Г. Θ. Вороной (1868—1908).

7-го Ноября 1908 года въ 9 ч. 20 м. утра послѣ тяжкихъ страданій скончался въ Варшавѣ докторъ чистой математики, членъ-корреспондентъ С.-Петербургской Академіи Наукъ, ординарный профессоръ Варшавскаго Университета и Варшавскаго Политехническаго Института Георгій Θеодосьевичъ Вороной.

Умеръ онъ 40 лѣтъ отъ роду, въ полномъ расцвѣтѣ своего мощнаго математическаго таланта. Вся жизнь покойнаго была служеніемъ чистой математикѣ, которой онъ былъ до самоотверженія преданъ.

Г. Θ. Вороной родился 16 апрѣля 1868 года въ мѣстечкѣ Журавка Полтавской губерніи. Отецъ его, о которомъ покойный всю жизнь хранилъ самыя лучшія сыновнія чувства, былъ сперва исправляющимъ должность профессора Нѣжинскаго лицея князя Безбородко, а потомъ директоромъ Кишиневской, Бердянской и Прилукской гимназій. Среднее образованіе покойный получилъ въ гимназіяхъ Бердянской и Прилукской. Пишущій эти строки не имѣетъ свѣдѣній о жизни усопшаго за этотъ періодъ. Кое-что однако сохранилось въ его «Дневникѣ», который покойный велъ въ свои студенческіе годы, и при томъ о его пребываніи въ Прилукской гимназіи. Видно, что онъ съ большимъ успѣхомъ занимался математикой. О своемъ же преподавателѣ математики Богословскомъ покойный сохранилъ самыя лучшія воспоминанія. Изъ другого мѣста «Дневника» можно заключить, что усопшій пользовался славой прекраснаго математика не только среди товарищей, но и учениц женской гимназіи г. Прилукъ.

Въ бытность свою въ восьмомъ классѣ Прилукской гимназіи покойный особенно полюбилъ алгебру. Въ это время проф. Университета Св. Владиміра В. П. Ермаковъ на страницахъ своего „Журнала элементарной математики“ предложилъ тему: „Разложеніе многочленовъ на множители, основанное на свойствѣ корней квадратнаго уравненія“. Юный математикъ принялся за эту тему. Плодомъ его усилій явилась статейка, снабженная изряднымъ количествомъ примѣровъ. Потомъ она была напечатана въ № 1 второго тома (за 1885 годъ) вышеупомянутаго журнала.

Появленіе въ печати, хотя и простого, но все-же самостоятельнаго изслѣдованія побудило автора попытать свои силы на другихъ, болѣе трудныхъ вопросахъ. Новой темой онъ избралъ слѣдующую: Рѣшить въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ неопредѣленное уравненіе

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2mxyz\,,$$

гдѣ m какое-либо опредѣленное цѣлое число. Но рѣшеніе такого вопроса превосходило его познанія и юныя силы. Уже перебравшись въ августѣ 1885 года въ С.-Петербургскій Университетъ студентомъ-математикомъ, онъ на первыхъ порахъ еще продолжалъ размышлять надъ этой задачей. Видя потомъ тщетность своихъ усилій, онъ долженъ былъ сознаться: „я, собственно говоря, потерялъ надежду когда-либо рѣшить эту задачу".

Насколько можно судить по «Дневнику», этимъ пока и кончаются попытки юнаго математика самостоятельнаго рѣшенія вопросовъ. Цѣлые два года уходятъ на саморазвитіе. Усердно посѣщая лекціи, дополняя ихъ изученіемъ Serret, Faà de Bruno, Чебышева и др., онъ въ часы, свободные отъ занятій математикой, пополняетъ свое общее образованіе чтеніемъ литературныхъ и философскихъ произведеній. Въ это же самое время онъ совершенствуется во французскомъ и нѣмецкомъ языкахъ, а также изучаетъ языкъ англійскій. Лѣтнія каникулы онъ обыкновенно проводитъ въ имѣніи своего отца „Журавка". Въ родной семьѣ, а также у сосѣдей Критскихъ, родителей своей будущей жены, онъ находитъ отдыхъ и черпаетъ силы для своихъ послѣдующихъ занятій математикой.

Нельзя сказать, чтобы жизнь въ Петербургѣ улыбалась покойному. Средства, которыя могъ ему давать его отецъ, въ особенности выйдя въ 1887 году въ отставку, были недостаточны. Да и покойный принципіально не считалъ себя въ правѣ ими пользоваться. Отецъ присылалъ только плату въ коллегію, гдѣ покойный жилъ все время своего пребыванія въ Университетѣ. Все же прочее нужно было добывать уроками или какою-либо другую работой. „Вчера я получилъ урокъ черезъ одного изъ товарищей", говорится въ «Дневникѣ»: „Урокъ крайне невыгодный: 15 р. въ мѣсяцъ, каждый день заниматься по часу. Такъ какъ это отъ меня очень далеко, то мнѣ приходится затрачивать болѣе двухъ часовъ. Я уже рѣшилъ, что, если только подвернется какая-либо другая маломальски сносная работа, немедленно откажусь отъ урока.

