть особой. И такъ далѣе. Слѣдовательно, замѣчая, что числа k и Q меньше нѣкотораго опредѣленнаго независящаго отъ λ предѣла, заключаемъ, что, аналитическое продолженіе $z\ (x\ y\ \lambda)$ совершается безпрепятственно для всѣхъ положительныхъ значеній λ, и строка $(56')$ при $\lambda = 1$, даетъ намъ рѣшеніе поставленной задачи Дирикле въ видѣ сходящаго выраженія для всѣхъ значеній x, y внутри и на кругѣ C.

Такимъ образомъ мы доказали возможность задачи Дирикле для уравненія (46), предполагая однако, что функція $\varphi(\theta)$ на окружности C

и ея производная $\varphi'(\theta)$ имѣютъ абсолютно сходящіяся тригонометрическія разложенія (для этого достаточно, чтобъ вторая производная $\varphi''(\theta)$ была конечна).

Но никакого затрудненія не представляетъ перейти къ случаю, когда $\varphi(\theta)$ произвольная непрерывная функція. Въ самомъ дѣлѣ, мы можемъ представить $\varphi(\theta)$ въ видѣ равномѣрно сходящагося ряда

$$\varphi(\theta) = \varphi_1(\theta) + [\varphi_2(\theta) - \varphi_1(\theta)] + \ldots + [\varphi_n(\theta) - \varphi_{n-1}(\theta)] + \ldots$$

гдѣ $\varphi_n(\theta)$ не только обладаетъ производными первыхъ двухъ порядковъ, но даже аналитична. Слѣдовательно, для каждаго члена написаннаго ряда задача Дирикле рѣшается указаннымъ способомъ. Поэтому мы поступимъ слѣдующимъ образомъ: опредѣлимъ рѣшеніе z_1 уравненія (46) при предположеніи, что на окружности C $z_1 = \varphi_1(\theta)$; затѣмъ опредѣлимъ рѣшеніе v_1 уравненія, получающагося изъ (46), если d замѣнить нулемъ, при условіи, что на окружности $v_1 = \varphi_2(\theta) - \varphi_1(\theta)$; далѣе опредѣлимъ рѣшеніе v_2 уравненія, получающагося изъ (46) отъ замѣны d нулемъ при условіи, что на окружности $v_2 = \varphi_3(\theta) - \varphi_2(\theta)$ и т. д. Полагая

$$z = z_1 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots, \tag{58}$$

мы видимъ во-первыхъ, что z на окружности C равно $\varphi(\theta)$, и во-вторыхъ, что, если рядъ z, какъ и его производныя первыхъ двухъ порядковъ, сходится внутри круга C, то z есть рѣшеніе уравненія (46). Такимъ образомъ все сводится къ тому, чтобъ показать, что рядъ (58) сходится, какъ и его производныя первыхъ двухъ порядковъ.

Сходимость ряда (58) очевидна, такъ какъ абсолютная величина v_n не имѣетъ максимума внутри круга C.

Менѣе очевидна сходимость его производныхъ. Для того, чтобъ ее обнаружить, возьмемъ внутри круга C маленькій кругъ C' радіуса R' (который можетъ и не быть концентриченъ C). Въ силу только что сказаннаго, обозначая черезъ ε максимумъ модуля $|\varphi_n(\theta) - \varphi_{n-1}(\theta)|$, мы можемъ быть увѣрены, что на окружности C'

$$|v_n| < \varepsilon.$$

Обозначимъ черезъ η гармоническую функцію, которая совпадаетъ съ v_n на окружности C' и разсмотримъ тригонометрическій модуль внутри C' (т. е. на отрѣзкѣ $0R'$) функцій

$$\eta\left(1 - \frac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \frac{d\eta}{dx}\left(1 - \frac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \frac{d\eta}{dy}\left(1 - \frac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Пусть на окружности C'

$$v_n = a_0 + \sum_{p=1}^{\infty} a_p \cos p\theta + b_p \sin p\theta.$$

Тогда

$$\eta = a_0 + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{R'}\right)^p [a_p \cos p\theta + b_p \sin p\theta]$$

и

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{1}{R'} \sum_{p=1}^{\infty} p \left(\frac{\varrho}{R'}\right)^{p-1} [a_p \cos \overline{p-1}\,\theta + b_p \sin \overline{p-1}\,\theta],$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{1}{R'} \sum_{p=1}^{\infty} p \left(\frac{\varrho}{R'}\right)^{p-1} [b_p \cos \overline{p-1}\,\theta - a_p \sin \overline{p-1}\,\theta].$$

Изъ неравенства (59) вытекаетъ, что

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_p^2 + b_p^2 < 2\varepsilon^2.$$

Разбивая члены a_p на двѣ группы такимъ образомъ, чтобъ въ первую входили члены. модули которыхъ $|a_p| \leqq \frac{(2p)!}{(p!)^2\, 2^{2p}}\,\varepsilon$, а во вторую — члены, для которыхъ $|a_p| > \frac{(2p)!}{(p!)^2\, 2^{2p}}\,\varepsilon$, мы видимъ, что разсматривая лишь члены первой группы

$$\sum |a_p| \left(\frac{\varrho}{R'}\right)^p \leqq \frac{2\varepsilon}{\left(1 - \frac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{1}{2}}};$$

ограничиваясь же членами второй группы, имѣемъ

$$\sum \frac{(2p)!}{(p!)^2\, 2^{2p}} |a_p| < \varepsilon.$$

Но

$$\frac{(p!)^2\, 2^{2p}}{(2p)!} \left(\frac{\varrho}{R'}\right)^p < \frac{2}{\left(1 - \frac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Слѣдовательно и для второй группы

$$\sum |a_p| \left(\frac{\varrho}{R'}\right)^p < \frac{2\varepsilon}{\left(1 - \frac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Отсюда выводимъ наконецъ, что

$$\left\{\eta\left(1-\frac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}_{0R'} < 8\varepsilon$$

и точно также, что

$$\left\{\frac{\partial\eta}{\partial x}\left(1-\frac{\varrho}{R''}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_{0R'} < h\varepsilon\,, \quad \left\{\frac{\partial\eta}{\partial x}\left(1-\frac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_{0R'} < h\varepsilon\,, \tag{60}$$

гдѣ h нѣкоторая постоянная величина.

Положимъ далѣе $v_n = v' + \eta$, такъ что v' на окружности C' равно нулю, а внутри ея удовлетворяетъ уравненію

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} + a\frac{\partial v'}{\partial x} + b\frac{\partial v'}{\partial y} + cv' = \delta \tag{61}$$

причемъ благодаря неравенствамъ (60)

$$\left\{\delta\left(1-\frac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_{0R'} < \varepsilon'$$

гдѣ ε' стремится къ нулю вмѣстѣ съ ε.

Съ другой стороны разсмотримъ рѣшеніе v уравненія Пуассона

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = F(xy)\,, \tag{35}$$

обращающееся въ нуль на окружности C', при предположеніи, что

$$\left\{F(x\,,\,y)\,.\left(1-\frac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_{0R'} < M,$$

гдѣ M опредѣленное число.

Слѣдовательно, въ формулахъ (16) и (16^{bis}) мы можемъ замѣнить [1]) A_n и B_n через $\dfrac{a_n}{\left(1-\frac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}}$ и $\dfrac{b_n}{\left(1-\frac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}}$, причемъ

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{a_n\}_{0R'} + \{b_n\}_{0R'} < M.$$

Такимъ образомъ получаемъ для C_n,

$$2nC_n = \left(\frac{\varrho^n}{R'^{2n}} - \frac{1}{\varrho^n}\right)I - \varrho^n I_1\,,$$

---

[1]) R должно быть замѣнено черезъ R'.

гдѣ

$$I=\int_0^\rho \frac{a_n\varrho^{n+1}}{\left(1-\frac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}}d\varrho\,,\quad I_1=\int_\rho^R \frac{a_n\varrho^{1-n}}{\left(1-\frac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[1-\left(\frac{\varrho}{R'}\right)^{2n}\right]d\varrho.$$

и аналогичное выраженіе для D_n.

Что касается перваго интеграла I, то мы видимъ непосредственно, что

$$\{I\}_{0\rho}<\frac{\{a_n\}_{0R'}}{\left(1-\frac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{\varrho^{n+2}}{n+2}.$$

Второй же интегралъ равенъ

$$I_1=\int_\rho^{R'}\frac{a_n\left[1+\frac{\varrho}{R'}+\ldots+\left(\frac{\varrho}{R'}\right)^{2n-1}\right]d\varrho}{\varrho^{n-1}\left[1-\frac{\varrho}{R'}\right]^{\frac{1}{2}}}=a_n\frac{2R'}{\varrho^{n-1}}\left(1-\frac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\varrho}{R'}+\ldots\right)$$

$$+2R'\int_\rho^{R'}a_n\left(1-\frac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{d\varrho}\left[\frac{1}{\varrho^{n-1}}+\frac{1}{\varrho^{n-2}R'}+\ldots+\frac{\varrho^n}{R'^{2n-1}}\right)d\varrho.$$

Слѣдовательно,

$$\{I_1\}_{0\rho}<\frac{2\{a_n\}_{0R'}\cdot R'}{\varrho^{n-1}\left(1-\frac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{1}{2}}}+\frac{4n\{a_n\}_{0R'}\cdot\left(1-\frac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{1}{2}}}{R'^{n-2}}.$$

Откуда

$$\{2nC_n\}_{0\rho}<\frac{\{a_n\}_{0R'}\cdot\varrho^2\cdot\left[1-\left(\frac{\varrho}{R'}\right)^{2n}\right]}{(n+2)\cdot\left(1-\frac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{2\{a_n\}_{0R'}\cdot\varrho R'}{\left(1-\frac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{1}{2}}}+$$

$$+4n\{a_n\}_{0R'}\varrho^2\cdot\left(1-\frac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\varrho}{R'}\right)^{n-2}.$$

Но

$$n\left(\frac{\varrho}{R'}\right)^n<\frac{1}{1-\frac{\varrho}{R'}}.$$

Поэтому

$$\{2nC_n\}_{0\rho} < \frac{hR'^2}{\left(1-\frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{1}{2}}}.\{a_n\}_{0R'},$$

гдѣ h постоянная величина.

Точно также

$$2\left\{\frac{dC_n}{d\rho}\right\}_{0\rho} < \frac{2R'\{a_n\}_{0R'}}{(n+2)\left(1-\frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{6R'\{a_n\}_{0R'}}{\left(1-\frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{1}{2}}} < \frac{hR'\{a_n\}_{0R'}}{\left(1-\frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

И наконецъ,

$$\left\{v\left(1-\frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_{0R'} < hR'M,\quad \left\{\frac{\partial v}{\partial x}\left(1-\frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_{0R'} < hR'M,$$
$$\left\{\frac{\partial v}{\partial y}\left(1-\frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_{0R'} < hR'M. \tag{62}$$

Примѣняя неравенства (62) къ уравненію (61), мы получимъ

$$\left\{v'\left(1-\frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_{0R'} < hR'\left\{\left(a\frac{\partial v'}{\partial x}+b\frac{\partial v'}{\partial y}+cv'-\delta\right)\left(1-\frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_{0R'},$$
$$\left\{\frac{\partial v'}{\partial x}\left(1-\frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_{0R'} < hR'\left\{\left(a\frac{\partial v'}{\partial x}+b\frac{\partial v'}{\partial y}+cv'-\delta\right)\left(1-\frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_{0R'},$$
$$\left\{\frac{\partial v'}{\partial y}\left(1-\frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_{0R'} < hR'\left\{\left(a\frac{\partial v'}{\partial x}+b\frac{\partial v'}{\partial y}+cv'-\delta\right)\left(1-\frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_{9R'}.$$

Слѣдовательно, какъ на страницѣ 86, находимъ при R' достаточно маломъ

$$\left\{v'\left(1-\frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_{0R'} < k\varepsilon',\quad \left\{\frac{\partial v'}{\partial x}\left(1-\frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_{0R'} < k\varepsilon',\quad \left\{\frac{\partial v'}{\partial y}\left(1-\frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_{0R'} < k\varepsilon',$$

откуда слѣдуетъ, что тригонометрическіе модули

$$\left\{v_n\left(1-\frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_{0R'},\quad \left\{\frac{\partial v_n}{\partial x}\left(1-\frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_{0R'},\quad \left\{\frac{\partial v_n}{\partial y}\left(1-\frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_{0R'}$$

съ возрастаніемъ n стремятся къ нулю, а съ ними и сами производныя $\frac{\partial v_n}{\partial x}$ и $\frac{\partial v_n}{\partial y}$ во всякой точкѣ внутри круга C, такъ какъ центръ круга C' выбранъ произвольно.

Для того, чтобъ показать, что вторыя производныя v_n также стремятся къ нулю, возьмемъ кругъ C'' радiуса R'' внутри C' и концентричный C'. Изъ нашего разсужденiя слѣдуетъ, что тригонометрическiе модули v_n и его первыхъ производныхъ внутри C'' стремятся къ нулю. Слѣдовательно, полагая $v_n = v'' + \zeta$, гдѣ ζ гармоническая функцiя, совпадающая съ v_n на окружности C'', мы видимъ, что тригонометрическiе модули ζ и его первыхъ производныхъ внутри C'' стремятся къ нулю; что касается вторыхъ производныхъ ζ, то подобно предыдущему, убѣдимся, что

$$\left\{\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\left(1-\frac{\varrho}{R''}\right)\right\}_{0R''}, \quad \left\{\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\left(1-\frac{\varrho}{R''}\right)\right\}_{0R''}, \quad \left\{\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\left(1-\frac{\varrho}{R''}\right)\right\}_{0R''}$$

также стремятся къ нулю. Съ другой стороны v'', очевидно, удовлетворяетъ уравненiю

$$\frac{\partial^2 v''}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v''}{\partial y^2} = \gamma,$$

причемъ тригонометрическiй модуль $\{\gamma\}_{0R''}$ съ возрастанiемъ n стремится къ нулю. Изъ тѣхъ же формулъ (16) и (16^{bis}) легко вывести, что

$$\frac{1}{R'}\left\{\varrho\,\frac{\partial^2 v''}{\partial x^2}\right\}_{0R''} < h\{\gamma\}_{0R''}, \quad \frac{1}{R''}\left\{\varrho\,\frac{\partial^2 v''}{\partial x\partial y}\right\}_{0R''} < h\{\gamma\}_{0R''}, \quad \frac{1}{R''}\left\{\varrho\,\frac{\partial^2 v''}{\partial y^2}\right\}_{0R''} < h\{\gamma\}_{0R''}.$$

Слѣдовательно, если $0 < \varrho < R''$, вторыя производныя $v_n = v'' + \zeta$ стремятся къ нулю. Такимъ образомъ, рядъ (58), какъ и его производныя первыхъ двухъ порядковъ, равномѣрно сходится внутри круга и представляетъ искомое рѣшенiе задачи Дирикле.

§ 20. Теперь мы перейдемъ къ случаю, когда коэффицiенты даннаго линейнаго уравненiя (48) аналитичны и займемся вопросомъ объ опредѣленiи особенностей рѣшенiя задачи Дирикле внѣ контура C. И прежде всего мы должны отвѣтить на вопросъ, при какихъ условiяхъ возможно аналитическое продолженiе рѣшенiя за предѣлы аналитическаго контура C. Отвѣтъ на этотъ вопросъ даетъ слѣдующая простая теорема:

Для того, чтобъ рѣшенiе z уравненiя (46) могло быть продолжено за предѣлы контура C, необходимо и достаточно, чтобъ на этомъ контурѣ она обращалась въ аналитическую функцiю дуги.

Что указанное условiе необходимо, очевидно само собой; требуетъ доказательства лишь то, что оно достаточно. По прежнему мы можемъ ограничиться случаемъ, когда C окружность. Кромѣ того, полагая $z = v + H$ гдѣ H гармоническая функцiя совпадающая съ z на окружности C, мы знаемъ изъ теоремы Шварца [1]), что H можетъ быть продолжено за предѣлы C. Намъ достаточно такимъ образомъ показать, что рѣшенiе v, обращаю-

---

[1]) См. Picard, Traité d'analyse t. II.

щееся въ нуль на окружности C, допускаетъ аналитическое продолженіе. Но изъ предыдущаго слѣдуетъ, что тригонометрическіе модули v, $\frac{\partial v}{\partial \varrho}$, $\frac{\partial v}{\varrho \partial \theta}$ конечны, т. е. менѣе нѣкотораго числа u_0. Слѣдовательно, v удовлетворяетъ уравненію

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial v}{\partial \varrho}+\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}=A\frac{\partial v}{\partial \varrho}+B\frac{\partial v}{\varrho \partial \theta}+Cv+D=M \tag{63}$$

гдѣ A, B, C, D аналитическія функціи перемѣнныхъ x, y, не имѣющія особенностей въ нѣкоторой области S, обнимающей кругъ C; такъ что тригонометрическіе модули ихъ, какъ и ихъ послѣдовательныхъ производныхъ всѣхъ порядковъ конечны, а также въ частности и $\{M\}_{0R}$.

Но, полагая $v_1=\frac{\partial v}{\partial \theta}$, легко вывести изъ формулъ (16) и (16^{bis}), что

$$\left\{\frac{v_1}{\varrho}\right\}_{0R}=\sum_0^\infty n\left[\left\{\frac{C_n}{\varrho}\right\}_{0R}+\left\{\frac{D_n}{\varrho}\right\}_{0R}\right]<h\{M\}_{0R}$$

$$\left\{\frac{\partial v_1}{\varrho \partial \theta}\right\}_{0R}=\sum_0^\infty n^2\left[\left\{\frac{C_n}{\varrho}\right\}_{0R}+\left\{\frac{D_n}{\varrho}\right\}_{0R}\right]<h\{M\}_{0R}$$

$$\left\{\frac{\partial v_1}{\partial \varrho}\right\}_{0R}=\sum_0^\infty n\left[\left\{\frac{dC_n}{d\varrho}\right\}_{0R}+\left\{\frac{dD_n}{d\varrho}\right\}_{0R}\right]<h\{M\}_{0R},$$

гдѣ h независимая отъ M постоянная величина.

Дифференцируя послѣдовательно по θ уравненіе (63), мы получимъ

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial \varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial v_1}{\partial \varrho}+\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial \theta^2}=\frac{\partial M}{\partial \theta}+A\frac{\partial v_1}{\partial \varrho}+B\frac{\partial v_1}{\varrho \partial \theta}+Cv_1=\frac{dM}{d\theta}$$

. . . .

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial \varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial v_n}{\partial \varrho}+\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 v_n}{\partial \theta^2}=\frac{d^n M}{d\theta^n},$$

полагая вообще $v_n=\frac{\partial^n v}{\partial \theta^n}$; слѣдовательно при всякомъ n

$$\{v_{n+1}\}_{0R}<h\left\{\frac{d^n M}{d\theta^n}\right\}_{0R},\quad \left\{\frac{\partial v_{n+1}}{\varrho \partial \theta}\right\}_{0R}<h\left\{\frac{d^n M}{d\theta^n}\right\}_{0R},\quad \left\{\frac{\partial v_{n+1}}{\partial \varrho}\right\}_{0R}<h\left\{\frac{d^n M}{d\theta^n}\right\}_{0R}.$$

Съ другой стороны возьмемъ вспомогательное уравненіе

$$\frac{du}{d\theta}=(Eu+F), \tag{64}$$

гдѣ E и F аналитическія функціи θ, обладающія свойствомъ, что при $\theta = 0$, ихъ послѣдовательныя производныя удовлетворяютъ неравенствамъ

$$\frac{d^k E}{d\theta^k} > h\left[\left\{\frac{\partial^k A}{\partial\theta^k}\right\}_{0R} + \left\{\frac{\partial^k B}{\partial\theta^k}\right\}_{0R} + \left\{\frac{\partial^k C}{\partial\theta^k}\right\}_{0R}\right],$$

$$\frac{d^k F}{d\theta^k} > h\left\{\frac{\partial^k D}{\partial\theta^k}\right\}_{0R}.$$

Легко видѣть въ такомъ случаѣ, что послѣдовательныя производныя при $\theta = 0$ рѣшенія u уравненія (64), которое при θ равномъ 0 получаетъ значеніе u_0, удовлетворяютъ неравенствамъ

$$\frac{d^n u}{d\theta^n} > \{v_n\}_{0R}, \quad \frac{d^u u}{d\theta^n} > \left\{\frac{\partial v_{n+1}}{\varrho\partial\theta}\right\}_{0R}, \quad \frac{d^n u}{d\theta^n} > \left\{\frac{\partial v_{m+1}}{\partial\varrho}\right\}_{0R}.$$

Но функція u, которой послѣдовательныя производныя болѣе модулей послѣдовательныхъ производныхъ $\frac{\partial v}{\partial\varrho}$ на окружности C, какъ и на концентричныхъ окружностяхъ меньшаго радіуса, равна

$$u = e^{\int_0^\theta E d\theta} \cdot \left[u_0 + \int_0^\theta F e^{-\int_0^\theta E d\theta} d\theta\right]. \tag{65}$$

Такимъ образомъ *радіусъ сходимости функціи* $\frac{\partial v}{\partial\varrho}$ *разсматриваемой какъ функція угла* θ *на каждой окружности концентрической* C *во всякой точкѣ ея не менѣе наименьшаго изъ радіусовъ сходимости* E *и* F.

Беря поэтому концентрическую окружность C' меньшую C, но сколь угодно близкую къ ней мы можемъ примѣнить классическую теорему Коши [1]) для опредѣленія единственнаго (т. е. непремѣнно совпадающаго съ v) аналитическаго рѣшенія, котораго значенія какъ и производной его по ϱ соотвѣтственно совпадаютъ съ v и $\frac{\partial v}{\partial\varrho}$ на этой окружности. Но какъ бы близко къ C мы ни выбрали окружность C', радіусъ сходимости полученнаго рѣшенія по обѣимъ перемѣннымъ болѣе опредѣленнаго значенія, а потому рѣшеніе v существуетъ и за предѣлами окружности C. Что и требовалось доказать.

Предположимъ теперь, что a, b, c, d въ уравненіи (46) суть *цѣлыя* функціи, и пусть совокупность значеній z на окружности C также выражается *цѣлой* функціей дуги. Покажемъ, что въ такомъ случаѣ *функція* z *сама есть цѣлая трансцендентная функція обѣихъ перемѣн-*

---

[1]) См. Goursat „Leçons sur les équations aux dérivées partielles" t. I.

ныхъ x, y. Это очевидно во-первыхъ, если уравненіе (46) замѣнить уравненіемъ Лапласа. Поэтому полагая, какъ прежде $z = v + H$, мы видимъ, что въ вспомогательномъ уравненіи (64) E и F суть цѣлыя функціи комплексной перемѣнной θ. И слѣдовательно, на основаніи формулы (65) заключаемъ, что u также цѣлая функція θ. Такимъ образомъ $\frac{\partial v}{\partial \varrho}$, а съ нимъ и $\frac{\partial z}{\partial \varrho}$ на окружности C оказывается цѣлой функціей комплексной перемѣнной θ. Поэтому изъ теоремы Коши мы выводимъ, что, при $\varrho = R$, ни при какомъ конечномъ (комплексномъ, какъ и вещественномъ) значеніи θ, функція z разсматриваемая, какъ функція *обѣихъ* перемѣнныхъ ϱ и θ не имѣетъ особенностей. Но на основаніи [1]) извѣстной теоремы, еслибъ функція z имѣла особенность въ точкѣ x_0, y_0, то особой линіей должна была бы быть по крайней мѣрѣ одна изъ характеристикъ

$$x - x_0 + i(y - y_0) = 0 \quad \text{или} \quad x - x_0 - i(y - y_0) = 0.$$

Слѣдовательно z имѣла бы также по крайней мѣрѣ одну особую точку на конечномъ разстояніи при $\varrho = R$. Такимъ образомъ мы должны заключить, что z вовсе не имѣетъ особенностей при конечныхъ значеніяхъ перемѣнныхъ, что и требовалось доказать.

Нелишнее замѣтить, что еслибъ мы a priori не предполагали, что внутри круга C функція z не имѣетъ особенностей, то мы не могли бы утверждать ихъ отсутствіе внѣ круга.

Я не буду здѣсь утруждать вниманіе читателя разсмотрѣніемъ случая, когда a, b, c, d не цѣлыя функціи, а только не имѣютъ вещественныхъ особенностей, точно такъ же, какъ и того, когда на окружности C z не цѣлая функція дуги. Полученные въ этомъ направленіи результаты были сообщены мною Парижской Академіи Наукъ 5 марта 1906 года.

§ 21. Прежде чѣмъ закончить эту главу, покажемъ еще, что задача Дирикле для уравненія (46) разрѣшается точно также, какъ и выше, если значенія рѣшенія даны на двухъ концентрическихъ окружностяхъ C и C' радіусовъ R и R' $(R' < R)$.

Очевидно, что для того, чтобъ въ этомъ убѣдиться, достаточно только доказать неравенства

$$\{z\}_{R'R} < k\{d\}_{R'R}, \quad \left\{\frac{\partial z}{\partial x}\right\}_{R'R} < k\{d\}_{R'R}, \quad \left\{\frac{\partial z}{\partial y}\right\}_{R'R} < k\{d\}_{R'R}, \qquad (50^{\text{bis}})$$

если рѣшеніе z обращается въ нуль на окружностяхъ C и C'.

---

[1]) Delassus. Journal de Mathématiques. 1895. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. II. 4.

Кромѣ того, возвращаясь къ выводу неравенствъ (50) мы видимъ, что формулы (40) вполнѣ могутъ намъ теперь замѣнить формулы (16), такъ что единственный пунктъ, который требуетъ особаго разсмотрѣнія— это предварительное установленіе неравенствъ

$$\left\{\int_0^\theta \frac{\partial z}{\partial \varrho}\,d\theta\right\}_{R'R} < k_1\overline{d}, \quad \{z\}_{R'R} < k_1\overline{d}, \tag{52^{\text{bis}}}$$

изъ которыхъ уже безъ труда вытекаютъ неравенства (50^{bis}). Для вывода неравенствъ (52^{bis}) примѣнимъ также разсужденіе аналогичное тому, которое привело насъ къ неравенствамъ (52).

