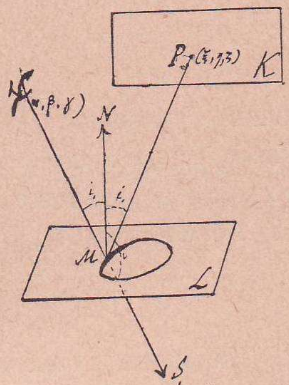
Одна задача изъ геометрической оптики.

А. П. Грузинцева.

§ 1. Задача, рѣшеніе которой намъ казалось не безинтереснымъ сообщить, состоитъ въ слѣдующемъ.

На плоскомъ зеркалѣ L данъ нѣкоторый контуръ M; требуется найти соотвѣтствующій контуръ на другой плоскости K, рисуемый отраженными отъ M лучами при свѣтящейся точкѣ S.



Черт 1

§ 2. Мы предложимъ нѣсколько пріемовъ рѣшенія этой задачи. *Первый*, такъ сказать непосредственный, *пріемъ* будетъ состоять въ слѣдующемъ. Пусть координаты свѣтящейся точки S будутъ α, β, γ; точки $M - x, y, z$; а точки $P - \xi, \eta, \zeta$.

Затѣмъ пусть косинусы — направленія падающаго луча SM будутъ A, B, C; нормали къ зеркалу $L - A_1$, B_1, C_1 и отраженнаго луча $MP - A'$, B', C', а уголъ паденія (въ геометрическомъ смыслѣ), т. е. уголъ NMS_1 будетъ i.

Тогда законы отраженія дадутъ соотношенія: [1])

$$\left.\begin{aligned} A' &= A - 2A_1 \cos i \\ B' &= B - 2B_1 \cos i \\ C' &= C - 2C_1 \cos i, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

причемъ уголъ паденія i опредѣляется черезъ свой косинусъ изъ равенства:

$$\cos i = AA_1 + BB_1 + CC_1. \tag{2}$$

Далѣе уравненія падающаго и отраженнаго лучей можно написать сначала въ видѣ:

$$\frac{x - \alpha}{A} = \frac{y - \beta}{B} = \frac{z - \gamma}{C} = r \tag{3}$$

---

[1]) См. напр. *А. Грузинцевъ* „Къ геометріи распространенія и поглощенія электромагнитной энергіи“. Сообщенія Хар. Мат. Об-ва, т. VI (1897 г.).

$$\frac{\xi - x}{A'} = \frac{\eta - y}{B'} = \frac{\zeta - z}{C'} = \varrho, \tag{4}$$

а потомъ въ видахъ удобствъ анализа при помощи (1) въ видѣ:

$$x = \alpha + Ar, \quad y = \beta + Br, \quad z = \gamma + Cr \tag{a}$$

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \alpha + A(r + \varrho) - 2A_1\varrho \cos i \\ \eta &= \beta + B(r + \varrho) - 2B_1\varrho \cos i \\ \zeta &= \gamma + C(r + \varrho) - 2C_1\varrho \cos i \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

Затѣмъ уравненія контура M напишемъ въ видѣ:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D = 0 \tag{c}$$

и

$$f(x, y, z) = 0 \tag{d}$$

причемъ уравненіе (c) есть уравненіе плоскости, въ которой лежитъ зеркало, а уравненіе (d) — уравненіе нѣкоторой заданной напередъ поверхности, пересѣченіе которой съ плоскостью зеркала и дастъ контуръ M.

Количества A_1, B_1, C_1 удовлетворяютъ, какъ извѣстно, отношенію:

$$A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 = 1. \tag{5}$$

Наконецъ уравненіе *картинной плоскости* K можно написать въ видѣ:

$$m\xi + ny + p\zeta + q = 0 \tag{e}$$

причемъ m, n, p суть косинусы—направленія нормали къ плоскости K; слѣдовательно между ними существуетъ соотношеніе:

$$m^2 + n^2 + p^2 = 1.$$

§ 3. Въ системѣ уравненій: (2), (a)—(e) перемѣнными будутъ количества:

$$x, y, z; \quad A, B, C; \quad \xi, \eta, \zeta; \quad r, \varrho \text{ и } i,$$

а остальныя будутъ считаться данными.