Матеріальная необезпеченность, а также жизнь вдвоемъ въ одной комнатѣ и при томъ въ шумной коллегіи, мѣшавшія ему свободно предаваться занятіемъ, доставляли ему сильныя нравственныя мученія. Въ своемъ «Дневникѣ» онъ постоянно сѣтуетъ на то, что отъ сильной усталости послѣ продолжительной ходьбы по урокамъ и вслѣдствіе условій жизни въ коллегіи, не можетъ всецѣло отдаться математикѣ. Покойный напрягаетъ всѣ силы, чтобы и при этихъ неблагопріятныхъ условіяхъ выработать въ себѣ привычку безъ всякаго принужденія усаживаться за книгу.

Будучи уже на третьемъ курсѣ, покойный съ особеннымъ пыломъ начинаетъ увлекаться изученіемъ главнымъ образомъ отдѣловъ чистой математики. „Лекціи по чистой математикѣ", пишетъ онъ: „меня все болѣе и болѣе увлекаютъ. Лекціи проф. С. по спеціальному курсу высшей алгебры я теперь предпочитаю всѣмъ остальнымъ. Теперь у меня есть настоящее желаніе работать безъ всякаго насильственнаго усаживанія за книгу". Далѣе: „Сегодня я работалъ тоже порядочно. Записалъ шесть лекцій, такъ что на послѣдней даже рука отказалась писать. Встаю въ 5 часовъ и по утрамъ занимаюсь математикой. Что за прелестная вещь! Хотя и масса формулъ, но всѣ онѣ настолько симметричны, что легко запоминаются".

До сихъ поръ весь пылъ своего пытливаго ума покойный направлялъ на пріобрѣтеніе познаній по математикѣ. Но вотъ мало по малу начинаетъ мучить его вопросъ, есть-ли у него способности, благодаря которымъ изъ него могъ бы впослѣдствіи выработаться ученый. „Главное, что меня занимаетъ", пишетъ онъ: „есть-ли у меня достаточно способности.... Она (математика) поглощаетъ все мое вниманіе, и гнетущій вопросъ, быть ли мнѣ профессоромъ или не быть". И вотъ онъ начинаетъ провѣрять свои способности. Безъ всякаго руководства пробуетъ онъ вычислить въ зависимости отъ коэффиціентовъ уравнеія

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_m = 0$$

слѣдующія симметрическія функціи его корней:

$$\sum x_1^2 x_2^2 \ldots x_\mu^2 x_{\mu+1} \ldots x_\nu\,; \quad \sum x_1^3 x_2^3 \ldots x_\mu^3 x_{\mu+1}^2 \ldots x_{\mu+\nu}^2 x_{\mu+\nu+1} \ldots x_{\mu+\nu+\omega}\,,$$

и достигаетъ полнаго успѣха.

Этотъ результатъ вселяетъ въ немъ увѣренность, что у него есть математическія способности. Эта увѣренность возрасла, когда покойному удалось самостоятельно, безъ примѣненія комплексныхъ чиселъ, вычислить опредѣленные интегралы:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos(vx^2)\,dx\,, \quad \int_0^\infty e^{-x^2} \sin(vx^2)\,dx$$

при всякомъ вещественномъ v, а также проинтегрировать дифференціальное уравненіе:

$$\left[\frac{p\,(x^2+y^2)}{2}-rx+qy+s\right]y''+[py+q-(px-r)\,y']\,(1+y'^2)=0\,,$$

гдѣ p, q, r и s постоянные числа, предложенное студентамъ проф. А. А. Марковымъ.

Всѣ эти результаты убѣдили покойнаго въ существованіи у него математическихъ способностей, и вотъ онъ смѣло приступаетъ къ изысканію новыхъ свойствъ чиселъ Бернулли, идетъ усиленная, плодотворная работа. Слѣды ея хорошо сохранились въ „Дневникѣ“. Мало-по-малу открывается рядъ новыхъ теоремъ, которыя формируются потомъ въ одну общую теорему, составившую сущность его кандидатскаго сочиненія: „О числахъ Бернулли“, представленнаго потомъ въ 1889 году въ государственную коммиссію.

