Теорія колебаній упругихъ пластинокъ.

А. П. Грузинцева.

Точную теорію колебаній пластинокъ далъ въ первый разъ Кирхгоффъ въ 1850 году въ своей работѣ „Ueber das Gleichgewicht und Bewegung einer elastischen Scheibe“. Онъ приложилъ свою теорію къ случаю круглой пластинки и далъ точную теорію поперечныхъ ея колебаній.

Что касается теоріи колебаній пластинокъ, ограниченныхъ прямолинейными контурами, напр. квадратныхъ или треугольныхъ пластинокъ, то точной ихъ теоріи не существуетъ; скажемъ болѣе, даже въ большихъ трактатахъ по акустикѣ, напр. въ „Theory of Sound“ лорда Ралэя приходится довольствоваться чисто эмпирическими формулами при объясненіи узловыхъ линій квадратныхъ пластинокъ. Причина этого лежитъ несомнѣнно въ трудностяхъ чисто математическихъ: трудно подъискать даже частныя рѣшенія дифференціальныхъ уравненій колебательныхъ движеній пластинки, которые удовлетворяли бы условіямъ на контурѣ. Если мы и рѣшились сообщить здѣсь свое рѣшеніе этой задачи, то только потому, чтобы обратить вниманіе математиковъ на этотъ вопросъ.

Нашему рѣшенію задачи о поперечныхъ колебаніяхъ квадратной пластинки мы предпослали изложеніе рѣшенія общей задачи о колебаніяхъ пластинокъ, которое въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ можетъ быть заслуживаетъ вниманія.

Колебанія пластинокъ.

Общія уравненія.

Пусть толщина плоской пластинки весьма мала и равна 2ε. Примемъ срединную плоскость за плоскость xy; а, слѣдовательно, нормаль къ пластинкѣ за ось z-овъ.

Положимъ, что проекціи перемѣщенія (ξ, η, ζ) какой-нибудь точки ея разложены по степенямъ z'а, а именно:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \xi_0 + z\xi_1 + \frac{z^2}{2}\xi_2\\ \eta &= \eta_0 + z\eta_1 + \frac{z^2}{2}\eta_2\\ \zeta &= \zeta_0 + z\zeta_1 + \frac{z^2}{2}\zeta_2\end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

Это будутъ *кинематическія условія* задачи; при чемъ (ξ_0, η_0, ζ_0) будутъ опредѣляемыми изъ уравненій движенія величинами, а $\xi_1, \ldots \zeta_2$, какъ и ξ_0, η_0, ζ_0 суть функціи x, y и t.

Кинетическими условіями задачи будутъ слѣдующія:

$$1)\ X_z = 0; \quad 2)\ Y_z = 0 \quad \text{и} \quad 3)\ Z_z = 0 \quad \text{для } z = \pm\,\varepsilon.$$

При этомъ, разумѣется, упругія силы X_z, Y_z, Z_z связаны съ деформаціями $\partial_1, \partial_2, \ldots \partial_6$ слѣдующими соотношеніями:

$$X_z = \mu\partial_5 = \mu\left(\frac{\partial\xi}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right); \quad Y_z = \mu\partial_6 = \mu\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right);$$

$$Z_z = \lambda\Theta + 2\mu\partial_3, \quad \Theta = \partial_1 + \partial_2 + \partial_2; \quad \partial_4 = \frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x};$$

$$\partial_1 = \frac{\partial\xi}{\partial x}; \quad \partial_2 = \frac{\partial\eta}{\partial y}; \quad \partial_3 = \frac{\partial\zeta}{\partial z}.$$

Изъ условій 1), 2) и 3) мы должны опредѣлить *шесть* функцій:

$$\xi_1, \eta_1; \quad \xi_2, \eta_2; \quad \zeta_1 \text{ и } \zeta_2.$$

Изъ (A) находимъ:

$$\partial_5 = \xi_1 + \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} + z\left(\xi_2 + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x}\right) + \frac{z^2}{2}\frac{\partial \zeta_2}{\partial x},$$

$$\partial_6 = \eta_1 + \frac{\partial \zeta_0}{\partial y} + z\left(\eta_2 + \frac{\partial \zeta_1}{\partial y}\right) + \frac{z^2}{2}\frac{\partial \zeta_2}{\partial y};$$

Подставляя въ (1) и (2) и полагая $z = \pm \varepsilon$, находимъ двѣ системы:

$$\xi_1 + \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} + \varepsilon\left(\xi_2 + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x}\right) + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial \zeta_2}{\partial x} = 0;$$

$$\eta_1 + \frac{\partial \zeta_0}{\partial y} + \varepsilon\left(\eta_2 + \frac{\partial \zeta_1}{o y}\right) + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial \zeta_2}{\partial y} = 0 \text{ для } z = +\varepsilon;$$

$$\xi_1 + \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} - \varepsilon\left(\xi_2 + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x}\right) + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial \zeta_2}{\partial x} = 0;$$

$$\eta_1 + \frac{\partial \zeta_0}{\partial y} - \varepsilon\left(\eta_2 + \frac{\partial \zeta_1}{\partial y}\right) + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial \zeta_2}{\partial y} = 0 \text{ для } z = -\varepsilon.$$

Отсюда черезъ сложеніе и вычитаніе находимъ:

$$\text{a) } \xi_1 + \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial \zeta_2}{\partial x} = 0; \qquad \text{c) } \eta_1 + \frac{\partial \zeta_0}{\partial y} + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial \zeta_2}{\partial y} = 0;$$

$$\text{b) } \xi_2 + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} = 0; \qquad \text{d) } \eta_2 + \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} = 0.$$

Далѣе составимъ Θ. Имѣемъ сначала:

$$\partial_1 = \frac{\partial \xi_0}{\partial x} + z\frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{z^2}{2}\frac{\partial \xi_2}{\partial x}; \quad \partial_2 = \frac{\partial \eta_0}{\partial y} + z\frac{\partial \eta_1}{\partial y} + \frac{z^2}{2}\frac{\partial \eta_2}{\partial y}; \quad \partial_3 = \zeta_1 + z\zeta_2.$$

Отсюда, положивъ для простоты расчетовъ:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x} + \frac{\partial \eta_i}{\partial y} = \theta_i \qquad (i=0,\ 1,\ 2)$$

находимъ:

$$\Theta = \theta_0 + \zeta_1 + z(\theta_1 + \zeta_2) + \frac{z^2}{2}\theta_2.$$

Теперь условіе (3) даетъ:

$$\lambda(\theta_0+\zeta_1)+\varepsilon\lambda(\theta_1+\zeta_2)+\frac{\varepsilon^2\lambda}{2}\theta_2+2\mu\zeta_1+2\mu\varepsilon\zeta_2=0 \quad \text{для } z=+\varepsilon;$$

$$\lambda(\theta_0+\zeta_1)-\varepsilon\lambda(\theta_1+\zeta_2)+\frac{\varepsilon^2\lambda}{2}\theta_2+2\mu\zeta_1-2\mu\varepsilon\zeta_2=0 \quad \text{для } z=-\varepsilon.$$

Отсюда черезъ сложеніе и вычитаніе находимъ:

$$\lambda\theta_0+(\lambda+2\mu)\zeta_1+\frac{\varepsilon^2}{2}\lambda\theta_2=0 \tag{e}$$

$$\lambda\theta_1+(\lambda+2\mu)\zeta_2=0. \tag{f}$$

Теперь изъ полученныхъ *шести* уравненій (a) — (f) мы должны опредѣлить *шесть* функцій: ξ_1, η_1; ξ_2, η_2; ζ_1 и ζ_2 посредствомъ ξ_0, η_0, ζ_0, которые сами опредѣлятся, какъ уже упомянуто, изъ уравненій движенія. При этомъ точность опредѣленія $\xi_1, \ldots \zeta_2$, а по нимъ ∂_1, ∂_2, ∂_3, ∂_4 (ибо $\partial_5=0$, $\partial_6=0$) должна быть порядка малой величины ε^2; а потому ξ_1 и η_1 придется взять лишь съ точностью порядка ε и лишь ζ_1 съ точностью ε^2 и то только для составленія ∂_3; точно также ξ_2, η_2 и ζ_2 достаточно опредѣлить лишь съ точностью ε. Въ виду этого опредѣляемъ сначала ξ_1 и η_1 изъ (a) и (c) и находимъ съ сказанной точностью:

$$\xi_1=-\frac{\partial\zeta_0}{\partial x}, \quad \eta_1=-\frac{\partial\zeta_0}{\partial y} \tag{I}$$

Затѣмъ изъ (e) находимъ сначала

$$\zeta_1=-\alpha\theta_0-\frac{\varepsilon^2}{2}\alpha\theta_2 \tag{g}$$

и взявъ для опредѣленія ξ_2 и η_2 изъ (b) и (d) $\zeta_1=-\alpha\theta_0$, находимъ:

$$\xi_2=\alpha\frac{\partial\theta_0}{\partial x}, \quad \eta_2=\alpha\frac{\partial\theta_0}{\partial y} \tag{II}$$

и затѣмъ обратно изъ (g) получимъ:

$$\zeta_1=-\alpha\theta_0-\frac{\alpha^2\varepsilon^2}{2}\Delta\theta_0 \tag{III}$$

гдѣ вообще положено:

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \text{и} \quad \alpha=\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}$$

Наконецъ изъ (f) при помощи (I) нашли бы:

$$\zeta_2 = \alpha \Delta \zeta_0 \tag{IV}$$

или съ точностью ε^2:

$$\zeta_2 = \alpha \Delta \zeta_0 + \frac{\alpha^2 \varepsilon^2}{2} \Delta \Delta \zeta_0 \tag{IV bis}$$

Такимъ образомъ всѣ функціи $\xi_1, \ldots \zeta_2$ опредѣлены.

Если бы пожелали опредѣлить ξ_1 и η_1 съ точностью ε^2, то изъ (a) и (c) при помощи (IV) получили бы:

$$\xi_1 = -\frac{\partial \zeta_0}{\partial x} - \frac{\alpha \varepsilon^2}{2} \frac{\partial \Delta \zeta_0}{\partial x}; \quad \eta_1 = -\frac{\partial \zeta_0}{\partial y} - \frac{\alpha \varepsilon^2}{2} \frac{\partial \Delta \zeta_0}{\partial y} \tag{I bis}$$

Теперь находимъ:

$$\xi = \xi_0 - Az + A_1 z^2; \quad \eta = \eta_0 - Bz + B_1 z^2; \quad \zeta = \zeta_0 - Cz + C_1 z^2,$$

гдѣ положено для краткости письма:

$$A = \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} + \frac{\alpha \varepsilon^2}{2} \frac{\partial \Delta \zeta_0}{\partial x}; \quad B = \frac{\partial \zeta_0}{\partial y} + \frac{\alpha \varepsilon^2}{2} \frac{\partial \Delta \zeta_0}{\partial y}; \quad C = \alpha \theta_0 + \frac{\alpha^2 \varepsilon^2}{2} \Delta \theta_0;$$

$$A_1 = \frac{\alpha}{2} \frac{\partial \theta_0}{\partial x}; \quad B_1 = \frac{\alpha}{2} \frac{\partial \theta_0}{\partial y}; \quad C_1 = \frac{\alpha}{2} \Delta \zeta_0 + \frac{\alpha^2 \varepsilon^2}{4} \Delta \Delta \zeta_0.$$

При этомъ B и B_1 построены аналогично съ A и A_1; стоитъ только ось x-овъ замѣнить осью y-овъ.

Далѣе находимъ:

$$\partial_1 = \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} + \frac{\alpha z^2}{2} \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x^2} - z \frac{\alpha \varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 \Delta \zeta_0}{\partial x^2};$$

$$\partial_2 = \frac{\partial \eta_0}{\partial y} - z \left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} + \frac{\alpha \varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 \Delta \zeta_0}{\partial y^2} \right) + \frac{\alpha z^2}{2} \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial y^2};$$

$$\partial_3 = -\alpha \theta_0 - \frac{\alpha^2 \varepsilon^2}{2} \Delta \theta_0 + \alpha z \Delta \zeta_0 + \frac{\alpha^2 \varepsilon^2}{2} z \Delta \Delta \zeta_0;$$

$$\partial_4 = \frac{\partial \xi_0}{\partial y} + \frac{\partial \eta_0}{\partial x} - 2z \left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x \partial y} + \frac{\alpha \varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 \Delta \zeta_0}{\partial x \partial y} \right) + z^2 \alpha \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x \partial y}.$$

Можно придать для краткости и симметріи письма выраженіямъ для $A, \ldots C_1$; $\partial_1, \ldots \partial_4$ другой видъ.