Мы найдемъ такимъ образомъ, что интегралъ I взятый внутри кольца, заключеннаго между окружностями C и C',

$$I = \iint (rt - s^2)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_C \left(\frac{\partial z}{\partial \varrho}\right)^2 d\theta - \frac{1}{2}\int_{C'} \left(\frac{\partial z}{\partial \varrho}\right)^2 d\theta = \int_{R'}^{R}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 z}{\partial \varrho^2}\frac{\partial z}{\partial \varrho}\,d\varrho\,d\theta$$

$$= \int_{R'}^{R} [\alpha_0''\alpha_0' + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n''\alpha_n' + \beta_n''\beta_n']\,d\varrho.$$

Слѣдовательно,

$$|I| < \sqrt{\int_{R'}^{R}[\alpha_0''^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n''^2 + \beta_n''^2]\,d\varrho \,.\int_{R'}^{R}[\alpha_0'^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n'^2 + \beta_n'^2]\,d\varrho}.$$

Мы не можемъ въ данномъ случаѣ утверждать, что $I > 0$, но изъ указаннаго неравенства можно сдѣлать тѣ же выводы.

Вмѣсто неравенства (51^{bis}), мы напишемъ

$$\iint (r^2 + s^2 + t^2 + rt)\,dy\,dx = \iint (a_0 p + b_0 q + c_0 z - d)^2\,dx\,dy - I.$$

Но попрежнему

$$\iint (p^2 + q^2)\,dx\,dy < \mu_1\overline{d}^2.$$

Слѣдовательно [1]),

$$\iint r^2 dx\,dy < k_1\overline{d}^2 - I, \quad \iint s^2 dx\,dy < k_1\overline{d}^2 - I, \quad \iint t^2 dx\,dy < k_1\overline{d}^2 - I.$$

И вводя коэффиціенты тригонометрическаго разложенія z, находимъ

$$\int_{R'}^{R}[\alpha_0''^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n''^2 + \beta_n'']\,d\varrho + \int_{R'}^{R}[\alpha_0''\alpha_0' + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n''\alpha_n' + \beta_n''\beta_n']\,d\varrho < k_1\overline{d}^2.$$

---

[1]) Коэффиціентъ k_1 по прежнему представляетъ вообще конечную и опредѣленную величину, но не одну и ту же въ различныхъ неравенствахъ.

Полагая затѣмъ

$$u^2 = \int_{R'}^{R} [\alpha_0''^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n''^2 + \beta_n''^2]\, d\varrho\,,$$

получимъ

$$u^2 < \mu_1^{\frac{1}{2}} |u| \overline{d} + k_1 \overline{d}^2$$

Откуда выводимъ, что

$$u^2 < k_1 \overline{d}^2$$

и далѣе

$$\int_{R'}^{R} [|\alpha_0''| + \sum \frac{1}{n}(|\alpha_n''| + |\beta_n''|)]\, d\varrho < k_1 \overline{d}.$$

Слѣдовательно,

$$\left\{ \int_0^\theta \frac{\partial z}{\partial \varrho}\, d\theta \right\}_{R'R} < k_1 \overline{d}. \qquad (52^{\text{bis}})$$

Съ другой стороны, замѣчая, что

$$|I| < k_1 \overline{d}^2\,,$$

получимъ немедленно и второе изъ неравенствъ (52^{bis})

$$\{z\}_{R'R} < k_1 \overline{d}\,, \qquad (52^{\text{bis}})$$

и наконецъ изъ уравненія (53) выведемъ неравенства

$$\{z\}_{R'R} < k_1 \overline{d}\,, \quad \left\{\frac{\partial z}{\partial x}\right\}_{R'R} < k_1 \overline{d}\,, \quad \left\{\frac{\partial z}{\partial y}\right\}_{R'R} < k_1 \overline{d} \qquad (55^{\text{bis}})$$

(гдѣ множитель ϱ уже не фигурируетъ, какъ въ неравенствахъ (55)), которыя и заключаютъ въ себѣ требуемыя неравенства (50^{bis}).

Здѣсь, какъ и въ концѣ предыдущей главы, мы видимъ, что изслѣдованіе рѣшенія внутри области, ограниченной двумя концентрическими окружностями, оказывается проще, чѣмъ внутри круга.

Итакъ можно считать по существу доказанной возможность задачи Дирикле, если *значенія искомаго рѣшенія линейнаго уравненія (46) даны на двухъ концентрическихъ окружностяхъ*.

Благодаря теоремѣ о конформномъ преобразованіи, кольцеобразная область, заключенная между двумя концентрическими окружностями, можетъ быть замѣнена кольцеобразной областью, ограниченной двумя аналитическими контурами.

Глава V.

Уравненія вида $r+t=f(p, q, z, x, y)$.

§ 22. Приступая къ интегрированію нелинейныхъ уравненій, мы должны прежде всего доказать слѣдующую основную лемму.

Лемма. *Если уравненіе*

$$r+t=f(xyzpq)\,, \qquad (f'_z \geqq 0) \tag{66}$$

гдѣ f аналитическая функція перемѣнныхъ z, p, q, x, y, имѣетъ рѣшеніе z_0, которое на окружности C принимаетъ совокупность значеній, выражающуюся функціей $\varphi_0(\theta)$ угла, и которое на окружности C, какъ и внутри ея имѣетъ конечныя производныя первыхъ двухъ порядковъ, то полагая, что $\varphi(\theta)$ имѣетъ производныя первыхъ двухъ порядковъ, задача Дирикле для уравненія (66) возможна, если данныя на окружности C значенія рѣшенія выражены функціей $\varphi_0(\theta)+\alpha\varphi(\theta)$, лишь бы α было достаточно мало; въ каждой точкѣ x, y это рѣшеніе является аналитической функціей α.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ a priori

$$z=z_0(x, y)+\alpha z_1(x, y)+\frac{\alpha^2}{2}z_2(x, y)+\ldots+\frac{\alpha^n}{n!}z_n(x, y)+\ldots \tag{56$^{\text{bis}}$}$$

и опредѣлимъ послѣдовательно $z_n=\dfrac{\partial^n z}{\partial\alpha^n}$ при $\alpha=0$ такъ, чтобъ z тождественно удовлетворяло уравненію (66), и кромѣ того, чтобъ на окружности C z_1 было равно $\varphi(\theta)$, а $z_2=z_3=\ldots=z_n=0$.

Очевидно z_1 будетъ удовлетворять линейному уравненію

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial z_1}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial z_1}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial z}z_1=0\,, \tag{67}$$

и для опредѣленія послѣдовательныхъ производныхъ получимъ систему:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z_2}{\partial y^2}-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial z_2}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial z_2}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial z}z_2=A_1\,,\\
&\frac{\partial^2 z_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z_3}{\partial y^2}-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial z_3}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial z_3}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial z}z_3=A_2\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2}-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial z_n}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial z_n}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial z}z_n=A_{n-1}\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{67}$$

гдѣ A_i зависитъ отъ z_k, $\frac{\partial z_k}{\partial x}$, $\frac{\partial z_k}{\partial y}$, причемъ k принимаетъ значенія не большія i. Вообще

$$A_{i-1} = \frac{d^i f}{d\alpha^i} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial z_i}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial z_i}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} z_i,$$

гдѣ $\frac{d^i f}{d\alpha^i}$ обозначаетъ полную производную f по α порядка i. Уравненія системы (67), которыя отличаются лишь второю частью равенства относятся къ типу уравненій изученному нами въ предыдущей главѣ, для которыхъ, какъ мы видѣли задача Дирикле возможна. Кромѣ того, въ силу установленныхъ неравенствъ, имѣемъ вообще

$$\{z_n\}_{0R} < k\{A_{n-1}\}_{0R}, \quad \left\{\frac{\partial z_n}{\partial x}\right\}_{0R} < k\{A_{n-1}\}_{0R}, \quad \left\{\frac{\partial z_n}{\partial y}\right\}_{0R} < k\{A_{n-1}\}_{0R}.$$

Благодаря этому легко построить вспомогательную аналитическую функцію $v(\alpha)$, которой послѣдовательныя производныя при $\alpha = 0$ были бы болѣе соотвѣтствующихъ производныхъ z. Для этого напишемъ уравненіе

$$v = b_1\alpha + kF(v), \tag{68}$$

гдѣ b_1 представляетъ собой высшій предѣлъ тригонометрическихъ модулей рѣшенія z_1 перваго изъ уравненій (67) и его производныхъ $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ и $\frac{\partial z_1}{\partial y}$. Что же касается функціи $F(v)$, то она опредѣляется формулой

$$\begin{aligned} F(v) = \{f(x,\, y,\, z_0+v,\, p_0+v,\, q_0+v)\}_{0R} - \{f(x,\, y,\, z_0,\, p_0,\, q_0)\}_{0R} - \\ - v[\{f'_z(x,\, y,\, z_0,\, p_0,\, q_0)\}_{0R} + \{f'_p(x,\, y,\, z_0,\, p_0,\, q_0)\}_{0R} + \\ + \{f'_q(x,\, y,\, z_0,\, p_0,\, q_0)\}_{0R}], \end{aligned}$$

такъ что $F(0) = F'(0) = 0$. Кромѣ того функція $F(v)$ очевидно аналитическая (и безъ вещественныхъ особенностей), такъ какъ полагая модуль комплексной перемѣнной v достаточно малымъ, мы должны допустить, что $|F(v)|$ менѣе нѣкотораго числа M.

Но рѣшеніе v уравненія (68) представляется въ видѣ сходящейся строки Тэйлора

$$v = b_1\alpha + \frac{\alpha^2}{2} b_2 + \ldots \frac{\alpha^n}{n!} b_n + \ldots .$$

Я утверждаю, что

$$b_n > \{z_n\}_{0R}, \quad b_n > \left\{\frac{\partial z_n}{\partial x}\right\}_{0R}, \quad b_n > \left\{\frac{\partial z_n}{\partial y}\right\}_{0R}. \tag{69}$$

Въ самомъ дѣлѣ неравенства (69) имѣютъ мѣсто при $n = 1$; положимъ, что они вѣрны для всякаго $n' < n$.

Въ такомъ случаѣ выраженіе $\frac{d^n F(v)}{d\alpha^n}$ при $\alpha = 0$, которое получается отъ замѣны въ A_{n-1} z_i, $\frac{\partial z_i}{\partial x}$, $\frac{\partial z_i}{\partial y}$ черезъ b_i, очевидно болѣе $\{A_{n-1}\}_{0R}$. А слѣдовательно, неравенства (69) имѣютъ мѣсто и для n.

Сходимость строки для достаточно малаго модуля α такимъ образомъ доказана; функція z, которая ею представлена удовлетворяетъ поэтому уравненію (66) при требуемыхъ условіяхъ на контурѣ C и наша лемма доказана.

Указанная лемма сводитъ задачу Дирикле къ *аналитическому продолженію* ряда (56^{bis}) по α, практически—къ вычисленію соотвѣтствующей строки Миттагъ-Леффлера.

§ 23. Мы допустимъ пока a priori что существуетъ какое нибудь рѣшеніе z_0, удовлетворяющее условіямъ леммы; часто существованіе такого рѣшенія очевидно: напримѣръ, $z_0 = 0$, если $f(x, y, z, p, q)$ обращается въ нуль при $z = p = q = 0$; вообще же нельзя утверждать, что при всякомъ f (не имѣющемъ вещественныхъ особенностей) возможно найти какое нибудь рѣшеніе z_0 уравненія (66), которое бы внутри сколь угодно большого круга не имѣло бы особенностей. Итакъ пусть функція z_0 на окружности C принимаетъ значенія выражающіяся нѣкоторой функціей $\varphi_0(\theta)$; и пусть требуется рѣшить задачу Дирикле при условіи, что на окружности C искомое рѣшеніе z должно обращаться въ функцію $\Phi(\theta)$, обладающую, какъ и $\varphi_0(\theta)$, производными первыхъ четырехъ порядковъ.

Тогда полагая

$$F(\theta, \alpha) = \varphi_0(\theta) + \alpha[\Phi(\theta) - \varphi_0(\theta)]$$

мы знаемъ на основаніи предыдущаго, что задача Дирикле допускаетъ рѣшеніе, если $|\alpha|$ достаточно малъ; это рѣшеніе представляется въ видѣ аналитической функціи $z(x, y, \alpha)$; и если при $0 < \alpha \leqq 1$ она не имѣетъ особенностей, то $z(x, y, 1)$ представитъ требуемое рѣшеніе. Однако аналитическое продолженіе z, разсматриваемой, какъ функція α, не всегда возможно. Если извѣстно, что рѣшеніе, обладающее конечными производными первыхъ двухъ порядковъ существуетъ при $\alpha < \alpha_0$, отсюда нельзя вывести, что при $\alpha = \alpha_0$ рѣшеніе также существуетъ, такъ какъ возможно, что съ приближеніемъ къ α_0 радіусъ сходимости z, разсматриваемой, какъ функція α, стремится къ нулю.

Правда, во всякомъ случаѣ, съ приближеніемъ α къ α_0, z стремится къ опредѣленному предѣлу u_0; ибо если z_1 и z_2 суть рѣшенія, соотвѣтствующія двумъ значеніямъ α_1 и α_2 параметра α, весьма близкимъ къ α_0, то разность $\delta = z_2 - z_1$ удовлетворяетъ уравненію

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} + a\frac{\partial \delta}{\partial x} + b\frac{\partial \delta}{\partial y} + c\delta = 0 \text{ при } c \leqq 0,$$

и слѣдовательно, *ея абсолютное значеніе внутри круга C не можетъ быть болѣе, чѣмъ на окружности.* Но эта предѣльная функція u_0 можетъ и не быть рѣшеніемъ даннаго уравненія, такъ какъ мы не знаемъ, имѣетъ ли она производныя первыхъ двухъ порядковъ.

Для того, чтобъ задача Дирикле была возможна, необходимо и достаточно, чтобы a priori можно было установить нисшій предѣлъ радіуса сходимости z относительно α, при всякомъ α, которому соотвѣтствуетъ рѣшеніе z, имѣющее производныя первыхъ двухъ порядковъ по x и y, какъ внутри круга C, такъ и на окружности. Въ этомъ случаѣ и только въ этомъ случаѣ можно быть увѣреннымъ, что никакая точка α_0 не будетъ особенной, и потому аналитическое продолженіе вдоль всего отрѣзка 01 совершится безпрепятственно. Но если мы присмотримся къ доказательству нашей основной леммы то, мы сейчасъ же замѣтимъ, что для установленія нисшаго предѣла радіуса сходимости z какъ функціи α, *достаточно* умѣть указать a priori высшій предѣлъ $|z|$ и модулей его производныхъ первыхъ двухъ порядковъ.

Выше было уже замѣчено, что высшій предѣлъ модуля рѣшенія z можетъ быть всегда установленъ при помощи его значеній на контурѣ, такъ какъ разность между двумя рѣшеніями внутри контура не можетъ быть болѣе, чѣмъ на самомъ контурѣ. На основаніи этихъ общихъ соображеній приходимъ къ слѣдующей теоремѣ [1]):

Теорема. *Если въ уравненіи*

$$r+t=f(x,\ y,\ z,\ p,\ q) \qquad (f'_z \geqq 0) \tag{66'}$$

аналитическая функція f при безконечномъ возрастаніи перемѣнныхъ p, q возрастаетъ не быстрѣе, чѣмъ ихъ квадраты, то задача Дирикле внутри круга C возможна при сдѣланныхъ выше предположеніяхъ (стр. 102).

Все доказательство, очевидно, сводится къ установленію, при помощи данныхъ на контурѣ, *высшихъ предѣловъ модулей производныхъ рѣшенія первыхъ двухъ порядковъ.* Для этого мы примѣнимъ новый замѣчательный по своей общности пріемъ, который мы назовемъ *способомъ вспомогательныхъ функцій* (méthode des fonctions auxiliaires). Въ зависимости отъ того, устанавливается ли высшій предѣлъ *внутри* контура или *на* контурѣ, упомянутый пріемъ будетъ называться способомъ вспомогательныхъ функцій *внутри* контура или *на* контурѣ.

Нѣтъ необходимости предполагать функцію f аналитической относительно x, y, z; допустимъ лишь, что она имѣетъ конечныя (при конечныхъ значеніяхъ x, y, z) частныя производныя первыхъ двухъ порядковъ относительно этихъ перемѣнныхъ, и кромѣ того для отчетливости

---

[1]) Эта теорема впервые была мною доказана въ Mathematische Annalen t. LXII; настоящее доказательство существенно отличается отъ того, которое указано тамъ.

нашихъ разсужденій мы положимъ, что функція f представляется многочленомъ 2-й степени относительно p, q.

Если значенія z на окружности C выражаются функціей $\varphi(\theta)$, имѣющей конечныя производныя первыхъ *четырехъ* порядковъ, то гармоническая функція H, которая принимаетъ тѣ же значенія на окружности C имѣетъ конечныя частныя производныя первыхъ *трехъ* порядковъ внутри круга C, какъ на самой окружности. Въ такомъ случаѣ, мы можемъ ограничиться предположеніемъ, что функція z на окружности C обращается въ *нуль*, не мѣняя нашихъ допущеній относительно функціи $f(x, y, z, p, q)$.

Установимъ во-первыхъ высшій предѣлъ модулей первыхъ производныхъ z на контурѣ C.

По предположенію, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta} = 0$. Намъ нужно лишь указать высшій предѣлъ абсолютнаго значенія производной $\dfrac{\partial z}{\partial \varrho}$ по нормали на контурѣ. Для этого положимъ

$$z = -n - \alpha + \alpha \log u,$$

гдѣ n извѣстный намъ максимумъ модуля z, α положительное число, которое мы опредѣлимъ дальше, и наконецъ u новая функція, которою мы замѣняемъ z. Очевидно, что функція u измѣняется въ томъ же направленіи, что z, причемъ наименьшее ея значеніе, соотвѣтствующее $z = -n$, равно e, наибольшее же значеніе, соотвѣтствующее $z = n$, равно $e^{\frac{2n+\alpha}{\alpha}}$. Далѣе,

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\alpha}{u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\alpha}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\alpha}{u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2,$$
$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\alpha}{u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\alpha}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\alpha}{u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Поэтому u удовлетворяетъ уравненію

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{u}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{\alpha}{u}\left[a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2b\,\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + c\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \\ + 2d\frac{\partial u}{\partial x} + 2e\frac{\partial u}{\partial y} + g\frac{u}{\alpha} = Q,\end{aligned} \tag{70}$$

если согласно нашему предположенію $f(xyzpq)$ представляется въ видѣ многочлена,

$$f = ap^2 + 2bpq + cq^2 + 2dp + 2eq + g.$$

Коэффиціенты a, b, c, d, e, g суть функціи x, y, z, конечныя, какъ и ихъ частныя производныя первыхъ двухъ порядковъ по этимъ тремъ перемѣннымъ, такъ какъ $|x| < R$, $|y| < R$, $|z| < n$.

Итакъ, пусть

$$|a| < M, \quad |b| < M, \quad |c| < M,$$

съ другой стороны положимъ постоянную величину α равною $\frac{1}{8M}$. Въ такомъ случаѣ, приравнивая нулю вторую часть уравненія (70) и разсматривая $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, какъ координаты точки въ плоскости, а x, y, z, какъ параметры, отъ которыхъ зависятъ коэффиціенты, мы получимъ уравненіе измѣняющагося эллипсиса, ибо, полагая

$$a_1 = \frac{1}{u}\left(1 + \frac{a}{8M}\right) > \frac{7}{8u}, \quad |b_1| = \frac{|b|}{8Mu} < \frac{1}{8u}, \quad c_1 = \frac{1}{u}\left(1 + \frac{a}{8M}\right) > \frac{7}{8u},$$

находимъ $a_1 c_1 - b_1^2 > \frac{3}{4u^2}$.

Слѣдовательно, вторая часть Q уравненія (70) не можетъ ни при какихъ значеніяхъ $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ принимать отрицательныхъ значеній, большихъ нѣкотораго числа N по абсолютной величинѣ. Эта величина N, получающаяся отъ подстановки въ уравненіи эллипсиса значеній координатъ его центра опредѣляется элементарной и легко провѣряемой формулой

$$-Q < \frac{a_1 e^2 - 2b_1 de + c_1 d^2}{a_1 c_1 - b_1^2} + \frac{gu}{\alpha} = N.$$

Поэтому, если мы положимъ

$$u = u_1 - \frac{N}{4}(x^2 + y^2),$$

то

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} > 0.$$

Слѣдовательно, u_1 не можетъ имѣть максимума внутри круга C, а потому на окружности C

$$\frac{\partial u_1}{\partial \varrho} \geqq 0.$$

Откуда заключаемъ во-первыхъ, что на этой же окружности

$$\frac{\partial u}{\partial \varrho} \geqq -\frac{1}{2} NR,$$

а затѣмъ находимъ, что

$$\frac{\partial z}{\partial \varrho} = \frac{\alpha}{u}\frac{\partial u}{\partial \varrho} \geqq -\frac{\alpha NR}{2e}.$$

Таковъ крайній отрицательный предѣлъ $\frac{\partial z}{\partial \varrho}$ на окружности C. Для того, чтобъ получить высшій положительный предѣлъ, поступимъ подобнымъ же образомъ: а именно, положимъ

$$z = -n - \alpha + \alpha \log \frac{1}{1-u'}$$

гдѣ n и α сохраняютъ прежнія значенія, а u' новая неизвѣстная функція, замѣняющая z; подобно предыдущему замѣтимъ, что z и u' измѣняются въ одномъ и томъ же направленіи, причемъ наименьшее значеніе u' равно $1-e^{-1}$, наибольшее же равно $1-e^{-\frac{2n+1}{\alpha}}$ и кромѣ того u' удовлетворяетъ уравненію

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} = -\frac{1}{1-u'}\left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)^2\right] +$$
$$+ \frac{\alpha}{1-u'}\left[a\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2 + 2b\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)^2\right] +$$
$$+ 2d\frac{\partial u'}{\partial x} + 2e\frac{\partial u'}{\partial y} + g\,\frac{1-u'}{\alpha} = Q'.$$

Въ данномъ случаѣ, тѣ же элементарныя соображенія позволяютъ установить высшій *положительный* предѣлъ Q'

$$Q' < N'.$$

Отсюда полагая

$$u' = u'_1 + \frac{N'}{4}(x^2 + y^2),$$

мы заключаемъ, что u'_1 не можетъ обладать минимумомъ внутри круга C, а потому $\frac{\partial u'_1}{\partial \varrho} \leqq 0$ на окружности C. Слѣдовательно

$$\frac{\partial u'}{\partial \varrho} \leqq \frac{1}{2} N' R$$

и

$$\frac{\partial z}{\partial \varrho} \leqq \frac{\alpha N' R}{2(1-e^{-1})}.$$

Такимъ образомъ нами установленъ и высшій положительный предѣлъ $\frac{\partial z}{\partial \varrho}$ на окружности.

Зная высшій предѣлъ модулей $|p|$ и $|q|$ на окружности C, перейдемъ теперь къ опредѣленію ихъ высшихъ предѣловъ внутри C.

Для этого положимъ

$$z = -n + \alpha \log\log u\,,$$

гдѣ n сохраняетъ прежнее значеніе, а α будетъ опредѣлено нами дальше. Въ такомъ случаѣ функція u измѣняется въ томъ же направленіи, что z, между предѣлами e и $e^{e^{\frac{2n}{\alpha}}}$ и удовлетворяетъ уравненію:

$$\begin{aligned} r_1 + t_1 = \frac{1}{u\log u}\,[(1+\log u + \alpha a)p_1^2 + 2\alpha b p_1 q_1 + (1+\log u + \alpha c)q_1^2] + \\ + 2dp_1 + 2eq_1 + g\frac{u\log u}{\alpha} = Q_1\,, \end{aligned} \tag{71}$$

гдѣ мы положили для краткости $r_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $s_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $t_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $p_1 = \frac{\partial u}{\partial x}$, $q_1 = \frac{\partial u}{\partial y}$, такъ какъ производныя функціи z выражаются при помощи производныхъ u:

$$p = \frac{\alpha}{u\log u}p_1\,, \qquad r = \frac{\alpha}{u\log u}r_1 - \frac{\alpha(1+\log u)}{(u\log u)^2}p_1^2$$

$$q = \frac{\alpha}{u\log u}q_1\,, \qquad t = \frac{\alpha}{u\log u}t_1 - \frac{\alpha(1+\log u)}{(u\log u)^2}q_1^2.$$

Положимъ далѣе

$$p_1^2 + q_1^2 = w$$

и допустимъ, что въ нѣкоторой точкѣ x, y внутри C w достигаетъ максимума, такъ что

$$\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x} = p_1 r_1 + q_1 s_1 = 0, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial y} = p_1 s_1 + q_1 t_1 = 0 \tag{72}$$

и

$$\begin{aligned} \varDelta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = r_1^2 + 2s_1^2 + t_1^2 + p_1\left(\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2}\right) + q_1\left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q_1}{\partial y^2}\right) = \\ = Q_1^2 + p_1\frac{\partial Q_1}{\partial x} + q_1\frac{\partial Q_1}{\partial y} \leqq 0\,, \end{aligned}$$

гдѣ $\frac{\partial Q_1}{\partial x}$, $\frac{\partial Q_1}{\partial y}$, представляютъ собой частныя производныя Q_1, въ которомъ u, p_1, q_1 разсматриваются какъ опредѣленныя функціи x, y. Поэтому обозначая черезъ $\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial Q_1}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial Q_1}{\partial u}\right)$ частныя производныя при предположеніи, что x, y, u, p, q независимыя перемѣнныя, получимъ благодаря равенствамъ (72)

$$\varDelta = Q_1^2 + p_1\left(\frac{\partial Q_1}{dx}\right) + q_1\left(\frac{\partial Q_1}{dy}\right) + (p_1^2 + q_1^2)\left(\frac{\partial Q_1}{du}\right) = \frac{w^2 + \varepsilon}{u^2 \log u} + \eta\,,$$

гдѣ ε представляетъ собой многочленъ не выше четвертой степени относительно p_1 и q_1, коэффиціенты котораго стремятся къ нулю вмѣстѣ съ α, η многочленъ не выше третьей степени относительно p_1 и q_1. Слѣдовательно, придавая α нѣкоторое опредѣленное достаточно малое значеніе, мы можемъ достигнуть того, чтобъ при всякомъ p_1, q_1 имѣть

$$|\varepsilon| \leqq \frac{1}{2} w^2.$$

Поэтому

$$\varDelta > \frac{w^2}{2u^2 \log u} + \eta\,,$$

откуда

$$w^2 < 2\,|\eta|\,u^2 \log u < 2e^{2e^{\frac{2n}{\alpha}} + \frac{2n}{\alpha}}\,|\eta|.$$

Но такъ какъ η многочленъ 3-й степени относительно p_1 и q_1, высшій предѣлъ коэффиціентовъ котораго извѣстенъ послѣ того, какъ мы опредѣлили α, то мы заключаемъ, что въ точкѣ x, y, внутри круга C гдѣ w достигаетъ максимума, w не болѣе нѣкотораго a priori устанавливаемаго предѣла. Съ другой стороны изъ предыдущаго разсужденія намъ извѣстенъ высшій предѣлъ

$$w = \left(p^2 + q^2\right)\frac{\alpha^2}{u^2 \log^2 u}$$

на окружности C. Слѣдовательно, высшій предѣлъ w выражается a priori болѣе или менѣе простой функціей коэффиціентовъ a, b, c, d, e, g и ихъ *первыхъ* производныхъ при данныхъ значеніяхъ x, y, z; тоже самое поэтому можемъ сказать и относительно $|p|$ и $|q|$.