Теорема, о которой идетъ рѣчь, состоитъ въ слѣдующемъ:

Если m-тое Бернулліево число.

$$B_m=\frac{P_m}{Q_m}\,,$$

гдѣ $\frac{P_m}{Q_m}$ не сократимая дробь, то имѣетъ мѣсто слѣдующее сравненіе:

$$(-1)^{m-1}(a^{2m}-1)\,P_m\equiv 2ma^{2m-1}\,Q_m\left[1^{2m-1}\,\mathrm{E}\left(\frac{a}{N}\right)+\right.$$
$$\left.+\,2^{2m-1}\,\mathrm{E}\left(\frac{2a}{N}\right)+\ldots+(N-1)^{2m-1}\,\mathrm{E}\left(\frac{(N-1)\,a}{N}\right)\right]\ (\text{мод. } N).$$

При этомъ a и N суть какія-угодно цѣлыя положительныя числа, простыя между собою, а $\mathrm{E}\left(\frac{ai}{N}\right)$ означаетъ цѣлую часть дроби $\frac{ai}{N}$.

Изъ этой теоремы авторъ выводитъ рядъ слѣдствій и между прочимъ слѣдующую обобщенную теорему Adams'a:

Если число m, значекъ m-го Бернулліева числа, имѣетъ дѣлителемъ число $k=p_1^{\alpha}p_2^{\beta}\ldots p_l^{\lambda}$, гдѣ $p_1, p_2, \ldots, p_l$ простыя числа, то числитель его будетъ дѣлиться на k.

Эта работа, въ которой въ значительной степени развернулись творческія силы покойнаго, въ 1890 году была напечатана въ „Сообщеніяхъ Харьковскаго Математическаго Общества“.

Оцѣнка, которую далъ ей проф. А. А. Марковъ, вполнѣ убѣдила автора, что изъ него можетъ выйти славный ученый, и вотъ онъ, будучи оставленъ въ декабрѣ 1889 года при С.-Петербургскомъ университетѣ для приготовленія къ профессорскому званію, отдается самостоятельнымъ изслѣдованіямъ въ области теоріи чиселъ. Начинается мало-по-малу назрѣвать и создаваться его магистерская диссертація: „О цѣлыхъ числахъ, зависящихъ отъ корня уравненія третьей степени“. Работа подвигается успѣшно. Но молодой ученый особенно не спѣшитъ съ съ ней. Нужно было готовиться къ магистерскимъ испытаніямъ. Да и обладалъ онъ особеннымъ творчествомъ. Теоремы угадывались имъ какъ бы чутьемъ. Онъ повѣрялъ ихъ какъ можно на большемъ числѣ примѣровъ. Потомъ, съ полной увѣренностью въ ихъ непреложности, приступалъ къ ихъ обоснованію. „Всѣ теоремы, данныя мною“, пишетъ онъ: „возникали совершенно независимо и мнѣ оставалось ихъ только повѣрять“.

Наконецъ, работа была закончена, напечатана въ 1893 году и въ октябрѣ того же года представлена въ качествѣ магистерской диссертаціи въ С.-Петербургскій университетъ.

Въ этой работѣ авторъ задался сперва цѣлью дать общую форму выраженія цѣлыхъ алгебраическихъ чиселъ, зависящихъ отъ корня ϱ неприводимаго уравненія

$$\varrho^3 = r\varrho + s,$$

гдѣ r и s обыкновенныя цѣлыя числа.

Для рѣшенія этого столь важнаго вопроса ему пришлось прибѣгнуть къ комплекснымъ числамъ по простому модулю p.

Всякое такое число имѣетъ составъ:

$$l + il',$$

гдѣ l и l' числа обыкновенныя, а i несуществующее рѣшеніе сравненія:

$$i^2 \equiv N \quad (\text{мод. } p).$$

гдѣ N неквадратичный вычетъ по модулю p, т. е. рѣшеніе уравненія:

$$\left(\frac{N}{p}\right) = -1.$$

Пользуясь комплексными числами, авторъ даетъ способъ рѣшать сравненіе третьей степени:

$$(\alpha) \qquad x^3 - rx - s \equiv 0 \quad (\text{мод. } p).$$

гдѣ r и s обыкновенныя числа.

При этомъ устанавливается слѣдующая теорема:

Если p есть какое-либо простое число, на которое не дѣлится

$$\Delta = 27s^2 - 4r^3,$$

то сравненіе (α) или не имѣетъ рѣшеній, или имѣетъ только одно рѣшеніе, или же три рѣшенія въ обыкновенныхъ числахъ.

Если p есть простое число, на которое дѣлится Δ, то всегда существуетъ такое обыкновенное число ξ, рѣшеніе сравненія (α), которое удовлетворяетъ, кромѣ того, сравненію:

$$3\xi^2 - r \equiv 0 \text{ (мод. } p).$$

Число η, опредѣляемое сравненіемъ:

$$\eta = -2\xi \quad (\text{мод. } p).$$

также удовлетворяетъ сравненію (α), и сравненіе это только тогда имѣетъ одно рѣшеніе, когда число 3ξ дѣлится на p; въ остальныхъ случаяхъ ξ и η единственныя различныя рѣшенія сравненія (α).