Положимъ:

$$\Xi = \xi_0 + \frac{\alpha\varepsilon^2}{2}\Delta\xi_0;\ H = \eta_0 + \frac{\alpha\varepsilon^2}{2}\Delta\eta_0;\ Z = \zeta_0 + \frac{\alpha\varepsilon^2}{2}\Delta\zeta_0 \text{ и } \Theta_0 = \frac{\partial\Xi}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y};$$

тогда получимъ:

$$A = \frac{\partial Z}{\partial x},\quad B = \frac{\partial Z}{\partial y} \quad \text{и} \quad C = \alpha\left(\frac{\partial\Xi}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}\right) = \alpha\,\Theta_0,$$

ибо, какъ нетрудно убѣдиться, что

$$\Theta_0 = \theta_0 + \frac{\alpha\varepsilon^2}{2}\Delta\theta_0 \text{ и } C_1 = \frac{\alpha}{2}\Delta Z.$$

Затѣмъ находимъ:

$$\partial_1 = \frac{\partial\xi_0}{\partial x} - z\frac{\partial A}{\partial x} + z^2\frac{\partial A_1}{\partial x}$$

или:

$$\partial_1 = \frac{\partial\xi_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\alpha}{2}z^2\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x^2}.$$

Точно также:

$$\partial_2 = \frac{\partial\eta_0}{\partial y} - z\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \frac{\alpha}{2}z^2\frac{\partial^2\theta_0}{\partial y^2}.$$

Затѣмъ:

$$\partial_3 = -\alpha\,\Theta_0 + \alpha z\Delta\zeta_0 + \frac{\alpha^2\varepsilon^2}{2}z\Delta\Delta\zeta_0$$

или:

$$\partial_3 = -\alpha\,\Theta_0 + \alpha z\Delta Z.$$

Наконецъ находимъ:

$$\partial_4 = \frac{\partial\xi_0}{\partial y} + \frac{\partial\eta_0}{\partial x} - 2z\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y} + z^2\alpha\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x\,\partial y}.$$

Составимъ теперь функцію F, т. е. потенціалъ упругихъ силъ разсчитанный на единицу объема. Мы знаемъ, что ему можно дать въ нашемъ случаѣ ($\partial_5 = 0,\ \partial_6 = 0$) видъ:

$$F = \frac{\lambda}{2\alpha}(\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2) + \lambda(\partial_1\partial_2 + (\partial_1 + \partial_2)\partial_3) + \frac{\mu}{2}\partial_4^2.$$

Составляемъ послѣдовательно:

$$\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 = \left(\frac{\partial\xi_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta_0}{\partial y}\right)^2 + \alpha^2\Theta_0^2 + z^2\left[\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right)^2 + \alpha^2(\Delta Z)^2 + \right.$$

$$\left. + \alpha\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial x}\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x^2} + \frac{\partial\eta_0}{\partial y}\frac{\partial^2\theta_0}{\partial y^2}\right)\right] + \text{члены съ } z\text{'омъ},$$

$$\partial_1\partial_2+(\partial_1+\partial_2)\partial_3=\frac{\partial\xi_0}{\partial x}\frac{\partial\eta_0}{\partial y}-\alpha\,\Theta_0\theta_0+z^2\Bigg[\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}+\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial x}\frac{\partial^2\theta_0}{\partial y^2}+\frac{\partial\eta_0}{\partial y}\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x^2}\right)-$$
$$-\frac{\alpha^2}{2}\,\Theta_0\Delta\theta_0-\alpha\,(\Delta Z)^2\Bigg]+\text{члены съ } z\text{'мъ};$$

наконецъ:

$$\partial_4^2=\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial y}+\frac{\partial\eta_0}{\partial x}\right)^2+2z^2\left[\alpha\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial y}+\frac{\partial\eta_0}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x\partial y}+2\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}\right)^2\right]+\text{члены съ } z\text{'омъ}.$$

Мы съ умысломъ не выписываемъ членовъ съ z'омъ, ибо они, какъ ниже увидимъ, въ окончательномъ результатѣ исчезнутъ.

Теперь находимъ функцію F, отдѣливъ въ ней члены съ ξ_0, η_0 и слѣдов. съ θ_0 и Θ_0 отъ членовъ съ ζ_0, т. е. съ Z. Получаемъ:

$$F=\Bigg\{\frac{\lambda}{2\alpha}\left(\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta_0}{\partial y}\right)^2+\alpha^2\Theta_0^2\right)+\lambda\,\frac{\partial\xi_0}{\partial x}\frac{\partial\eta_0}{\partial y}+\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial y}+\frac{\partial\eta_0}{\partial x}\right)^2-\lambda\alpha\Theta_0\theta_0+$$
$$+z^2\left[\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial x}\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x^2}+\frac{\partial\eta_0}{\partial y}\frac{\partial^2\theta_0}{\partial y^2}\right)+\frac{\lambda\alpha}{2}\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial x}\frac{\partial^2\theta_0}{\partial y^2}+\frac{\partial\eta_0}{\partial y}\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x^2}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{\lambda\alpha^2}{2}\Theta_0\Delta\theta_0+\mu\alpha\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial y}+\frac{\partial\eta_0}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x\partial y}\right]\Bigg\}+z^2\left[\frac{\lambda}{2\alpha}\left(\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right)^2+\alpha^2(\Delta Z)^2\right)+\right.$$
$$\left.+\lambda\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}-\lambda\alpha(\Delta Z)^2+2\mu\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}\right)^2\right]+\text{члены съ } z\text{'омъ}.$$

Напишемъ на время это выраженіе такъ:

$$F=F_0(\xi_0,\eta_0)+z^2F_1(\xi_0,\eta_0)+z^2F_2(\zeta_0)+\text{члены съ } z\text{'омъ}.$$

Поэтому термодинамическій потенціалъ U будетъ: ($d\tau=dxdydz=$ $=dS.dz$)

$$U=\int dS\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}F dz=\int dS\left[2\varepsilon F_0(\xi_0,\eta_0)+\underline{\frac{2\varepsilon^3}{3}F_1(\xi_0,\eta_0)}+\frac{2\varepsilon^3}{3}F_2(\zeta_0)\right];$$

члены же съ z'омъ исчезнутъ.

Итакъ:

$$U=2\varepsilon\int dS\left(F_0(\xi_0,\eta_0)+\underline{\frac{\varepsilon^2}{3}F_1(\xi_0,\eta_0)}\right)+\frac{2\varepsilon^3}{3}\int dSF_2(\zeta_0),$$

или:

$$U=2\varepsilon(U_0+\underline{U_1})+U_s(\zeta_0),$$

гдѣ:

$$U_0=\int F_0(\xi_0,\eta_0)dS,\quad U_1=\frac{\varepsilon^2}{3}\int F_1(\xi_0,\eta_0)dS \quad\text{и}\quad U_s(\zeta_0)=\frac{2\varepsilon^3}{3}\int F_2(\zeta_0)dS.$$

Подчеркнутые члены съ $F_1(\xi_0, \eta_0)$ могутъ быть отброшены, какъ малыя величины 2-го порядка. Слѣд. при такой степени приближенія часть U_1 можно не вычислять.

Ясно, что первый интегралъ въ U дастъ продольныя колебанія, а второй поперечныя. Далѣе, такъ какъ $F_1(\xi_0, \eta_0)$ и $F_2(\zeta_0)$ умножаются на ε^3, то при ихъ вычисленіи слѣдуетъ брать θ_0 вмѣсто Θ_0 и ζ_0 вмѣсто Z, отчего вычисленія упрощаются.

Итакъ будемъ имѣть послѣ небольшихъ и очевидныхъ упрощеній:

$$F_0(\xi_0, \eta_0) = \frac{\lambda}{2\alpha}\left(\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta_0}{\partial y}\right)^2\right) + \lambda \frac{\partial \xi_0}{\partial x}\frac{\partial \eta_0}{\partial y} + \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial y} + \frac{\partial \eta_0}{\partial x}\right)^2 + \lambda\alpha\left(\frac{\Theta_0^2}{2} - \Theta_0\theta_0\right);$$

$$F_1(\xi_0, \eta_0) = \frac{\lambda}{2}\left[\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x}\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \eta_0}{\partial y}\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial y^2}\right) + \alpha\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x}\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial y^2} + \frac{\partial \eta_0}{\partial y}\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x^2}\right) - \alpha^2\theta_0 \Delta\theta_0\right] +$$
$$+ \mu\alpha\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial y} + \frac{\partial \eta_0}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x \partial y};$$

$$F_2(\zeta_0) = \frac{\lambda}{2\alpha}\left(\left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2}\right)^2 + 2\alpha\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} - \alpha^2(\Delta\zeta_0)^2\right) + 2\mu\left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x \partial y}\right)^2$$

или еще:

$$F_2(\zeta_0) = \frac{\lambda(1-\alpha)}{2\alpha}\left[(1+\alpha)\left(\left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2}\right)^2\right) + 2\alpha\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2}\right] + 2\mu\left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x \partial y}\right)^2 \quad (1)$$

Можно придать другой видъ функціи $F_2(\zeta_0)$, а вмѣстѣ съ тѣмъ и потенціальной функціи U_1.

Формула для $F_2(\zeta_0)$, (1) этой стр. будетъ имѣть, если въ скобкахъ прибавить и вычесть членъ:

$$2(1+\alpha)\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2}$$

слѣдующій видъ:

$$F_2(\zeta_0) = \frac{\lambda(1-\alpha)}{2\alpha}\left[(1+\alpha)(\Delta\zeta_0)^2 - 2\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2}\right] + 2\mu\left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x \partial y}\right)^2,$$

но (стр. 168):

$$\frac{\lambda(1-\alpha)}{2\alpha} = \mu,$$

слѣдовательно получимъ:

$$F_2(\zeta_0) = \frac{\lambda(1-\alpha^2)}{2\alpha}(\Delta\zeta_0)^2 - 2\mu\left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x \partial y}\right)^2\right)$$

или:

$$F_2(\zeta_0) = \frac{\lambda(1-\alpha^2)}{2\alpha}\left[(\Delta\zeta_0)^2 - \frac{4\mu\alpha}{\lambda(1-\alpha^2)}\left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x \partial y}\right)^2\right)\right].$$

Введемъ отношеніе поперечнаго сжатія къ продольному растяженію стержня, сдѣланнаго изъ матеріала пластинки; это отношеніе, называя его σ, будетъ:

$$\sigma=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)},\quad \text{слѣд. } 1-\sigma=\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)},\quad 1+\sigma=\frac{3\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)},$$

а также модуль упругости:

$$E=\mu\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}=2\mu(1+\sigma).$$

Тогда найдемъ во 1-хъ;

$$\frac{4\mu\alpha}{\lambda(1-\alpha^2)}=\frac{2\alpha}{\lambda(1-\alpha)}\frac{1}{1+\alpha}2\mu=\frac{1}{\mu}\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}2\mu=2(1-\sigma),$$

и во 2-хъ:

$$\frac{\lambda(1-\alpha^2)}{2\alpha}=\mu\frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}=\frac{\mu}{1-\sigma}=\frac{2\mu(1+\sigma)}{2(1-\sigma^2)}=\frac{E}{2(1-\sigma^2)},$$

а потому:

$$F_2(\zeta_0)=\frac{E}{2(1-\sigma^2)}\left[(\Delta\zeta_0)^2-2(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\right)^2\right)\right].$$

Слѣдовательно для $U_s(\zeta_0)$ получимъ выраженіе:

$$U_s=\frac{E\varepsilon^3}{3(1-\sigma^2)}\int dS\left[(\Delta\zeta_0)^2-2(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\right)^2\right)\right].$$