Послѣ того, какъ установленъ высшій предѣлъ модулей первыхъ производныхъ, тотъ же способъ вспомогательныхъ функцій можетъ быть примѣненъ къ установленію высшаго предѣла модулей вторыхъ производныхъ.

Для этого продифференцируемъ уравненіе (66) относительно θ. Полагая $\frac{\partial z}{\partial \theta} = z_1$, получимъ

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} = \frac{\partial f}{\partial x} y - \frac{\partial f}{\partial y} x + \frac{\partial f}{\partial z} z_1 + \frac{\partial f}{\partial q} p - \frac{\partial f}{\partial p} q + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial y}.$$

Замѣчаемъ, что $\frac{\partial z_1}{\partial x}$, $\frac{\partial z_1}{\partial y}$ входятъ во второй части равенства въ степени не выше первой, а потому повторяя разсужденіе страницы 105 (гдѣ α

можемъ придать теперь произвольное значеніе, напр. $\alpha = 1$) получимъ высшій предѣлъ $\left|\frac{\partial z_1}{\partial \varrho}\right| = \left|\frac{\partial^2 z}{\partial \varrho\, \partial \theta}\right|$ на окружности C. Изъ уравненія (66) выводимъ тогда непосредственно высшій предѣлъ $\left|\frac{\partial^2 z}{\partial \varrho^2}\right|$ на контурѣ. Остается разсмотрѣть значенія вторыхъ производныхъ *внутри* круга. Дифференцируемъ уравненіе (66) относительно x. Получимъ

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{66$^{\text{bis}}$}$$

Какъ на страницѣ 107, можемъ установить высшій предѣлъ максимума квадратной формы

$$w = e^{2\varepsilon p + n'} e^{2(p+n')} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2\right],$$

гдѣ n' есть только что установленный высшій предѣлъ модуля $|p|$.

Дѣйствительно, то обстоятельство, что въ уравненіи (66^{bis}) наряду съ p (соотвѣтствующимъ z въ уравненіи (66)) фигурируетъ и q, нисколько не измѣняетъ нашего разсужденія, ибо производныя q представляются линейными функціями производныхъ p, а именно:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial q}{\partial y} = f - \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Такимъ образомъ находимъ высшій предѣлъ w, откуда выводимъ высшій предѣлъ $r^2 + s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2$; а затѣмъ получаемъ и высшій предѣлъ модулей всѣхъ вторыхъ производныхъ.

Въ случаѣ надобности, мы могли бы, сдѣлавши соотвѣтствующія предположенія о существованіи дальнѣйшихъ производныхъ f и z на окружности C, установить тѣмъ же способомъ высшіе предѣлы модулей послѣдовательныхъ производныхъ z, но сейчасъ это для насъ не представляетъ интереса, такъ какъ, на основаніи вышесказаннаго, найденныхъ предѣловъ вполнѣ достаточно, чтобъ убѣдиться въ правильности теоремы, которую мы хотѣли доказать.

Въ частности, въ весьма распространенномъ случаѣ, когда $f(x, y, 0, 0, 0) = 0$, изъ предыдущаго доказательства вытекаетъ возможность задачи Дирикле для круга произвольнаго радіуса. Но мы покажемъ, посредствомъ аналогичныхъ разсужденій, что это послѣднее ограниченіе нисколько не существенно. Для этого докажемъ сначала слѣдующую общую теорему:

§ 23. Теорема. *Пусть*

$$r + t = f(x, y, z, p, q) \tag{73}$$

гдѣ f *какая нибудь аналитическая функція перемѣнныхъ* x, y, z, p, q, *не имѣющая конечныхъ вещественныхъ особенностей. Если на нѣкоторомъ кругѣ* C *радіуса* R z *обращается въ аналитическую функцію дуги, и кромѣ того тригонометрическіе модули* $\{z\}_{0R}$, $\left\{\frac{\partial z}{\partial x}\right\}_{0R}$, $\left\{\frac{\partial z}{\partial y}\right\}_{0R}$ *конечны, то функція* z *можетъ быть аналитически продолжена за предѣлы круга* C.

Доказательство подобно тому, которое нами дано для соотвѣтствующей теоремы въ предыдущей главѣ. Мы можемъ ограничиться случаемъ, когда $z = 0$ на окружности C. Дифференцируя уравненіе (73) относительно θ и полагая $z_n = \frac{\partial^n z}{\partial \theta^n}$, найдемъ какъ на страницѣ 95:

$$\{z_{n+1}\}_{0R} < h\left\{\frac{d^n f_1}{d\theta^n}\right\}_{0R}, \quad \left\{\frac{\partial z_{n+1}}{\partial \varrho}\right\}_{0R} < h\left\{\frac{d^n f_1}{d\theta^n}\right\}_{0R}, \quad \left\{\frac{\partial z_{n+1}}{\varrho \partial \theta}\right\}_{0R} < h\left\{\frac{d^n f_1}{d\theta^n}\right\}_{0R},$$

если $f(x, y, z, p, q) = f_1\left(\varrho, \theta, z, \frac{\partial z}{\partial \varrho}, \frac{\partial z}{\varrho \partial \theta}\right)$ при переходѣ къ полярнымъ координатамъ.

При этомъ для того, чтобъ вторыя части неравенствъ имѣли смыслъ, существенно необходимо (и достаточно), чтобъ z, p, q имѣли конечные тригонометрическіе модули внутри C. Въ такомъ случаѣ мы можемъ построить вспомогательное уравненіе

$$\frac{du}{d\theta} = \psi(\theta, u, u, u), \tag{64bis}$$

гдѣ аналитическая функція $\psi(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ четырехъ перемѣнныхъ α, β, γ, δ опредѣляется условіемъ, что при $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$

$$\frac{\partial^{k+l+m+n}\psi}{\partial\alpha^k \partial\beta^l \partial\gamma^m \partial\delta^n} = h\left\{\frac{\partial^{k+l+m+n} f_1}{\partial\theta^k \partial z^l \partial\left(\frac{\partial z}{\partial\varrho}\right)^m \partial\left(\frac{\partial z}{\varrho\partial\theta}\right)^n}\right\}_{0R}.$$

Легко видѣть тогда, что послѣдовательныя производныя рѣшенія u, которое обращается въ нуль при $\theta = 0$, уравненія (64^{bis}), удовлетворяютъ неравенствамъ

$$\left\{\frac{\partial z_{n+1}}{\partial \varrho}\right\}_{0R} \leq \frac{d^{n+1} u}{d\theta^{n+1}},$$

изъ которыхъ вытекаетъ наша теорема.

Указанной теоремой мы воспользуемся для интересующей насъ цѣли слѣдующимъ образомъ:

Положимъ для простоты, что $f'_z > P > 0$. Уравненіе (66) во всякомъ случаѣ можетъ принять форму

$$r + t = pf'_p(x, y, \theta z, \theta p, \theta q) + qf'_q(x, y, \theta z, \theta p, \theta q) +$$
$$+ zf'_z(x, y, \theta z, \theta p, \theta q) + f(x, y, 0, 0, 0),$$

гдѣ $0 < \theta < 1$. Слѣдовательно, въ точкѣ, гдѣ $|z|$ достигаетъ максимума, имѣемъ $|z| < \dfrac{|f(x, y, 0, 0, 0|}{P}$.

При предположеніи, что f многочленъ второй степени относительно p и q, можетъ быть данъ a priori высшій предѣлъ для производныхъ первыхъ двухъ порядковъ, а слѣдовательно и для тригонометрическихъ модулей производныхъ перваго порядка, если функція z на окружности C превращается въ данную аналитическую функцію дуги. Слѣдовательно, для уравненія $(66')$ остается въ силѣ безъ всякихъ ограниченій свойство, что *замкнутая аналитическая кривая не можетъ быть особой линіей рѣшенія этого уравненія.*

Здѣсь не мѣсто заниматься вопросомъ, насколько существенно условіе замкнутости разсматриваемой кривой, такъ какъ это отвлекло бы насъ слишкомъ въ сторону.

Но можно всегда получить рѣшеніе, существующее внутри достаточно малаго круга, примѣняя теорему Коши. Поэтому одно изъ двухъ: или задача Дирикле возможна для всякаго круга, концентричнаго данному, или существуетъ такой кругъ C_1, что для всякаго круга внутри C_1 задача возможна, для круга же бóльшаго радіуса, чѣмъ C_1, задача не возможна. Но второе предположеніе недопустимо, такъ какъ, какъ бы близокъ ни былъ къ C_1 кругъ C'_1 меньшаго радіуса, на основаніи предыдущаго a priori можетъ быть установленъ радіусъ сходимости на окружности C'_1 рѣшенія u_0, которое на этой окружности обращается въ нуль; такимъ образомъ рѣшеніе u_0 допускаетъ аналитическое продолженіе за предѣлы круга C_1.

Итакъ, безъ всякихъ ограниченій приходимъ къ теоремѣ.

Теорема: *Уравненіе $(66')$ всегда допускаетъ рѣшеніе задачи Дирикле при условіи, что контуръ, на которомъ даны значенія рѣшенія, аналитическій и значенія на немъ представляются въ видѣ функціи дуги $\varphi(\theta)$, обладающей производными первыхъ четырехъ порядковъ* [1]).

§ 24. Въ нашемъ доказательствѣ существенную роль сыграло предположеніе, что функція f аналитическая. Однако примѣняя теорему Вейерштрасса, указанную на 6-й страницѣ Введенія, *мы можемъ избавиться отъ этого предположенія.*

---

[1]) Относительно функціи $\varphi(\theta)$ можно было бы сдѣлать и болѣе общія предположенія. (См. Mathematische Annallen t. LXII).

Въ самомъ дѣлѣ возьмемъ уравненіе

$$r + t = f(xyzpq), \tag{66''}$$

гдѣ мы дѣлаемъ относительно f всѣ тѣ же предположенія, что и раньше, кромѣ того, что f аналитическая функція. Допустимъ однако, что f имѣетъ частныя производныя первыхъ *трехъ* порядковъ относительно x, y, z, p, q. Мы можемъ построить рядъ аналитическихъ функцій f_n, которыя какъ и ихъ частныя производныя первыхъ трехъ порядковъ имѣютъ предѣлами данную функцію f и ея соотвѣтственныя производныя.

Пусть z_n рѣшеніе поставленной задачи Дирикле, если вмѣсто f взять f_n, и z_{n-1} рѣшеніе, соотвѣтствующее замѣнѣ f черезъ f_{n-1}. Тогда, $v_n = z_n - z_{n-1}$, удовлетворяетъ уравненію

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2} = f_n(xyz_n p_n q_n) - f_n(xyz_{n-1} p_{n-1} q_{n-1}) + \\ + f_n(xyz_{n-1} p_{n-1} q_{n-1}) - f_{n-1}(xyz_{n-1} p_{n-1} q_{n-1})$$

и обращается въ нуль на окружности C.

Или еще

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2} + a\frac{\partial v_n}{\partial x} + b\frac{\partial v_n}{\partial y} + cv_n = d$$

гдѣ a, b, c, d обладаютъ конечными частными производными первыхъ двухъ порядковъ, причемъ кромѣ того d со своими частными производными первыхъ двухъ порядковъ стремится къ нулю. Но въ такомъ случаѣ изъ неравенствъ (50) слѣдуетъ, что

$$\{v_n\}_{0R}, \left\{\frac{\partial v_n}{\partial x}\right\}_{0R}, \left\{\frac{\partial v_n}{\partial y}\right\}_{0R}, \left\{\varrho\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}\right\}_{0R}, \left\{\varrho\frac{\partial^2 v_n}{\partial x\partial y}\right\}_{0R}, \left\{\varrho\frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2}\right\}_{0R}$$

также стремятся къ нулю, откуда выводимъ, что z_n стремится къ предѣльной функціи z, которая удовлетворяетъ уравненію (66″). Могло бы быть сомнѣніе только относительно того, имѣетъ ли z конечныя производныя *второго* порядка въ точкѣ 0; но это затрудненіе разрѣшается разсмотрѣніемъ какого нибудь круга *эксцентрическаго* къ данному.

Мы не будемъ долѣе останавливаться на неаналитическихъ уравненіяхъ. Сказаннаго достаточно, чтобъ видѣть, что интегрированіе ихъ можетъ быть всегда приведено къ интегрированію аналитическихъ уравненій благодаря теоремѣ Вейерштрасса и независимости принципа вспомогательныхъ функцій отъ аналитическаго характера уравненія.

Глава VI.

Линейныя уравненія эллиптическаго типа общаго вида.

§ 26. Давно извѣстно, что всякое линейное дифференціальное уравненіе эллиптическаго типа

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2D\frac{\partial z}{\partial x}+2E\frac{\partial z}{\partial y}+Fz=M \tag{74}$$

можетъ быть приведено при помощи новыхъ перемѣнныхъ x_1, y_1, къ виду

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}+a\frac{\partial z}{\partial x_1}+b\frac{\partial z}{\partial y_1}+cz=M. \tag{75}$$

Для этого нужно, чтобъ перемѣнныя x_1, y_1, удовлетворяли уравненіямъ

$$\begin{gathered}A\left(\frac{\partial x_1}{\partial x}\right)^2+2B\left(\frac{\partial x_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial y}\right)+C\left(\frac{\partial x_1}{\partial y}\right)^2=A\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)^2+2B\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial y_1}{\partial y}\right)+C\left(\frac{\partial y_1}{\partial y}\right)^2,\\ A\frac{\partial x_1}{\partial x}\frac{\partial y_1}{\partial x}+B\left(\frac{\partial x_1}{\partial y}\frac{\partial y_1}{\partial x}+\frac{\partial x_1}{\partial x}\frac{\partial y_1}{\partial y}\right)+C\frac{\partial x_1}{\partial y}\frac{\partial y_1}{\partial y}=0.\end{gathered} \tag{76}$$

Это приведеніе [1]) равнозначно такимъ образомъ конформному преобразованію въ плоскость поверхности, которой линейный элементъ

$$ds=Cdx^2-2Bdx\,dy+A\,dy^2.$$

Указанная задача, насколько мнѣ извѣстно, разрѣшена лишь для *достаточно малыхъ* областей поверхности; но нельзя считать точно установленнымъ, что всякая правильная часть аналитической поверхности, ограниченная однимъ аналитическимъ контуромъ можетъ быть конформно преобразована въ кругъ.

Поэтому я считаю нужнымъ остановиться на этомъ вопросѣ, а именно, я покажу, какъ преобразовать уравненіе (74) въ уравненіе (75), такъ чтобъ каждой точкѣ внутри даннаго круга C плоскости x, y соотвѣтствовала бы одна и только одна точка внутри даннаго круга C_1 на плоскости x_1, y_1, центру 0 круга C — центръ 0_1 круга C_1, и нако-

---

[1]) Picard „Traité d'analyse" t. II. Стр. 27.

нецъ, чтобъ каждой точкѣ контура C соотвѣтствовала одна точка контура C_1.

Очевидно, что если мы разрѣшимъ эту задачу, то мы фактически приведемъ рѣшеніе задачи Дирикле для уравненія (74) къ такой же задачѣ Дирикле для уравненія (75), которую мы уже рѣшили въ IV главѣ. Впрочемъ, какъ мы увидимъ дальше, это приведеніе имѣетъ лишь теоретическое значеніе; такъ какъ наиболѣе простое рѣшеніе задачи Дирикле даетъ попрежнему способъ аналитическаго продолженія.

Рѣшая алгебраическую систему уравненій (76) относительно $\frac{\partial y_1}{\partial x}$, $\frac{\partial y_1}{\partial y}$, находимъ [1])

$$\frac{\partial y_1}{\partial x}=\frac{-B\frac{\partial x_1}{\partial x}-C\frac{\partial x_1}{\partial y}}{\sqrt{AC-B^2}};\quad \frac{\partial y_1}{\partial y}=\frac{A\frac{\partial x_1}{\partial x}+B\frac{\partial x_1}{\partial y}}{\sqrt{AC-B^2}}. \tag{77}$$

Откуда заключаемъ, что x_1 удовлетворяетъ линейному уравненію эллиптическаго типа

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A\frac{\partial v}{\partial x}+B\frac{\partial v}{\partial y}}{\sqrt{AC-B^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{B\frac{\partial v}{\partial x}+C\frac{\partial v}{\partial y}}{\sqrt{AC-B^2}}\right)=0. \tag{78}$$

И наоборотъ, если x_1 удовлетворяетъ уравненію (78), то изъ уравненій (77) опредѣляемъ y_1, и совокупность функцій x_1, y_1 удовлетворяетъ системѣ (76). Легко видѣть, что уравненію (78) удовлетворяетъ также и y_1, такъ какъ уравненія (77) равнозначны уравненіямъ

$$\frac{\partial x_1}{\partial x}=\frac{B\frac{\partial y_1}{\partial x}+C\frac{\partial y_1}{\partial y}}{\sqrt{AC-B^2}},\quad \frac{\partial x_1}{\partial y}=\frac{-A\frac{\partial y_1}{\partial x}-B\frac{\partial y_1}{\partial y}}{\sqrt{AC-B^2}}. \tag{77$^{\text{bis}}$}$$

Замѣтимъ далѣе, что, если мы возьмемъ какую нибудь аналитическую функцію комплексной перемѣнной x_1+iy_1

$$P(x_1,y_1)+iQ(x_1,y_1)=f(x_1+iy_1),$$

то функціи $P(x_1,y_1)$ и $Q(x_1,y_1)$ также удовлетворяютъ уравненію (78), такъ какъ изъ классическихъ уравненій Коши

$$\frac{\partial P}{\partial x_1}=\frac{\partial Q}{\partial y_1};\quad \frac{\partial P}{\partial y_1}=-\frac{\partial Q}{\partial x_1}$$

[1]) Ibidem.

и изъ уравненій (77) и (77^{bis}) вытекаетъ, что

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{B\dfrac{\partial Q}{\partial x}+C\dfrac{\partial Q}{\partial y}}{\sqrt{AC-B^2}}\,;\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-A\dfrac{\partial Q}{\partial x}-B\dfrac{\partial Q}{\partial y}}{\sqrt{AC-B^2}}\,.$$

Очевидно, поэтому, что если C'_1 представляетъ собой контуръ въ плоскости перемѣнныхъ x'_1, y'_1, удовлетворяющихъ уравненіямъ (77), который соотвѣтствуетъ окружности C въ плоскости x, y, то, совершая конформное преобразованіе площади ограниченной C'_1 въ кругъ C_1, мы получимъ новыя перемѣнныя x_1, y_1, которыя и представятъ требуемое рѣшеніе задачи. Прежде, чѣмъ приступить къ отысканію этихъ вспомогательныхъ перемѣнныхъ x'_1, y'_1, которыхъ существованіе a priori не очевидно, замѣтимъ, что тѣ же функціи x_1, y_1 могутъ быть получены другимъ путемъ. Дѣйствительно, согласно классическимъ результатамъ Римана, касающимся конформнаго преобразованія [1]), имѣемъ

$$x_1+iy_1=(x'_1+iy'_1)\,e^{H+iG}, \tag{79}$$

гдѣ $H+iG$ есть аналитическая функція комплексной перемѣнной x'_1+iy', причемъ H опредѣляется условіемъ, что на контурѣ C'_1 гармоническая функція H перемѣнныхъ x'_1, y'_1 равна

$$H=-\frac{1}{2}\log\left(x'^2_1+y'^2_1\right). \tag{80}$$

Но мы можемъ разсматривать H и G, какъ функціи x и y. Въ такомъ случаѣ H и G *представляютъ пару рѣшеній системы уравненій (77), причемъ H опредѣляется условіемъ (80) на окружности C.*

Для опредѣленія x'_1, y'_1 поступимъ слѣдующимъ образомъ.

Положимъ, что *при опредѣленной системѣ значеній A, B, C задача Дирикле для уравненія (78) возможна,* если на окружности C совокупность значеній, принимаемыхъ искомымъ рѣшеніемъ выражается функціей дуги, обладающей послѣдовательными производными первыхъ трехъ порядковъ. Въ такомъ случаѣ роль x'_1 можетъ исполнять рѣшеніе уравненія (77), которое на окружности C равно $\alpha+\cos\theta$, гдѣ α есть постоянная величина, опредѣляющаяся условіемъ, чтобъ при $x=y=0$, x'_1 было равно нулю. Въ самомъ дѣлѣ, x'_1 на окружности C имѣетъ лишь одинъ максимумъ $\alpha+1$ (при $\theta=0$) и одинъ минимумъ $\alpha-1$ (при $\theta=\pi$); такъ что внутри круга C кривыя

$$x'_1=\text{постоянная}$$

[1]) Picard „Traité d'analyse" t. II. Ch. X.

не могутъ имѣть двойныхъ точекъ, а потому ни въ одной точкѣ *не можетъ быть одновременно*

$$\frac{dx'_1}{dx} = \frac{dx'_1}{dy} = 0 .$$

Откуда слѣдуетъ (77), что кривыя

$$x'_1 = \text{пост.}, \quad y'_1 = \text{пост.}$$

не могутъ имѣть болѣе одной точки пересѣченія внутри круга C. Слѣдовательно, каждой точкѣ x'_1, y'_1 внутри нѣкотораго контура C'_1 въ плоскости перемѣнныхъ x'_1, y'_1 соотвѣтствуетъ одна и только одна точка x, y внутри круга C, причемъ можно сдѣлать такъ, чтобъ при $x = y = 0$ имѣть $x'_1 = y'_1 = 0$.

Если мы установимъ далѣе, что $\log(x'^2_1 + y'^2_1)$ на окружности C имѣетъ конечныя производныя первыхъ трехъ порядковъ, то мы немедленно вычислимъ H и G, а затѣмъ x_1 и y_1. Для этой цѣли мы докажемъ слѣдующую важную лемму.

Лемма. *Если z есть рѣшеніе уравненія эллиптическаго типа*

$$Ar + 2Bs + Ct + 2Dp + 2Eq + Fz = G , \tag{81}$$

имѣющее на окружности C конечныя производныя $n + 3^{\text{хъ}}$ порядковъ [1]) *относительно дуги окружности; если кромѣ того извѣстны высшіе предѣлы модулей производныхъ $n + 1^{\text{аго}}$ порядка A, B, C и $n^{\text{аго}}$ порядка остальныхъ коэффиціентовъ уравненія, то для модулей частныхъ производныхъ $n^{\text{аго}}$ порядка рѣшенія можетъ быть указанъ высшій предѣлъ на окружности C и внутри ея (при предположеніи, что высшій предѣлъ модуля $|z|$ также извѣстенъ).*

Замѣтимъ во-первыхъ, что гармоническая функція, которая принимаетъ тѣ же значенія, что и z, на окружности C, очевидно имѣетъ конечныя производныя $n + 2^{\text{хъ}}$ порядковъ, высшій предѣлъ которыхъ устанавливается безъ затрудненій. Поэтому можно ограничиться случаемъ, когда рѣшеніе z на окружности C равно нулю, причемъ коэффиціенты попрежнему обладаютъ конечными частными производными указаннаго въ условіи леммы порядка.

Умножая обѣ части уравненія (81) на z и интегрируя внутри круга C, получимъ немедленно

$$\iint (Ap^2 + 2Bpq + Cq^2)\, dx\, dy < M ,$$

---

[1]) Я напоминаю, что каждый разъ, когда мною не оговаривается особо, что рѣшеніе удовлетворяетъ еще какимъ нибудь условіямъ внутри контура, то это значитъ, что внутри контура оно не имѣетъ особенностей.

гдѣ M зависитъ отъ высшихъ предѣловъ модулей коэффиціентовъ уравненія (81) и ихъ производныхъ перваго порядка (а также отъ $|z|$, если $F \gtrless 0$).

Съ другой стороны, изъ неравенства (51) выводимъ, что

$$\iint [(Ar + 2Bs + Ct)^2 + 2\,(AC - B^2)\,(s^2 - rt)]\,dx\,dy <$$
$$< \iint (2Dp + 2Eq + Fz - G)^2\,dx\,dy.$$

Замѣчая, что подъ-интегральное выраженіе лѣвой части неравенства представляетъ положительную квадратичную форму перемѣнныхъ r, s, t, приходимъ къ неравенствамъ

$$\iint r^2\,dx\,dy < N, \qquad \iint s^2\,dx\,dy < N, \qquad \iint t^2\,dx\,dy < N,$$

гдѣ N, какъ и M, зависитъ только отъ коэффиціентовъ уравненія (81) и ихъ производныхъ перваго порядка.

Дифференцируя затѣмъ уравненіе (81) относительно угла θ, мы получимъ уравненіе

$$A\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + 2B\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right) + C\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + 2D\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + 2E\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + F\frac{\partial z}{\partial\theta} +$$
$$+ \frac{\partial A}{\partial\theta}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial B}{\partial\theta}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial C}{\partial\theta}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\frac{\partial D}{\partial\theta}\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial E}{\partial\theta}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial\theta}z = \frac{\partial G}{\partial\theta}. \qquad (82)$$

Или, полагая $\frac{\partial z}{\partial\theta} = z_1$ и замѣчая, что

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z_1}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$
$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \qquad (83)$$
$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -\,y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -\,y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

получимъ

$$A\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} + a_1 r + b_1 s + c_1 t + d_1 p + e_1 q + f_1 z = g_1 \quad (82')$$

гдѣ a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1, g_1 конечные коэффиціенты, которые зависятъ только отъ коэффиціентовъ уравненія (81) и ихъ производныхъ перваго порядка. Но такъ какъ z_1 на окружности C тоже обращается въ нуль, то, пользуясь неравенствомъ (51), мы опять найдемъ

$$\iint\left\{\left[A\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}\right]^2+2(AC-B^2)\left[\left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}\right]\right\}dx\,dy<$$
$$<\iint(a_1 r+b_1 s+c_1 t+d_1 p+e_1 q+f_1 z-g_1)^2\,dx\,dy.$$

Слѣдовательно

$$\iint\left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}\right)^2 dx\,dy<L_1,\quad \iint\left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\partial y}\right)^2 dx\,dy<L_1,\quad \iint\left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}\right)^2 dx\,dy<L_1,$$

гдѣ L_1 зависитъ только отъ коэффиціентовъ уравненія (81) и ихъ производныхъ перваго порядка. Отсюда легко выводимъ опредѣленный высшій предѣлъ $|p|$ и $|q|$ (и даже тригонометрическихъ модулей $\{p\}_{R'R}$, $\{q\}_{R'R}$, если примѣнимъ разсужденіе страницы 84) внутри кольцеобразной области S, заключенной между данною окружностью C и концентрическою съ ней окружностью C' опредѣленнаго, но сколь угодно малаго радіуса R'. Съ другой стороны мы замѣчаемъ, что коэффиціенты уравненія (82') имѣютъ конечныя производныя первыхъ $n-1$ порядковъ; поэтому дифференцируя его послѣдовательно относительно θ и обозначая вообще $\frac{\partial^p z}{\partial\theta^p}=z_p$, получимъ послѣдовательно

$$A\frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 z_2}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 z_2}{\partial y^2}+a_2\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}+b_2\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\partial y}+c_2\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}+\ldots=g_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (84)$$
$$A\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 z_n}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2}+a_n\frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial x^2}+b_n\frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial x\partial y}+c_n\frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial y^2}+\ldots=g_n,$$

причемъ во всѣхъ уравненіяхъ (84), высшій предѣлъ модулей коэффиціентовъ по предположенію извѣстенъ.