Опираясь на этотъ результатъ, авторъ находитъ три основныя алгебраическія числа:

$$1; \quad \varphi = -\frac{\xi + \varrho}{\delta}; \quad \psi = \frac{\xi^2 - r + \xi\varrho + \varrho^2}{\delta^2 \sigma},$$

при помощи которыхъ всѣ цѣлыя алгебраическія числа, зависящія отъ корня ϱ вышеприведеннаго алгебраическаго уравненія третьей степени, могутъ быть представлены въ формѣ:

$$x + x'\varphi + x''\psi,$$

гдѣ x, x' и x'' могутъ быть какія-угодно цѣлыя раціональныя числа.

Замѣтимъ, что ξ есть единственное рѣшеніе, опредѣленное по модулю $\delta\sigma$, сравненій:

$$\xi^3 - r\xi - s \equiv 0 \quad (\text{мод. } \delta^3 \sigma^2);$$

$$3\xi^2 - r \equiv 0 \quad (\text{мод. } \delta^2 \sigma).$$

σ означаетъ наибольшее число, для котораго возможны эти сравненія.

Далѣе, число $\delta = d$, если уравненіе

$$\varrho_1{}^3 = \frac{r}{d}\varrho_1 + \frac{s}{d^3} \qquad (\beta)$$

неособенное, и $\delta = 3d$, если это уравненіе особенное; причемъ d есть наибольшее число, для котораго возможны сравненія:

$$r \equiv 0 \quad (\text{мод. } d^2);$$

$$s \equiv 0 \quad (\text{мод. } d^3).$$

Добавимъ, что авторъ называетъ уравненіе (β) особеннымъ, если имѣютъ мѣсто сравненія:

$$\frac{r}{d^2} \equiv 3 \quad (\text{мод. } 9);$$

$$\frac{s}{d^3} \equiv \pm\left(1 - \frac{r}{d^2}\right) \quad (\text{мод. } 27).$$

Пользуясь найденнымъ видомъ цѣлыхъ алгебраическихъ чиселъ кубической области, авторъ находитъ разложенiе на простые идеальные множители всѣхъ простыхъ рацiональныхъ чиселъ и даетъ способы для разложенiя на простые идеальные множители всѣхъ цѣлыхъ чиселъ разсматриваемой области. Наконецъ, онъ приводитъ таблицу идеаловъ, соотвѣтствующихъ однороднымъ идеальнымъ числамъ, и устанавливаетъ теорему, которая позволяетъ съ помощью этой таблицы находить идеалъ, соотвѣтствующiй всякому идеальному числу.

Защита этой диссертацiи состоялась 26 апрѣля 1894 года. 1 мая 1894 года покойный былъ назначенъ и. д. доцента, а 9 iюня того же года экстраординарнымъ профессоромъ Варшавскаго университета по каѳедрѣ чистой математики.

Переселившись такимъ образомъ въ Варшаву, покойный началъ усиленно работать надъ изысканiемъ новаго алгориѳма, который бы для алгебраическихъ чиселъ кубической области позволилъ ему рѣшить вопросы: Найти систему основныхъ единицъ, опредѣлить, эквиваленты ли два данные идеала, и, наконецъ, опредѣлить число классовъ идеаловъ.

Этотъ алгориѳмъ былъ найденъ; онъ представляетъ особое обобщенiе алгориѳма непрерывныхъ дробей.

Вотъ почему и своей работѣ покойный далъ такое названiе: „Объ одномъ обобщенiи алгориѳма непрерывныхъ дробей“.

Авторъ находитъ этотъ алгориѳмъ, разсматривая относительныя minima коварiантныхъ линейныхъ формъ.

Прежде всего онъ останавливается на системѣ двухъ такихъ формъ, зависящихъ отъ двухъ цѣлыхъ перемѣнныхъ чиселъ x и x':

$$\omega = x\lambda + x'\mu; \quad \omega' = x\lambda' + x'\mu'. \qquad (\gamma)$$

При этомъ относительныя minima системъ формъ (γ) авторъ опредѣляетъ такъ:

Если при нѣкоторыхъ значенiяхъ перемѣнныхъ x и x' коварiантныя формы (γ) получаютъ такiя значенiя ω_0 и ω_0', что нельзя найти цѣлыхъ рацiональныхъ чиселъ t и t', удовлетворяющихъ одновременно неравенствамъ:

$$|t\lambda + t'\mu| < |\omega_0|; \quad |t\lambda' + t'\mu'| < |\omega_0'|,$$

то числа ω_0 и ω_0' *a* суть относительныя minima коварiантныхъ формъ (γ) или, символически, системы формъ:

$$\begin{bmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu' \end{bmatrix}.$$

Не считая системъ (ω, ω') и $(-\omega, -\omega')$ различными, авторъ разсматриваетъ совокупность (s) всѣхъ системъ, представляющихъ относительныя minima и удовлетворяющихъ условію $\omega > 0$. При этомъ системы совокупности (s) онъ располагаетъ въ безконечный рядъ:

$$(s) \qquad \ldots.(\omega_{-1}, \omega'_{-1}), \quad (\omega_0, \omega_0''), \quad (\omega_1, \omega_1')\ldots.;$$

при чемъ

$$\ldots. > \omega_{-1} > \omega_0 > \omega_1 > \ldots.$$

$$\ldots. < |\omega'_{-1}| < |\omega_0'| < |\omega_1'| < \ldots.$$

Систему $(\omega_{k+1}, \omega'_{k+1})$, слѣдующую въ этомъ ряду за системой (ω_k, ω'_k), онъ называетъ первой системой смежной съ (ω_k, ω'_k), а систему $(\omega_{k-1}, \omega'_{k-1})$ считаетъ второю системой смежной съ (ω_k, ω'_k).