При этомъ полезно замѣтить, что:

$$\frac{\lambda(1-\alpha)}{2\alpha}=\mu;\quad 1+\alpha=\frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu};\quad 1-\alpha=\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}.$$

Сверхъ того тоже важно замѣтить, что съ нашимъ приближеніемъ имѣемъ:

$$\frac{1}{2}\Theta_0^2-\Theta_0\theta_0=-\frac{1}{2}\theta_0^2=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial x}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta_0}{\partial y}\right)^2-\frac{\partial\xi_0}{\partial x}\frac{\partial\eta_0}{\partial y},$$

а потому для $F_0(\xi_0,\eta_0)$ получимъ болѣе простое выраженіе:

$$F_0(\xi_0,\eta_0)=\lambda(1-\alpha)\left[\frac{1+\alpha}{2\alpha}\left(\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta_0}{\partial y}\right)^2\right)+\frac{\partial\xi_0}{\partial x}\frac{\partial\eta_0}{\partial y}\right]+$$
$$+\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial y}+\frac{\partial\eta_0}{\partial x}\right)^2. \tag{2}$$

Точно также можно еще упростить и функцію $F_1(\xi_0, \eta_0)$. Находимъ, замѣнивъ θ_0 его значеніемъ $\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x} + \frac{\partial \eta_0}{\partial y}\right)$ въ членѣ $-\alpha^2 \theta_0 \Delta \theta_0$:

$$F_1(\xi_0, \eta_0) = \frac{\lambda(1+\alpha)}{2}\Bigg[(1+\alpha)\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x}\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \eta_0}{\partial y}\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial y^2}\right) +$$

$$+ \alpha\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x}\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial y^2} + \frac{\partial \eta_0}{\partial y}\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x^2}\right)\Bigg] + \mu\alpha\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial y} + \frac{\partial \eta_0}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x \partial y}. \qquad (3)$$

Положимъ въ основномъ уравненіи движенія, которое беремъ въ извѣстной формѣ Гельмгольца:

$$\varrho \int dS \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dz \left[\frac{d^2 \xi}{dt^2}\delta\xi + \frac{d^2 \eta}{dt^2}\delta\eta + \frac{d^2 \zeta}{dt^2}\delta\zeta\right] = R,$$

тогда основное уравненіе движенія будетъ имѣть видъ:

$$R + \delta U = 0.$$

Вычислимъ теперь R. Формулы стр. 169-й даютъ:

$$R = \varrho \int dS \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dz \left\{\left(\frac{d^2 \xi_0}{dt^2} - z\frac{d^2 A}{dt^2} + z^2 \frac{d^2 A_1}{dt^2}\right)(\delta\xi_0 - z\delta A + z^2 \delta A_1) + \ldots\right\} =$$

$$= \varrho \int dS \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dz \Bigg\{\left[\frac{d^2 \xi_0}{dt^2}\delta\xi_0 + \frac{d^2 \eta_0}{dt^2}\delta\eta_0 + \frac{d^2 \zeta_0}{dt^2}\delta\zeta_0\right] + z^2\Bigg[\frac{d^2 \xi_0}{dt^2}\delta A_1 + \frac{d^2 A}{dt^2}\delta A +$$

$$+ \frac{d^2 A_1}{dt^2}\delta\xi_0\Bigg] + \text{под. члены для } \eta_0 \text{ и } \zeta_0 + \text{члены съ } z\text{'мъ}\Bigg\}.$$

Интегрируя по z, находимъ:

$$R = 2\varrho\varepsilon \int dS \Bigg\{\left(\frac{d^2 \xi_0}{dt^2}\delta\xi_0 + \frac{d^2 \eta_0}{dt^2}\delta\eta_0 + \frac{d^2 \zeta_0}{dt^2}\delta\zeta_0\right) +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{3}\left(\frac{d^2 A_1}{dt^2}\delta\xi_0 + \frac{d^2 B_1}{dt^2}\delta\eta_0 + \frac{d^2 C_1}{dt^2}\delta\zeta_0\right) + \frac{\varepsilon^2}{3}\Bigg[\left(\frac{d^2 A}{dt^2}\delta A + \frac{d^2 B}{dt^2}\delta B + \frac{d^2 C}{dt^2}\delta C\right) +$$

$$+ \left(\frac{d^2 \xi_0}{dt^2}\delta A_1 + \frac{d^2 \eta_0}{dt^2}\delta B_1 + \frac{d^2 \zeta_0}{dt^2}\delta C_1\right)\Bigg]\Bigg\}.$$

Такъ-какъ коэффиціенты $A, \ldots C_1$ входятъ при множителѣ ε^2, то въ нихъ слѣдуетъ взять:

$$A = \frac{\partial \zeta_0}{\partial x}; \quad B = \frac{\partial \zeta_0}{\partial y}; \quad C = \alpha\theta_0; \quad A_1 = \frac{\alpha}{2}\frac{\partial \theta_0}{\partial x}; \quad B_1 = \frac{\alpha}{2}\frac{\partial \theta_0}{\partial y}; \quad C_1 = \frac{\alpha}{2}\Delta\zeta_0;$$

такимъ образомъ для *продольныхъ колебаній* будемъ имѣть члены съ C, A_1 и B_1; а для *поперечныхъ* — члены съ A, B и C_1. Поэтому мы разобьемъ выраженіе R на два, положивъ:

$$R = R(\xi_0, \eta_0) + R(\zeta_0)$$

и тогда

$$R(\xi_0, \eta_0) = 2\varrho\varepsilon \int dS \left\{ \frac{d^2\xi_0}{dt^2}\delta\xi_0 + \frac{d^2\eta_0}{dt_0}\delta\eta_0 + \frac{\varepsilon^2}{3}\left(\frac{d^2A_1}{dt^2}\delta\xi_0 + \frac{d^2B_1}{dt^2}\delta\eta_0 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{d^2C}{dt^2}\delta C + \frac{d^2\xi_0}{dt^2}\delta A_1 + \frac{d^2\eta_0}{dt^2}\delta B_1 \right)\right\};$$

$$R(\zeta_0) = 2\varrho\varepsilon \int dS \left\{ \frac{d^2\zeta_0}{dt^2}\delta\zeta_0 + \frac{\varepsilon^2}{3}\left(\frac{d^2C_1}{dt^2}\delta\zeta_0 + \frac{d^2A}{dt^2}\delta A + \frac{d^2B}{dt^2}\delta B + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{d^2\zeta_0}{dt^2}\delta C_1 \right)\right\}.$$

Теперь намъ надо раскрыть варіаціи $\delta A, \ldots \delta C_1$, сведя ихъ къ $\delta\xi_0$, $\delta\eta_0$ и $\delta\zeta_0$. Основаніемъ преобразованій будутъ служить слѣдующія формулы интегральнаго исчисленія:

$$\int u\frac{\partial v}{\partial x}dS = \int uv\cos(nx)\,ds - \int v\frac{\partial u}{\partial x}dS,$$

$$\int u\frac{\partial v}{\partial y}dS = \int uv\cos(ny)\,ds - \int v\frac{\partial u}{\partial y}dS,$$

причемъ ds есть элементъ контура, а n — направленіе нормали къ нему, проведенной внутрь ограниченной контуромъ площади.

Преобразуемъ сначала $R(\zeta_0)$. Интегралы съ δA и δB даютъ по подстановкѣ въ δA и δB значеній:

$$A = \frac{\partial \zeta_0}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial \zeta_0}{\partial y}$$

и интегрированіи по частямъ:

$$\int dS\left(\frac{d^2A}{dt^2}\delta A + \frac{d^2B}{dt^2}\delta B \right) = \int ds\left[\frac{d^2A}{dt^2}\cos(nx) + \frac{d^2B}{dt^2}\cos(ny) \right]\delta\zeta_0 -$$
$$- \int dS\left(\frac{d^3A}{dt^2 dx} + \frac{d^3B}{dt^2 dy} \right)\delta\zeta_0.$$

Затѣмъ послѣ двукратнаго примѣненія интегрированія по частямъ находимъ:

$$\int dS \frac{d^2\zeta_0}{dt^2}\,\delta C_1 = \frac{\alpha}{2}\int ds\left[\frac{d^2\zeta_0}{dt^2}\left(\cos(nx)\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial x} + \cos(ny)\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial y}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{d^3\zeta_0}{dt^2\partial x}\cos(nx) + \frac{d^3\zeta_0}{dt^2\partial y}\cos(ny)\right)\delta\zeta_0\right] + \frac{\alpha}{2}\int dS\left(\frac{d^4\zeta_0}{dt^2\partial x^2} + \frac{d^4\zeta_0}{dt^2\partial y^2}\right)\delta\zeta_0.$$

Соединяя все это вмѣстѣ и подставляя вмѣсто A, B и C_1 ихъ значенія, находимъ:

$$R(\zeta_0) = 2\varrho\varepsilon\int dS\left[\frac{d^2\zeta_0}{dt^2} - \underline{\frac{\varepsilon^2(1-\alpha)}{3}\frac{d^2\Delta\zeta_0}{dt^2}}\right]\delta\zeta_0 + \frac{2\varrho\varepsilon^3}{3}\int ds\left[\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left(\underline{\frac{d^3\zeta_0}{dt^2\partial x}\cos(nx) +}\right.\right.$$

$$\left.\left.\underline{+ \frac{d^3\zeta_0}{dt^2\partial y}\cos(ny)\right)\delta\zeta_0 + \frac{\alpha}{2}\frac{d^2\zeta_0}{dt^2}\left(\cos(nx)\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial x} + \cos(ny)\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial y}\right)}\right].$$

Это выраженіе можно представить въ болѣе компактномъ видѣ, если ввести обозначеніе:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cos(nx) + \frac{\partial f}{\partial y}\cos(ny) = \frac{\partial f}{\partial n}.$$

Полагая послѣдовательно въ этой формулѣ:

$$f = \frac{d^2\zeta_0}{dt^2} \quad \text{и} \quad f = \delta\zeta_0,$$

получимъ:

$$R(\zeta_0) = 2\varrho\varepsilon\int dS\left(\frac{d^2\zeta_0}{dt^2} - \underline{\frac{\varepsilon^2(1-\alpha)}{3}\frac{d^2\Delta\zeta_0}{dt^2}}\right)\delta\zeta_0 +$$

$$+ \frac{2\varrho\varepsilon^3}{3}\int dS\left[\underline{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\partial}{\partial n}\frac{d^2\zeta_0}{dt^2}\,\delta\zeta_0 + \frac{\alpha}{2}\frac{d^2\zeta_0}{dt^2}\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial n}}\right]. \qquad \text{(I)}$$

Подчеркнутые члены по сравненіи съ первыми можно отбросить, какъ малыя количества 2-го порядка.

Здѣсь можно, если угодно, взять:

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{d^2\zeta_0}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial\zeta_0}{\partial n}.$$

Займемся теперь членомъ $R(\xi_0, \eta_0)$.