Пользуясь, какъ выше, неравенствомъ (51), получимъ такимъ образомъ послѣдовательный рядъ неравенствъ, въ которыхъ интегралы относятся ко всей площади круга C,

$$\iint\left(\frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2}\right)^2 dx\,dy<L_2,\quad \iint\left(\frac{\partial^2 z_2}{\partial x\partial y}\right)^2 dx\,dy<L_2,\quad \iint\left(\frac{\partial^2 z_2}{\partial y^2}\right)^2 dx\,dy<L_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (85)$$
$$\iint\left(\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2}\right)^2 dx\,dy<L_n,\quad \iint\left(\frac{\partial^2 z_n}{\partial x\partial y}\right)^2 dx\,dy<L_n,\quad \iint\left(\frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2}\right)^2 dx\,dy<L_n,$$

гдѣ L_i вообще зависитъ отъ модулей производныхъ коэффиціентовъ уравненія (81) не выше $i^{аго}$ порядка.

Неравенства (85) весьма цѣнны; въ частности, они даютъ намъ непосредственно высшіе предѣлы модулей (и даже тригонометрическихъ модулей) $|z_i|$ и $\left|\frac{\partial z_{i-1}}{\partial \varrho}\right|$ при $i \leqq n$ внутри области S. Высшіе предѣлы остальныхъ частныхъ производныхъ не выше $n^{\text{аго}}$ порядка внутри области S устанавливаются послѣ этого безъ затрудненій: для каждаго i опредѣляются послѣдовательно $\frac{\partial^2 z_{i-2}}{\partial \varrho^2}$, затѣмъ $\frac{\partial^3 z_{i-3}}{\partial \varrho^3}$ и т. д.

Но наши умозаключенія остаются въ силѣ лишь при предположеніи, что радіусъ R' круга C' не равенъ нулю; пусть, напримѣръ, $R' = \frac{R}{4}$, тогда внутри круга C' непосредственно мы ничего не утверждаемъ. Это затрудненіе можно было бы легко преодолѣть и безъ помощи новаго принципа, примѣняя тѣ же разсужденія къ *эксцентрическому* кругу C_1, котораго периферія находилась бы внутри кольца S, (такъ что на ней, на основаніи предыдущаго, извѣстны высшіе предѣлы производныхъ n первыхъ порядковъ) а центръ—внѣ круга C'; хотя для интересующей насъ цѣли это и не очень существенно, но такимъ образомъ мы установили бы высшіе предѣлы производныхъ z лишь $n-3$ первыхъ порядковъ. Поэтому для окончанія доказательства мы воспользуемся снова принципомъ вспомогательныхъ функцій, который вообще, играетъ важную роль въ теоріи уравненій эллиптическаго типа. А именно, предполагая извѣстными высшіе предѣлы модулей производныхъ не выше $i-1^{\text{аго}}$ порядка внутри круга C', мы построимъ опредѣленныя квадратичныя формы изъ производныхъ $i^{\text{аго}}$ порядка, высшій предѣлъ которыхъ будетъ указанъ a priori для точекъ, гдѣ онѣ достигаютъ максимума; но такъ какъ намъ кромѣ того извѣстны высшіе предѣлы *всѣхъ* частныхъ производныхъ $i^{\text{аго}}$ порядка на окружности C' (ограничивающей область S), то такимъ образомъ мы опредѣлимъ высшій предѣлъ этихъ формъ, а вмѣстѣ съ ними и каждаго изъ модулей производныхъ $i^{\text{аго}}$ порядка во всякой точкѣ внутри C'. Сдѣлавши это послѣдовательно при всѣхъ значеніяхъ $i \leqq n$, мы получимъ полное доказательство нашей леммы.

Начнемъ съ первыхъ производныхъ; мы легко увидимъ затѣмъ, что тоже разсужденіе примѣнимо и къ производнымъ высшихъ порядковъ.

Пусть m высшій предѣлъ $|z|$, и положимъ, что

$$z = -m + \log\log u.$$

Мы увидимъ тогда, какъ на страницѣ 107, что u удовлетворяетъ уравненію

$$Ar_1 + 2Bs_1 + Ct_1 = \frac{1+\log u}{u \log u}\left[Ap_1^2 + 2Bp_1q_1 + Cq_1^2\right] - \\ - 2Dp_1 - 2Eq_1 - (Fz - G)\, u \log u = Q, \qquad (81^{\text{bis}})$$

гдѣ

$$p_1=\frac{\partial u}{\partial x},\ q_1=\frac{\partial u}{\partial y},\ r_1=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ s_1=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\ t_1=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Допустимъ затѣмъ, что въ нѣкоторой точкѣ функція

$$w=Ap_1^2+2Bp_1q_1+Cq_1^2=e^{2(z+m)}e^{2e^{z}+m}\left[A\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+2B\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+C\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]$$

достигаетъ максимума. Въ этой точкѣ будемъ слѣдовательно имѣть

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x}&=(Ap_1+Bq_1)r_1+(Bp_1+Cq_1)s_1+\frac{1}{2}[A'_xp_1^2+2B'_xp_1q_1+C'_xq_1^2]=0,\\ \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial y}&=(Ap_1+Bq_1)s_1+(Bp_1+Cq_1)t_1+\frac{1}{2}[A'_yp_1^2+2B'_yp_1q_1+C'_yq_1^2]=0.\end{aligned}\tag{72$^{\text{bis}}$}$$

Откуда заключаемъ, что въ этой точкѣ

$$\begin{aligned}r_1&=\frac{Q(Bp_1+Cq_1)^2+CY(Bp_1+Cq_1)+X[(2B^2-AC)p_1+BCq_1]}{(AC-B^2)w},\\ s_1&=\frac{-Q(Bp_1+Cq_1)(Ap_1+Bq_1)-CY(Ap_1+Bq_1)-AX(Bp_1+Cq_1)}{(AC-B^2)w},\\ t_1&=\frac{Q(Ap_1+Bq_1)^2+Y[ABp_1+(2B^2-AC)q_1]+AX(Ap_1+Bq_1)}{(AC-B^2)w},\end{aligned}$$

полагая для краткости

$$X=\frac{1}{2}[A'_xp_1^2+2B'_xp_1q_1+C'_xq_1^2],\quad Y=\frac{1}{2}[A'_yp_1^2+1B'_yp_1q_1+C'_yq_1^2];$$

или еще

$$\begin{aligned}(AC-B^2)wr_1&=w(Bp_1+Cq_1)^2\frac{1+\log u}{u\log u}+h_1,\\ (AC-B^2)ws_1&=-w(Bp_1+Cq_1)(Ap_1+Bq_1)\frac{1+\log u}{u\log u}+h_2,\\ (AC-B^2)wt_1&=w(Ap_1+Bq_1)^2\frac{1+\log u}{u\log u}+h_3,\end{aligned}\tag{86}$$

гдѣ h_1, h_2, h_3 представляютъ собой многочлены третьей степени относительно p_1, q_1, коэффиціенты которыхъ суть функціи x, y, зависящія только отъ коэффиціентовъ уравненія (81) и ихъ производныхъ перваго порядка.

Кромѣ того, если w максимумъ, то

$$K=\frac{1}{2}\left[A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]\leqq 0\,,$$

такъ какъ противоположное предположенiе, $K>0$, въ связи съ необходимымъ условiемъ максимума,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\geqq 0\,,$$

повлекло бы за собой неравенства $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}>0$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}>0$, невозможныя при максимумѣ.

Но легко видѣть, что

$$\begin{aligned}K=(Ap_1+Bq_1)\left(A\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 p_1}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2}\right)+\\+(Bp_1+Cq_1)\left(A\frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 q_1}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 q_1}{\partial y^2}\right)+\\+A(Ar_1^2+2Br_1s_1+Cs_1^2)+2B[Ar_1s_1+B(r_1t_1+s_1^2)+Cs_1t_1]+\\+C(As_1^2+2Bs_1t_1+Ct_1^2)+H_1+H_2\,,\end{aligned}\tag{87}$$

обозначая для краткости черезъ H_1 многочленъ *первой* степени относительно перемѣнныхъ p_1r_1, p_1s_1, p_1t_1, q_1r_1, q_1s_1, q_1t_1, и черезъ H_2— многочленъ *второй* степени относительно перемѣнныхъ p_1, q_1, коэффицiенты которыхъ суть извѣстныя функцiи x, y, зависящiя отъ коэффицiентовъ уравненiя (81) и ихъ производныхъ первыхъ двухъ порядковъ. (Замѣтимъ, что производныя *второго* порядка фигурируютъ лишь отъ коэффицiентовъ A, B, C).

Дифференцируя уравненiе (81^{bis}) относительно x, мы находимъ съ другой стороны, принимая во вниманiе (72^{bis}), что

$$A\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 p_1}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2}=-\frac{1+\log u+(\log u)^2}{(u\log u)^2}p_1[Ap_1^2+2Bp_1q_1+Cq_1^2]+G_1\,,$$

гдѣ G_1 представляетъ собой многочленъ *первой* степени относительно p_1, q_1, r_1, s_1, t_1, коэффицiенты котораго суть извѣстныя функцiи x, y, u, которыя зависятъ только отъ коэффицiентовъ уравненiя (81) и ихъ производныхъ перваго порядка.

Точно также дифференцируя относительно y, найдемъ, что

$$A\frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 q_1}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 q_1}{\partial y^2}=-\frac{1+\log u+(\log u)^2}{(u\log u)^2}q_1[Ap_1^2+2Bp_1q_1+Cq_1^2]+G_2\,,$$

гдѣ G_2 представляетъ собой многочленъ, обладающій тѣми же свойствами, что и G_1.

Подставляя эти выраженія, а также значенія r_1, s_1, t_1 изъ формулъ (86) въ равенство (87), получимъ

$$(AC-B^2)^2 w^2 K = -\frac{1+\log u+(\log u)^2}{(u\log u)^2}(AC-B^2)^2 w^4 +$$
$$+\left(\frac{1+\log u}{u\log u}\right)^2 (AC-B^2)^2 w^4 + (AC-B^2)^2 P,$$

гдѣ P представляетъ собой многочленъ *седьмой* степени относительно p_1, q_1 съ извѣстными коэффиціентами.

Итакъ, если w максимумъ, мы должны имѣть

$$\frac{w^4}{u^2\log u} + P \leqq 0.$$

Такъ какъ w опредѣленная квадратичная форма, то не представляетъ никакого труда при помощи элементарныхъ принциповъ алгебры вывести изъ этого неравенства высшій предѣлъ w въ точкѣ, гдѣ w достигаетъ максимума.

На основаніи указанныхъ выше соображеній мы выводимъ высшій предѣлъ w во всякой точкѣ внутри C, а вмѣстѣ съ тѣмъ и высшій предѣлъ p и q.

Если намъ извѣстенъ высшій предѣлъ m всѣхъ производныхъ z не выше порядка i, то тѣмъ же способомъ мы получимъ высшіе предѣлы максимумовъ квадратичныхъ формъ

$$w_{k,l} = e^{2(z_{k,l}+m)}\, e^{2e^{z_{k,l}+m}}\left[Az_{k+1,l}^2 + 2Bz_{k+1,l}\,z_{k,l+1} + Cz_{k,l+1}^2\right],$$

гдѣ $z_{k,l} = \dfrac{\partial^{k+l} z}{\partial x^k \partial y^l}$, причемъ $k+l=i$. Для этого нужно только, чтобъ были извѣстны высшіе предѣлы модулей коэффиціентовъ уравненія (81) и производныхъ A, B, C до $i+2^{\text{го}}$ порядка и D, E, F, G до $i+1^{\text{го}}$ порядка включительно.

Въ самомъ дѣлѣ, продифференцируемъ уравненіе (81) k разъ относительно x и l разъ относительно y; мы получимъ уравненіе слѣдующаго вида:

$$A\frac{\partial^2 z_{k,l}}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z_{k,l}}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 z_{k,l}}{\partial y^2} + D_{k,l}\frac{\partial z_{k,l}}{\partial x} + E_{k,l}\frac{\partial z_{k,l}}{\partial y} + F_{k,l}z_{k,l} + G_{k,l}$$
$$+ d_{k,l}^{(1)} z_{k-1,l+2} + d_{k,l}^{(2)} z_{k+2,l-1} + f_{k,l}^{(1)} z_{k-2,l+2} + f_{k,l}^{(2)} z_{k+2,l-2} +$$
$$+ h_{k,l}^{(1)} z_{k-1,l+1} + h_{k,l}^{(2)} z_{k+1,l-1} = 0.$$

Всѣ коэффиціенты этого уравненія конечны, какъ и ихъ производныя перваго порядка. Кромѣ того, можно предположить, что

$$d^{(1)}_{k,l} = d^{(2)}_{k,l} = f^{(1)}_{k,l} = f^{(2)}_{k,l} = h^{(1)}_{k,l} = 0\,;$$

положимъ, что это имѣетъ мѣсто при $k' + l' \leqq i - 1$.

Въ такомъ случаѣ $z_{k-1,\,l+2}$ представляетъ собой линейное выраженіе относительно $z_{k,l+1} = \dfrac{\partial z_{k,l}}{\partial y}$, $z_{k+1,l} = \dfrac{\partial z_{k,l}}{\partial y}$, $z_{k-1,l+1}$, $z_{k,l}$ съ коэффиціентами, имѣющими конечныя производныя. Слѣдовательно $d^{(1)}_{k,l} = 0$. Точно также видимъ, что и коэффиціенты $d^{(2)}_{k,l}$, $f^{(1)}_{k,l}$, $f^{(2)}_{k,l}$, $h^{(1)}_{k,l}$ могутъ быть приравнены нулю. Слѣдовательно, $z_{k,l}$ вообще удовлетворяетъ уравненію

$$\begin{aligned} A\frac{\partial^2 z_{k,l}}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z_{k,l}}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 z_{k,l}}{\partial y^2} + D_{k,l}\frac{\partial z_{k,l}}{\partial x} + E_{k,l}\frac{\partial z_{k,l}}{\partial y} + F_{k,l} z_{k,l} + \\ + h_{k,l} z_{k+1,\,l-1} + G_{k,l} = 0. \end{aligned} \tag{88}$$

Уравненіе (88) отличается отъ уравненія (81) только присутствіемъ $h_{k,l} z_{k+1,\,l-1}$, но ясно, что наличность этого члена не мѣшаетъ намъ воспроизвести разсужденіе, которое привело къ установленію высшаго предѣла максимума w, такъ какъ первыя производныя $z_{k+1,\,l-1}$ выражаются *линейно* посредствомъ первыхъ производныхъ $z_{k,l}$. Поэтому для $w_{k,l}$ можетъ быть также указанъ высшій предѣлъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ и для модулей всѣхъ производныхъ порядка $i + 1$.

Воспроизводя тоже разсужденіе для всѣхъ значеній i до $n - 1$ включительно, мы прійдемъ къ полному доказательству высказанной леммы.

Примѣнимъ теперь доказанную лемму къ изслѣдованію рѣшенія x'_1 уравненія (78), которое на окружности C обращается въ $\alpha + \cos\theta$, имѣя такимъ образомъ на этой окружности конечныя частныя производныя по θ всѣхъ порядковъ. Слѣдовательно, если *извѣстенъ высшій предѣлъ функцій* $\dfrac{A}{\sqrt{AC - B^2}}$, $\dfrac{B}{\sqrt{AC - B^2}}$, $\dfrac{C}{\sqrt{AC - B^2}}$ *и ихъ частныхъ производныхъ до $n + 1^{го}$ порядка включительно, то можетъ быть указанъ высшій предѣлъ модулей производныхъ x'_1 и y'_1 до $n^{го}$ порядка включительно. Въ частности на окружности C функція* $\log(x'^2_1 + y'^2_1)$ *имѣетъ конечныя производныя по θ первыхъ n порядковъ.*

Поэтому *рѣшеніе H уравненія (78), которое на окружности C обращается въ функцію* $-\dfrac{1}{2}\log(x'^2_1 + y'^2_1)$, *имѣетъ* (при предположеніи, что это рѣшеніе существуетъ) *конечныя производныя первыхъ $n - 3^{хъ}$ порядковъ*, высшій предѣлъ модулей которыхъ можетъ быть указанъ a priori на окружности C, какъ и внутри ея. И наконецъ изъ равенства (79) заключаемъ *о конечности частныхъ производныхъ первыхъ $n - 3^{хъ}$ по-*

рядковъ функцій x_1 и y_1 относительно x, y, осуществляющихъ преобразованіе координатъ, при которомъ уравненіе (74) приводится къ каноническому виду и окружность C превращается въ окружность C_1, которой центръ соотвѣтствуетъ центру C.

§ 27. Этотъ выводъ для насъ весьма существенъ, такъ какъ онъ приведетъ насъ къ важнымъ неравенствамъ.

Пусть

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 z_1}{\partial y_1^2}+a\frac{\partial z}{\partial x_1}+b\frac{\partial z}{\partial y_1}+Fz=M \tag{75}$$

приведенное уравненіе, къ которому мы пришли, гдѣ

$$a=A\frac{\partial^2 x_1}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 x_1}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 x_1}{\partial y^2}+2D\frac{\partial x_1}{\partial x}+2E\frac{\partial x_1}{\partial y},$$

$$b=A\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 y_1}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 y_1}{\partial y^2}+2D\frac{\partial y_1}{\partial x}+2E\frac{\partial y_1}{\partial y}.$$

Можно замѣтить, что a и b въ дѣйствительности не зависятъ отъ вторыхъ производныхъ x_1 и y_1, такъ какъ эти послѣднія удовлетворяютъ уравненію (78). Но въ виду того, что намъ извѣстенъ простой единообразный способъ для установленія высшихъ предѣловъ послѣдовательныхъ производныхъ x_1, y_1, это для насъ имѣетъ мало значенія.

Теперь намъ остается еще представить коэффиціенты уравненія (75) при помощи новыхъ перемѣнныхъ x_1, y_1; для этого нужно выразить старыя перемѣнныя x, y при помощи x_1 и y_1. Очевидно, что мы получимъ высшіе предѣлы производныхъ первыхъ $(n-3)^{\text{хъ}}$ порядковъ x и y по x_1 и y_1 въ томъ случаѣ, если сумѣемъ установить высшій предѣлъ модуля функціональнаго детерминанта

$$D=\frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{\partial y}{\partial y_1}-\frac{\partial x}{\partial y_1}\frac{\partial y}{\partial x_1}=\frac{1}{\dfrac{\partial x_1}{\partial x}\dfrac{\partial y_1}{\partial y}-\dfrac{\partial x_1}{\partial y}\dfrac{\partial y_1}{\partial x}},$$

т. е. высшіе предѣлы только первыхъ производныхъ x, y по x_1, y_1.

Но изъ уравненій (77) мы выводимъ

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}=\frac{B}{C}\frac{\partial x}{\partial x_1}-\frac{H}{C}\frac{\partial x}{\partial y_1},\quad \frac{\partial y}{\partial y_1}=\frac{H}{C}\frac{\partial x}{\partial x_1}+\frac{B}{C}\frac{\partial x}{\partial y_1}, \tag{89}$$

гдѣ $H=\sqrt{AC-B^2}$.

Слѣдовательно, x удовлетворяетъ уравненію

$$\frac{H}{C}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial y_1^2}\right)+\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{H}{C}\right)-\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{B}{C}\right)\right]\frac{\partial x}{\partial x_1}+\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{B}{C}\right)+\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{H}{C}\right)\right]\frac{\partial y}{\partial y_1}=0.$$

Производя указанное дифференцированіе и пользуясь уравненіями (89) мы видимъ, что x удовлетворяетъ не линейному уравненію, а уравненію вида

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial y_1^2}=f\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}, \frac{\partial x}{\partial y_1}, x_1, y_1, x, y\right) \tag{90}$$

гдѣ f многочленъ второй степени по $\dfrac{\partial x}{\partial x_1}$ и $\dfrac{\partial x}{\partial y_1}$.

Къ этому уравненію мы можемъ примѣнить разсужденіе предыдущей главы для того, чтобъ показать, что если выраженіе

$$w=e^{2e^{\frac{x+R}{\alpha}}}\, e^{2\frac{x+R}{\alpha}}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial y_1}\right)^2\right],$$

гдѣ R радіусъ круга C (т. е. максимумъ $|x|$), а α—нѣкоторая опредѣленная достаточно малая величина, достигаетъ максимума внутри круга C_1, то этотъ максимумъ менѣе опредѣленнаго числа, такъ какъ производныя y выражаются линейно при помощи производныхъ x. Слѣдовательно, остается лишь установить высшій предѣлъ первыхъ производныхъ на самой окружности C_1. Для этого мы не можемъ непосредственно примѣнить разсужденіе прошлой главы, такъ какъ значенія x на окружности C_1 a priori намъ не даны; намъ извѣстно лишь, что на этой окружности

$$x^2+y^2=R^2.$$

Но мы можемъ также построить уравненіе, которому удовлетворяетъ функція

$$\varrho=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Для этого введемъ полярныя координаты

$$x=\varrho\cos\theta, \quad y=\varrho\sin\theta.$$

Уравненія (89) принимаютъ форму

$$\frac{y}{\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial x_1}+x\frac{\partial\theta}{\partial x_1}=\frac{B}{C}\left(\frac{x}{\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial x_1}-y\frac{\partial\theta}{\partial x_1}\right)-\frac{H}{C}\left(\frac{x}{\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial y_1}-y\frac{\partial\theta}{\partial y_1}\right),$$
$$\frac{y}{\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial y_1}+x\frac{\partial\theta}{\partial y_1}=\frac{H}{C}\left(\frac{x}{\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial x_1}-y\frac{\partial\theta}{\partial x_1}\right)+\frac{B}{C}\left(\frac{x}{\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial y_1}-y\frac{\partial\theta}{\partial y_1}\right).$$

Разрѣшая ихъ относительно $\dfrac{\partial\theta}{\partial x_1}$ и $\dfrac{\partial\theta}{\partial y_1}$, получимъ

$$\begin{aligned}\frac{\partial\theta}{\partial x_1}&=\frac{\frac{\partial\varrho}{\partial x_1}\left[B\cos 2\theta+\frac{1}{2}(A-C)\sin 2\theta\right]-\frac{\partial\varrho}{\partial y_1}H}{\varrho.(C\cos^2\theta+2B\cos\theta\sin\theta+A\sin^2\theta)},\\ \frac{\partial\theta}{\partial y_1}&=\frac{\frac{\partial\varrho}{\partial x_1}H+\frac{\partial\varrho}{\partial y_1}\left[B\cos 2\theta+\frac{1}{2}(A-C)\sin 2\theta\right]}{\varrho.(C\cos^2\theta+2B\sin\theta\cos\theta+A\sin^2\theta)}.\end{aligned} \tag{89bis}$$

Откуда выводимъ уравненіе, которому удовлетворяетъ ϱ

$$\frac{\partial^2\varrho}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varrho}{\partial y_1^2}+\frac{1}{H_1}\left[\left(\frac{\partial H_1}{\partial x_1}-\frac{\partial B_1}{\partial y_1}\right)\frac{\partial\varrho}{\partial x_1}+\left(\frac{\partial B_1}{\partial x_1}+\frac{\partial H_1}{\partial y_1}\right)\frac{\partial\varrho}{\partial y_1}\right]=0\,, \quad (90^{\text{bis}})$$

гдѣ

$$H_1=\frac{H}{\varrho.(C\cos^2\theta+2B\cos\theta\sin\theta+A\sin^2\theta)}\,,$$

$$B_1=\frac{B\cos 2\theta+\frac{1}{2}(A-C)\sin 2\theta}{\varrho.(C\cos^2\theta+2B\cos\theta\sin\theta+A\sin^2\theta)}\,.$$

Уравненіе (90^{bis}) такой же формы, какъ и (90). Разница однако въ томъ, что при $\varrho=0$ вторая часть уравненія становится безконечной. Но мы выбрали x_1 и y_1 такъ, что $\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\varrho_1$ обращается въ нуль вмѣстѣ съ ϱ, причемъ благодаря установленнымъ нами высшимъ предѣламъ производныхъ $\frac{\partial x_1}{\partial x}$, $\frac{\partial y_1}{\partial x}$, $\frac{\partial x_1}{\partial y}$, $\frac{\partial y_1}{\partial y}$ легко установить неравенство

$$\varrho>\frac{\varrho_1}{M},$$

гдѣ M нѣкоторое опредѣленное число.

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи теоремы конечныхъ приращеній мы можемъ написать

$$x_1=\frac{\partial x_1}{\partial x}x+\frac{\partial x_1}{\partial y}y\,,\qquad y_1=\frac{\partial y_1}{\partial x}x+\frac{\partial y_1}{\partial y}y\,,$$

гдѣ значенія частныхъ производныхъ соотвѣтствуютъ въ обоихъ равенствахъ двумъ различнымъ вообще опредѣленнымъ точкамъ внутри круга C.

Поэтому

$$\varrho_1^2=\varrho^2\left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial x_1}{\partial y}\sin\theta\right)^2+\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial y_1}{\partial y}\sin\theta\right)^2\right]$$
$$<M^2\varrho^2$$

и мы приходимъ къ указанному выше неравенству

$$\varrho>\frac{\varrho_1}{M}.$$

Слѣдовательно, если мы возьмемъ концентрическій съ C_1 кругъ C_1' радіуса R_1' ($R_1'<R_1$) въ плоскости перемѣнныхъ x_1, y_1, то мы можемъ утверждать, что внутри области S_1 ограниченной окружностями C_1 и C_1' функція ϱ все время болѣе $\frac{R_1'}{M}$, а потому внутри этой области модули

коэффиціентовъ уравненія (90^{bis}) менѣе нѣкотораго опредѣленнаго числа. Такимъ образомъ, примѣняя способъ вспомогательныхъ функцій и полагая [1])

$$\varrho = -\alpha + \alpha \log u ,$$

гдѣ α опредѣленное достаточно малое число, находимъ, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} > -N$$

внутри области S_1, обозначая черезъ N опредѣленное положительное число.