Предположимъ, что системы (ω_0, ω'_0) и (ω_1, ω'_1) представляютъ относительныя minima коваріантныхъ формъ (γ), если положить:

$$x = p_0, \ x' = p_0'; \quad x = p_1, \ x' = p_1',$$

и система (ω_1, ω'_1) есть первая система смежная съ системой (ω_0, ω'_0). Тогда оказывается, что опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ p_0' & p_0' \end{vmatrix}$$

численно равенъ единицѣ.

Пользуясь этимъ свойствомъ предыдущаго детерминанта, авторъ доказываетъ, что, если извѣстны какія-либо двѣ смежныя системы совокупности (s), то всѣ прочія системы той же совокупности получаются при помощи алгориѳма непрерывныхъ дробей.

Отсюда устанавливается новая точка зрѣнія на этотъ алгориѳмъ, разсматривая его, какъ совокупность дѣйствій, при помощи которыхъ по даннымъ двумъ смежнымъ ряда (s) опредѣляется, какъ система, слѣдующая въ этомъ ряду за данными системами, такъ и имъ предшествующая.

Пользуясь подстановкой $\begin{pmatrix} p_0 & p_1 \\ p'_0 & p'_1 \end{pmatrix} = \pm 1$ или $\begin{pmatrix} p_1 & p_0 \\ p'_1 & p'_0 \end{pmatrix} = \mp 1$, авторъ преобразуетъ данныя формы (1) въ эквивалентныя имъ: $\begin{bmatrix} \omega_0, & \omega_1 \\ \omega'_0, & \omega'_1 \end{bmatrix}$ или $\begin{bmatrix} \omega_1, & \omega_0 \\ \omega'_1, & \omega'_0 \end{bmatrix}$, которыя названы имъ приведенными системами перваго и втораго рода.

Потомъ, считая системы

$$\begin{bmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu' \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} \tau\lambda. & \mu\tau \\ \tau'\lambda', & \mu'\tau' \end{bmatrix}$$

равнозначными, онъ разсматриваетъ систему $\begin{bmatrix} 1, & \varphi \\ 1, & \psi \end{bmatrix}$, гдѣ $\varphi = \frac{\mu}{\lambda}$, $\varphi' = \frac{\mu'}{\lambda'}$, названную имъ нормальной.

Каждая приведенная система формъ преобразуется въ приведенную систему перваго и второго порядка при помощи двухъ послѣдовательныхъ подстановокъ: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; причемъ δ находится при помощи алгориѳма непрерывныхъ дробей.

Пользуясь такими подстановками, авторъ получаетъ безконечный рядъ эквивалентныхъ приведенныхъ формъ перваго и второго рода.

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_0 \\ 1, & \varphi_0{}' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1, & \varphi_1 \\ 1, & \varphi_1{}' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1, & \varphi_2 \\ 1, & \varphi_2{}' \end{bmatrix}, \ldots .$$

Затѣмъ онъ рѣшаетъ вопросъ, когда этотъ безконечный рядъ системъ формъ періодическій, и приходитъ къ слѣдующему положенію:

Для того, чтобы вышеозначенный рядъ приведенныхъ системъ коваріантныхъ формъ, эквивалентныхъ данной системѣ

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_1 \\ 1, & \varphi' \end{bmatrix} \tag{λ}$$

состоялъ изъ періодически повторяющихся членовъ, необходимо и достаточно, чтобы коэффиціенты системы (λ): φ и φ' были сопряженныя алгебраическія числа, зависящія отъ корней неприводимаго уравненія 2-й степени съ положительнымъ дискриминантомъ.

Этотъ замѣчательный результатъ позволяетъ для алгебраическихъ чиселъ квадратичной области съ положительнымъ дискриминантомъ разыскать основныя единицы, рѣшить вопросъ объ эквивалентности двухъ данныхъ идеаловъ и, наконецъ, найти число классовъ идеаловъ.

Далѣе, авторъ свои предыдущія изслѣдованія распространяетъ на коваріантныя формы съ тремя перемѣнными:

$$(\mu) \qquad \begin{aligned} \omega &= x\lambda + x'\mu + x''\nu\,; \\ \omega' &= x\,(l' + il'') + x'\,(m' + im'') + x''\,(n' + in'') \end{aligned}$$

гдѣ λ, μ и ν числа дѣйствительныя, $l' + il''$, $m' + lm''$ и $n' + in''$ числа комплексныя.