Вводя значенія:

$$C = \alpha\theta_0 = \alpha\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial x} + \frac{\partial\eta_0}{\partial y}\right); \quad A_1 = \frac{\alpha}{2}\frac{\partial\theta_0}{\partial x}; \quad B_1 = \frac{\alpha}{2}\frac{\partial\theta_0}{\partial y},$$

находимъ сначала:

$$\int dS\frac{d^2C}{dt^2}\delta C = \alpha^2\int ds\frac{d^2\theta_0}{dt^2}(\cos(nx)\,\delta\xi_0+\cos(ny)\,\delta\eta_0) - \alpha^2\int dS\left(\frac{d^3\theta_0}{dt^2\partial x}\,\delta\xi_0+\frac{d^3\theta_0}{dt^2\partial y}\,\delta\eta_0\right);$$

$$\int dS\left(\frac{d^2\xi_0}{dt^2}\,\delta A_1+\frac{d^2\eta_0}{dt^2}\,\delta B_1\right)=\frac{\alpha}{2}\int ds\left[\left(\frac{d^2\xi_0}{dt^2}\cos(nx)+\frac{d^2\eta_0}{dt^2}\cos(ny)\right)\delta\theta_0 - \frac{d^2\theta_0}{dt^2}(\cos(nx)\,\delta\xi_0+\cos(ny)\,\delta\eta_0)\right]+\frac{\alpha}{2}\int dS\left(\frac{d^3\theta_0}{dt^2\partial x}\,\delta\xi_0+\frac{d^3\theta_0}{dt^2\partial y}\,\delta\eta_0\right),$$

а затѣмъ:

$$R(\xi_0,\eta_0)=2\varrho\varepsilon\left\{\int dS\left[\left(\frac{d^2\xi_0}{dt^2}+\frac{\varepsilon^2\alpha}{6}\,\frac{d^3\theta_0}{dt^2\partial x}-\frac{\varepsilon^2\alpha^2}{3}\,\frac{d^3\theta_0}{dt^2\partial x}+\frac{\varepsilon^2\alpha}{6}\,\frac{d^3\theta_0}{dt^2\partial x}\right)\delta\xi_0+(\text{под. члены съ}\,\eta_0,y)\,\delta\eta_0\right]+\frac{\varepsilon^2}{3}\int ds\left[\left(\alpha^2\frac{d^2\theta_0}{dt^2}-\frac{\alpha}{2}\,\frac{d^2\theta_0}{dt^2}\right)(\cos(nx)\,\delta\xi_0+\cos(ny)\,\delta\eta_0)+\frac{\alpha}{2}\left(\frac{d^2\xi_0}{dt^2}\cos(nx)+\frac{d^2\eta_0}{dt^2}\cos(ny)\right)\delta\theta_0\right]\right\},$$

или по приведеніи:

$$R(\xi_0,\eta_0)=2\varrho\varepsilon\int dS\left[\left(\frac{d^2\xi_0}{dt^2}+\underline{\frac{\varepsilon^2\alpha(1-\alpha)}{3}\,\frac{d^3\theta_0}{dt^2\partial x}}\right)\delta\xi_0+\left(\frac{d^2\eta_0}{dt^2}+\underline{\frac{\varepsilon^2\alpha(1-\alpha)}{3}\,\frac{d^3\theta_0}{dt^2\partial y}}\right)\delta\eta_0\right]+\frac{2\varrho\varepsilon^3\alpha}{3}\int ds\left[\underline{\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\frac{d^2\theta_0}{dt^2}(\cos(nx)\,\delta\xi_0+\cos(ny)\,\delta\eta_0)}+\frac{1}{2}\underline{\left(\frac{d^2\xi_0}{dt^2}\cos(nx)+\frac{d^2\eta_0}{dt^2}\cos(ny)\right)\delta\theta_0}\right]. \qquad \text{(II)}$$

Подчеркнутые члены, какъ малые 2-го порядка, можно отбросить.

Формулу (II) можно написать въ болѣе подробномъ видѣ, замѣнивъ $\delta\theta_0$ его значеніемъ:

$$\delta\theta_0=\frac{\partial}{\partial x}\,\delta\xi_0+\frac{\partial}{\partial y}\,\delta\eta_0.$$

Пользуясь формулами (a) стр. 4-й и полагая предварительно:

$$\text{уголъ}\ \widehat{n,x}=\varphi \quad\text{и}\quad M=\frac{d^2\xi_0}{dt^2}\cos\varphi+\frac{d^2\eta_0}{dt^2}\sin\varphi, \qquad \text{(a)}$$

найдемъ:

$$\int Mds\delta\theta_0=-\int ds\left(\frac{\partial(M\sin\varphi)}{\partial s}\,\delta\xi_0-\frac{\partial(M\cos\varphi)}{\partial s}\,\delta\eta_0\right)+\int dsM\left(\cos\varphi\,\frac{\partial\delta\xi_0}{\partial n}+\sin\varphi\,\frac{\partial\delta\eta_0}{\partial n}\right),$$

а потому формула (II) стр. 177-ой напишется въ видѣ:

$$R(\xi_0, \eta_0) = 2\varrho\varepsilon\int dS\Bigg[\left(\frac{d^2\xi_0}{dt^2} + \underline{\frac{\alpha(1-\alpha)\varepsilon^2}{3}\frac{d^3\theta_0}{\partial x dt^2}}\right)\delta\xi_0 +$$

$$+\left(\frac{d^2\eta_0}{dt^2} + \underline{\frac{\alpha(1-\alpha)\varepsilon^2}{3}\frac{d^3\theta_0}{\partial y dt^2}}\right)\delta\eta_0\Bigg] + \underline{\frac{2\varrho\varepsilon^3\alpha}{3}\int ds\Bigg[\left(\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\frac{d^2\theta_0}{dt^2}\cos\phi -\right.}$$

$$\underline{\left.-\frac{1}{2}\frac{\partial(M\sin\phi)}{\partial s}\right)\delta\xi_0 + \left(\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\frac{d^2\theta_0}{dt^2}\sin\phi + \frac{1}{2}\frac{\partial(M\cos\phi)}{\partial s}\right)\delta\eta_0 +}$$

$$\underline{+\frac{1}{2}M\left(\cos\phi\frac{\partial\delta\xi_0}{\partial n} + \sin\phi\frac{\partial\delta\eta_0}{\partial n}\right)\Bigg]}. \qquad \text{(II bis)}$$

Подчеркнутые члены, какъ малыя величины 2-го порядка въ сравненіи съ оставляемымъ членомъ, можно отбросить.

Итакъ R найдено. Теперь надо преобразовать δU. Сначала займемся *поперечными колебаніями*. Для нихъ надо найти:

$$\delta U_s = \frac{2\varepsilon^3}{3}\int dS\delta F_2(\zeta_0),$$

причемъ:

$$F_2(\zeta_0) = a\left(\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2}\right)^2\right) + b\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2} + 2\mu\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\right)^2,$$

гдѣ положено:

$$a = \frac{\lambda(1-\alpha)(1+\alpha)}{2\alpha} = \frac{2\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}; \quad b = \lambda(1-\alpha) = \frac{2\mu\lambda}{\lambda+2\mu}.$$

Можно написать $F_2(\zeta_0)$ еще такъ:

$$F_2(\zeta_0) = 2\mu\left[a_1\left(\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2}\right)^2\right) + b_1\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\right)^2\right],$$

если положимъ:

$$a_1 = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}, \quad b_1 = \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} = \alpha.$$

Поэтому напишемъ:

$$\delta U = \frac{4\mu\varepsilon^3}{3}\int dS\left[\left(X\frac{\partial^2\delta\zeta_0}{\partial x^2} + Y\frac{\partial^2\delta\zeta_0}{\partial y^2}\right) + 2\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\delta\zeta_0}{\partial x\partial y}\right],$$

гдѣ положено на время:

$$X = 2a_1\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2} + b_1\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2}; \quad Y = 2a_1\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2}.$$

Примѣняя два раза интегрированіе по частямъ, находимъ:

$$\int dS\left[X\frac{\partial^2\delta\zeta_0}{\partial x^2}+Y\frac{\partial^2\delta\zeta_0}{\partial y^2}\right]=\int dS\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\right)\delta\zeta_0+$$

$$+\int ds\left[X\cos(nx)\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial x}+Y\cos(ny)\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial y}-\left(\frac{\partial X}{\partial x}\cos(nx)+\frac{\partial Y}{\partial y}\cos(ny)\right)\delta\zeta_0\right],$$

причемъ:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}=2a_1\left(\frac{\partial^4\zeta_0}{\partial x^4}+\frac{\partial^4\zeta_0}{\partial y^4}\right)+b_1\frac{\partial^4\zeta_0}{\partial x^2\partial y^2}.$$

Затѣмъ найдемъ:

$$\int dS\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial y}=\int ds\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\cos(nx)\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial y}-\frac{\partial^3\zeta_0}{\partial x^2\partial y}\cos(ny)\,\delta\zeta_0\right)+$$

$$+\int dS\frac{\partial^4\zeta_0}{\partial x^2\partial y^2}\delta\zeta_0;$$

$$\int dS\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial x}=\int ds\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\cos(ny)\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial x}-\frac{\partial^3\zeta_0}{\partial x\partial y^2}\cos(nx)\,\delta\zeta_0\right)+$$

$$+\int dS\frac{\partial^4\zeta_0}{\partial x^2\partial y^2}\delta\zeta_0.$$

Отсюда находимъ, складывая эти выраженія:

$$2\int dS\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\delta\zeta_0}{\partial x\partial y}=2\int dS\,\frac{\partial^4\zeta_0}{\partial x^2\partial y^2}\delta\zeta_0+\int ds\left[\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\left(\cos(nx)\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial y}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\cos(ny)\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial^3\zeta_0}{\partial x^2\partial y}\cos(ny)+\frac{\partial^3\zeta_0}{\partial x\partial y^2}\cos(nx)\right)\delta\zeta_0\right].$$

Подставляя все это въ δU_s и замѣчая, что

$$2b_1+2=4a_1,$$

находимъ:

$$\delta U_s=\frac{4\mu\varepsilon^3}{3}\int dS\left(2a_1\frac{\partial^4\zeta_0}{\partial x^4}+2a_1\frac{\partial^4\zeta_0}{\partial y^4}+2\frac{\partial^4\zeta_0}{\partial x^2\partial y^2}\right)+\frac{4\mu\varepsilon^3}{3}\int ds\left[\left(X\cos(nx)+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\cos(ny)\right)\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial x}+\left(Y\cos(ny)+\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\cos(nx)\right)\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial y}-\left(\frac{\partial X}{\partial x}\cos(nx)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial^3\zeta_0}{\partial x\partial y^2}\cos(nx)+\frac{\partial Y}{\partial y}\cos(ny)+\frac{\partial^3\zeta_0}{\partial x^2\partial y}\cos(ny)\right)\delta\zeta_0\right].$$

Но можно убѣдиться, что:

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial^3\zeta_0}{\partial x\partial y^2}=2a_1\frac{d\Delta\zeta_0}{\partial x};\quad \frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial^3\zeta_0}{\partial x^2\partial y}=2a_1\frac{\partial\Delta\zeta_0}{\partial y},$$

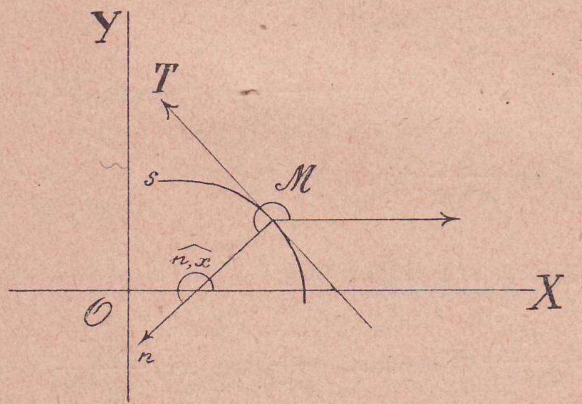
гдѣ

$$\Delta\zeta_0=\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2}.$$

Поэтому

$$\delta U_s=\frac{8\mu\alpha_1\varepsilon^3}{3}\int\Delta\Delta\zeta_0 dS+\frac{4\mu\varepsilon^3}{3}\int ds\left[\left(X\cos(nx)+\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\cos(ny)\right)\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial x}+\right.$$
$$\left.+\left(Y\cos(ny)+\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\cos(nx)\right)\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial y}\right]-\frac{8\mu a_1\varepsilon^3}{3}\int ds\left(\frac{\partial\Delta\zeta_0}{\partial x}\cos(nx)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\Delta\zeta_0}{\partial y}\cos(ny)\right)\delta\zeta_0.$$

Для дальнѣйшихъ преобразованій приведемъ одну теорему изъ дифференціальной геометріи.