Задача наша будетъ рѣшена, если мы изъ системы уравненій (2), (a)—(e), числомъ 10, исключимъ всѣ перемѣнныя, числомъ 9, кромѣ ξ, η, ζ, между которыми получимъ нѣкоторое уравненіе:

$$F(\xi, \eta, \zeta) = 0. \tag{A}$$

Это уравненіе вмѣстѣ съ уравненіемъ картинной плоскости и рѣшитъ предложенную задачу.

§ 4. Введемъ обозначенія, которыя намъ нужны будутъ въ дальнѣйшемъ изложеніи:

$$\left.\begin{aligned} a &= A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma + D; \\ b &= A_1m + B_1n + C_1p; \\ c &= m\alpha \;\; + n\beta \;\; + p\gamma + q; \end{aligned}\right\} \qquad \text{(B)}$$

геометрическій смыслъ которыхъ ясенъ.

§ 5. Теперь можемъ заняться намѣченнымъ исключеніемъ перемѣнныхъ.

Изъ уравненій (a) и (b) по умноженіи ихъ по порядку на A_1, B_1, C_1 и сложеніи результатовъ получаемъ при помощи (2) и (c):

$$r\cos i = -a \qquad (\alpha)$$

$$\varrho \cos i = a - H, \qquad (\beta)$$

гдѣ положено:

$$H = A_1\xi + B_1\eta + C_1\zeta + D + a. \qquad \text{(C)}$$

Подставимъ теперь (α) и (β) въ равенства (b) и получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \alpha - \frac{AH}{\cos i} + 2A_1(H-a) \\ \eta &= \beta - \frac{BH}{\cos i} + 2B_1(H-a) \\ \zeta &= \gamma - \frac{CH}{\cos i} + 2C_1(H-a) \end{aligned}\right\} \qquad (\gamma)$$

Теперь изъ (a) при помощи (α) находимъ:

$$A = \frac{\alpha - x}{a}\cos i, \quad B = \frac{\beta - y}{a}\cos i, \quad C = \frac{\gamma - z}{a}\cos i. \qquad (\delta)$$

Внесемъ эти значенія въ предыдущія равенства (γ), получимъ по приведеніи:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_0 + \frac{a}{H}(\xi - \alpha_0) \\ y &= \beta_0 + \frac{a}{H}(\eta - \beta_0) \\ z &= \gamma_0 + \frac{a}{H}(\zeta - \gamma_0) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}$$

гдѣ положено для краткости письма:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha - 2A_1a \\ \beta_0 &= \beta - 2B_1a \\ \gamma_0 &= \gamma - 2C_1a \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Теперь остается только подставить значенія x, y, z изъ (I) въ уравненіе (d):

$$f(x,\ y,\ z)=0,$$

тогда по приведеніи получимъ:

$$F(\xi,\ \eta,\ \zeta)=0.$$

Итакъ задача рѣшена.

§ 6. Прежде чѣмъ приступить къ изложенію другихъ пріемовъ рѣшенія задачи, покажемъ, что можно обратно по координатамъ точки $M(x,\ y,\ z)$ найти координаты точки $P(\xi,\ \eta,\ \zeta)$, т. е. перейти отъ изображенія контура къ самому контуру.

Дѣйствительно, умноживъ уравненія (I) по порядку на m, m, p и сложивъ результаты, при помощи (B) и (6), получимъ, положивъ:

$$a_1=2ab-c,\quad G=mx+ny+pz+q+a_1 \tag{D}$$

соотношеніе:

$$GH=aa_1, \tag{7}$$

а внеся отсюда значеніе H въ тѣ же уравненія (I), найдемъ:

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\alpha_0+\frac{a_1}{G}(x-\alpha_0)\\ \eta&=\beta_0+\frac{a_1}{G}(y-\beta_0)\\ \zeta&=\gamma_0+\frac{a_1}{G}(z-\gamma_0)\end{aligned}\right\} \tag{II}$$

Замѣтимъ, кстати, что равенство (7), написанное въ видѣ:

$$(A_1\xi+B_1\eta+C_1\zeta+D+a)(mx+ny+pz+q+a_1)=aa_1 \tag{III}$$

представляетъ общее геометрическое свойство двухъ пучковъ прямыхъ: SM и MP.