Полагая затѣмъ

$$u = u_1 - \frac{N}{4}\varrho_1^2 ,$$

находимъ, что внутри S_1

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2} > 0 .$$

И наконецъ, если положимъ

$$u_1 = v_1 + h_1$$

гдѣ h_1 гармоническая функція, совпадающая съ u_1 на окружностяхъ C_1 и C_1', то v_1 обращается въ нуль на этихъ окружностяхъ и также удовлетворяетъ неравенству

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y_1^2} > 0 .$$

Слѣдовательно, v_1 внутри области S_1 не имѣетъ максимума, а потому на окружности C

$$\frac{\partial v_1}{\partial \varrho_1} \geqq 0 .$$

Съ другой стороны, благодаря отрицательной кривизнѣ гармонической поверхности, касательная плоскость къ поверхности $z_1 = h_1$ въ какой нибудь точкѣ, имѣющей проэкцію на окружности C_1, пересѣкаетъ эту поверхность покрайней мѣрѣ еще въ одной точкѣ, имѣющей проэкцію на окружности C_1' или на C_1. Но на окружности C_1 функція h_1 постоянна и равна

$$h_1^{(1)} = e^{\frac{R+\alpha}{\alpha}} + \frac{N}{4} R_1^2 ,$$

на окружности же C_1' h_1 удовлетворяетъ неравенству

$$h_1 < e^{\frac{R+\alpha}{\alpha}} + \frac{N}{4} R_1'^2 < h_1^{(1)} .$$

[1]) Такъ какъ $\rho > 0$.

Поэтому на окружности C_1

$$\frac{\partial h_1}{\partial \varrho_1} \geqq 0.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{\partial u_1}{\partial \varrho_1} \geqq 0.$$

Такимъ образомъ

$$\frac{\partial u}{\partial \varrho_1} \geqq -\frac{N}{2} R_1$$

и

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \varrho_1} \geqq -\frac{\alpha N R_1}{2e^{\frac{R+\alpha}{\alpha}}}$$

на окружности C_1. Точно такимъ же образомъ получимъ и высшій *положительный* предѣлъ $\dfrac{\partial \varrho}{\partial \varrho_1}$.

Теперь мы можемъ наконецъ установить высшій предѣлъ модуля функціональнаго детерминанта D, а вмѣстѣ съ тѣмъ и модулей производныхъ первыхъ $(n-3)^{\text{хъ}}$ порядковъ функцій x, y относительно x_1 y_1. Слѣдовательно, намъ извѣстны также и высшіе предѣлы модулей частныхъ производныхъ первыхъ $(n-4)^{\text{хъ}}$ порядковъ коэффиціентовъ приведеннаго уравненія (75) относительно x_1, y_1.

Положимъ $n = 6$. Въ такомъ случаѣ намъ извѣстны высшіе предѣлы модулей производныхъ первыхъ двухъ порядковъ коэффиціентовъ уравненія (75), которое совершенно подобно уравненію (46), если положимъ $F \geqq 0$; къ нему примѣнимы такимъ образомъ неравенства (50), и мы приходимъ къ слѣдующей леммѣ.

Лемма. *Если z есть рѣшеніе уравненія*

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial z}{\partial x} + 2E\frac{\partial z}{\partial y} + Fz = M, \quad (F \leqq 0) \quad (74)$$

которое обращается въ нуль на окружности C радіуса R, причемъ коэффиціенты A, B, C имѣютъ конечныя производныя первыхъ семи порядковъ [1]*), D, E и F конечныя производныя первыхъ двухъ порядковъ, и если уравненіе (74) можетъ быть приведено къ каноническому виду, такъ чтобъ кругу C соотвѣтствовалъ кругъ C_1 въ плоскости новыхъ перемѣнныхъ x_1, y_1 (и центру 0 круга C соотвѣтствовалъ центръ 0_1 круга C_1); то тригонометрическіе модули z, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ на отрѣзкѣ $0_1 R_1$ въ плоскости перемѣнныхъ x_1, y_1 удовлетворяютъ неравенствамъ:*

---

[1]) Число конечныхъ производныхъ A, B, C могло бы быть понижено, но съ точки зрѣнія интересующихъ насъ результатовъ, это имѣетъ второстепенное значеніе.

$$\{z\}_{0_1R_1} < k\{M\}_{0_1R_1}, \quad \left\{\frac{\partial z}{\partial x}\right\}_{0_1R_1} < k\{M\}_{0_1R_1}, \quad \left\{\frac{\partial z}{\partial y}\right\}_{0_1R_1} < k\{M\}_{0_1R_1}, \tag{91}$$

гдѣ число k не зависитъ отъ M.

Въ самомъ дѣлѣ, послѣ преобразованія уравненія (74) въ (75) изъ неравенствъ (50) непосредственно слѣдуетъ, что

$$\{z\}_{0_1R_1} < k\{M\}_{0_1R_1}, \quad \left\{\frac{\partial z}{\partial x_1}\right\}_{0_1R_1} < k\{M\}_{0_1R_1}, \quad \left\{\frac{\partial z}{\partial y_1}\right\}_{0_1R_1} < k\{M\}_{0_1R_1}.$$

Но

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial y}.$$

Тригонометрическіе же модули $\frac{\partial x_1}{\partial x}$, $\frac{\partial x_1}{\partial y}$, $\frac{\partial y_1}{\partial x}$, $\frac{\partial y_1}{\partial y}$, конечны на основаніи предыдущаго разсужденія.

До сихъ поръ въ нашихъ выводахъ мы нарочно избѣгали предположенія объ аналитическомъ характерѣ коэффиціентовъ, чтобы отчетливо подчеркнуть то мѣсто, гдѣ это предположеніе станетъ существеннымъ.

Но для дальнѣйшаго, неравенствъ (91) недостаточно, такъ какъ необходимо подобныя же неравенства имѣть и для *вторыхъ* производныхъ.

При выводѣ соотвѣтствующихъ неравенствъ для уравненія Пуассона мы уже отмѣтили важность предположенія аналитическаго характера второй его части и въ частности значеніе такъ называемыхъ *нормъ*. Здѣсь мы опять будемъ вынуждены ограничиться аналитическими коэффиціентами и пользоваться понятіемъ нормы, которое мы нѣсколько дополнимъ.

Положимъ, что $f(x)$ функція перемѣнной x на отрѣзкѣ $0R$, причемъ на части его $0A$ она разлагается въ нормальный рядъ и внутри контура Γ_{0Aa} имѣетъ низшую норму $[f(x)]_{Aa}$; на остальной же части AR отрѣзка $0R$, модуль функціи $f(x)$ имѣетъ максимумъ равный M. Наибольшее изъ чиселъ $[f(x)]_{Aa}$ и M мы назовемъ *нормализованнымъ внутри контура Γ_{0Aa} модулемъ функціи $f(x)$ на отрѣзкѣ $0R$* и обозначимъ его черезъ $[f(x)]_{Aa}^{(0R)}$.

Въ случаѣ двухъ перемѣнныхъ, если

$$f(\varrho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta,$$

гдѣ

$$A_n = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} a_{p,q}^{(n)} \varrho^{n+p}(A^2-\varrho^2)^q, \quad B_n = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} b_{p,q}^{(n)} \varrho^{n+p}(A^2-\varrho^2)^q,$$

естественно назвать нормализованнымъ внутри контура Γ_{0Aa} тригонометрическимъ модулемъ функціи $f(\varrho, \theta)$ на отрѣзкѣ $0R$ выраженіе

$$[f(\varrho, \theta)]_{Aa}^{(0R)} = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n]_{Aa}^{(0R)} + [B_n]_{Aa}^{(0R)}.$$

Итакъ допустимъ вдобавокъ, что A, B, C, D, E, F аналитическія функціи *внутри* круга C, или даже только, что *ихъ радіусы сходимости въ точкѣ* $x=y=0$ *по степенямъ* $x+yi$, $x-yi$ *не менѣе нѣкотораго опредѣленнаго числа* ε. Концентрическому къ C кругу радіуса ε соотвѣтствуетъ въ плоскости перемѣнныхъ x_1, y_1 область, заключающая въ себѣ [1]) кругъ опредѣленнаго радіуса ε_1, концентрическій къ C_1.

Кромѣ того, примѣняя къ уравненію (78) разсужденіе III главы, которое привело къ доказательству основной теоремы, мы можемъ найти высшіе предѣлы нормъ x_1, y_1 внутри опредѣленнаго контура $\Gamma_{0\varepsilon' r}$ (гдѣ $r<\varepsilon'<\varepsilon$), которые являются въ то же время высшими предѣлами разложеній x_1, y_1 по степенямъ $x+yi$, $x-yi$, послѣ замѣны $x+yi$, $x-yi$ черезъ r и коэффиціентовъ разложеній ихъ модулями. И такъ какъ намъ извѣстенъ изъ предыдущаго высшій предѣлъ функціональнаго детерминанта

$$D=\frac{\partial x}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial y}{\partial y_1}-\frac{\partial x}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_1},$$

то классическая теорія разрѣшенія двухъ аналитическихъ уравненій съ двумя неизвѣстными позволяетъ также опредѣлить высшіе предѣлы суммы модулей членовъ разложенія x, y по степенямъ x_1+iy_1, x_1-iy_1 послѣ замѣны x_1+iy_1, x_1-iy_1 нѣкоторымъ опредѣленнымъ достаточно малымъ числомъ r_1.

Возвращаясь затѣмъ къ приведенному уравненію (75), мы заключаемъ отсюда, что, беря кругъ C_1' достаточно малаго радіуса R_1' концентрическій къ C_1, мы можемъ a priori установить высшій предѣлъ нормъ коэффиціентовъ a, b, F внутри контура $\Gamma_{0_1 R'_1 R'_1}$, (т. е. нормъ Пикара относительно R_1'). Допустимъ также, что радіусъ R_1' взятъ настолько малымъ, что задача Дирикле для уравненія (75) внутри круга C_1' непосредственно разрѣшается къ способу послѣдовательныхъ приближеній (Глава I).

Послѣ того, какъ радіусъ R_1' ($R_1'<\varepsilon_1$) такимъ образомъ опредѣленъ независимо отъ M, положимъ, разсматривая вторую часть M уравненія (75), какъ функцію x_1, y_1, что ея тригонометрическій модуль на отрѣзкѣ $0_1 R_1$ *нормализованный* внутри контура $\Gamma_{0_1 R'_1 r'_1}$ равенъ $[M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}$, причемъ какъ въ третьей главѣ мы беремъ для опредѣленности $r_1'=\frac{R_1'}{2}$.

Такъ какъ нормализованный тригонометрическій модуль во всякомъ случаѣ не менѣе обыкновеннаго тригонометрическаго модуля, то изъ неравенствъ (50) слѣдуетъ a fortiori

$$\{z\}_{0_1 R_1}<k\,[M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1},\quad \left\{\frac{\partial z}{\partial x_1}\right\}_{0_1 R_1}<k\,[M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1},\quad \left\{\frac{\partial z}{\partial y_1}\right\}_{0_1 R_1}<k\,[M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}.$$

---

[1]) Такъ какъ извѣстенъ высшій предѣлъ модулей $\left|\frac{\partial x}{\partial x_1}\right|$, $\left|\frac{\partial x}{\partial y_1}\right|$, $\left|\frac{\partial y}{\partial x_1}\right|$, $\left|\frac{\partial y}{\partial y_1}\right|$.

А затѣмъ изъ формулъ (16) и (16′) слѣдуетъ также, что

$$\left\{\frac{\varrho_1}{R_1}\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}\right\}_{0_1 R_1} < k'\left[M\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad \left\{\frac{\varrho_1}{R_1}\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial y_1}\right\}_{0_1 R_1} < k'\left[M\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1},$$
$$\left\{\frac{\varrho_1}{R_1}\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}\right\}_{0_1 R_1} < k'\left[M\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1},$$

гдѣ k' опредѣленный, независящій отъ M, множитель.

Но отсюда мы можемъ сдѣлать два вывода.

Во-первыхъ, для тригонометрическихъ модулей на отрѣзкѣ $R_1' R_1$ находимъ

$$\left\{\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}\right\}_{R'_1 R_1} < k''\left[M\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r_1}, \quad \left\{\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial y_1}\right\}_{R'_1 R_1} < k''\left[M\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r_1},$$
$$\left\{\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}\right\}_{R'_1 R_1} < k''\left[M\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r_1}, \tag{93}$$

гдѣ k'' новый опредѣленный постоянный множитель.

Во-вторыхъ, на окружности C_1'

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta_1^2} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \cos n\theta_1 + Q_n \cos n\theta_1,$$

причемъ

$$\sum_{n=1}^{\infty} |P_n| + |Q_n| < k''\left[M\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r_1};$$

поэтому, обозначая черезъ h гармоническую функцію, которая на окружности C_1' совпадаетъ съ z, мы находимъ, что

$$\left[h\right]_{R'_1 r'_1} < k_1\left[M\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad \left[\frac{\partial h}{\partial x_1}\right]_{R'_1 r'_1} < k_1\left[M\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1},$$
$$\left[\frac{\partial h}{\partial y_1}\right]_{R'_1 r'_1} < k_1\left[M\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}\right]_{R'_1 r'_1} < k_1\left[M\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1},$$
$$\left[\frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial y_1}\right]_{R'_1 r'_1} < k_1\left[M\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad \left[\frac{\partial^2 h}{\partial y_1^2}\right]_{R'_1 r'_1} < k_1\left[M\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1},$$

гдѣ k_1 опредѣленный множитель.

Полагая $z = h + v$, мы видимъ, что v обращается въ нуль на окружности C_1' и удовлетворяетъ уравненію

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} + a\frac{\partial v}{\partial x_1} + b\frac{\partial v}{\partial y_1} + Fv = M - a\frac{\partial h}{\partial x_1} - b\frac{\partial h}{\partial y_1} - Fh. \tag{92}$$

Примѣняя къ этому уравненію разсужденіе страницы 86 (или способъ послѣдовательныхъ приближеній), мы получимъ немедленно

$$[v]_{R'_1 r'_1} < k_2 [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad \left[\frac{\partial v}{\partial x_1}\right]_{R'_1 r'_1} < k_2 [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1},$$
$$\left[\frac{\partial v}{\partial y_1}\right]_{R'_1 r'_1} < k_2 [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1},$$

гдѣ k_2 новый постоянный множитель, такъ какъ по опредѣленію

$$[M]_{R'_1 r'_1} \leqq [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}.$$

Но теперь мы можемъ разсматривать уравненіе (92), какъ уравненіе Пуассона, норма второй части котораго внутри контура $\Gamma_{0 R'_1 r'_1}$ менѣе $k'_1\ [M]^{0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}$, гдѣ k'_1 новый опредѣленный коэффиціентъ. Поэтому изъ неравенствъ (36), выводимъ

$$\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right]_{R'_1 r'_1} < k'_2 [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial y_1}\right]_{R'_1 r'_1} < k'_2 [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1},$$
$$\left[\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}\right]_{R'_1 r'_1} < k'_2 [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}.$$

Слѣдовательно,

$$[z]_{R'_1 r'_1} < (k_1 + k_2) [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad \left[\frac{\partial z}{\partial x_1}\right]_{R'_1 r'_1} < (k_1 + k_2) [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1},$$
$$\left[\frac{\partial z}{\partial y_1}\right]_{R'_1 r'_1} < (k_1 + k_2) [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}\right]_{R'_1 r'_1} < (k_1 + k'_2) [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad (93')$$
$$\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial y_1}\right]_{R'_1 r'_1} < (k_1 + k'_2) [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad \left[\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}\right]_{R'_1 r'_1} < (k_1 + k'_2) [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}.$$

И наконецъ изъ неравенствъ (93) вмѣстѣ съ неравенствами (93′), выводимъ неравенства

$$[z]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} < \lambda_1 [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad \left[\frac{\partial z}{\partial x_1}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} < \lambda_1 [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1},$$
$$\left[\frac{\partial z}{\partial y_1}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} < \lambda_1 [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_2 r'_1} < \lambda_1 [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \qquad (94')$$
$$\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial y_1}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} < \lambda_1 [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad \left[\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} < \lambda_1 [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1},$$

равнозначныя важнымъ неравенствамъ, лежащимъ въ основѣ нашей методы интегрированія, которыя мы хотѣли вывести, а именно:

$$\begin{gathered}
[z]_{R'_1 r'_1}^{(0_1 R_1)} < \lambda [M]_{R'_1 r'_1}^{(0_1 R_1)}, \quad \left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_{R'_1 r'_1}^{(0_1 R_1)} < \lambda [M]_{R'_1 r'_1}^{(0_1 R_1)}; \\
\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_{R'_1 r'_1}^{(0_1 R_1)} < \lambda [M]_{R'_1 r'_1}^{(0_1 R_1)}, \quad \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]_{R'_1 r'_1}^{(0_1 R_1)} < \lambda [M]_{R'_1 r'_1}^{(0_1 R_1)}, \\
\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right]_{R'_1 r'_1}^{(0_1 R_1)} < \lambda [M]_{R'_1 r'_1}^{(0_1 R_1)}, \quad \left[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]_{R'_1 r'_1}^{(0_1 R_1)} < \lambda [M]_{R'_1 r'_1}^{(0_1 R_1)},
\end{gathered} \tag{94}$$

гдѣ λ, какъ и λ_1 опредѣленныя постоянныя величины.

Цѣпь умозаключеній, приведшая насъ къ неравенствамъ (94) существенно опирается на предположеніе, что задача Дирикле возможна [1]) для уравненія (78), соотвѣтствующаго разсматриваемому уравненію (74), ибо лишь при этомъ условіи разрѣшается поставленная въ началѣ главы задача приведенія уравненія (74) къ виду (75). Это замѣчаніе заставляетъ насъ ввести параметръ α въ уравненіе (74) и примѣнить разсужденіе подобное тому, какое было примѣнено въ четвертой главѣ.

Очевидно, что линейному уравненію эллиптическаго типа можетъ быть также придана форма

$$(1+P^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2PQ\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y^2} + (1+Q^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial z}{\partial x} + 2E\frac{\partial z}{\partial y} + Fz = M,$$

или, вводя параметръ α, форма

$$\begin{gathered}
(1+\alpha P^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\alpha PQ\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + (1+\alpha Q^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial z}{\partial x} + 2E\frac{\partial z}{\partial y} + \\
+ Fz = M. \qquad (F \leqq 0)
\end{gathered} \tag{95}$$

При $\alpha = 0$, уравненіе (95)—приведеннаго вида, который былъ изученъ въ IV главѣ. Къ этому уравненію непосредственно примѣняются неравенства (50) и вытекающія изъ нихъ неравенства (94).

Положимъ вообще, что для опредѣленнаго $\alpha_0 \geqq 0$, уравненіе

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(1+\alpha_0 P^2)\frac{\partial v}{\partial x} + \alpha_0 PQ\frac{\partial v}{\partial y}}{\sqrt{1+\alpha(P^2+Q^2)}}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\alpha_0 PQ\frac{\partial v}{\partial x} + (1+\alpha_0 Q^2)\frac{\partial v}{\partial y}}{\sqrt{1+\alpha(P^2+Q^2)}}\right] = 0$$

допускаетъ рѣшеніе z_0 задачи Дирикле [2]), если данныя на окружности C значенія рѣшенія выражаются функціей дуги $\psi(\theta)$, имѣющей конечныя производныя первыхъ шести порядковъ. Въ такомъ случаѣ изъ предыдущаго (Глава IV) слѣдуетъ, что при *данномъ значеніи* α_0 уравненіе (95) допускаетъ рѣшеніе, каковы бы ни были функціи D, E, F, M, имѣющія

---

[1]) При предположеніи, что значенія рѣшенія на окружности C представляются функціей дуги, имѣющей конечныя производныя первыхъ шести порядковъ.

[2]) Относительно P и Q предположенія остаются тѣ же, что выше относительно A, B, C.

конечныя производныя первыхъ двухъ порядковъ, при условіи, что функція $\varphi(\theta)$ на окружности C только непрерывна. (Однако для примѣненія неравенствъ (94), необходимаго для перехода къ другимъ значеніямъ параметра α, нужно также, чтобы D, E, F, M были *аналитичны* хотя бы въ нѣкоторой маленькой области внутри круга C).

Покажемъ, что задача Дирикле также возможна при тѣхъ же значеніяхъ на окружности, представленныхъ функціей $\psi(\theta)$, для уравненія (95), если $|\alpha - \alpha_0| < \delta$, обозначая черезъ δ достаточно малое число.

Для этого, положимъ a priori

$$z = z_0 + (\alpha - \alpha_0) z_1 + \frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{2} z_2 + \ldots \frac{(\alpha - \alpha_0)^n}{n!} z_n + \ldots \tag{96}$$

Указанное выраженіе *формально* удовлетворяетъ уравненію, если z_0, z_1 и т. д. суть соотвѣтственно рѣшенія уравненій

$$(1 + \alpha_0 P^2)\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + 2\alpha_0 PQ \frac{\partial^2 z_0}{\partial x \partial y} + (1 + \alpha_0 Q^2)\frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial z_0}{\partial x} + 2E\frac{\partial z_0}{\partial y} + Fz_0 = M,$$

$$(1 + \alpha_0 P^2)\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + 2\alpha_0 PQ \frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} + (1 + \alpha_0 Q^2)\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial z_1}{\partial x} + 2E\frac{\partial z_1}{\partial y} + Fz_1 =$$
$$= -\left[P^2 \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + 2PQ\frac{\partial^2 z_0}{\partial x \partial y} + Q^2 \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2}\right],$$

. . . .

. . . .

$$(1 + \alpha_0 P^2)\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2} + 2\alpha_0 PQ \frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y} + (1 + \alpha_0 Q^2)\frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial z_n}{\partial x} + 2E\frac{\partial z_n}{\partial y} + Fz_n =$$
$$= -n\left[P^2 \frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial x^2} + 2PQ\frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial x \partial y} + Q^2 \frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial y^2}\right]$$

. . . .

Въ силу только что сказаннаго всѣ эти уравненія допускаютъ рѣшенія при какихъ угодно данныхъ значеніяхъ на окружности C.

Въ частности, если мы положимъ, что $z_0 = \psi(\theta)$, а $z_1 = z_2 = z_n = 0$ на окружности C, то въ случаѣ сходимости ряда (96), онъ будетъ представлять искомое рѣшеніе уравненія (95).

Но изъ неравенствъ (94) вытекаетъ вообще

$$\left[\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2}\right]_{R'_1 r'_1}^{(0_1 R_1)} < \lambda n \left[P^2 \frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial x^2} + 2PQ\frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial x \partial y} + Q^2 \frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial y^2}\right]_{R'_1 r'_1}^{(0_1 R_1)},$$

$$\left[\frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y}\right]_{R'_1 r'_1}^{(0_1 R_1)} < \lambda n \left[P^2 \frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial x^2} + 2PQ\frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial x \partial y} + Q^2 \frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial y^2}\right]_{R'_1 r'_1}^{0_1 R_1)},$$

$$\left[\frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2}\right]_{R'_1 r'_1}^{(0_1 R_1)} < \lambda n \left[P^2 \frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial x^2} + 2PQ\frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial x \partial y} + Q^2 \frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial y^2}\right]_{R'_1 r'_1}^{(0_1 R_1)}.$$

Откуда заключаемъ безъ труда, что радіусъ сходимости ряда (96) не менѣе, чѣмъ $\frac{1}{4\lambda\omega^2}$, гдѣ ω опредѣленное число, удовлетворяющее неравенствамъ

$$\omega \geqq [P]_{R'_1 r'_1}^{(0_1 R_1)}, \quad \omega \geqq [Q]_{R'_1 r'_1}^{(0_1 R_1)}.$$

При всякомъ α, заключенномъ между нулемъ и единицей, можетъ быть a priori указанъ низшій предѣлъ δ величины $\frac{1}{4\lambda\omega^2}$. Такимъ образомъ, если задача Дирикле возможна при $\alpha = \alpha_0$, она также возможна, при $\alpha = \alpha_0 + \delta$, а затѣмъ при $\alpha = \alpha_0 + 2\delta$ и т. д.

Слѣдовательно, въ частности задача Дирикле возможна при $\alpha = 1$, т. е. всегда возможна. *Искомое рѣшеніе получается, если преобразовать строку Тэйлора (96), (которую легче всего составить при $\alpha = 0$) въ строку Миттагъ-Лефлера и подставить въ послѣдней вмѣсто α единицу.* Какъ мы уже видѣли раньше, окружность можетъ быть замѣнена аналитическимъ контуромъ.

Въ концѣ четвертой главы мы также показали, что задача Дирикле для каноническаго уравненія возможна, если область внутри которой требуется вычислить рѣшеніе, кольцеобразна, причемъ ограничивающіе ее оба контура, благодаря конформному преобразованію могутъ не быть окружностями, а вообще аналитическими кривыми. Если мы поставимъ себѣ ту же задачу въ случаѣ неприведеннаго уравненія и совершимъ надъ нашимъ уравненіемъ указанное выше преобразованіе, которое приводитъ его къ каноническому виду, то окружность C превратится въ окружность C_1, внутренній же аналитическій контуръ превратится также въ аналитическій контуръ. Слѣдовательно, *задача Дирикле для кольцеобразной области возможна и въ общемъ случаѣ.*

§ 28. Въ заключеніе разсмотримъ еще предположенія неаналитическихъ коэффиціентовъ и неаналитическихъ контуровъ. При этомъ, чтобъ не затягивать главы, мы ограничимся найболѣе простыми случаями.

Положимъ, что A, B, C имѣютъ конечныя производныя первыхъ четырехъ порядковъ, D, E, F, M—первыхъ двухъ порядковъ. Очевидно, опять возможность задачи Дирикле *при какихъ угодно значеніяхъ рѣшенія* на окружности будетъ зависѣть исключительно отъ ея возможности для уравненія (78), если значенія рѣшенія имѣютъ производныя *шести* порядковъ на окружности.