Пусть имѣемъ функцію $f(x, y)$, тогда можно получить, если разсматривать $f(x, y)=0$, какъ уравненіе кривой:

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds},$$

$$\frac{\partial f}{\partial n}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n},$$

причемъ s и n обозначаютъ длину дуги и нормали къ кривой; но если уголъ $\widehat{n,x}=\phi$, то

$$\frac{dx}{dn}=\cos\phi;\quad \frac{dy}{dn}=\sin\phi;\quad \frac{dx}{ds}=\sin\phi;\quad \frac{dy}{ds}=-\cos\phi;$$

слѣд. предыдущія равенства будутъ:

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\sin\phi-\frac{\partial f}{\partial y}\cos\phi;\quad \frac{\partial f}{\partial n}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\phi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\phi.$$

Отсюда находимъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial s}\sin\phi+\frac{\partial f}{\partial n}\cos\phi;\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\partial f}{\partial s}\cos\phi+\frac{\partial f}{\partial n}\sin\phi. \qquad \text{(a)}$$

Преобразуемъ, пользуясь этими формулами, интегралъ по контуру s въ δU_s съ членами $\frac{\partial \delta \zeta_0}{\partial x}$ и $\frac{\partial \delta \zeta_0}{\partial y}$.

Замѣняя въ формулахъ (a) f черезъ $\delta\zeta_0$ и подставляя значенія $\frac{\partial \delta \zeta_0}{\partial x}$ и $\frac{\partial \delta \zeta_0}{\partial y}$ въ упомянутую часть интеграла, получимъ:

$$\int ds\left[\left(X\cos\phi + \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\sin\phi\right)\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial x} + \left(Y\sin\phi + \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\cos\phi\right)\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial y}\right] =$$
$$= \int ds\left[(X - Y)\sin\phi\cos\phi - \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}(\cos^2\phi - \sin^2\phi)\right]\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial s} +$$
$$+ \int ds\left[X\cos^2\phi + Y\sin^2\phi + 2\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\sin\phi\cos\phi\right]\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial n}.$$

Но

$$X - Y = \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2},$$

ибо

$$2a_1 - b_1 = 1.$$

Первый членъ предыдущаго равенства имѣетъ видъ:

$$\int F\frac{\partial f}{\partial s}ds = [Ff]_s^s - \int f\frac{\partial F}{\partial s}ds,$$

но первый членъ будетъ равенъ нулю,—ибо интегрированіе производится по *замкнутому контуру*,—поэтому получимъ:

$$\int ds\left[\left(X\cos\phi + \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\sin\phi\right)\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial x} + \left(Y\sin\phi + \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\cos\phi\right)\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial y}\right] =$$
$$= -\int\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2}\right)\sin\phi\cos\phi - \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}(\cos^2\phi - \sin^2\phi)\right]ds\delta\zeta_0 +$$
$$+ \int ds\left[X\cos^2\phi + Y\sin^2\phi + 2\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\sin\phi\cos\phi\right]\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial n}.$$

Подставляя все это въ формулу для δU_s стр. 180-й, получимъ:

$$\delta U_s = \frac{8\mu a_1\varepsilon^3}{3}\int \varDelta\varDelta\zeta_0 dS - \frac{4\mu\varepsilon^3}{3}\int ds\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2}\right)\sin\phi\cos\phi -\right.$$
$$\left. - \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}(\cos^2\phi - \sin^2\phi)\right]\delta\zeta_0 + \frac{4\mu\varepsilon^3}{3}\int ds\left[X\cos^2\phi + Y\sin^2\phi +\right.$$
$$\left. + 2\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\sin\phi\cos\phi\right]\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial n} - \frac{8\mu a_1\varepsilon^3}{3}\int ds\frac{\partial\varDelta\zeta_0}{\partial n}\delta\zeta_0. \qquad \text{(III)}$$

Можно упростить трехчленъ при $\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial n}$. Подставляя значенія X и Y и помня, что $2a_1 = b_1 + 1$, найдемъ, что:

$$X\cos^2\varphi + Y\sin^2\varphi + 2\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\sin\varphi\cos\varphi = \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2}\cos^2\varphi + \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2}\sin^2\varphi +$$
$$+ 2\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\cos\varphi\sin\varphi + b_1\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2}\right).$$

Причемъ

$$b_1 = \alpha = \frac{\theta}{1+\theta}$$

въ обозначеніяхъ Кирхгофа (у него наше $\mu = K$; $\lambda = 2K\theta$) и

$$2a_1 = \frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} + \frac{1+2\theta}{1+\theta}$$

въ тѣхъ же обозначеніяхъ.

Соединимъ теперь $R(\zeta_0)$ и δU_s. Они удовлетворяютъ равенству:

$$R(\zeta_0) + \delta U_s = 0;$$

подставляя сюда значенія $R(\zeta_0)$ и δU_s изъ (I) стр. 176 и (III) стр. 181, получимъ по раздѣленіи на $2\varrho\varepsilon$:

$$\int dS\left\{\frac{d^2\zeta_0}{dt^2} - \underline{\frac{\varepsilon^2(1-\alpha)}{3}\frac{d^2\Delta\zeta_0}{dt^2}} + \frac{4\mu a_1\varepsilon^2}{3\varrho}\Delta\Delta\zeta_0\right\}\delta\zeta_0 +$$
$$+ \frac{\varepsilon^2}{3}\int ds\left\{\left[\underline{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{d^2\zeta_0}{dt^2}\right)} - \frac{2\mu}{\varrho}\frac{\partial}{\partial s}\left(\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2}\right)\sin\varphi\cos\varphi - \right.\right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\right) - \frac{4\mu a_1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial n}(\Delta\zeta_0)\right]\delta\zeta_0 + \left[\underline{\frac{\alpha}{2}\frac{d^2\zeta_0}{dt^2}} + \frac{2\mu}{\varrho}\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2}\cos^2\varphi + \right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2}\sin^2\varphi + 2\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\sin\varphi\cos\varphi + \alpha\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2}\right)\right)\right]\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial n}\right\} = 0.$$

Подчеркнутые члены по замѣчаніямъ стр. 176 и 177 могутъ быть отброшены.

Это уравненіе распадается на *три*: *одно* для всѣхъ точекъ срединнаго сѣченія ($z = 0$) пластинки и *два* на контурѣ ея, а именно:

$$\frac{d^2\zeta_0}{dt^2} - \underline{\frac{\varepsilon^2(1-\alpha)}{3}\frac{d^2\Delta\zeta_0}{dt^2}} + \frac{4\mu a_1\varepsilon^2}{3\varrho}\Delta\Delta\zeta_0 = 0. \tag{1}$$

$$\underline{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\partial}{\partial u}\frac{d^2\zeta_0}{dt^2}} - \frac{2\mu}{\varrho}\frac{d}{ds}\left[\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2}\right)\sin\varphi\cos\varphi - \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\right] -$$
$$- \frac{4\mu a_1}{\varrho}\frac{\partial\Delta\zeta_0}{\partial n} = 0. \tag{2}$$

$$\frac{\alpha}{2}\frac{d^2\zeta_0}{dt^2}+\frac{2\mu}{\varrho}\left[\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2}\cos^2\phi+\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2}\sin^2\phi+2\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\sin\phi\cos\phi+\right.$$

$$\left.+\alpha\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2}\right)=0.\right. \tag{3}$$

Уравненіе (1) отличается отъ даннаго Кирхгофомъ (Mechanik, S. 459—460) присутствіемъ второго члена, а (2) и (3) присутствіемъ первыхъ членовъ; но *эти члены могутъ быть*, какъ уже замѣчено, *отброшены*.

Уравненіямъ на контурѣ можно придать, какъ показалъ Матьё, очень компактный видъ. Разсмотримъ функціи:

$$f_1=\frac{\partial f}{\partial x}\sin\phi-\frac{\partial f}{\partial y}\cos\phi=\frac{\partial f}{\partial s}\ \text{(стр. 180-я)}.$$

Составимъ $\frac{\partial f_1}{\partial s}$. Находимъ сначала:

$$\frac{\partial f_1}{\partial s}=\sin\phi\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\sin\phi-\frac{\partial f}{\partial y}\cos\phi\right)-\cos\phi\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\sin\phi-\frac{\partial f}{\partial y}\cos\phi\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sin^2\phi+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cos^2\phi-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\sin\phi\cos\phi+\frac{\partial f}{\partial n}\frac{\partial \phi}{\partial s}$$

или:

$$\frac{\partial f_1}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)=\Delta f-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\phi+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin^2\phi+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\sin\phi\cos\phi\right]+\frac{\partial f}{\partial n}\frac{\partial\phi}{\partial s} \tag{I}$$

Затѣмъ составимъ $\frac{\partial f_1}{\partial n}$. Находимъ:

$$\frac{\partial f_1}{\partial n}=\cos\phi\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\sin\phi-\frac{\partial f}{\partial y}\cos\phi\right)+\sin\phi\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\sin\phi-\frac{\partial f}{\partial y}\cos\phi\right)$$

или:

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)=\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\sin\phi\cos\phi+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\sin^2\phi-\cos^2\phi)\right]+\frac{\partial f}{\partial n}\frac{\partial\phi}{\partial n} \tag{II}$$

Подставляя теперь значеніе прямыхъ скобокъ въ уравненія (2) и (3) стр. 182-й и стр. 183-й получаемъ: [1])

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial\zeta_0}{\partial s}\right)-\frac{\partial\zeta_0}{\partial n}\frac{\partial\phi}{\partial n}\right]+2a_1\frac{\partial\Delta\zeta_0}{\partial n}=0 \tag{2 bis}$$

[1]) У *Mathieu* въ его „Théorie de l'élasticité des corps solides", partie I, p. 185 ошибка въ знакѣ фор. (2 bis).

$$2a_1 \Delta\zeta_0 + \frac{\partial\zeta_0}{\partial n}\frac{\partial\phi}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\zeta_0}{\partial s}\right) = 0, \tag{3 bis}$$

ибо

$$1 + \alpha = \frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} = 2a_1 \text{ (стр. 173-я).}$$

Перейдемъ теперь къ *продольнымъ колебаніямъ*. Формула (2) стр. 173-й можетъ быть написана въ видѣ:

$$F_0(\xi_0, \eta_0) = a\left(\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta_0}{\partial y}\right)^2\right) + b\,\frac{\partial\xi_0}{\partial x}\frac{\partial\eta_0}{\partial y} + \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial y} + \frac{\partial\eta_0}{\partial x}\right)^2,$$

если будутъ введены коэффиценты a и b стр. 14-ой. Отсюда находимъ $\delta F_0(\xi_0, \eta_0)$ и затѣмъ соотвѣтствующую часть δU, а именно:

$$\begin{aligned}\delta U_0 = \int \delta F_0(\xi_0, \eta_0) dS = -\int dS\Bigg[\left(2a\,\frac{\partial^2\xi_0}{\partial x^2} + \mu\,\frac{\partial^2\xi_0}{\partial y^2} + (b+\mu)\,\frac{\partial^2\eta_0}{\partial x\partial y}\right)\delta\xi_0 + \\ + \left(2a\,\frac{\partial^2\eta_0}{\partial y^2} + \mu\,\frac{\partial^2\eta_0}{\partial x^2} + (b+\mu)\,\frac{\partial^2\xi_0}{\partial x\partial y}\right)\delta\eta_0\Bigg] + \int ds\Bigg[\left(\left(2a\,\frac{\partial\xi_0}{\partial x} + b\,\frac{\partial\eta_0}{\partial y}\right)\cos(nx) + \right. \\ \left. + \mu\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial y} + \frac{\partial\eta_0}{\partial x}\right)\cos(ny)\right)\delta\xi_0 + \left(\left(2a\,\frac{\partial\eta_0}{\partial y} + b\,\frac{\partial\xi_0}{\partial x}\right)\cos(ny) + \right. \\ \left. + \mu\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial y} + \frac{\partial\eta_0}{\partial x}\right)\cos(nx)\right)\delta\eta_0\Bigg].\end{aligned} \tag{A}$$

Затѣмъ представимъ $F_1(\xi_0, \eta_0)$ въ видѣ:

$$\begin{aligned}F_1(\xi_0, \eta_0) = \alpha\Bigg[a\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial x}\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x^2} + \frac{\partial\eta_0}{\partial y}\frac{\partial^2\theta_0}{\partial y^2}\right) + \frac{b}{2}\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial x}\frac{\partial^2\theta_0}{\partial y^2} + \frac{\partial\eta_0}{\partial y}\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x^2}\right) + \\ + \mu\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial y} + \frac{\partial\eta_0}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x\partial y}\Bigg],\end{aligned}$$