§ 7. Можно придти къ тѣмъ же выводамъ (I) или (II) *другимъ* болѣе короткимъ *путемъ*, если съ самаго начала рѣшенія задачи ввести координаты точки, представляющей *изображеніе* свѣтящейся точки въ зеркалѣ L. Эта точка, обозначивъ ее S_0, какъ разъ и имѣетъ координатами α_0, β_0, γ_0, которые вошли въ предыдущій анализъ, какъ нѣкоторые постоянные.

Подъ *изображеніемъ* точки въ плоскомъ зеркалѣ мы понимаемъ точку симметричную съ свѣтящейся, т. е. лежащую за зеркаломъ на перпендикулярѣ опущенномъ изъ S на плоскость зеркала на разстояніи равномъ разстоянію S отъ него.

Поэтому, если временно обозначимъ координаты изображенія точки S буквами α', β', γ', то имѣемъ согласно опредѣленію при помощи (B):

$$A_1\alpha' + B_1\beta' + C_1\gamma' + D = -a. \tag{8}$$

Сверхъ того уравненіе S_0S согласно тому же опредѣленію можно написать въ видѣ:

$$\frac{\alpha'-\alpha}{A_1} = \frac{\beta'-\beta}{B_1} = \frac{\gamma'-\gamma}{C_1} = r_0. \tag{9}$$

Изъ этихъ послѣднихъ уравненій при помощи (8) и (B) находимъ:

$$r_0 = -2a,$$

а подставляя обратно это значеніе r_0 въ (9), получимъ:

$$\alpha' = \alpha - 2A_1a, \quad \beta' = \beta - 2B_1a, \quad \gamma' = \gamma - 2C_1a$$

или по (6):

$$\alpha' = \alpha_0, \quad \beta' = \beta_0, \quad \gamma' = \gamma_0,$$

слѣдовательно, точка съ координатами α_0, β_0, γ_0, опредѣляемыми равенствами (6), есть *изображеніе* свѣтящейся точки S въ нашемъ зеркалѣ L.

§ 8. Вотъ теперь можемъ рѣшить нашу задачу короче, если съ самаго начала ввести изображеніе S_0 [1]).

Рѣшеніе будетъ состоять въ слѣдующемъ. Точка $S_0(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ лежитъ на прямой (4), а потому имѣемъ двѣ системы уравненій:

$$\frac{\alpha_0 - x}{A'} = \frac{\beta_0 - y}{B'} = \frac{\gamma_0 - z}{C'} = \varrho_0$$

$$\frac{\xi - \alpha_0}{A'} = \frac{\eta - \beta_0}{B'} = \frac{\zeta - \gamma_0}{C'} = \varrho_0'.$$

Здѣсь значеніе ϱ_0 и ϱ_0' понятно. Раздѣляя эти равенства по-членно и полагая на время:

$$\frac{\varrho_0}{\varrho_0'} = k,$$

находимъ:

$$\alpha_0 - x = k(\xi - \alpha_0), \quad \beta_0 - y = k(\eta - \beta_0), \quad \gamma_0 - z = k(\zeta - \gamma_0). \tag{10}$$

Умножая эти уравненія по порядку на A_1, B_1, C_1 и складывая результаты, найдемъ при помощи (6) и обозначеній (B) и (C):

$$k = -\frac{a}{H},$$

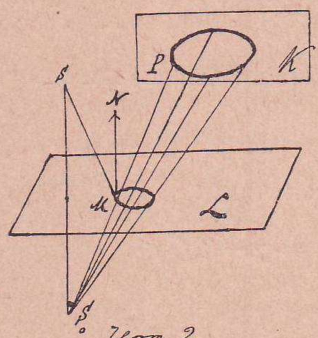
---

[1]) Этотъ же пріемъ рѣшаетъ и задачу о тѣняхъ плоскихъ фигуръ.

а подставляя обратно въ (10), получаемъ соотношенія (I). Точно также найдемъ и соотношенія (II), если только (10) будемъ умножать на m, n, p вмѣсто A_1, B_1, C_1.

Это *второе рѣшеніе* нашей задачи короче перваго.