По предположенію, можемъ написать

$$A = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n - A_{n-1}), \quad B = \sum_{n=1}^{\infty}(B_n - B_{n-1}), \quad C = \sum_{n=1}^{\infty}(C_n - C_{n-1}),$$

гдѣ A_n, B_n, C_n аналитическія функціи, причемъ ряды A, B, C равномѣрно сходятся, какъ и ихъ производныя первыхъ трехъ порядковъ;

кромѣ того, намъ извѣстны высшіе предѣлы модулей четвертыхъ производныхъ A_n, B_n, C_n. Разсматривая въ такомъ случаѣ приближенное уравненіе

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{A_n \frac{\partial z_n}{\partial x} + B_n \frac{\partial z_n}{\partial y}}{\sqrt{A_n C_n - B_n^2}}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{B_n \frac{\partial z_n}{\partial x} + C_n \frac{\partial z_n}{\partial y}}{\sqrt{A_n C_n - B_n^2}}\right] = 0\,,$$

мы можемъ a priori установить высшій предѣлъ z_n и его производныхъ первыхъ *трехъ* порядковъ.

Но съ другой стороны разность $v_n = z_n - z_{n-1}$ удовлетворяетъ уравненію

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{A_n \frac{\partial v_n}{\partial x} + B_n \frac{\partial v_n}{\partial y}}{\sqrt{A_n C_n - B_n^2}}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{B_n \frac{\partial v_n}{\partial x} + C_n \frac{\partial v_n}{\partial y}}{\sqrt{A_n C_n - B_n^2}}\right] = \delta_n\,,$$

гдѣ δ_n съ возрастаніемъ n стремится къ нулю.

Такъ какъ v_n равно нулю на окружности, то изъ разсужденія страницы 82 заключаемъ, что v_n съ возрастаніемъ n стремится къ нулю.

Поэтому, рядъ $z = z_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, также какъ и его производныя первыхъ двухъ порядковъ [1]) и удовлетворяетъ уравненію (78).

Приблизительно также разрѣшается задача Дирикле въ случаѣ неаналитическаго контура. Допустимъ для простоты, что *контуръ C выпуклый и въ каждой точкѣ имѣетъ конечную кривизну*, такъ что онъ можетъ быть окруженъ рядомъ выпуклыхъ аналитическихъ контуровъ C_n съ конечной кривизной, безконечно къ нему приближающихся.

Ограничимся кромѣ того уравненіемъ (съ указанными только что условіями относительно коэффиціентовъ)

---

[1]) Въ самомъ дѣлѣ, для всякихъ сколь угодно малыхъ значеній h и ε, можно найти достаточно большое n, чтобъ при $p \geqq n$

$$(0 < \theta_p < 1) \qquad \left|\frac{z(x+h,\, y) - z(x,\, y)}{h} - \frac{\partial z_p}{\partial x}(x + \theta_p h,\, y)\right| < \varepsilon.$$

Такъ что

$$\left|\frac{\partial z_n}{\partial x}(x + \theta_n h,\, y) - \frac{\partial z_p}{\partial x}(x + \theta_p h,\, y)\right| < 2\varepsilon,$$

откуда

$$\left|\frac{\partial z_n}{\partial x}(x,\, y) - \frac{\partial z_p}{\partial x}(x,\, y)\right| < 2Mh + 2\varepsilon,$$

если M высшій предѣлъ модулей вторыхъ производныхъ z_n.

Слѣдовательно, рядъ $\frac{\partial z_0}{\partial x} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\partial z_n}{\partial x} - \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}\right) = \frac{\partial z}{\partial x}$ равномѣрно сходится. Точно также обнаруживается сходимость рядовъ вторыхъ производныхъ. (Принципъ Гильберта, см. работу Lebesgu'a „Sur le principe de Dirichlet", Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo, 1907).

$$Ar + 2Bs + Ct = 0 \tag{97}$$

и положимъ, что данная на контурѣ функція дуги $\varphi(s)$ имѣетъ *вторыя* производныя. Легко видѣть, что и въ данномъ случаѣ задача Дирикле возможна.

Въ самомъ дѣлѣ, для той же совокупности значеній $\varphi(s)$ на каждомъ изъ приближенныхъ контуровъ C_n задача возможна. При этомъ вслѣдствіе *отрицательной кривизны поверхности*, удовлетворяющей уравненію (97), a priori можетъ быть указанъ высшій предѣлъ *наклона* касательной плоскости во всякой точкѣ поверхности. Откуда слѣдуетъ, что при достаточно большихъ n разность $z_n - z_{n-1}$ между значеніями приближенныхъ рѣшеній на контурѣ C становится сколь угодно малой. Примѣняя разсужденіе страницы 89-й и слѣдующихъ, замѣчаемъ, что предѣлъ z функцій z_n есть искомое рѣшеніе.

Этихъ нѣсколькихъ замѣчаній, мнѣ кажется, достаточно, чтобъ видѣть, какъ разрѣшается задача Дирикле при неаналитическихъ данныхъ.

Однако, если мы всмотримся въ предшествующую цѣпь умозаключеній, мы увидимъ, что въ то время, какъ возможность задачи Дирикле внутри круга опирается *исключительно* на возможность этой задачи для уравненій (Лапласа и Пуассона)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = F(x,\ y)$$

внутри *круга* же; переходъ къ другимъ контурамъ (аналитическимъ или нѣтъ) требуетъ допущенія теоремы конформнаго преобразованія или, что тоже самое, возможности для уравненія Лапласа задачи Дирикле внутри какихъ бы то ни было *аналитическихъ* контуровъ.

Для единства методы интересно показать, что интегрированіе уравненія Лапласа внутри *аналитическаго* контура всегда можетъ быть сведено или къ непосредственному интегрированію по нашей методѣ опредѣленнаго уравненія эллиптическаго типа, при данныхъ на *окружности*, или же къ употребленію той же методы только въ соединеніи съ альтернирующимъ способомъ Шварца.

Ограничимся для простоты случаемъ, когда прямыя параллельныя нѣкоторому направленію, скажемъ, $y = h$, гдѣ h постоянная величина, пересѣкаютъ контуръ S, внутри котораго интегрируется уравненіе Лапласа, не болѣе двухъ разъ (альтернирующій способъ позволилъ бы свести къ контуру S задачу Дирикле внутри какого угодно контура).

Пусть весь контуръ заключенъ между двумя касательными $y = 0$ и $y = 2R$. Тогда уравненіе его получитъ форму [1])

---

[1]) Еслибъ касательныя $y = 0$ и $y = 2R$ имѣли бы касаніе высшаго порядка съ контуромъ, то достаточно было бы немного повернуть оси координатъ, чтобъ прійти къ разсматриваемому здѣсь случаю обыкновеннаго касанія.

$$x = \varphi(y) \pm \psi(y) \sqrt{y(2R - y)},$$

гдѣ φ и ψ правильныя аналитическія функціи при $0 \leqq y \leqq 2R$ (кромѣ того $\psi \gtrless 0$).

Полагая въ такомъ случаѣ

$$x_1 = \frac{x - \varphi(y)}{\psi(y)}, \quad y_1 = y,$$

мы видимъ, что каждой точкѣ x, y соотвѣтствуетъ x_1, y_1 и обратно; а контуру S соотвѣтствуетъ окружность C_1, которой уравненіе

$$x_1^2 + y_1^2 - 2Ry_1 = 0.$$

При этомъ z удовлетворяетъ уравненію

$$[1 + (x_1\psi'(y_1) + \varphi'(y_1)^2] \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} - 2[x_1\psi'(y_1) + \varphi'(y_1)]\psi(y_1)\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial y_1} + \psi^2(y_1)\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2} +$$
$$+ [2\varphi'(y_1)\psi'(y_1) - \psi^2(y_1)\varphi''(y_1) + 2x_1\psi'^2(y_1) - x_1\psi(y_1)\psi''(y_1)]\frac{\partial z}{\partial x_1} = 0,$$

дискриминантъ котораго $AC - B^2 = \psi^2(y_1) > 0$.

Задача Дирикле внутри круга C_1 для этого уравненія возможна, а потому возможна и внутри контура S для уравненія Лапласа.

На этомъ мы покончимъ съ этими общими соображеніями, которыя насъ нѣсколько отвлекли въ сторону.

Глава VII.

Не линейныя уравненія эллиптическаго типа общаго вида.

§ 29. Въ настоящей главѣ мы изложимъ нашу методу интегрированія въ самомъ общемъ ея видѣ. И прежде всего намъ предстоитъ доказать слѣдующую основную лемму.

Лемма. *Если z_0 есть рѣшеніе при $\alpha = \alpha_0$, аналитическаго уравненія эллиптическаго типа*

$$F(r, s, t, p, q, z, x, y, \alpha) = 0, \tag{1}$$

причемъ $F'_r F'_z \leqq 0$; если извѣстно кромѣ того, что z_0 имѣетъ конечныя производныя первыхъ семи порядковъ какъ внутри круга C, такъ и на самой окружности, то можно установить положительное число ε, достаточно малое, чтобъ при всѣхъ значеніяхъ (комплексныхъ и вещественныхъ) параметра α, удовлетворяющихъ неравенству $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$, уравненіе (1) допускало рѣшеніе z, совпадающее на окружности C съ функціей z_0.

Доказательство по существу совершенно тождественно доказательству данному въ частномъ случаѣ пятой главы.

Положимъ a priori

$$z = z_0 + (\alpha - \alpha_0) z_1 + \ldots + \frac{(\alpha - \alpha_0)^n}{n!} z_n + \ldots \tag{96'}$$

Мы увидимъ тотчасъ же, что $z_1, z_2, \ldots z_n$ обращаются въ нуль на окружности C и соотвѣтственно удовлетворяютъ уравненіямъ

$$F'_{r_0} \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + F'_{s_0} \frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} + F'_{t_0} \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} + F'_{p_0} \frac{\partial z_1}{\partial x} + F'_{q_0} \frac{\partial z_1}{\partial y} + F'_{z_0} z_1 = A_1,$$

$$F'_{r_0} \frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2} + F'_{s_0} \frac{\partial^2 z_2}{\partial x \partial y} + F'_{t_0} \frac{\partial^2 z_2}{\partial y^2} + F'_{p_0} \frac{\partial z_2}{\partial x} + F'_{q_0} \frac{\partial z_2}{\partial y} + F'_{z_0} z_2 = A_2,$$

. . . .

. . . .

$$F'_{r_0} \frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2} + F'_{s_0} \frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y} + F'_{t_0} \frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2} + F'_{p_0} \frac{\partial z_n}{\partial x} + F'_{q_0} \frac{\partial z_n}{\partial y} + F'_{z_0} z_n = A_n,$$

которыя отличаются между собой лишь вторыми частями, причемъ A_n вообще зависитъ отъ всѣхъ z_i, для которыхъ $i < n$, и ихъ производныхъ первыхъ двухъ порядковъ.

Къ этимъ уравненіямъ [1]), могутъ быть примѣнены неравенства (94) съ однимъ и тѣмъ же вполнѣ опредѣленнымъ множителемъ λ.

Слѣдовательно, получимъ вообще:

$$\begin{aligned} &[z_n]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} < \lambda [A_n]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad \left[\frac{\partial z_n}{\partial x}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} < \lambda [A_n]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \\ &\left[\frac{\partial z_n}{\partial y}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} < \lambda [A_n]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad \left[\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} < \lambda [A_n]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \\ &\left[\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} < \lambda [A_n]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad \left[\frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} < \lambda [A_n]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \end{aligned} \tag{98}$$

гдѣ нормализованные модули разсматриваются по отношенію къ нѣкоторымъ вполнѣ опредѣленнымъ новымъ перемѣннымъ (x_1, y_1), которыя должны были бы быть вычислены, еслибъ мы хотѣли привести наши уравненія къ приведенному виду; но фактически въ этомъ нѣтъ надобности.

Неравенствами (98) мы воспользуемся, какъ и раньше, введя вспомогательное уравненіе

$$v = \lambda \varphi(v, \alpha), \tag{99}$$

гдѣ

$$\begin{aligned} \varphi(v, \alpha) = [F(r_0 + v, s_0 + v, t_0 + v, p_0 + v, q_0 + v, x, y, \alpha)]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} - \\ - [F(r_0, s_0, t_0, p_0, q_0, x, y, \alpha_0)]^{0_1 R_1}_{R'_1 r'_1} - \\ - v\{[F'_{r_0}]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} + [F'_{s_0}]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} + [F'_{t_0}]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} + [F'_{p_0}]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} + [F'_{q_0}]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} + [F'_{z_0}]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}\}, \end{aligned}$$

обозначая черезъ p_0, q_0, r_0, s_0, t_0 послѣдовательныя производныя z_0; такъ что

$$\varphi(0, \alpha_0) = \varphi'_v(0, \alpha_0) = 0.$$

Рѣшеніе уравненія (99) представляется въ видѣ сходящагося ряда по степенямъ $(\alpha - \alpha_0)$

$$v = (\alpha - \alpha_0) v_1 + \ldots + \frac{(\alpha - \alpha_0)^n}{n!} v_n + \ldots$$

Легко показать, что

$$\begin{aligned} v_n > [z_n]^{0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad v_n > \left[\frac{\partial z_n}{\partial x}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad v_n > \left[\frac{\partial z_n}{\partial y}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad v_n > \left[\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \\ v_n > \left[\frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad v_n > \left[\frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}. \end{aligned}$$

Въ самомъ дѣлѣ, изъ построенія функціи $\varphi(v, \alpha)$ видно, что

$$[A_1]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} = \varphi'_\alpha(0, \alpha) = \frac{v_1}{\lambda}.$$

---

[1]) Указанное на страницѣ 130-й условіе для примѣненія этихъ неравенствъ соблюдено благодаря основной теоремѣ, доказанной въ III главѣ.

Слѣдовательно, изъ неравенствъ (98) вытекаетъ, что

$$[z_i]_{R'_1 r'_1}^{(0_1 R_1)} < v_i\,, \quad \left[\frac{\partial z_i}{\partial x}\right]_{R'_1 r'_1}^{(0_1 R_1)} < v_i\,, \quad \left[\frac{\partial z_i}{\partial y}\right]_{R'_1 r'_1}^{(0_1 R_1)} < v_i\,, \quad \left[\frac{\partial^2 z_i}{\partial x^2}\right]_{R'_1 r'_1}^{(0_1 R_1)} < v_i\,,$$

$$\left[\frac{\partial^2 z_i}{\partial x \partial y}\right]_{R'_1 r'_1}^{(0_1 R_1)} < v_i\,, \quad \left[\frac{\partial^2 z_i}{\partial y^2}\right]_{R'_1 r'_1}^{(0_1 R_1)} < v_i\,, \tag{100}$$

при $i=1$; допустимъ, что вообще эти неравенства имѣютъ мѣсто для всякаго $i<n$, остается показать, что въ такомъ случаѣ они правильны и для $i=n$. Но это слѣдуетъ изъ того, что неравенства (98) и (100) для всякаго $i<n$ влекутъ за собой

$$[A_n]_{R'_1 r'_1}^{(0_1 R_1)} < \frac{d^n \varphi(0\,,\ \alpha_0)}{d\alpha^n}\,,$$

гдѣ вторая часть неравенства представляетъ *полную* $n^{ую}$ производную φ по α при $\alpha=\alpha_0$, между тѣмъ какъ v опредѣлено уравненіемъ (99); а потому неравенства (100) должны имѣть мѣсто и при $i=n$.

Такимъ образомъ сходимость ряда (96′) и его производныхъ первыхъ двухъ порядковъ обнаружена, и вмѣстѣ съ тѣмъ доказана и наша лемма.

Доказанная лемма приводитъ насъ къ замѣчательному выводу, что мы можемъ утверждать возможность задачи Дирикле для уравненія (1) во всѣхъ случаяхъ, когда предполагая a priori существованіе рѣшенія, мы умѣемъ при помощи данныхъ на контурѣ установить высшіе предѣлы его частныхъ производныхъ первыхъ семи порядковъ. Въ концѣ главы мы еще вернемся къ общему случаю и увидимъ, что достаточно умѣть ограничить производныя первыхъ *двухъ* порядковъ.

§ 30. Болѣе подробно мы остановимся на сравнительно частномъ, но наиболѣе интересномъ случаѣ уравненія (1), именно, на уравненіи

$$Ar + 2Bs + Ct = D \tag{3}$$

гдѣ A, B, C, D аналитическія функціи p, q, z, x, y, при условіи $AC - B^2 > 0$.

Мы покажемъ, что *принципы изложенные въ предыдущихъ главахъ даютъ возможность установить высшіе предѣлы послѣдовательныхъ производныхъ* z, *всѣхъ порядковъ, если a priori извѣстенъ высшій предѣлъ* $|z|$, $|p|$, $|q|$, *который назовемъ* M.

Какъ въ пятой главѣ разсмотримъ выраженіе

$$w = \alpha^2 e^{2\left(\frac{p+M}{\alpha}\right)} e^{2e^{\frac{p+M}{\alpha}}} [Ar^2 + 2Brs + Cs^2]\,,$$

гдѣ α нѣкоторое число, которое будетъ опредѣлено послѣ; и установимъ высшій предѣлъ w въ точкѣ, гдѣ w достигаетъ максимума.

Прежде всего составимъ уравненіе, которому удовлетворяетъ p. Дифференцируя уравненіе (3) и замѣчая, что

$$r = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad s = \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad t = \frac{D - A\frac{\partial p}{\partial x} - 2B\frac{\partial p}{\partial y}}{C},$$

получимъ уравненіе вида

$$A\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = a\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + 2b\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 + \\ + 2d\frac{\partial p}{\partial x} + 2e\frac{\partial p}{\partial y} + f, \tag{101}$$

гдѣ a, b, c, d, e, f, какъ и A, B, C извѣстныя аналитическія функціи p, q, z, x, y. Въ частности, для уравненія минимальныхъ поверхностей

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0,$$

гдѣ

$$A = 1 + q^2, \quad B = -pq, \quad C = 1 + p^2, \quad D = 0,$$

уравненіе (101) принимаетъ весьма простую форму

$$(1 + q^2)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - 2pq\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + (1 + p^2)\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 2p\left[(1 + q^2)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 - \right. \\ \left. - 2pq\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + (1 + p^2)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2\right];$$

здѣсь

$$a = 2p(1 + q^2), \quad b = -2p^2q, \quad c = 2p(1 + p^2), \quad d = e = f = 0.$$

Положимъ

$$p = -M + \alpha \log\log u,$$

гдѣ α нѣкоторое малое число, которое будетъ опредѣлено дальше. Какъ на страницѣ 107 видимъ, что u удовлетворяетъ уравненію

$$Ar_1 + 2Bs_1 + Ct_1 = \frac{1}{u\log u}\{[A(1 + \log u) + \alpha a]p_1^2 + 2[B(1 + \log u) + \alpha b]p_1 q_1 + \\ + [C(1 + \log u) + \alpha c]q_1^2\} + 2dp_1 + 2eq_1 + f\frac{u\log u}{\alpha} = Q_1, \tag{102}$$

вводя сокращенныя обозначенія $p_1 = \frac{\partial u}{\partial x}$, $q_1 = \frac{\partial u}{\partial y}$, $r_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $s_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $t_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Легко видѣть, что

$$w = Ap_1^2 + 2Bp_1 q_1 + Cq_1^2.$$

Поэтому въ точкѣ, гдѣ w максимумъ, r_1, s_1, t_1 опредѣляются формулами:

$$r_1 = \frac{Q_1(Bp_1 + Cq_1)^2 + CY(Bp_1 + Cq_1) + X[(2B^2 - AC)p_1 + BCq_1]}{(AC - B^2)w},$$

$$s_1 = \frac{-Q_1(Bp_1 + Cq_1)(Ap_1 + Bq_1) - CY(Ap_1 + Bq_1) - AX(Bp_1 + Cq_1)}{(AC - B^2)w},$$

$$t_1 = \frac{Q_1(Ap_1 + Bq_1)^2 + Y[ABp_1 + (2B^2 - AC)q_1] + AX(Ap_1 + Bq_1)}{(AC - B^2)w},$$

причемъ

$$X = \frac{1}{2}[(A'_x + A'_z p)p_1^2 + 2(B'_x + B'_z p)p_1 q_1 + (C'_x + C'_z q)q_1^2] +$$
$$+ \frac{\alpha}{2u\log u}[A'_p p_1^3 + (A'_q + 2B'_p)p_1^2 q_1 + (2B'_q + C'_p)p_1 q_1^2 + C'_q q_1^3],$$

$$Y = \frac{1}{2}[(A'_y + A'_z q + \frac{D}{C}A'_q)p_1^2 + 2(B'_y + B'_z q + \frac{D}{C}B'_q)p_1 q_1 +$$
$$+ (C'_y + C'_z q + \frac{D}{C}C'_q)q_1^2] + \frac{\alpha}{2u\log u}[-\frac{A}{C}A'_q p_1^3 + (A'_p - \frac{2B}{C}A'_q - \frac{2A}{C}B'_q)p_1^2 q_1 +$$
$$+ (2B'_p - \frac{4B}{C}B'_q - \frac{A}{C}C'_q)p_1 q_1^2 + (C'_p - \frac{2B}{C}C'_q)q_1^3].$$

Въ выраженіяхъ X, Y существенно только замѣтить, что они состоятъ изъ двухъ частей: многочлена 2-й степени относительно p_1, q_1 и многочлена 3-й степени отъ тѣхъ же перемѣнныхъ, причемъ коэффиціенты послѣдняго стремятся къ нулю вмѣстѣ съ α.

Поэтому можемъ также написать

$$(AC - B^2)wr_1 = w(Bp_1 + Cq_1)^2 \frac{1 + \log u}{u\log u} + \frac{\alpha g_1}{u\log u} + h_1 + \frac{l_1 u\log u}{\alpha},$$

$$(AC - B^2)ws_1 = -w(Bp_1 + Cq_1)(Ap_1 + Bq_1)\frac{1 + \log u}{u\log u} + \frac{\alpha g_2}{u\log u} + h_2 + \frac{l_2 u\log u}{\alpha},$$

$$(AC - B^2)wt_1 = w(Ap_1 + Bq_1)^2 \frac{1 + \log u}{u\log u} + \frac{\alpha g_3}{u\log u} + h_3 + \frac{l_3 u\log u}{\alpha},$$

гдѣ g_1, g_2, g_3 многочлены не выше четвертой степени относительно p_1, q_1 съ данными коэффиціентами; h_1, h_2, h_3 — не выше третьей степени; l_1, l_2, l_3 многочлены—не выше второй степени относительно p_1, q_1, и всѣ съ данными коэффиціентами (зависящими лишь отъ x, y, z, p, q).

Вычисляя затѣмъ выраженіе

$$K = \frac{1}{2}\left[A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right],$$

найдемъ

$$K=(Ap_1+Bq_1)\left(A\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 p_1}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2}\right)+$$

$$+(Bp_1+Cq_1)\left(A\frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 q_1}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 q_1}{\partial y^2}\right)+A(Ar_1^2+2Br_1s_1+Cs_1^2)+$$

$$+2B[Ar_1s_1+B(r_1t_1+s_1^2)+Cs_1t_1]+C(As_1^2+2Bs_1t_1+Ct_1^2)+$$

$$+H_1+H_2+\frac{\alpha}{u\log u}H_3+\alpha\frac{1+\log u}{(u\log u)^2}H_4+\frac{\alpha^2}{(u\log u)^2}H_5,$$

гдѣ H_1 многочленъ первой степени относительно перемѣнныхъ p_1r_1, p_1s_1, p_1t_1, q_1r_1, q_1s_1, q_1t_1; H_2—многочленъ второй степени относительно p_1, q_1; H_3—многочленъ первой степени относительно $p_1^2r_1$, $p_1^2s_1$, $p_1^2t_1$, $p_1q_1r_1$, $p_1q_1s_1$, $p_1q_1t_1$, $q_1^2r_1$, $q_1^2s_1$, $q_1^2t_1$; и наконецъ H_4 и H_5—многочлены четвертой степени относительно p_1 и q_1; причемъ коэффиціенты всѣхъ этихъ многочленовъ извѣстныя опредѣленныя аналитическія функціи перемѣнныхъ p, q, z, x, y.

Дифференцируя уравненіе (102) по x_1, мы находимъ, что

$$A\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 p_1}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2}=-\frac{1+\log u+(\log u)^2}{(u\log u)^2}p_1w+\frac{\alpha(1+\log u)}{(u\log u)^2}G_1+$$

$$+\frac{\alpha}{u\log u}G_2+\frac{\alpha^2}{(u\log u)^2}G_3+G_4+\frac{u\log u}{\alpha}G_5,$$

гдѣ G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 многочлены съ извѣстными коэффиціентами: G_1 и G_3 многочлены третьей степени, G_5—первой степени относительно p_1 и q_1; G_2 многочленъ первой степени относительно p_1r_1, p_1s_1, p_1t_1, q_1r_1, q_1s_1, q_1t_1, p_1^2, p_1q_1, q_1^2; и наконецъ, G_4 многочленъ первой степени относительно r_1, s_1, t_1, p_1, q_1. Точно также находимъ, что

$$A\frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 q_1}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 q_1}{\partial y^2}=-\frac{1+\log u+(\log u)^2}{(u\log u)^2}q_1w+\frac{\alpha(1+\log u)}{(u\log u)^2}G_{(1)}+$$

$$+\frac{\alpha}{u\log u}G_{(2)}+\frac{\alpha}{(u\log u)^2}G_{(3)}+G_{(4)}+\frac{u\log u}{\alpha}G_{(5)},$$

гдѣ $G_{(1)}$, $G_{(2)}$, $G_{(3)}$, $G_{(4)}$, $G_{(5)}$ многочлены, обладающіе соотвѣтственно тѣми же свойствами, что G_1, G_2, G_3, G_4, G_5.

Слѣдовательно, совершая указанныя алгебраическія дѣйствія, и замѣчая, что $AC-B^2$ имѣетъ извѣстный низшій предѣлъ, отличный отъ нуля, получимъ

$$w^2K=-\frac{1+\log u+(\log u)^2}{(u\log u)^2}w^4+\left(\frac{1+\log u}{u\log u}\right)^2w^4+\alpha\frac{1+\log u}{(u\log u)^2}P_6w+$$

$$+\frac{\alpha^2}{(u\log u)^2}P_8+\frac{1+\log u}{u\log u}P_7+\frac{\alpha}{u\log u}P_7'+\frac{u\log u}{\alpha}P_6'+P_6''+\left(\frac{u\log u}{\alpha}\right)^2P_4,$$

обозначая черезъ P_8 многочленъ 8-й стопени, P_7 и P'_7 многочлены 7-й степени, P_6, P'_6, P''_6 многочлены 6-й степени, P_4 многочленъ 4-й степени относительно p_1, q_1 съ извѣстными коэффиціентами.