Полученные при этомъ новые результаты дали автору возможность рѣшить вышеуказанныя главныя задачи для алгебраическихъ чиселъ кубической области съ отрицательнымъ дискриминантомъ.

Въ томъ же направленіи авторъ трактуетъ систему трехъ линейныхъ коваріантныхъ формъ:

$$\begin{aligned} \omega &= x\lambda + x'\mu + x''\nu\,; \\ \omega' &= x\lambda' + x'\mu' + x''\nu'\,; \\ \omega'' &+ x\lambda'' + x'\mu'' + x''\nu''. \end{aligned}$$

Результаты этихъ изслѣдованій позволяютъ ему рѣшить вышеупомянутыя три главныя задачи теоріи алгебраическихъ чиселъ кубической области съ положительнымъ дискриминантомъ.

Замѣтимъ, что новый способъ разложенія алгебраическихъ единицъ, данный авторомъ, весьма удобенъ въ практическомъ отношеніи, что подтверждается имъ примѣрами.

20-го мая 1897 года работа была блестяще защищена на степень доктора чистой математики въ С.-Петербургскомъ университетѣ. Вмѣстѣ съ тѣмъ С.-Петербургская Академія Наукъ увѣнчала обѣ диссертаціи преміей имени Буняковскаго.

Покончивъ такимъ образомъ съ тѣми работами, которыя хотя и явились, какъ результатъ творческихъ силъ покойнаго, но все-же были въ извѣстномъ смыслѣ обязательными, и сдѣлавшись 1-го августа того же 1897 года ординарнымъ профессоромъ Варшавскаго университета, покойный начинаетъ свободно обдумывать цѣлый рядъ вопросовъ, какъ по вычисленію суммъ особаго типа, такъ и въ области квадратичныхъ формъ. Начинается интенсивная работа, въ высшей степени продуктивная. Свои замѣчательныя открытія въ означенныхъ областяхъ покойный заносилъ въ математическій дневникъ, который въ цѣлости сохранился послѣ смерти. На страницахъ этого дневника каждый день записывалось все, что по разнымъ вопросамъ въ вышеозначенныхъ областяхъ создавали творческія силы усопшаго. Потомъ уже изъ этого матеріала формулировались отдѣльныя произведенія.

Покойный былъ въ высшей степени строгъ къ себѣ. Тѣ работы, которыя стали появляться въ печати съ 1903 года въ журналѣ Крелля и въ „Annales de l'E'cole Normale Supérieure", были уже готовы нѣсколько лѣтъ предъ этимъ. Только авторъ многократно ихъ передѣлывалъ, стараясь изыскать наиболѣе простые и изящные методы для выраженія своихъ глубокихъ идей.

Первой появилась въ печати его работа „Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques" (Crelle's Journal, Bd. 126). Въ ней авторъ при помощи замѣчательнаго преобразованія суммы:

$$\sum_{n>0}^{n \overline{<} x} \mathrm{E}\left(\frac{x}{n}\right),$$

гдѣ $E(x)$ означаетъ цѣлое число, удовлетворяющее условію:

$$x - 1 < E(x) \overline{<} x,$$

выводитъ слѣдующее равенство:

$$\sum_{n>0}^{n<x} \mathrm{E}\left(\frac{x}{n}\right) = x\left[\lg x + 2C - 1\right] + \frac{1}{4} + \vartheta\left[\frac{65}{36}\sqrt[3]{x}\lg x + \frac{79}{13}\sqrt[3]{x} + \frac{3}{2}\right],$$

гдѣ C Эйлерово постоянное, $x \geq 1$, а $|\vartheta| < 1$.

Этотъ результатъ представляетъ въ высшей степени важное дополненіе къ изслѣдованіямъ Lejeune-Dirichlet, которому,—судя по изданнымъ трудамъ,—удалось только доказать, что

$$\sum_{n>0}^{n<x} \mathrm{E}\left(\frac{x}{n}\right) = x\left[\lg + 2C - 1\right] + R(x),$$

гдѣ

$$|R(x)| < A\sqrt{x};$$

при чемъ $x > 0$, а A опредѣленное постоянное число.