а отсюда найдемъ соотвѣтствующую часть δU,—а именно:

$$\begin{aligned}\delta U_1 = \frac{\varepsilon^2}{3}\int dS\,\delta F_1(\xi_0, \eta_0) = \frac{\alpha\varepsilon^2}{3}\int dS\Bigg\{a\left(\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x^2}\frac{\partial\delta\xi_0}{\partial x} + \frac{\partial^2\theta_0}{\partial y^2}\frac{\partial\delta\eta_0}{\partial y}\right) + \\ + \frac{b}{2}\left(\frac{\partial^2\theta_0}{\partial y^2}\frac{\partial\delta\xi_0}{\partial x} + \frac{\partial^2\theta_0}{\partial x^2}\frac{\partial\delta\eta_0}{\partial y}\right) + \mu\,\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial\delta\xi_0}{\partial y} + \frac{\partial\delta\eta_0}{\partial x}\right) + a\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{\partial\eta_0}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial y}\right) + \frac{b}{2}\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial y} + \frac{\partial\eta_0}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial x}\right) + \mu\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial y} + \frac{\partial\eta_0}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\delta\theta_0}{\partial x\partial y}\Bigg\}.\end{aligned}$$

Примѣняя интегрированіе по частямъ (формулы стр. 175-ой), для первыхъ трехъ скобокъ получимъ слѣдующее выраженіе:

$$-\frac{\alpha\varepsilon^2}{3}\int dS\Bigg[\left(a\frac{\partial^3\theta_0}{\partial x^3}+\frac{b}{2}\frac{\partial^3\theta_0}{\partial x\partial y^2}+\mu\frac{\partial^3\theta_0}{\partial x\partial y^2}\right)\delta\xi_0+\left(a\frac{\partial^3\theta_0}{\partial y^3}+\frac{b}{2}\frac{\partial^3\theta_0}{\partial x^2\partial y}+\right.$$
$$\left.+\mu\frac{\partial^3\theta_0}{\partial x^2\partial y}\right)\delta\eta_0\Bigg]+\frac{\alpha\varepsilon^2}{3}\int ds\Bigg[\left(\left(a\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x^2}+\frac{b}{2}\frac{\partial^2\theta_0}{\partial y^2}\right)\cos(nx)+\mu\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x\partial y}\cos(ny)\right)\delta\xi_0+$$
$$+\left(\left(a\frac{\partial^2\theta_0}{\partial y^2}+\frac{b}{2}\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x^2}\right)\cos(ny)+\mu\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x\partial y}\cos(nx)\right)\delta\eta_0\Bigg] \tag{a}$$

Затѣмъ примѣняя къ четвертой и пятой скобкамъ два раза интегрированіе по частямъ, находимъ, что они дадутъ въ результатѣ:

$$-\frac{\alpha\varepsilon^2}{3}\int dS\Bigg[\left(a\left(\frac{\partial^4\xi_0}{\partial x^4}+\frac{\partial^4\eta_0}{\partial x\partial y^3}\right)+\frac{b}{2}\left(\frac{\partial^4\xi_0}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\eta_0}{\partial x^3\partial y}\right)\right)\delta\xi_0+\left(a\left(\frac{\partial^4\eta_0}{\partial y^4}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\partial^4\xi_0}{\partial x^3\partial y}\right)+\frac{b}{2}\left(\frac{\partial^4\eta_0}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\xi_0}{\partial x\partial y^3}\right)\right)\delta\eta_0\Bigg]+\frac{\alpha\varepsilon^2}{3}\int ds\Bigg[\left(a\left(\frac{\partial^3\xi_0}{\partial x^3}+\frac{\partial^3\eta_0}{\partial y^3}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{b}{2}\left(\frac{\partial^3\xi_0}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3\eta_0}{\partial x^2\partial y}\right)\right)\cos(nx)\delta\xi_0+\left(a\left(\frac{\partial^3\xi_0}{\partial x^3}+\frac{\partial^3\eta_0}{\partial y^3}\right)+\frac{b}{2}\left(\frac{\partial^3\xi_0}{\partial x\partial y^2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\partial^3\eta_0}{\partial x^2\partial y}\right)\right)\cos(ny)\,\delta\eta_0\Bigg]+\frac{\alpha\varepsilon^2}{3}\int ds\Bigg[\left(\left(a\frac{\partial\xi_0}{\partial x}+\frac{b}{2}\frac{\partial\eta_0}{\partial y}\right)\cos(nx)\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial x}+\right.$$
$$\left.+\left(a\frac{\partial\eta_0}{\partial y}+\frac{b}{2}\frac{\partial\xi_0}{\partial y}\right)\cos(ny)\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial y}\right)-\left(\left(a\frac{\partial^2\xi_0}{\partial x^2}+\frac{b}{2}\frac{\partial^2\eta_0}{\partial x\partial y}\right)\cos(nx)+\right.$$
$$\left.+\left(a\frac{\partial^2\eta_0}{\partial y^2}+\frac{b}{2}\frac{\partial^2\xi_0}{\partial x\partial y}\right)\cos(ny)\right)\delta\theta_0\Bigg]. \tag{b}$$

Теперь остается преобразовать послѣднія, шестыя, скобки общаго выраженія для δU_1. Такъ какъ въ нихъ входитъ $\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial x\partial y}$, то можно вести интегрированіе какъ по x'у, такъ и по y'у; мы же для симметріи результатовъ сначала примѣняемъ два раза интегрированіе по x'у, а затѣмъ два раза по y'у; послѣ чего результаты сложимъ и раздѣлимъ на 2; получимъ слѣдующее выраженіе:

$$-\frac{\alpha\varepsilon^2}{3}\int dS\left[\mu\left(\frac{\partial^4\xi_0}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\eta_0}{\partial x^3\partial y}\right)\delta\xi_0+\mu\left(\frac{\partial^4\xi_0}{\partial x\partial y^3}+\frac{\partial^4\eta_0}{\partial x^2\partial y^2}\right)\delta\eta_0\right]+$$
$$+\frac{\alpha\varepsilon^2}{3}\int\frac{\mu}{2}ds\Bigg[2\left(\frac{\partial^3\xi_0}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3\eta_0}{\partial x^2\partial y}\right)(\cos(nx)\,\delta\xi_0+\cos(ny)\,\delta\eta_0)+$$
$$+\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial y}+\frac{\partial\eta_0}{\partial x}\right)\left(\cos(nx)\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial y}+\cos(ny)\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial x}\right)-\left(\left(\frac{\partial^2\xi_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\eta_0}{\partial x^2}\right)\cos(ny)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial^2\xi_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\eta_0}{\partial x\partial y}\right)\cos(nx)\right)\delta\theta_0\Bigg]. \tag{c}$$

Теперь соединимъ выраженіе (a), (b) и (c) и для краткости письма положимъ:

$$\frac{\partial \Delta\xi_0}{\partial x}+\frac{\partial \Delta\eta_0}{\partial y}=W;$$

$$A=2a\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x^2}+\left(a+\frac{b}{2}\right)\frac{\partial^2\theta_0}{\partial y^2};\quad B=2a\frac{\partial^2\theta_0}{\partial y^2}+\left(a+\frac{b}{2}\right)\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x^2};\quad \Gamma=\mu\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x\partial y};$$

$$\Xi=a\frac{\partial^2\xi_0}{\partial x^2}+\frac{b}{2}\frac{\partial^2\eta_0}{\partial x\partial y}+\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial^2\xi_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\eta_0}{\partial x\partial y}\right);\quad H=a\frac{\partial^2\eta_0}{\partial y^2}+\frac{b}{2}\frac{\partial^2\xi_0}{\partial x\partial y}+$$

$$+\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial^2\eta_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi_0}{\partial x\partial y}\right);\quad X=a\frac{\partial\xi_0}{\partial x}+\frac{b}{2}\frac{\partial\eta_0}{\partial y}=a\theta_0-\mu\frac{\partial\eta_0}{\partial y};$$

$$Y=a\frac{\partial\eta_0}{\partial y}+\frac{b}{2}\frac{\partial\xi_0}{\partial x}=a\theta_0-\mu\frac{\partial\xi_0}{\partial x};\quad Z=\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial y}+\frac{\partial\eta_0}{\partial x}\right),$$

при чемъ пользовались соотношеніемъ:

$$a=\frac{b}{2}+\mu,$$

и замѣняли θ_0 его значеніемъ: $\frac{\partial\xi_0}{\partial x}+\frac{\partial\eta_0}{\partial y}$ при вычисленіи интеграла по поверхности. Найдемъ, положивъ, $\cos(nx)=\cos\phi$ и $\cos(ny)=\sin\phi$:

$$\delta U_1=-\frac{2a\alpha\varepsilon^2}{3}\int dS\left(\frac{\partial W}{\partial x}\delta\xi_0+\frac{\partial W}{\partial y}\delta\eta_0\right)+$$

$$+\frac{\alpha\varepsilon^2}{3}\int ds\Big\{(A\cos\phi+\Gamma\sin\phi)\delta\xi_0+(B\sin\phi+\Gamma\cos\phi)\delta\eta_0-$$

$$-(\Xi\cos\phi+H\sin\phi)\delta\theta_0+(X\cos\phi+Z\sin\phi)\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial x}+$$

$$+(Y\sin\phi+Z\operatorname{coc}\phi)\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial y}\Big\}. \tag{B}$$

Теперь намъ нужно еще преобразовать интегралы по контуру, заключающіе множители:

$$\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial x},\quad \frac{\partial\delta\theta_0}{\partial y}\quad \text{и}\quad \delta\theta_0.$$

Примѣнимъ формулы (a) стр. 180-й. Полагая въ нихъ f равной $\delta\theta_0$, получимъ:

$$\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial x}=\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial s}\sin\phi+\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial n}\cos\phi;\quad \frac{\partial\delta\theta_0}{\partial y}=-\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial s}\cos\phi+\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial n}\sin\phi.$$

Подставляя эти значенія въ послѣдніе два члена формулы (B), получимъ:

$$\int ds\left[(X\cos\phi + Z\sin\phi)\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial x} + (Y\sin\phi + Z\cos\phi)\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial y}\right] =$$

$$= \int ds\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial s}\left[(X - Y)\sin\phi\cos\phi - Z(\cos^2\phi - \sin^2\phi)\right] +$$

$$+ \int ds\left[X\cos^2\phi + Y\sin^2\phi + 2Z\sin\phi\cos\phi\right]\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial n}.$$

Положимъ для краткости письма коэффиціентъ при $\dfrac{\partial\delta\theta_0}{\partial s}$ равнымъ G, тогда первый интегралъ дастъ:

$$\int G\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial s}ds = -\int\frac{\partial G}{\partial s}\delta\theta_0 ds,$$

такъ какъ интегрированіе произведено по замкнутому контуру. Такимъ образомъ интегралъ по контуру въ формулѣ (B) приметъ слѣдующій видъ:

$$\frac{\alpha\varepsilon^2}{3}\int ds\Big[(A\cos\phi + \Gamma\sin\phi)\delta\xi_0 + (B\sin\phi + \Gamma\cos\phi)\delta\eta_0 +$$

$$+ (X\cos^2\phi + Y\sin^2\phi + 2Z\sin\phi\cos\phi)\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial n}\Big] - \frac{\alpha\varepsilon^2}{3}\int ds\Big[\Xi\cos\phi + H\sin\phi +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial s}\Big((X - Y)\sin\phi\cos\phi - Z(\cos^2\phi - \sin^2\phi)\Big)\Big]\delta\theta_0 = J_s, \text{ положимъ.}$$