Такимъ образомъ, совокупность членовъ 8-й степени дана выраженіемъ

$$T_8 = \frac{w^4}{u^2 \log u} + \alpha \frac{1+\log u}{(u \log u)^2} P_6 w + \frac{\alpha^2}{u^2 \log u^2} P_8 .$$

Но такъ какъ во всякомъ случаѣ $\log u > 1$, то можно установить вполнѣ опредѣленное, достаточно малое число α, чтобъ имѣть (при $|p_1| > 1$, $|q_1| > 1$),

$$T_8 > \frac{1}{2} \frac{w^4}{u^2 \log u} .$$

Но послѣ того, какъ число α опредѣленно, совокупность всѣхъ остальныхъ членовъ выраженія $w^2 K$ превращается въ вполнѣ опредѣленный многочленъ 7-й степени T_7 относительно p_1 и q_1; и элементарная алгебра позволяетъ установить число w_0 такъ, чтобъ при $w > w_0$ имѣть

$$w^2 K > \frac{1}{2} \frac{w^4}{u^2 \log u} + T_7 > 0 .$$

w_0 и будетъ, очевидно, тѣмъ высшимъ предѣломъ, котораго максимумъ w не можетъ превзойти.

Точно такимъ же образомъ устанавливается высшій предѣлъ максимума выраженія

$$w' = \alpha^2 e^{2\left(\frac{q+M}{\alpha}\right)} e^{2e^{\frac{q+M}{\alpha}}} [As^2 + 2Bst + Ct^2] .$$

Наше разсужденіе *не зависитъ* отъ данныхъ на контурѣ. Но эти данныя естественно приходится использовать, чтобъ установить высшіе предѣлы w и w' на самомъ контурѣ.

Положимъ, что рѣшеніе z дано на окружности C радіуса R, гдѣ, допустимъ для простоты, оно обращается въ *аналитическую* функцію дуги θ. Вводя гармоническую функцію, которая на окружности C принимаетъ тѣ же значенія, мы, очевидно, можемъ ограничиться случаемъ, когда на окружности C z равно нулю.

Дифференцируя уравненіе (3) относительно θ видимъ, какъ въ предыдущей главѣ, что $\frac{\partial z}{\partial \theta} = z_1$ удовлетворяетъ уравненію

$$A \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} = D_1 = a\left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)^2 + 2b \frac{\partial z_1}{\partial x}\frac{\partial z_1}{\partial y} + c\left(\frac{\partial z_1}{\partial y}\right)^2 +$$
$$+ 2d \frac{\partial z_1}{\partial x} + 2e \frac{\partial z_1}{\partial y} + g ,$$

гдѣ a, b, c, d, e, g суть функціи x, y, z, p, q, высшіе предѣлы модулей которыхъ извѣстны при условіи, что $R \geqq \sqrt{x^2+y^2} > R'$, гдѣ R' произвольное положительное число, которое для опредѣленности можемъ взять равнымъ $\frac{R}{2}$.

Полагая

$$z_1 = -M - \alpha + \alpha \log u,$$

увидимъ, что u удовлетворяетъ уравненію

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{u}\left[A\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + C\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] +$$
$$+\frac{\alpha}{u}\left[a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial x}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + c\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] + 2d\frac{\partial u}{\partial x} + 2e\frac{\partial u}{\partial y} + g\frac{u}{\alpha} = Q.$$

Выбравши нѣкоторое достаточно малое, но вполнѣ опредѣленное значеніе для α, видимъ далѣе, что внутри кольцеобразной области, заключенной между окружностью C радіуса R и окружностью C' радіуса R',

$$Q > -N,$$

гдѣ N нѣкоторое число, которое опредѣляется, какъ на страницѣ 105.

Слѣдовательно, полагая

$$u' = u + \frac{N}{\mu}\varrho^2,$$

гдѣ μ обозначаетъ минимумъ функціи $2(A+C)$, получимъ

$$A\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u'}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} > 0,$$

но, какъ показано въ концѣ § 27, мы умѣемъ построить функцію v', которая на окружностяхъ C и C' совпадаетъ съ u' и удовлетворяетъ линейному уравненію

$$A\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 v'}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} = 0,$$

и, такъ какъ, благодаря отрицательной кривизнѣ поверхности $z = v'(x, y)$, касательная плоскость къ этой поверхности во всякой точкѣ, имѣющей проэкцію на окружности C пересѣкаетъ снова поверхность въ точкѣ, имѣющей проэкцію на окружности C или C', то никакого труда не представляетъ установить такое число L, чтобъ на окружности C имѣть

$$-L < \frac{\partial v'}{\partial \varrho} < L.$$

Съ другой стороны, полагая

$$v_1 = u' - v',$$

мы видимъ, что v_1 равно нулю на обѣихъ окружностяхъ C и C' и также, какъ u', удовлетворяетъ неравенству

$$A\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} > 0.$$

Поэтому на окружности C

$$\frac{\partial v_1}{\partial \varrho} \geqq 0,$$

откуда

$$\frac{\partial u'}{\partial \varrho} = \frac{\partial v'}{\partial \varrho} + \frac{\partial v_1}{\partial \varrho} \geqq -L,$$

и наконецъ

$$\frac{\partial z_1}{\partial \varrho} = \frac{\alpha}{e^{\frac{M+\alpha}{\alpha}}} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varrho} = \frac{\alpha}{e^{\frac{M+\alpha}{\alpha}}}\left[\frac{\partial u'}{\partial \varrho} - \frac{2RN}{\mu}\right] > -\frac{\alpha}{e^{\frac{M+\alpha}{\alpha}}}\left[L + \frac{2RN}{\mu}\right].$$

Точно такимъ же образомъ найдемъ, что

$$\frac{\partial z_1}{\partial \varrho} < \frac{\alpha}{e^{\frac{M+\alpha}{\alpha}}}\left[L + \frac{2RN}{\mu}\right]$$

на окружности C.

Итакъ высшіе предѣлы вторыхъ производныхъ r, s, t установлены на окружности C, а вмѣстѣ съ ними и высшіе предѣлы w и w'. Откуда выводимъ уже высшіе предѣлы модулей r, s, t и внутри круга C.

Ограниченіе модулей дальнѣйшихъ производныхъ на основаніи тѣхъ же принциповъ не представляетъ затрудненій. Приходится опять послѣдовательно при возрастающихъ k, l разсматривать выраженія $w_{k,l}$ (стран. 122), какъ въ предыдущей главѣ, причемъ, такъ же какъ и тамъ, нѣтъ надобности при $k+l \geqq 2$ вводить весьма малое число α, такъ какъ послѣ двухъ дифференцированій уравненія (3) получаются уже *линейныя* уравненія съ извѣстными коэффиціентами, которыя мы уже изслѣдовали въ указанномъ мѣстѣ. Ограниченіе модулей послѣдовательныхъ производныхъ на контурѣ совершается также безпрепятственно, ибо послѣдовательное дифференцированіе относительно угла θ также приводитъ къ уравненіямъ, къ которымъ примѣнимъ способъ вспомогательныхъ функцій на контурѣ. Такимъ образомъ, мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ.

Теорема. *Задача Дирикле возможна для уравненія эллиптическаго типа*

$$Ar + 2Bs + Ct = D\,, \qquad (D'_z \geqq 0) \qquad (3)$$

гдѣ A, B, C, D *аналитическія функціи* x, y, p, q *(*D *можетъ также зависѣть отъ* z*), при предположеніи, что данныя значенія требуемаго рѣшенія на окружности* C *выражаются аналитической функціей дуги* θ, *если a priori возможно установить высшій предѣлъ модулей* $|z|$, $|p|$ и $|q|$ *предполагаемаго рѣшенія.*

Въ самомъ дѣлѣ, вводя параметръ α, можемъ всегда написать наше уравненіе въ видѣ

$$r + t + \alpha\,[(A-1)\,r + 2Bs + (C-1)\,t] = \alpha D\,,$$

такъ что при $\alpha = 0$ будемъ имѣть уравненіе Лапласа, для котораго задача Дирикле возможна.

Такимъ образомъ, наша теорема вытекаетъ изъ основной леммы, доказанной въ предыдущемъ §. Случай не аналитическихъ коэффиціентовъ мы совершенно оставимъ въ сторонѣ, ограничиваясь указаніями уже сдѣланными въ предыдущихъ главахъ по этому поводу. Что же касается данныхъ на контурѣ, то прежде всего слѣдуетъ сдѣлать важное, хотя и очевидное замѣчаніе, что вмѣсто окружности C можетъ быть взятъ произвольный аналитическій контуръ (благодаря конформному преобразованію). Далѣе, столь же очевидно и то, что вмѣсто аналитическихъ данныхъ на контурѣ можно брать и неаналитическія, предполагая, что данныя значенія искомаго рѣшенія на контурѣ представлены функціей дуги имѣющей конечныя производныя первыхъ семи [1]) порядковъ.

Въ этомъ смыслѣ и слѣдуетъ понимать въ дальнѣйшемъ изложеніи выраженія „задача Дирикле для даннаго уравненія всегда возможна“ или „задача Дирикле для даннаго уравненія возможна при какихъ угодно данныхъ на опредѣленномъ контурѣ C“.

Перейдемъ теперь къ важнымъ слѣдствіямъ нашей теоремы.

§ 31. *Пусть во-первыхъ* $D = 0$. Въ такомъ случаѣ функція z не имѣетъ ни максимума, ни минимума, а потому наибольшее свое значеніе она принимаетъ на окружности. Слѣдовательно, высшій предѣлъ $|z|$ извѣстенъ.

Кромѣ того, кривизна поверхности $z = z(x, y)$ не можетъ быть положительна, поэтому всякая касательная къ ней плоскость пересѣкаетъ ограничивающій ея контуръ не менѣе, чѣмъ въ трехъ точкахъ. Элементы аналитической геометріи даютъ возможность немедленно устано-

---

1) Число конечныхъ производныхъ можетъ быть во многихъ случаяхъ значительно понижено, но изслѣдованіе этого вопроса выходитъ изъ рамокъ настоящей работы.

вить наибольшій *наклонъ* этихъ плоскостей. Такимъ образомъ высшіе предѣлы $|z|$, $|p|$, $|q|$ устанавливаются безпрепятственно.

Слѣдовательно, *задача Дирикле возможна для уравненія*

$$Ar + 2Bs + Ct = 0\,,$$

при предположеніи, что A, B, C *какія угодно аналитическія функціи* x, y, p, q и $AC - B^2 > 0$.

2-й случай. D *не равно тождественно нулю. Если* [1]) $A - \dfrac{B^2}{C} > 0$, $C - \dfrac{B^2}{A} > 0$, *и съ безконечнымъ возрастаніемъ* p, q, D *возрастаетъ не быстрѣе вторыхъ степеней* p *и* q, *если кромѣ того* $D'_z > 0$, *то задача Дирикле всегда возможна.*

Чтобъ въ этомъ убѣдиться, на основаніи предыдущаго достаточно a priori установить высшіе предѣлы $|z|$, $|p|$, $|q|$.

Начнемъ съ модуля $|z|$. Для этого напишемъ наше уравненіе въ слѣдующемъ видѣ

$$Ar + 2Bs + Ct = D(x\,,\ y\,,\ 0\,,\ 0\,,\ 0) + zD'_z(x\,,\ y\,,\ \theta z\,,\ \theta p\,,\ \theta q) +$$
$$+ pD'_p(x\,,\ y\,,\ \theta z\,,\ \theta p\,,\ \theta q) + qD'_q(x\,,\ y\,,\ \theta z\,,\ \theta p\,,\ \theta q)\,,$$

гдѣ θ нѣкоторая правильная дробь.

Отсюда мы заключаемъ, что въ точкѣ, гдѣ $|z|$ достигаетъ максимума

$$|z|.D'_z(x\,,\ y\,,\ \theta z\,,\ \theta p\,,\ \theta q) - |D(x\,,\ y\,,\ 0\,,\ 0\,,\ 0)| < 0\,;$$

слѣдовательно максимумъ $|z|$ менѣе $\dfrac{M}{N}$, обозначая черезъ M максимумъ $|D(x\,,\ y\,,\ 0\,,\ 0\,,\ 0)|$ и черезъ N нисшій предѣлъ D'_z при всевозможныхъ значеніяхъ z, p, q.

Перейдемъ теперь къ производнымъ перваго порядка. Наибольшее значеніе $|p|$ и $|q|$ на самой окружности мы опредѣлимъ примѣняя способъ вспомогательныхъ функцій, причемъ знакъ D'_z, конечно, не играетъ роли.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ для опредѣленности, что

$$D = ap^2 + 2bpq + cq^2 + 2dp + 2eq + f\,,$$

гдѣ a, b, c, d, e, f конечныя функціи x, y, z. Мы можемъ предположить, что на окружности C $z = 0$.

Дѣлая обычную подстановку

$$z = -n - \alpha + \alpha \log u\,,$$

---

[1]) Такъ что ни при какихъ вещественныхъ конечныхъ или безконечныхъ значеніяхъ p, q *не имѣютъ* мѣста ни одно изъ равенствъ $A - \dfrac{B^2}{C} = 0$ или $C - \dfrac{B^2}{A} = 0$.

мы получимъ уравненіе

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{u}\left[A\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+C\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+$$
$$+\frac{\alpha}{u}\left[a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2b\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+c\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+2d\frac{\partial u}{\partial x}+2e\frac{\partial u}{\partial y}+f\frac{u}{\alpha}=Q.$$

Замѣчая, что $A-\frac{B^2}{C}$, также какъ $C-\frac{B^2}{A}$, при всевозможныхъ значеніяхъ p, q имѣютъ опредѣленный нисшій предѣлъ $\varDelta$, мы можемъ умножить наше уравненіе на число $\frac{1}{\varDelta}$ и такимъ образомъ приравнять этотъ нисшій предѣлъ единицѣ [1]). Положимъ затѣмъ, что

$$|a|<M, \quad |b|<M, \quad |c|<M,$$

гдѣ M опредѣленное число, такъ какъ a, b, c зависятъ только отъ x, y, z; и пусть, наконецъ,

$$\alpha=\frac{1}{12\,M}.$$

Выраженіе Q, въ которомъ $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ разсматриваются какъ координаты точки, представляетъ въ такомъ случаѣ первую часть уравненія *эллипсиса*.

Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$A_1=A+\alpha a, \quad B_1=B+\alpha b, \quad C_1=C+\alpha c,$$

видимъ что

$$|A_1-A|<\frac{1}{12}, \quad |B_1-B|<\frac{1}{12}, \quad |C_1-C|<\frac{1}{12};$$

а потому

$$|(A_1C_1-B_1^2)-(AC-B^2)|<\frac{|A|+|C|+2|B|}{12}+\frac{1}{72},$$

или

$$\left|\frac{A_1C_1-B_1^2}{AC-B^2}-1\right|<\frac{|A|+|C|+2|B|}{12(AC-B^2)}+\frac{1}{72(AC-B^2)}<\frac{1}{3}+\frac{1}{72}<\frac{2}{5}.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{7}{5}(AC-B^2)>A_1C_1-B_1^2>\frac{3}{5}(AC-B^2).$$

---

[1]) Очевидно тогда, что A, C и $AC-B^2$ будутъ также больше единицы.

Какъ на страницѣ 105, находимъ такимъ образомъ, что

$$-Q<\frac{A_1e^2-2B_1ed+C_1d^2}{A_1C_1-B_1^2}+\left|f\frac{u}{\alpha}\right|<2\frac{Ae^2+|2Bed|+Cd^2}{AC-B^2}+\left|f\frac{u}{\alpha}\right|<$$

$$<2(|e|+|d|)^2+\left|f\frac{u}{\alpha}\right|<N,$$

гдѣ N вполнѣ опредѣленное положительное число.

Дальнѣйшая часть разсужденія не представляетъ ничего новаго, а потому на ней нѣтъ надобности останавливаться.

Итакъ высшіе предѣлы $|p|$ и $|q|$ на окружности C намъ извѣстны.

Остается установить высшіе предѣлы $|p|$ и $|q|$ внутри круга C. Для этого разсмотримъ значеніе функціи

$$w=p^2+q^2$$

въ точкѣ M, гдѣ она достигаетъ максимума. Прежде всего замѣтимъ, что можно предположить, что въ этой точкѣ $p=0$, такъ какъ w остается неизмѣнной при прямоугольномъ преобразованіи координатъ x, y, такъ же какъ и форма уравненія (3). Слѣдовательно, въ точкѣ M имѣемъ

$$p=s=t=0,\quad q\left(A\frac{\partial^2q}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2q}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2q}{\partial y^2}\right)\leqq 0.$$

Но съ другой стороны, если, раздѣливши уравненіе (3) на A, продифференцируемъ его относительно y, то благодаря условіямъ $s=t=0$, найдемъ

$$A\frac{\partial^2q}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2q}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2q}{\partial y^2}=A\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{D}{A}\right)q+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{D}{A}\right)\right].$$

Слѣдовательно,

$$q\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{D}{A}\right).q+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{D}{A}\right)\right]\leqq 0. \qquad (103)$$

Ограничиваясь для простоты общимъ случаемъ, когда порядокъ возрастанія D'_z при q безконечномъ не ниже порядка возрастанія D'_y, видимъ, что, еслибъ $|q|$ превышалъ нѣкоторый опредѣленный предѣлъ L, то неравенство (103) не могло бы имѣть мѣсто. Поэтому L^2 есть высшій предѣлъ максимума $w=p^2+q^2$, и наша теорема такимъ образомъ доказана.

§ 32. Наиболѣе интересный случай, когда $D=0$, къ которому примѣнима наша метода интегрированія, представляетъ уравненіе *минимальныхъ* поверхностей

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0.$$

Для фактическаго нахожденія рѣшенія задачи Дирикле или Плато, существованіе котораго вытекаетъ изъ предыдущаго §, пишемъ наше уравненіе въ видѣ

$$(1+\alpha q^2)\,r - 2\alpha pqs + (1+\alpha p^2)\,t = 0\,.$$

При α достаточно маломъ, рѣшеніе z представляется въ видѣ сходящагося ряда Тэйлора

$$z(x\,,\,y\,,\,\alpha) = z_0 + \alpha z_1(x\,,\,y) + \frac{\alpha^2}{2!}z_2(x\,,\,y) + \ldots \frac{\alpha^n}{n!}z_n(x\,,\,y) + \ldots\,,$$

гдѣ z_0 есть гармоническая функція принимающая на окружности C тѣ же значенія, что z, а $z_1\,,\,z_2\ldots z_n$, обращаясь въ нуль на окружности, опредѣляются послѣдовательно изъ системы уравненій Пуассона

$$\begin{aligned}
r_1+t_1 &= -[q_0^2r_0 - 2p_0q_0s_0 + p_0^2t_0]\\
r_2+t_2 &= -2[q_0^2r_1 - 2p_0q_0s_1 + p_0^2t_1 + 2(q_0r_0 - p_0s_0)q_1 + 2(p_0t_0 - q_0s_0)p_1]\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
r_n+t_n &= -n[q_0^2r_n - 2p_0q_0s_n + p_0^2t_n + 2(n-1)(q_0r_{n-1} - p_0s_{n-1})q_1 +\\
&\qquad + 2(n-1)(p_0t_{n-1} - p_0s_{n-1})p_1 + \ldots]\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

гдѣ $p_n\,,\,q_n\,,\,r_n\,,\,s_n\,,\,t_n$ производныя z_n первыхъ двухъ порядковъ.

Опредѣливши такимъ образомъ коэффиціенты z_n, строку Тэйлора слѣдуетъ превратить въ строку Миттагъ-Леффлера, которая будетъ сходиться при $\alpha=1$ и при этомъ значеніи α представитъ искомое рѣшеніе.

Уравненіе минимальныхъ поверхностей опредѣляетъ, какъ извѣстно, функцію, которая обращаетъ въ минимумъ интегралъ

$$I = \iint \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy\,.$$

Если вообще разсмотримъ совокупность значеній двойного интеграла внутри контура C

$$I = \iint f(p\,,\,q)\,dx\,dy\,,$$

гдѣ $f''_{p^2}f''_{q^2} - (f''_{pq})^2 > 0$, (такъ что функція $f(p\,,\,q)$ имѣетъ абсолютный минимумъ), соотвѣтствующихъ всевозможнымъ функціямъ, равнымъ между собой на самомъ контурѣ C, то эта совокупность имѣетъ нисшій предѣлъ, который дѣйствительно достигается функціей, удовлетворяющей уравненію Лагранжа

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}r + \frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q}s + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}t = 0\,,$$

если таковая существуетъ.

Это уравненіе Лагранжа относится также къ типу уравненій, для которыхъ нами доказана возможность задачи Дирикле.

Разрѣшивши такимъ образомъ задачу варіаціоннаго исчисленія для двойныхъ интеграловъ, я считаю нужнымъ указать на имѣющуюся связь, между предложенной здѣсь методой и методой Hilbert'а.

Какъ извѣстно, нѣмецкій ученый разсматриваетъ безконечный рядъ функцій, которыхъ значенія будучи подставлены въ подинтегральное выраженіе, могутъ сколь угодно приблизить соотвѣтствующій интегралъ къ его низшему предѣлу. Еслибъ удалось показать, что этотъ рядъ функцій имѣетъ предѣлъ (какъ и его производныя), то этотъ предѣлъ былъ бы именно рѣшеніемъ задачи варіаціоннаго исчисленія. Въ весьма рѣдкихъ случаяхъ, гдѣ доказательство съ большимъ трудомъ доведено было до конца, основная мысль его заключалась въ томъ, чтобъ выбрать функціи, приближающія интегралъ къ его низшему предѣлу такъ, чтобъ имѣть возможность установить высшіе предѣлы модулей послѣдовательныхъ производныхъ этихъ приближенныхъ функцій [1]). Относительно этихъ приближенныхъ функцій дѣлаются для этой цѣли различныя предположенія. Наша метода, если ограничить ея приложеніе варіаціоннымъ исчисленіемъ, указываетъ два опредѣленныхъ и весьма близкихъ между собой вида предположеній: наши приближенныя функціи либо принимаютъ на контурѣ тѣ же значенія, что искомое рѣшеніе, и обращаютъ въ минимумъ интегралъ отличающійся отъ даннаго значеніями нѣкотораго параметра, либо — обращаютъ въ минимумъ тотъ же интегралъ, но на контурѣ принимаютъ значенія, являющіяся функціями нѣкотораго параметра.

Примѣръ случая, когда $D \gtreqless 0$, даетъ намъ слѣдующая геометрическая задача:

Провести черезъ данный контуръ поверхность, обладающую свойствомъ, что высота z каждой ея точки умноженная на косинусъ угла между нормалью и вертикальной осью равняется кривизнѣ $\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}$ въ этой точкѣ.

Составляя уравненіе, получимъ немедленно

$$(1 + q^2)\, r - 2pqs + (1 + p^2)\, t = z\,(1 + p^2 + q^2). \tag{104}$$

Полученное уравненіе допускаетъ рѣшеніе задачи Дирикле на основаніи теоремы предыдущаго §.

Разсмотримъ также уравненіе

$$(1 + q^2)\, r - 2pqs + (1 + p^2)\, t = p^2 + q^2. \tag{105}$$

Оно не вполнѣ удовлетворяетъ условіямъ только что названной теоремы, такъ какъ здѣсь $D'_z = 0$. Тѣмъ не менѣе и для этого уравненія

[1]) Lebesgue „Sur le probleme de Dirichlet“. Rendiconti del Circolo Mathematico. 1907. Hadamard „Sur quelques questions du calcul des variations“. Ann. de l'Ecole Normale Sup. 1907.

задача Дирикле всегда возможна. Въ самомъ дѣлѣ, условіе $D'_z > 0$ во всей цѣпи нашихъ предыдущихъ умозаключеній играло существенную роль лишь *при установленіи высшаго предѣла максимума внутри контура модуля* $|z|$ *и* $p^2 + q^2$. Но въ данномъ случаѣ легко видѣть, что ни z, ни p, ни q не *могутъ вовсе имѣть ни максимума, ни минимума*. Мы должны однако замѣтить, что при условіи $D'_z = 0$ (вмѣсто $D'_z > 0$) наша теорема *вообще* перестаетъ быть правильной. Напримѣръ, для уравненія

$$(1 + q^2)\, r - 2pqs + (1 + p^2)\, t = 1 + p^2 + q^2,$$

которое только на одну единицу отличается отъ уравненія (104), и лишь на множитель z во второй части—отъ уравненія (105), задача Дирикле уже не всегда возможна.

Такимъ образомъ, *если* $D'_z = 0$, (при соблюденіи прочихъ условій) нельзя утверждать, что задача Дирикле возможна. Въ случаѣ, когда $A = C = 1$, $B = 0$, (Глава V), мы видѣли, что для этого достаточно, чтобъ задача была возможна хоть при какихъ нибудь опредѣленныхъ данныхъ на разсматриваемомъ контурѣ. *Вѣроятно, что этого достаточно и въ общемъ случаѣ.* Въ частности, это обобщеніе легко можетъ быть доказано при одномъ изъ двухъ предположеній: 1-е, *если D не содержитъ членовъ второй степени относительно p, q*, или 2-е, *если коэффиціенты даннаго уравненія не зависятъ отъ x, y.*

§ 33. Теперь намъ остается еще сказать нѣсколько словъ объ общемъ уравненіи эллиптическаго типа

$$F(r,\ s,\ t,\ p,\ q,\ x,\ y,\ z) = 0, \qquad (F'_z \geqq 0) \qquad (1)$$

которое, по опредѣленію, обладаетъ свойствомъ, что всякое рѣшеніе его удовлетворяетъ неравенству $4F'_r F'_t - (F'_s)^2 > 0$.

Параметръ α можетъ быть введенъ различными способами. Если мы ограничимся случаемъ, когда извѣстно существованіе одного какого нибудь рѣшенія z_0 уравненія (1), которое удовлетворяетъ условіямъ основной леммы и на окружности C обращается въ $\varphi_0(\theta)$, то параметръ α удобно ввести слѣдующимъ образомъ. Пусть H будетъ гармоническая функція, которая на окружности C равна $\varphi(\theta) - \varphi_0(\theta)$, и положимъ

$$z = \alpha H + u;$$

тогда функція u будетъ удовлетворять уравненію эллиптическаго типа

$$F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x} + \alpha\frac{\partial^2 H}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \alpha\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha\frac{\partial^2 H}{\partial x^2},\ \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha\frac{\partial H}{\partial x},\right.$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial y} + \alpha\frac{\partial H}{\partial y},\ u + H,\ x,\ y\right) = 0.$$

Рѣшенію u, которое обращается въ нуль на окружности C, будетъ соотвѣтствовать *рѣшеніе z даннаго уравненія, которое на контурѣ равно*

$$\varphi_0(\theta) + \alpha[\varphi(\theta) - \varphi_0(\theta)].$$

Покажемъ, что *задача Дирикле для уравненія (1) возможна, если на основаніи данныхъ на контурѣ мы умѣемъ установить высшій предѣлъ модулей предполагаемаго рѣшенія и его частныхъ производныхъ первыхъ двухъ порядковъ.*

Обозначимъ черезъ M этотъ высшій предѣлъ.