Появившаяся затѣмъ въ Annales de l'Ecole Normale Supérieure (t. 22 III série, 1903) работа: „Sur une transcendante et ses applications à la sommation de quelques séries“ представляетъ результатъ его многолѣтнихъ размышленій надъ суммами вида:

$$\frac{1}{2}\sum_{n>a}^{n<b} T(n)f(n) + \frac{1}{2}\sum_{n>a}^{n<b} T(n)f(n),$$

гдѣ $f(n)$ функція аналитическая, а $T(n)$ числовая. Слѣдуя своей привычкѣ, покойный въ теченіе продолжительнаго времени на частныхъ примѣрахъ изучалъ эту сумму, при чемъ такимъ путемъ онъ выяснилъ себѣ, что

$$(v)\qquad \frac{1}{2}\sum_{n>a}^{n<b} T(n)f(n) + \frac{1}{2}\sum_{n>a}^{n<b} T(n)f(n) = \int_a^b f(x)\,\vartheta(x)\,dx + \sum_{1}^{\infty} T(n)\int_a^b f(x)\,\alpha(nx)\,dx.$$

Здѣсь функція $f(x)$ непрерывная въ границахъ $a<x<b$ и имѣетъ внутри этого промежутка ограниченное число maxima и minima; $\vartheta(x)$ и $\alpha(x)$ суть двѣ аналитическія функціи, которыя зависятъ отъ состава функціи $T(n)$.

Это соотношеніе однако имъ нигдѣ не установлено.

Въ разсматриваемой работѣ авторъ выводитъ формулу (v) въ предположеніи, что $T(n)$ означаетъ число дѣлителей цѣлаго положительнаго числа n. При этомъ функціи $\vartheta(x)$ и $\alpha(x)$ имѣютъ слѣдующій составъ:

$$\vartheta(x) = \lg x + C; \quad \alpha(x) = 2\,[\xi(4n^2x) + \eta(4n^2x)].$$

Замѣтимъ, что C есть Эйлерово постоянное; функціи же $\xi(x)$ я $\eta(n)$ суть соотвѣтственнымъ образомъ подобранныя авторомъ рѣшенія дифференціальныхъ уравненій Фурье-Бесселя:

$$x\,\frac{d^2\xi(x)}{dx^2} + \frac{d\xi(x)}{dx} = \xi(x);$$

$$x\,\frac{d^2\eta(x)}{dx^2} + \frac{d\eta(x)}{dx} = -\,\eta(x).$$

Вслѣдъ за этой работой покойный приступилъ къ формулированію и печатанію въ журналѣ Крелля ряда мемуаровъ, касающихся квадратичныхъ формъ съ n перемѣнными, подъ общимъ заглавіемъ: „Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie de formes quadratiques“.

При жизни усопшаго успѣлъ выйти въ свѣтъ полностью первый мемуаръ: „Sur quelques propriétés des formes positives parfaites“ (Bd. 133) и часть второго: „Recherche sur les paralleloèdres primitifs“ (Bd. 134).

Эти работы, которыя особенно радовали автора и служили предметомъ его гордости, представляютъ результатъ его многолѣтнихъ упорныхъ размышленій. Онъ въ нихъ съ особеннымъ свойственнымъ ему глубокомысліемъ и остроуміемъ примѣняетъ одинъ принципъ Hermite'а, которымъ пользовались въ своихъ изслѣдованіяхъ Золотаревъ, Chavre, Selling и Minkowski, къ рѣшенію различныхъ задачъ ариѳметической теоріи положительныхъ квадратичныхъ формъ съ n перемѣнными.

Покончивъ свои изслѣдованія, относящіяся къ теоріи положительныхъ квадратичныхъ формъ, въ связи съ дѣленіемъ пространства n измѣреній при помощи конгруентныхъ параллелоэдровъ, покойный приступилъ къ изысканіямъ въ области теоріи неопредѣленныхъ квадратичныхъ формъ.

Усопшій имѣлъ удивительную привычку создавать свои произведенія, какъ онъ выражался, „безъ пера и бумаги“. Обдумывая такимъ путемъ самыя сложныя теоремы и остроумнѣйшіе методы, покойный только тогда приступалъ къ ихъ записыванію, когда результаты въ его умѣ были почти уже готовы.

Къ изложенію результатовъ по теоріи неопредѣленныхъ квадратичныхъ формъ приступилъ покойный въ февралѣ 1908 года въ бытность свою въ г. Новочеркасскѣ, куда онъ, въ качествѣ декана механическаго отдѣленія, вмѣстѣ съ другими профессорами Варшавскаго политехническаго института былъ откомандированъ Министромъ Торговли и Промышленности для устройства Донского политехникума. Почти годъ, проведенный усопшимъ въ г. Новочеркасскѣ, особенно былъ для него тяжелъ: не вполнѣ благопріятныя условія жизни послужили причиной того, что болѣзнь „желчные камни", которой онъ былъ подверженъ, начала сильно давать себя знать. А въ это время онъ напрягалъ всѣ свои силы, чтобы занести въ свой дневникъ все, что уже назрѣло въ его головѣ. Вотъ что по этому поводу между прочимъ занесено тамъ: „Я дѣлаю большіе успѣхи въ разбираемомъ вопросѣ; но въ то же время здоровье мое все ухудшается и ухудшается. Вчера я въ первый разъ получилъ отчетливую идею объ алгориѳмѣ, который долженъ разрѣшить всѣ вопросы разсматриваемой теоріи формъ и вчера же я имѣлъ сильный припадокъ желчной колики, который мнѣ помѣшалъ заниматься вечеромъ и не далъ возможности заснуть почти всю ночь. Я такъ боюсь, чтобы результаты моихъ долгихъ усилій, съ такимъ трудомъ добываемые, не погибли вмѣстѣ со мной".