Изъ членовъ съ $\delta\theta_0$ можно выдѣлить члены съ $\delta\xi_0$ и $\delta\eta_0$; съ $\dfrac{\partial\delta\xi_0}{\partial n}$, $\dfrac{\partial\delta\eta_0}{\partial n}$. Положимъ для простоты письма:

$$\Xi\cos\phi + H\sin\phi + \frac{\partial G}{\partial s} = L,$$

гдѣ, какъ выше:

$$G = (X - Y)\sin\phi\cos\phi - Z(\cos^2\phi - \sin^2\phi).$$

Тогда замѣчаемъ, что $\delta\theta_0 = \dfrac{\partial}{\partial x}\delta\xi_0 + \dfrac{\partial}{\partial y}\delta\eta_0$ и примѣняя опять формулы (a) стр. 180-й, найдемъ:

$$\int L ds\delta\theta_0 = -\int ds\left[\frac{\partial(L\sin\phi)}{\partial s}\delta\xi_0 - \frac{\partial(L\cos\phi)}{\partial s}\delta\eta_0\right] +$$

$$+ \int dsL\left[\cos\phi\frac{\partial\delta\xi_0}{\partial n} + \sin\phi\frac{\partial\delta\eta_0}{\partial n}\right]. \qquad (\alpha)$$

При этомъ функціи G можно придать окончательно видъ:

$$G = \mu\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial x} - \frac{\partial\eta_0}{\partial y}\right)\sin\varphi\cos\varphi - \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial y} + \frac{\partial\eta_0}{\partial x}\right)(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

или короче:

$$G = \frac{\mu}{2}\left[\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial x} - \frac{\partial\eta_0}{\partial y}\right)\sin 2\varphi - \left(\frac{\partial\xi_0}{\partial y} + \frac{\partial\eta_0}{\partial x}\right)\cos 2\varphi\right]. \qquad (\beta)$$

Подставляя найденное значеніе

$$\int L ds\delta\theta_0$$

изъ (α) въ J_s, получимъ:

$$J_s = \frac{\alpha\varepsilon^2}{3}\int ds\left[\left(A\cos\varphi + \Gamma\sin\varphi + \frac{\partial(L\sin\varphi)}{\partial s}\right)\delta\xi_0 + \left(B\sin\varphi + \Gamma\cos\varphi - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial(L\cos\varphi)}{\partial s}\right)\delta\eta_0 - L\left(\cos\varphi\frac{\partial\delta\xi_0}{\partial n} + \sin\varphi\frac{\partial\delta\eta_0}{\partial n}\right)\right] + \frac{\alpha\varepsilon^2}{3}\int N\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial n}ds,$$

гдѣ положено:

$$N = X\cos^2\varphi + Y\sin^2\varphi + 2Z\sin\varphi\cos\varphi. \qquad (\gamma)$$

Замѣчая, что

$$\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x}\delta\frac{\partial\xi_0}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial y}\delta\frac{\partial\eta_0}{\partial n},$$

и пользуясь тѣми же формулами (а) стр. 180-й, получимъ:

$$\int N ds\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial n} = -\int ds\left(\frac{\partial(N\sin\varphi)}{\partial s}\frac{\partial\delta\xi_0}{\partial n} - \frac{\partial(N\cos\varphi)}{\partial s}\frac{\partial\delta\eta_0}{\partial n}\right) +$$

$$+ \int dsN\left(\cos\varphi\frac{\partial^2\delta\xi_0}{\partial n^2} + \sin\varphi\frac{\partial^2\delta\eta_0}{\partial n^2}\right).$$

Подставляя въ J_s, получимъ окончательно:

$$J_s = \frac{\alpha\varepsilon^2}{3}\int ds\left[\left(A\cos\varphi + \Gamma\sin\varphi + \frac{\partial(L\sin\varphi)}{\partial s}\right)\delta\xi_0 + \left(B\sin\varphi + \Gamma\cos\varphi - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{\partial(L\cos\varphi)}{\partial s}\right)\delta\eta_0 - \left(L\cos\varphi + \frac{\partial(N\sin\varphi)}{\partial s}\right)\frac{\partial\delta\xi_0}{\partial n} -$$

$$\left. - \left(L\sin\varphi - \frac{\partial(N\cos\varphi)}{\partial s}\right)\frac{\partial\delta\eta_0}{\partial n} + N\left(\cos\varphi\frac{\partial^2\delta\xi_0}{\partial n^2} + \sin\varphi\frac{\partial^2\delta\eta_0}{\partial n^2}\right)\right]. \qquad (\delta)$$

Колебанія квадратной пластинки.

Уравненіе для поперечныхъ колебаній пластинки (стр. 182-ая, уравн. (1)) будетъ:

$$\frac{d^2\zeta_0}{dt^2}+c^2\left(\frac{\partial^4\zeta_0}{\partial x^4}+\frac{\partial^4\zeta_0}{\partial y^4}+2\,\frac{\partial^4\zeta_0}{\partial x^2\partial y^2}\right)=0, \tag{1}$$

гдѣ положено:

$$c^2=\frac{4\mu(\lambda+\mu)\varepsilon^2}{3\varrho(\lambda+\mu)}=\frac{\varepsilon^2 e}{\varrho},$$

если обозначимъ:

$$e=\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{3(\lambda+2\mu)}.$$

Условія на контурѣ пластинки (стр. 183-я, фор. (2) и (3)) будутъ:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2}\right)\sin\phi\cos\phi+\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}(\sin^2\phi-\cos^2\phi)\right]+2a_1\frac{\partial\Delta\zeta_0}{\partial n}=0 \tag{a}$$

$$\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2}\cos^2\phi+\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2}\sin^2\phi+2\,\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\sin\phi\cos\phi+b_1\Delta\zeta_0=0, \tag{b}$$

причемъ значеніе символовъ $\frac{\partial}{\partial s}$ и $\frac{\partial}{\partial n}$ слѣдующее:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial s}&=\frac{\partial f}{\partial x}\sin\phi-\frac{\partial f}{\partial y}\cos\phi\\ \frac{\partial f}{\partial n}&=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\phi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\phi\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

Положимъ, что частное рѣшеніе уравненія (1) будетъ вида:

$$\zeta_0=U\sin(k^2ct),$$

причемъ U будетъ функціей x и y, а k^2 подлежащій опредѣленію параметръ.

Подставляя въ (1), (a) и (b) это значеніе ζ_0, найдемъ для U уравненіе:

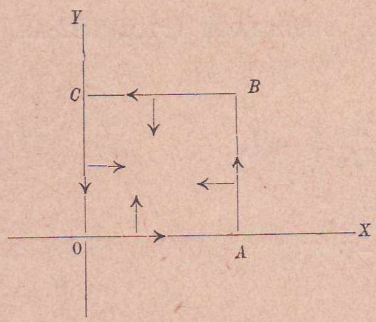
$$\Delta\Delta U-k^4U=0 \tag{3}$$

внутри пластинки (въ срединной плоскости) и условія:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\frac{\partial^2U}{\partial x^2}-\frac{\partial^2U}{\partial y^2}\right)\sin\phi\cos\phi+\frac{\partial^2U}{\partial x\partial y}(\sin^2\phi-\cos^2\phi)\right]+2a_1\frac{\partial\Delta U}{\partial n}=0\\ &\frac{\partial^2U}{\partial x^2}\cos^2\phi+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}\sin^2\phi+2\,\frac{\partial^2U}{\partial x\partial y}\sin\phi\cos\phi+b_1\Delta U=0\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

на ея контурѣ.

Для квадратной пластинки эти условія можно написать въ болѣе простомъ видѣ. Дѣйствительно, если примемъ одну изъ вершинъ пластинки за начало координатъ и исходящія изъ нея стороны за оси координатъ, то произведеніе $\sin\phi\cos\phi$ исчезаетъ на всемъ периметрѣ квадрата и затѣмъ значеніе символовъ $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial n}$ легко опредѣляется изъ прилагаемой таблицы для всѣхъ послѣдовательныхъ сторонъ квадрата.



	$y=0$	$x=a$	$y=a$	$x=0$
	OA	AB	BC	CO
ϕ	90^0	180^0	270^0	0^0
$\frac{\partial}{\partial s}$	$\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{\partial}{\partial y}$	$-\frac{\partial}{\partial x}$	$-\frac{\partial}{\partial y}$
$\frac{\partial}{\partial n}$	$\frac{\partial}{\partial y}$	$-\frac{\partial}{\partial x}$	$-\frac{\partial}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial x}$

Поэтому условія (4) можно написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_{y=0}=0;\quad \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{x=a}=0;\quad \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_{y=a}=0;\quad \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{x=0}=0; \tag{5}$$

$$L_{y=0}=0;\quad K_{x=a}=0;\quad L_{y=a}=0;\quad K_{x=0}=0; \tag{6}$$

причемъ положено для краткости письма:

$$G=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+c_1\Delta U;\quad H=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+c_1\Delta U; \tag{7}$$

$$K=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+b_1\Delta U;\quad L=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+b_1\Delta U; \tag{8}$$

причемъ G, H, K и L будутъ функціями x и y и затѣмъ на самомъ дѣлѣ придется вычислять лишь вторыя производныя U по x и y; сверхъ того функціи K и L получаются соотвѣтственно изъ H и G замѣной коэффиціента $c_1=2a_1$ коэффиціентомъ b_1.

Итакъ намъ предстоитъ теперь рѣшить уравненіе:

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 U}{\partial y^4}+2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2\partial y^2}=k^4 U, \tag{9}$$

при условіяхъ на контурѣ, выраженныхъ равенствами (5) — (8).

Пойдемъ сначала путемъ, указаннымъ Кирхгофомъ въ его теоріи поперечныхъ колебаній круглой пластинки.

Положимъ, что

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=k^2 V, \tag{10}$$

гдѣ, слѣдовательно, V будетъ функція x и y.

Подставляя (10) въ (9), получимъ:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=k^2 U. \tag{11}$$

Положимъ теперь, что

$$U=u+v; \quad V=u-v;$$

причемъ u и v будутъ функціями x и y.

Подставляя эти значенія въ уравненія (10) и (11), найдемъ для опредѣленія u и v слѣдующія два уравненія:

$$\Delta u=k^2 u, \quad \Delta v=-k^2 v. \tag{12}$$

Попробуемъ удовлетворить этимъ уравненіямъ рѣшеніями:

$$u=X(x)Y(y), \quad v=X_1(x)Y_1(y). \tag{a}$$

Уравненія (12) теперь дадутъ:

$$\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}=h^2; \quad \frac{X_1''}{X_1}+\frac{Y_1''}{Y_1}=-k^2. \tag{13}$$

Отсюда заключаемъ, что если $X''=g^2 X$, гдѣ g будетъ дѣйствительное количество, то: $Y''=\gamma^2 Y$; причемъ положено: $\gamma^2=k^2-g^2$ при условіи, что $g<k$.

Точно также, если возьмемъ: $X_1''=-h^2 X_1$; то получимъ $Y_1''=-\beta^2 Y_1$, если положимъ, что $\beta^2=k^2-h^2$ при условіи: $h<k$.

Итакъ имѣемъ частное рѣшеніе уравненій (12):

$$\left.\begin{aligned} u&=A\sin H(gx+\theta)\sin H(\gamma y+\varphi)\\ v&=A_1\sin(hx+\omega)\sin(\beta y+\psi)\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

гдѣ g, γ, h, β и θ, φ, ω, ψ должны быть опредѣлены изъ условій на контурѣ пластинки.

Замѣтимъ, что рѣшенія (a) уравненій (12) допускаютъ еще нѣсколько комбинацій; но мы беремъ тѣ, которыя дадутъ простѣйшія рѣшенія.