Въ самомъ дѣлѣ, дифференцируемъ наше уравненіе по x. Мы получимъ

$$F'_r \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + F'_s \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + F'_t \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + F'_p \frac{\partial p}{\partial x} + F'_q \frac{\partial p}{\partial y} + F'_z p + F'_x = 0.$$

Но разсматривая p, какъ неизвѣстную функцію, мы видимъ, что полученное уравненіе относится къ типу

$$A \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = D,$$

гдѣ A, B, C, D, зависятъ отъ x, y, p, $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$ и q (такъ какъ t выражается также при помощи этихъ шести величинъ изъ уравненія (1), въ которомъ $F'_t \gtrless 0$).

Дифференцируя еще разъ относительно x, получимъ

$$A \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = a\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + 2b \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} + c\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + 2d \frac{\partial r}{\partial x} + 2e \frac{\partial r}{\partial y} + f$$

гдѣ A, B, C, a, b, c, d, e, f суть извѣстныя аналитическія функціи x, y, z, p, q, r, s.

Къ этому уравненію безъ измѣненій примѣнимъ анализъ уравненія (101) и такимъ образомъ можетъ быть установленъ высшій предѣлъ максимума выраженія

$$w = \alpha^2 e^{2\frac{r+M}{\alpha}} e^{2e^{\frac{r+M}{\alpha}}} \left[A\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + 2B \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} + C\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right],$$

гдѣ α есть нѣкоторое опредѣленное число.

Точно также находится высшій предѣлъ максимума

$$w_1 = \alpha^2 e^{2\frac{t+M}{\alpha}} e^{2e^{\frac{t+M}{\alpha}}} \left[A\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + 2B \frac{\partial t}{\partial x} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} + C\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2\right].$$

Продолжая послѣдовательное дифференцированіе по x или по y, мы постоянно будемъ приходить къ уравненіямъ, къ которымъ примѣнимъ *способъ вспомогательныхъ функцій внутри контура*, такъ что, зная высшій предѣлъ модулей предыдущихъ производныхъ, можемъ всегда опредѣлить высшій предѣлъ максимума опредѣленной квадратичной формы изъ двухъ производныхъ слѣдующаго порядка. Остается лишь установить высшій предѣлъ модулей послѣдовательныхъ производныхъ, начиная съ третьей, на контурѣ.

Для этого дифференцируемъ два раза наше уравненіе относительно θ. Получаемъ, обозначая $\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$ черезъ z_2

$$A'\frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2}+2B'\frac{\partial^2 z_2}{\partial x \partial y}+C'\frac{\partial^2 z^2}{\partial x^2}=a_1\left(\frac{\partial z_2}{\partial x}\right)^2+2b_1\left(\frac{\partial z_2}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z_2}{\partial y}\right)+c_1\left(\frac{\partial z_2}{\partial y}\right)^2+$$
$$+2d_1\frac{\partial z_2}{\partial x}+2e_1\frac{\partial z_2}{\partial y}+f_1,$$

гдѣ A', B', C', a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1 суть опредѣленныя конечныя функціи (x, y, z, p, q, r, s, t) внутри кольцеобразной области заключенной между окружностью C и концентрической къ ней окружностью C_1 радіуса $R_1=\frac{R}{2}$, причемъ $A'C'-B'^2>0$. Остается лишь повторить дословно разсужденіе страницы 146.

Такимъ образомъ, замѣчая, что дальнѣйше дифференцированіе по θ приводитъ насъ къ аналогичнымъ уравненіямъ, къ которымъ примѣнимъ *способъ вспомогательныхъ функцій на контурѣ*, мы можемъ считать высказанную теорему доказанной. Приложимъ ее къ разрѣшенію задачи Дирикле въ случаѣ уравненія поверхностей постоянной положительной кривизны, т. е. накладывающихся на шаръ.

§ 34. Для этого покажемъ сначала, что *задача Дирикле для уравненія*

$$rt-s^2=k^2, \tag{106}$$

гдѣ k постоянная величина, возможна и допускаетъ два рѣшенія при какихъ угодно данныхъ на окружности C произвольнаго радіуса R.

Уравненіе

$$rt-s^2=k^2$$

допускаетъ 2 очевидныхъ рѣшенія

$$z_1=\frac{k}{2}(x^2+y^2),\quad z_2=-\frac{k}{2}(x^2+y^2),$$

не имѣющихъ конечныхъ особенностей.

Отсюда мы заключаемъ, что модуль рѣшенія этого уравненія, которое на окружности C равно $\varphi(\theta)$, имѣетъ высшій предѣлъ равный $|\varphi(\theta)| + \frac{1}{2}kR^2$.

Кромѣ того, такъ какъ кривизна поверхности, удовлетворяющей уравненію (106), не мѣняетъ знака, то мы должны допустить, что *выпуклость* ея направлена цѣликомъ либо внизъ, либо вверхъ. Остановимся для опредѣленности на первомъ предположеніи; такъ что $r > 0$, $t > 0$ и на контурѣ $\frac{\partial z}{\partial \varrho} > -\frac{\partial^2 z}{R\partial\theta^2}$. Не трудно установить и высшій предѣлъ $\frac{\partial z}{\partial \varrho}$ въ какой нибудь точкѣ M контура. Для этого достаточно разсѣчь цилиндръ, имѣющій основаніемъ кругъ C, плоскостью, проходящей черезъ касательную къ данному контуру въ точкѣ M такимъ образомъ, чтобъ эллипсисъ E сѣченія былъ весь ниже даннаго контура. Въ такомъ случаѣ поверхность $\sum$, удовлетворяющая уравненію (106), проходящая черезъ E и которой выпуклость направлена внизъ, будетъ вся, за исключеніемъ точки M, ниже разсматриваемой нами поверхности, а потому *наклонъ* $\left(\frac{\partial z'}{\partial \varrho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\varrho\partial\theta}\right)^2$ касательной плоскости въ точкѣ M поверхности $\sum$ *больше наклона* $\left(\frac{\partial z}{\partial \varrho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\varrho\partial\theta}\right)^2$ разсматриваемой поверхности въ той же точкѣ. Слѣдовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial \varrho} < \frac{\partial z'}{\partial \varrho},$$

причемъ поверхность $\sum$, очевидно, имѣетъ уравненіемъ

$$z' = \frac{k}{2}(x^2 + y^2 - R^2) + ax + by + d,$$

если плоскость эллипсиса E представлена уравненіемъ

$$Z = ax + by + d.$$

Далѣе, такъ какъ ни r, ни t не можетъ быть равно нулю, слѣдовательно, $|p|$ и $|q|$ не имѣютъ максимумовъ внутри круга.

Итакъ намъ уже извѣстны высшіе предѣлы модулей первыхъ производныхъ.

Для установленія высшаго предѣла вторыхъ производныхъ, дифференцируемъ уравненіе (106) по x. Получимъ

$$r\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + t\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - 2s\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} = 0,$$

и такъ какъ $rt - s^2 > 0$, заключаемъ, что $\left|\frac{\partial p}{\partial x}\right| = |r|$, $\left|\frac{\partial p}{\partial y}\right| = |s|$ не имѣютъ максимумовъ внутри контура. Съ другой стороны въ полярныхъ координатахъ наше уравненіе получаетъ форму

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\varrho^2}\left[\frac{\partial^2 z}{\varrho^2\partial\theta^2}+\frac{\partial z}{\varrho\partial\varrho}\right]-\left[\frac{\partial^2 z}{\varrho\partial\varrho\partial\theta}-\frac{\partial z}{\varrho^2\partial\theta}\right]^2=k^2; \qquad (106')$$

дифференцируя его по θ и обозначая $\frac{\partial z}{\partial\theta}$ черезъ z_1, получимъ

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial\varrho^2}\left[\frac{\partial^2 z}{\varrho^2\partial\theta^2}+\frac{\partial z}{\varrho\partial\varrho}\right]+\left[\frac{\partial^2 z_1}{\varrho^2\partial\theta^2}+\frac{\partial z_1}{\varrho\partial\varrho}\right]\frac{\partial^2 z}{\partial\varrho^2}-2\left[\frac{\partial^2 z_1}{\varrho\partial\varrho\partial\theta}-\frac{\partial^2 z_1}{\varrho^2\partial\theta}\right]\left[\frac{\partial^2 z}{\varrho\partial\varrho\partial\theta}-\frac{\partial z}{\varrho^2\partial\theta}\right]=0,$$

откуда мы заключаемъ, что кривизна поверхности z_1 не положительна

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\partial y}\right)^2=\frac{\partial^2 z_1}{\partial\varrho^2}\left[\frac{\partial^2 z_1}{\varrho^2\partial\theta^2}+\frac{\partial z_1}{\varrho\partial\varrho}\right]-\left[\frac{\partial^2 z_1}{\varrho\partial\varrho\partial\theta}-\frac{\partial z_1}{\varrho^2\partial\theta}\right]^2\leqq 0,$$

а потому на контурѣ C высшій предѣлъ $\left|\frac{\partial z_1}{\partial\varrho}\right|=\left|\frac{\partial^2 z}{\partial\varrho\partial\theta}\right|$ зависитъ только отъ высшаго предѣла $\left|\frac{\partial^2 z_1}{\partial\theta^2}\right|=|\varphi'''(\theta)|$.

Однако отсюда нельзя непосредственно вывести высшій предѣлъ $\frac{\partial^2 z}{\partial\varrho^2}$. Мы сумѣемъ его опредѣлить изъ уравненія (106′), если найдемъ нисшій предѣлъ положительнаго выраженія $\frac{\partial^2 z}{\varrho^2\partial\theta^2}+\frac{\partial z}{\varrho\partial\varrho}$. Положимъ, что мы хотимъ найти этотъ нисшій предѣлъ въ точкѣ M $(\theta=0)$. Обозначимъ черезъ φ_0, φ_0', φ_0'', φ_0''' значенія z и его производныхъ первыхъ трехъ порядковъ по θ и разсмотримъ поверхность 2-го порядка S, имѣющую уравненіе

$$z_0=\left(\frac{d-\varphi_0-\varphi_0''}{R^2}\right)x^2-\frac{\varphi_0'+\varphi_0'''}{3R^2}xy+\left(\frac{2\varphi_0+\varphi_0''-2d}{R}\right)x+\frac{4\varphi_0'+\varphi_0'''}{3R}y+$$
$$+\alpha(x^2+y^2-R^2)+d.$$

Полагая, что α и d связаны зависимостью

$$4\alpha(d-\varphi_0-\varphi_0''+\alpha R^2)-\left(\frac{\varphi_0'+\varphi_0'''}{3}\right)^2=k^2R^4,$$

видимъ, что z_0 удовлетворяетъ уравненію (106). Кромѣ того, легко провѣрить, что въ точкѣ M

$$z_0=\varphi_0,\quad \frac{\partial z_0}{\partial\theta}=\varphi_0',\quad \frac{\partial^2 z_0}{\partial\theta^2}=\varphi_0'',\quad \frac{\partial^3 z_0}{\partial\theta^3}=\varphi_0'''.$$

Но выбирая число d достаточно большимъ, мы можемъ достигнуть того, чтобъ во всѣхъ остальныхъ точкахъ контура имѣть $z_0>\varphi$. Въ самомъ дѣлѣ, во всякой точкѣ контура

$$\delta = \varphi - z_0 = \varphi + (\varphi_0 + \varphi_0'')\cos^2\theta + \frac{\varphi_0' + \varphi_0'''}{3}\cos\theta\sin\theta - (2\varphi_0 + \varphi_0'')\cos\theta -$$
$$- \frac{4\varphi_0' + \varphi_0'''}{3}\sin\theta - d(1 - \cos\theta)^2,$$

и такъ какъ

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\mu\theta^4}{24}, \quad \sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\mu'\theta^5}{120},$$
$$\varphi(\theta) = \varphi_0 + \varphi_0'\theta + \frac{\varphi_0''}{2}\theta^2 + \frac{\varphi_0'''}{6}\theta^3 + \frac{F}{24}\theta^4,$$

гдѣ $|\mu| < 1$, $|\mu'| < 1$ и $|F|$ менѣе высшаго предѣла *четвертыхъ* производныхъ $\varphi(\theta)$, то

$$\delta = \varphi_0'\theta + \frac{\varphi_0''}{2}\theta^2 + \frac{\varphi_0'''}{6}\theta^3 - \varphi_0'\sin\theta\cos\theta + (\cos\theta - 1)\left(\varphi_0'' + \frac{4\varphi_0' + \varphi_0'''}{3}\sin\theta\right) + \frac{F}{24}\theta^4 +$$
$$+ (\cos\theta - 1)^2(\varphi_0 + \varphi_0'' - d) = H\theta^4 + (\cos\theta - 1)^2(\varphi_0 + \varphi_0'' - d),$$

причемъ высшій предѣлъ H извѣстенъ. Но, если $|\theta| < \pi$, то

$$\frac{\theta^4}{(\cos\theta - 1)^2} < \frac{\pi^4}{4}.$$

Слѣдовательно, достаточно взять $d > \frac{H\pi^4}{4} + \varphi_0 + \varphi_0''$, для того, чтобъ имѣть $\delta = \varphi - z_0 < 0$, т. е. $z_0 > \varphi$. Но въ такомъ случаѣ, въ точкѣ M $\frac{\partial z_0}{\partial \varrho} < \frac{\partial z}{\partial \varrho}$, и *нисшимъ предѣломъ* $\frac{\partial^2 z}{\varrho^2 \partial\theta^2} + \frac{\partial z}{\varrho \partial \varrho}$ будетъ

$$\frac{\partial^2 z_0}{\varrho^2 \partial\theta^2} + \frac{\partial z_0}{\varrho \partial\varrho} = 2\alpha.$$

Итакъ высшіе предѣлы вторыхъ производныхъ z найдены, а потому рѣшеніе z, изображаемое поверхностью, выпуклость котораго направлена *внизъ*, существуетъ. Точно такимъ же образомъ убѣждаемся въ существованіи второго рѣшенія. Что и требовалось доказать.

Приступимъ теперь къ интегрированію уравненія поверхностей *постоянной* кривизны

$$rt - s^2 = k^2(1 + p^2 + q^2)^2. \tag{107}$$

Покажемъ, что *при всякихъ данныхъ на окружности C можно установить число P такъ, чтобъ задача Дирикле для уравненія (107) была возможна и допускала бы два рѣшенія, если $k < \frac{1}{P}$.*

Пусть u будетъ рѣшеніемъ уравненія

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 = 1,$$

которое на окружности C принимаетъ тѣ же значенія, что z. На основаніи предыдущаго, мы умѣемъ установить высшій предѣлъ P выраженія $1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$; я говорю, что если $k < \frac{1}{P}$, то задача Дирикле для уравненія (107) при тѣхъ же данныхъ на контурѣ возможна.

Въ самомъ дѣлѣ, при этомъ условіи,

$$\frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} < \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2}{\left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]^2}.$$

Предполагая, что выпуклости обѣихъ поверхностей направлены въ одну и ту же сторону, скажемъ, внизъ ($r > 0$), мы увидимъ, что разность $z - u = \delta$, будучи равной нулю на контурѣ, не можетъ быть *отрицательной*, такъ какъ δ, очевидно, удовлетворяетъ неравенству

$$A \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 \delta}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} + D \frac{\partial \delta}{\partial x} + E \frac{\partial \delta}{\partial y} < 0,$$

гдѣ $A > 0$ и $AC - B^2 > 0$.

Слѣдовательно $z > u$. А потому *на контурѣ наклонъ* $p^2 + q^2$ поверхности z меньше наклона поверхности u. Внутри контура наклонъ, разумѣется, не имѣетъ максимума. Остается лишь разсмотрѣть вторыя производныя. Покажемъ, что r и t также не имѣютъ максимума внутри контура. Пусть, напримѣръ, въ точкѣ M r достигалъ бы максимума. Тогда мы имѣли бы

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial y} = 0.$$

Дифференцируя два раза по x уравненіе (107), получимъ

$$r \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + t \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - 2s \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} = 4k^2 [pr + qs]^2 + 2k^2 [1 + p^2 + q^2] [r^2 + s^2] > 0.$$

Слѣдовательно, максимумъ невозможенъ.

Покажемъ теперь, что s не можетъ имѣть ни положительнаго максимума, ни отрицательнаго минимума внутри контура.

Для этого продифференцируемъ наше уравненіе (107) по x и по y. Получимъ

$$\begin{aligned} r\frac{\partial t}{\partial x}+t\frac{\partial r}{\partial x}-2s\frac{\partial s}{\partial x}&=2k^2(1+p^2+q^2)(pr+qs)\,, \\ r\frac{\partial t}{\partial y}+t\frac{\partial r}{\partial y}-2s\frac{\partial s}{\partial y}&=2k^2(1+p^2+q^2)(ps+qt)\,. \end{aligned} \tag{108}$$

Слѣдовательно, въ точкѣ, гдѣ s максимумъ или минимумъ,

$$\frac{\partial s}{\partial x}=0\,,\quad \frac{\partial r}{\partial x}=\frac{2k^2}{t}\cdot(1+p^2+q^2)(pr+qs)\,,\quad \frac{\partial t}{\partial x}=0\,,$$

$$\frac{\partial s}{\partial y}=0\,,\quad \frac{\partial t}{\partial y}=\frac{2k^2}{r}\cdot(1+p^2+q^2)(ps+qt)\,,\quad \frac{\partial r}{\partial y}=0\,.$$

Дифференцируя еще разъ первое изъ уравненій (108) по y, получимъ

$$r\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}+t\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}-2s\frac{\partial^2 s}{\partial x\partial y}=-\frac{4k^4}{rt}(1+p^2+q^2)^2(pr+qs)(ps+qt)+$$

$$+4k^2(ps+qt)(pr+qs)+2k^2(1+p^2+q^2)(rs+st)=$$

$$=2k^2s\left[\frac{2(ps+qt)(pr+qs).s}{rt}+(p^2+q^2)(r+t)+r+t\right]=$$

$$=\frac{2k^2s}{rt}\left[(2rs^2+r^2t+rt^2)p^2+2(rst+s^3)pq+(2ts^2+r^2t+rt^2)q^2\right]+$$

$$+2k^2(r+t)s=Ls\,,$$

гдѣ L безусловно положительное число.

Слѣдовательно s не можетъ имѣть положительнаго максимума и отрицательнаго минимума.

Но допустимъ, что $s=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ достигаетъ своего наибольшаго значенія въ точкѣ M контура, въ которой можно положить $\theta=0$. Тогда въ этой точкѣ

$$s=\frac{\partial^2 z}{\varrho\partial\varrho\partial\theta}-\frac{\partial z}{\varrho^2\partial\theta}\,,$$

кромѣ того

$$\frac{\partial s}{\partial\varrho}=\frac{\partial^3 z}{\varrho\partial\varrho^2\partial\theta}-2\frac{\partial^2 z}{\varrho^2\partial\varrho\partial\theta}+2\frac{\partial z}{\varrho^3\partial\theta}>0$$

и

$$\frac{\partial s}{\partial\theta}=\frac{\partial^3 z}{\varrho\partial\varrho\partial\theta^2}-2\frac{\partial^2 z}{\varrho^2\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial\varrho^2}-\frac{\partial z}{\varrho\partial\varrho}=0\,.$$

Съ другой стороны, дифференцируя уравненіе (107) по θ, находимъ

$$\frac{\partial^3 z}{\partial\varrho^2\partial\theta}\left[\frac{\partial^2 z}{\varrho^2\partial\theta^2}+\frac{\partial z}{\varrho\partial\varrho}\right]+\frac{\partial^2 z}{\partial\varrho^2}\left[\frac{\partial^3 z}{\varrho^2\partial\theta^3}+\frac{\partial^2 z}{\varrho\partial\varrho\partial\theta}\right]-2\left[\frac{\partial^3 z}{\varrho\partial\varrho\partial\theta^2}-\frac{\partial^2 z}{\varrho^2\partial\theta^2}\right]\left[\frac{\partial^2 z}{\varrho\partial\varrho\partial\theta}-\frac{\partial z}{\varrho^2\partial\theta}\right]=$$

$$=2k^2\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial\varrho}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\varrho\partial\theta}\right)^2\right]\left[\frac{\partial^2 z}{\partial\varrho\partial\theta}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varrho}+\frac{\partial^2 z}{\varrho^2\partial\theta^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial\theta}\right]. \tag{109}$$

При s достаточно большомъ вторая часть равенства положительна, но не больше $N\frac{\partial^2 z}{\partial\varrho\partial\theta}$, гдѣ N опредѣленное число. Напротивъ, первая часть равенства въ разсматриваемой точкѣ во всякомъ случаѣ больше, чѣмъ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\varrho^2}\left[3\,\frac{\partial^2 z}{\varrho\partial\varrho\partial\theta}+\frac{\partial^3 z}{\varrho^2\partial\theta^3}-2\,\frac{\partial z}{\varrho^2\partial\theta}\right].$$

Но изъ уравненія (107) мы можемъ установить положительное число A такъ, чтобъ имѣть въ точкѣ M

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\varrho^2}>A\left(\frac{\partial^2 z}{\varrho\partial\varrho\partial\theta}-\frac{\partial z}{\varrho^2\partial\theta}\right)^2.$$

Слѣдовательно, $\frac{\partial^2 z}{\varrho\partial\varrho\partial\theta}$, а также s, не можетъ быть выше нѣкотораго предѣла, такъ какъ при возрастаніи s *первая часть равенства (109) возрастаетъ, какъ третья степень* $\frac{\partial^2 z}{\varrho\partial\varrho\partial\theta}$.

Высшій предѣлъ r и t на контурѣ опредѣляется при помощи s. Въ самомъ дѣлѣ, легко установить низшій предѣлъ $\frac{\partial^2 z}{\varrho^2\partial\theta^2}+\frac{\partial z}{\varrho\partial\varrho}$, для этого достаточно разсмотрѣть то же выраженіе для функціи v, которая удовлетворяетъ уравненію $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)^2=k^2$, и принимаетъ на контурѣ тѣ же значенія что z. Въ каждой данной точкѣ контура мы найдемъ положительное значеніе λ, удовлетворяющее условію $\frac{\partial^2 v}{\varrho^2\partial\theta^2}+\frac{\partial v}{\varrho\partial\varrho}>\lambda>0$, которое и будетъ низшимъ предѣломъ $\frac{\partial^2 z}{\varrho^2\partial\theta}+\frac{\partial z}{\varrho\partial\varrho}$. Слѣдовательно,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\varrho^2}<\frac{M}{\lambda},$$

гдѣ M есть опредѣленное (послѣ того, какъ найденъ высшій предѣлъ s) число.

Установивъ такимъ образомъ высшіе предѣлы производныхъ первыхъ двухъ порядковъ, убѣждаемся въ правильности высказанной теоремы.

Итакъ весь нашъ сравнительно сложный анализъ, опирающійся на теорію аналитическаго продолженія, привелъ насъ къ чрезвычайно простымъ условіямъ возможности задачи Дирикле:

1-е. *Для того, чтобъ уравненіе эллиптическаго типа*

$$F(rstpqzxy)=0 \qquad (F'_z \geqq 0) \tag{1}$$

допускало рѣшеніе задачи Дирикле для даннаго контура, достаточно умѣть a priori при помощи данныхъ на контурѣ установить высшій предѣлъ модулей предполагаемаго рѣшенія и его производныхъ первыхъ двухъ порядковъ.

Въ частности,

2-е. *Для того, чтобъ уравненіе эллиптическаго типа*

$$Ar+2Bs+Ct=D \qquad (D'_z \geqq 0)$$

допускало рѣшеніе задачи Дирикле, достаточно умѣть a priori установить при помощи данныхъ на контурѣ высшій предѣлъ модулей предполагаемаго рѣшенія и его производныхъ перваго порядка.

Въ установленныхъ здѣсь условіяхъ возможности задачи Дирикле аналитическія функціи (въ уравненіяхъ, какъ и на контурѣ) могутъ быть замѣнены функціями, обладающими конечными производными первыхъ нѣсколькихъ порядковъ. Роль аналитическихъ функцій въ нашемъ доказательствѣ была такимъ образомъ по существу служебная, и вполнѣ вѣроятно, что при дальнѣйшемъ развитіи анализа можно будетъ болѣе простымъ путемъ прійти къ тѣмъ же выводамъ. Тѣмъ не менѣе, слѣдуетъ считать фактомъ первостепенной важности тѣсную связь между уравненіями эллиптическаго типа и аналитическими функціями. Умѣстно будетъ поэтому закончить это изслѣдованіе сопоставленіемъ найденнаго критерія возможности задачи Дирикле съ теоремой *аналитическаго продолженія*, общее доказательство которой принципіально не отличается отъ даннаго въ частномъ случаѣ V главы:

Если рѣшеніе z аналитическаго уравненія (1), существующее внутри нѣкотораго аналитическаго контура C, обращается на немъ въ аналитическую функцію дуги и кромѣ того имѣетъ конечныя производныя первыхъ двухъ порядковъ, то это рѣшеніе можетъ быть аналитически продолжено за предѣлы C.

ОПЕЧАТКИ.

Стран.	*Строка*	*Напечатано:*	*Вмѣсто:*
14	18	гдѣ χ_1, χ_2	гдѣ ψ_1, ψ_2
22	7	A_n	B_n
23	12	$3PQ.R$	$3PQ.R^2$
25	14	которая	которое
40	18	$f(x)$	$[f(x)]_{Rr}$
42	8	x^n	n^n
43	15	M^n	M_n
44	20	$\|F(x)\|_{Rr}$	$[F(x)]_{Rr}$
„	22	„	„
49	5	$A_m^{(1)} A_n^{(1)}$	$A_m^{(1)} A_n^{(2)}$
53	2	v_0	r_0
54	18	$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} y^2$	$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} y^3$
56	13	(31)	(32)
57	20	(34)	(35)
58	20	C_u	C_n
59	16	$\frac{\partial v}{\varrho \partial \varrho} \sin\theta$	$\frac{\partial v}{\varrho \partial \varrho} \sin^2\theta$
61	4	$\cos\theta \sin\theta$	$\cos\theta \sin^2\theta$
63	8	могуля	модуля
69	10	межно	можно
79	9	перваго порядка	первыхъ двухъ порядковъ
„	27	0	d
80	29	на	и на
82	25	$-\int_c qsdy$	$\int_c qsdy$
83	13	$>$	$<$
93	8	$9R'$	$0R'$
96	8	v_n	v_{n+1}
109	30	нисколько не	мало
„	32	23	24
111	29	безъ всякихъ ограниченій	полагая $f'_z > 0$,
„	34	24	25
115	26	трехъ	шести
116	12	„	„
117	3	$F \gtrless 0$	$F > 0$
118	3	$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}$
140	6	$\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y}$