Къ величайшему горю тѣхъ, кому дороги интересы науки, опасенія покойнаго были не напрасны: изъ той грандіозной работы по теоріи неопредѣленныхъ квадратичныхъ форма съ n перемѣнными, которую лелѣялъ почти въ назрѣвшемъ видѣ въ своемъ умѣ покойный, жестокій недугъ позволилъ ему оставить только „замѣтки о неопредѣленныхъ квадратичныхъ формахъ", состоящія изъ 28 большихъ страницъ.

Едва ли по нимъ возможно будетъ хотя отчасти воспроизвести тѣ остроумнѣйшія геометрическія соображенія, приведшія къ упоминаемому имъ въ дневникѣ алгориѳму, о которомъ покойный всегда говорилъ съ большимъ воодушевленіемъ и восторгомъ. Для того, чтобы это сдѣлать, недостаточно знать въ общихъ чертахъ тѣ нити, которыя руководили покойнымъ въ его изслѣдованіяхъ; но нужно быть такимъ же глубокимъ знатокомъ въ теоріи квадратичныхъ формъ съ n перемѣнными, какимъ былъ онъ; нужно обладать такою же удивительной техникой въ этой области, какую подъ конецъ своей жизни выработалъ въ себѣ покойный. Да, къ тому же, нужно такъ же самоотверженно любить эту область математическаго знанія, какъ любилъ онъ. А какъ онъ любилъ математику!

Пишущій эти строки въ бытность свою въ Новочеркасскѣ испытывалъ во время одного приступа болѣзни покойнаго самыя мучительныя чувства, видя его не только физическія, но и моральныя страданія: онъ съ величайшею скорбью все время твердилъ то, что выше было приведено изъ его дневника. Когда же ему было легче и онъ могъ уѣхать изъ Новочеркасска въ Варшаву, то при прощаніи сказалъ: „Врачи мнѣ запрещаютъ заниматься. Я и самъ замѣтилъ, что сильное умственное напряженіе всегда вызываетъ откликъ въ моей болѣзни. Но не знаютъ, что значитъ для меня не заниматься математикой. Только одной моей женѣ извѣстно, что математика для меня жизнь, все".

Въ Варшавѣ покойный, пользуясь самоотверженнымъ уходомъ жены и помощью врачей, значительно оправился. Къ сожалѣнію, усопшій не послушался совѣтовъ врачей: или поѣхать въ Карльсбадъ, или же согласиться на операцію. Но, несмотря на это, послѣ своей поѣздки лѣтомъ въ Крымъ, а потомъ пребыванія на дачѣ въ мѣстечкѣ Журавка, онъ вернулся въ Варшаву настолько окрѣпшимъ, что никому изъ его товарищей и знакомыхъ не приходило на мысль, что развязка такъ близка.

Къ несчастью, при открытіи Варшавскаго университета и политехническаго института было много причинъ для тревожнаго настроенія. Волненія же всегда вредно отзывались на его здоровьѣ. Съ 20 октября болѣзнь стала проявляться въ высшей степени мучительной формѣ. Это былъ сильный, продолжительный ея приступъ. Ни усилія врачей, ни борьба организма не могли предотвратить рокового исхода, и 7 ноября въ 9 ч. 20 м. варшавскаго времени больного не стало.

Глубокая скорбь поразила не только его жену, его помощницу даже въ научныхъ трудахъ, и шестерыхъ дѣтей, но и всѣхъ его товарищей-профессоровъ и преподавателей Варшавскаго университета и политехническаго института. Никому не хотѣлось вѣрить, что угасъ Георгій Өеодосьевичъ, котораго всѣ такъ глубоко уважали и любили. Чувствовалось, что случилось нѣчто необыкновенное. Всѣ сознавали, что понесена преждевременная потеря выдающагося ученаго, славнаго профессора, который былъ гордостью и украшеніемъ двухъ высшихъ школъ Варшавы. Политехническій же институтъ въ лицѣ почившаго оплакивалъ, кромѣ того, своего перваго выборнаго декана механическаго отдѣленія, заслужившаго на этомъ поприщѣ общее уваженіе и благодарность. Провожая останки усопшаго на вокзалъ, для дальнѣйшаго слѣдованія на мѣсто погребенія въ мѣстечко Журавка, всѣ скорбѣли также о потерѣ всегда правдиваго, отзывчиваго, сердечнаго человѣка.

Проф. *И. Брайцевъ.*

Варшава.
24 декабря 1908 г.