Пользуясь соотношеніями:

$$\gamma^2 = k^2 - g^2; \quad \beta^2 = k^2 - h^2,$$

находимъ по формуламъ стр. 190-й для функціи u значенія G, H, K и L; а именно:

$$G = \phi(c_1, \gamma)u; \quad H = \phi(c_1, g)u; \quad K = \phi(b_1, g)u; \quad L = \phi(b_1, \gamma)u,$$

гдѣ введено обозначеніе для простоты письма:

$$\phi(a, z) = ak^2 + z^2.$$

Затѣмъ находимъ тоже для функціи u:

$$\frac{\partial G}{\partial x} = Ag\phi(c_1, \gamma) \cos H(gx + \theta) \sin H(\gamma y + \varphi);$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = A\gamma\phi(c_1, g) \cos H(\gamma y + \varphi) \sin H(gx + \theta).$$

Точно также составимъ для функціи v:

$$G = -\phi(c_1, \beta)v, \quad H = -\phi(c_1, h)v; \quad K = -\phi(b_1, h)v; \quad L = -\phi(b_1, \beta)v$$

и затѣмъ:

$$\frac{\partial G}{\partial x} = -A_1h\phi(c_1, \beta) \cos(hx + \omega) \sin(\beta y + \psi);$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = -A_1\beta\phi(c_1, h) \cos(\beta y + \psi) \sin(hx + \omega).$$

Такъ какъ $U = u + v$, то въ условіяхъ (5) и (6) стр. 190-й, надо взять суммы количествъ G, H, K и L для функцій u и v; получимъ слѣдующую систему уравненій:

$$Ag\phi(c_1, \gamma) \cos H(ga + \theta) \sin H(\gamma y + \varphi) = A_1h\phi(c_1, \beta) \cos(ha + \omega) \sin(\beta y + \psi) \quad (1)$$

$$Ag\phi(c_1, \gamma) \cos H(\theta) \sin H(\gamma y + \varphi) = A_1h\phi(c_1, \beta) \cos\omega \sin(\beta y + \psi) \quad (2)$$

Эти уравненія имѣютъ мѣсто для всѣхъ значеній y'а отъ 0 до a.

$$A\gamma\phi(c_1, g) \cos H(\gamma a + \varphi) \sin H(gx + \theta) = A_1\beta\phi(c_1, h) \cos(\beta a + \psi) \sin(hx + \omega) \quad (3)$$

$$A\gamma\phi(c_1, g) \cos H(\varphi) \sin H(gx + \theta) = A_1\beta\phi(c_1, h) \cos\psi \sin(hx + \omega) \quad (4)$$

— для всѣхъ значеній x'а отъ 0 до a.

$$A\phi(b_1, g)\sin H(ga+\theta)\sin H(\gamma y+\varphi)=A_1\phi(b_1, h)\sin(ha+\omega)\sin(\beta y+\psi) \quad (5)$$

$$A\phi(b_1, g)\sin H(\theta)\sin H(\gamma y+\varphi)=A_1\phi(b_1, h)\sin\omega\sin(\beta y+\psi) \quad (6)$$

— для всѣхъ значеній y'а отъ 0 до a.

Наконецъ:

$$A\phi(b_1, \gamma)\sin H(\gamma a+\varphi)\sin H(gx+\theta)=A_1\phi(b_1, \beta)\sin(\beta a+\psi)\sin(hx+\omega) \quad (7)$$

$$A\phi(b_1, \gamma)\sin H(\varphi)\sin H(gx+\theta)=A_1\phi(b_1, \beta)\sin\psi\sin(hx+\omega) \quad (8)$$

— для всѣхъ значеній x'а отъ 0 до a.

Итакъ имѣемъ *девять* уравненій съ *девятью* неизвѣстными: g, γ; h, β; θ, φ; ω, ψ и $A_1:A$.

Отсюда мы находимъ системы болѣе простыя для рѣшенія.

Вычитая (1) и (2) одно изъ другого, затѣмъ складывая ихъ и раздѣляя первый результатъ на второй, получимъ:

$$\operatorname{tg} H\left(\frac{ga}{2}+\theta\right)\operatorname{tg} H\left(\frac{ga}{2}\right)=-\operatorname{tg}\left(\frac{ha}{2}+\omega\right)\operatorname{tg}\frac{ha}{2}.$$

Точно также изъ уравненій (5) и (6) получимъ:

$$\operatorname{tg} H\left(\frac{ga}{2}+\theta\right)\operatorname{ctg} H\left(\frac{ga}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{ha}{2}+\omega\right)\operatorname{ctg}\frac{ha}{2}.$$

Перемножая два эти результата, находимъ:

$$\operatorname{tg} H^2\left(\frac{ga}{2}+\theta\right)+\operatorname{tg}^2\left(\frac{ha}{2}+\omega\right)=0.$$

Отсюда находимъ:

$$\theta=-\frac{ga}{2} \quad \text{и} \quad \omega=-\frac{ha}{2}. \qquad (A)$$

Хотя въ правой части послѣдняго равенства можно приложить $p\pi$ (p — цѣлое число), но это вліяетъ лишь на знакъ, который можно отнести къ коэффиціенту A_1, а потому мы оставимъ выписанное рѣшеніе (A).

Совершенно такимъ же путемъ получимъ изъ уравненій (3) и (4), (7) и (8) слѣдующее:

$$\varphi=-\frac{\gamma a}{2} \quad \text{и} \quad \psi=-\frac{\beta a}{2}. \qquad (B)$$

Подставляя эти значенія θ, ϖ, φ и ψ обратно въ систему (1)—(8), получимъ уже только *четыре* уравненія съ *пятью* неизвѣстными: g, γ; h, β и $A_1 : A$; а именно:

$$Ag\phi(c_1,\gamma)\cos H\left(\frac{ga}{2}\right)\sin H\gamma\left(y-\frac{a}{2}\right)=A_1h\phi(c_1,\beta)\cos\frac{ha}{2}\sin\beta\left(y-\frac{a}{2}\right) \quad \text{(a)}$$

$$A\gamma\phi(c_1,g)\cos H\left(\frac{\gamma a}{2}\right)\sin Hg\left(x-\frac{a}{2}\right)=A_1\beta\phi(c_1,h)\cos\frac{\beta a}{2}\sin h\left(x-\frac{a}{2}\right) \quad \text{(b)}$$

$$A\phi(b_1,g)\sin H\left(\frac{ga}{2}\right)\sin H\gamma\left(y-\frac{a}{2}\right)=A_1\phi(b_1,h)\sin\frac{ha}{2}\sin\beta\left(y-\frac{a}{2}\right) \quad \text{(c)}$$

$$A\phi(b_1,\gamma)\sin H\left(\frac{\gamma a}{2}\right)\sin Hg\left(x-\frac{a}{2}\right)=A_1\phi(b_1,\beta)\sin\frac{\beta a}{2}\sin h\left(x-\frac{a}{2}\right). \quad \text{(d)}$$

Положимъ въ послѣднихъ двухъ уравненіяхъ: $x=a$, $y=a$ или $x=0$, $y=0$ или $x=0$, $y=a$; $x=a$, $y=0$ и результаты раздѣлимъ одинъ на другой, получимъ:

$$\frac{\phi(b_1,g)}{\phi(b_1,\gamma)}=\frac{\phi(b_1,h)}{\phi(b_1,\beta)}.$$

Если подставимъ сюда значеніе символовъ ϕ и вспомнимъ, что

$$g^2+\gamma^2=k^2,\quad h^2+\beta^2=k^2,$$

то найдемъ:

$$h^2=g^2;\quad \beta^2=\gamma^2.$$

Мы можемъ взять теперь:

$$h=g,\quad \beta=\gamma. \quad \text{(C)}$$

Итакъ остается опредѣлить параметры g и γ и отношеніе $A_1 : A$.

Подставимъ теперь значенія (C) въ систему (a)—(d) и положимъ въ ней $x=a$, $y=a$; тогда получимъ только *три* уравненія:

$$A\cos H\left(\frac{ga}{2}\right)\sin H\left(\frac{\gamma a}{2}\right)=A_1\cos\frac{ga}{2}\sin\frac{\gamma a}{2} \quad (\alpha)$$

$$A\cos H\left(\frac{\gamma a}{2}\right)\sin H\left(\frac{ga}{2}\right)=A_1\cos\frac{\gamma a}{2}\sin\frac{ga}{2} \quad (\beta)$$

$$A\sin H\left(\frac{ga}{2}\right)\sin H\left(\frac{\gamma a}{2}\right)=A_1\sin\frac{ga}{2}\sin\frac{\gamma a}{2}. \quad (\gamma)$$

Раздѣляя уравненіе (γ) сначала на (α), а потомъ на (β), получимъ:

$$\operatorname{tg} H\left(\frac{ga}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{ga}{2}, \quad \operatorname{tg} H\left(\frac{\gamma a}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\gamma a}{2}. \tag{D}$$

Итакъ g и γ суть корни трансцендентнаго уравненія

$$\operatorname{tg} H\left(\frac{au}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{au}{2}$$

или, если положимъ, что $au = 2z$:

$$\operatorname{tg} H(z) = \operatorname{tg} z \text{ [1]}. \tag{E}$$

Остается опредѣлить $A_1 : A$. Для этого возведемъ въ квадратъ уравненія (α) и (γ) или (β) и (γ) и вычтемъ; получимъ:

$$A^2 \sin H^2\left(\frac{\gamma a}{2}\right) = A_1^2 \sin^2\frac{\gamma a}{2}\cos ga,$$

но при помощи (D) найдемъ:

$$\sin H^2\left(\frac{\gamma a}{2}\right) = \frac{\sin^2\frac{\gamma a}{2}}{\cos\gamma a},$$

а слѣдовательно

$$A^2 = A_1^2 \cos ga \cos\gamma a. \tag{F}$$

Такимъ образомъ все найдено.

Итакъ получимъ для U слѣдующее частное рѣшеніе:

$$U = A_{g\gamma}\sin H\left[g\left(x-\frac{a}{2}\right)\right]\sin H\left[\gamma\left(y-\frac{a}{2}\right)\right] + \\ + A_{1g\gamma}\sin g\left(x-\frac{a}{2}\right)\sin\gamma\left(y-\frac{a}{2}\right).$$

Одну систему узловыхъ линій получимъ, взявъ:

$$1)\ x = \frac{a}{2} \quad \text{или} \quad 2)\ y = \frac{a}{2},$$

это *медіаны* пластинки.

Можно написать более общее рѣшеніе, если замѣтимъ, что

$$k^2 = g^2 + \gamma^2 = \gamma^2 + g^2.$$

---

[1]) Наименьшій корень этого уравненія будетъ: $z_0 = 0{\cdot}680\,\frac{\pi}{4}$, а остальные будутъ очень близки къ $z_p = (4p+1)\frac{\pi}{4}$, гдѣ $p = 1, 2, 3, \ldots$

Слѣдовательно g и γ можно взаимно перестановить; тогда получимъ болѣе общее рѣшеніе для U, а именно:

$$U = A_{g\gamma} \sin H\left[g\left(x - \frac{a}{2}\right)\right] \sin H\left[\gamma\left(y - \frac{a}{2}\right)\right] +$$

$$+ A_{\gamma g} \sin H\left[\gamma\left(x - \frac{a}{2}\right)\right] \sin H\left[g\left(y - \frac{a}{2}\right)\right] + A_{1g\gamma} \sin g\left(x - \frac{a}{2}\right) \sin \gamma\left(y - \frac{a}{2}\right) +$$

$$+ A_{1\gamma g} \sin \gamma\left(x - \frac{a}{2}\right) \sin g\left(y - \frac{a}{2}\right).$$

Разсмотримъ случай, когда:

$$A_{g\gamma} + A_{\gamma g} = 0, \quad A_{1g\gamma} + A_{1\gamma g} = 0,$$

тогда U можно придать видъ:

$$U = A_{g\gamma}\left\{\sin H\left[\frac{g+\gamma}{2}(x+y-a)\right] \sin H\left[\frac{g-\gamma}{2}(x-y)\right] -\right.$$

$$\left. - \sin H\left[\frac{g-\gamma}{2}(x+y-a)\right] \sin H\left[\frac{g+\gamma}{2}(x-y)\right]\right\} -$$

$$- A_{1g\gamma}\left\{\sin\left[\frac{g+\gamma}{2}(x-y)\right] \sin\left[\frac{g-\gamma}{2}(x+y-a)\right] -\right.$$

$$\left. - \sin\left[\frac{g+\gamma}{2}(x+y-a)\right] \sin\left[\frac{g-\gamma}{2}(x-y)\right]\right\}.$$

Ясно, что $U = 0$ для всѣхъ точекъ прямыхъ:

$$3)\ x - y = 0 \quad \text{и} \quad 4)\ x + y - a = 0,$$

т. е. получаемъ еще систему узловыхъ линій пластинки, а именно ея *бисекторы*.

Послѣднее выраженіе для U даетъ узловыя линіи и въ предыдущихъ случаяхъ, т. е. когда или $x = \frac{a}{2}$, или $y = \frac{a}{2}$.