§ 9. Но можно предложить еще способъ рѣшенія той же задачи Онъ состоитъ въ слѣдующемъ.



Черт 2

Если введемъ точку $S_0(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$—изображеніе свѣтящейся точки S, то отраженные лучи образуютъ конусъ съ вершиной S_0, пересѣченіе котораго съ картинной плоскостью K и будетъ искомымъ мѣстомъ—изображеніемъ контура M.

Пусть уравненіе плоскости, проходящей черезъ S_0 и P будетъ:

$$M(\xi-\alpha_0)+N(\eta-\beta_0)+ \\ +P(\zeta-\gamma_0)=0, \tag{1}$$

при чемъ параметры M, N, P удовлетворяютъ соотношенію:

$$M^2+N^2+P^2=1. \tag{2}$$

Сверхъ того плоскость (1) проходитъ черезъ точку $M(x, y, z)$ даннаго на L контура, а потому имѣемъ еще уравненіе:

$$M(x-\alpha_0)+N(y-\beta_0)+P(z-\gamma_0)=0. \tag{3}$$

При этомъ координаты x, y, z должны удовлетворять: a) уравненію плоскости L, которое можно написать въ видѣ:

$$A_1(x-\alpha_0)+B_1(y-\beta_0)+C_1(z-\gamma_0)=-a, \tag{4}$$

b)

$$f(x, y, z)=0 \tag{5}$$

и c) уравненію касательной плоскости къ контуру, т. е. уравненію:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x-\alpha_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(y-\beta_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(z-\gamma_0)=0. \tag{6}$$

Уравненія (4), (5) и (6) послужатъ для исключенія координатъ x, y, z.

§ 10. Разыщемъ уравненіе обертки плоскости (1). Примемъ за независимое перемѣнное нѣкоторую величину u, тогда дифференцируя уравненія (1), (2) и (3) по u, найдемъ:

$$(\xi-\alpha_0)\frac{\partial M}{\partial u}+(\eta-\beta_0)\frac{\partial N}{\partial u}+(\zeta-\gamma_0)\frac{\partial P}{\partial u}=0$$

$$M\frac{\partial M}{\partial u}+N\frac{\partial N}{\partial u}+P\frac{\partial P}{\partial u}=0$$

$$(x-\alpha_0)\frac{\partial M}{\partial u}+(y-\beta_0)\frac{\partial N}{\partial u}+(z-\gamma_0)\frac{\partial P}{\partial u}=-\left(M\frac{\partial x}{\partial u}+N\frac{\partial y}{\partial u}+P\frac{\partial z}{\partial u}\right).$$

Умножимъ эти уравненія по порядку на неопредѣленные множители λ, μ, ν, результаты сложимъ, а для опредѣленія этихъ множителей примемъ, что они удовлетворяютъ уравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned}(\xi-\alpha_0)\lambda+M\mu+(x-\alpha_0)\nu=0\\(\eta-\beta_0)\lambda+N\mu+(y-\beta_0)\nu=0\\(\zeta-\gamma_0)\lambda+P\mu+(z-\gamma_0)\nu=0\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

и, какъ ихъ слѣдствіе:

$$M\frac{\partial x}{\partial u}+N\frac{\partial y}{\partial u}+P\frac{\partial z}{\partial u}=0.\tag{8}$$

Изъ системы (7) по умноженіи ея уравненій сначала на M, N, P, потомъ на A_1, B_1, C_1 и сложеніи результатовъ, находимъ при помощи равенствъ (1)—(4) и положенія (C) слѣдующее:

$$\mu=0,\quad H\lambda=-a\nu$$

слѣдовательно

$$\nu=-\frac{H}{a}\lambda.$$

Подставляя теперь обратно значенія μ и ν въ уравненія (7), получимъ:

$$x=\alpha_0+\frac{a}{H}(\xi-\alpha_0),\quad y=\beta_0+\frac{a}{H}(\eta-\beta_0),\quad z=\gamma_0+\frac{a}{H}(\zeta-\gamma_0)\tag{I}$$

какъ разъ систему (I), а внося эти значенія x, y, z въ уравненіе

$$f(x,\ y,\ z)=0,$$

получимъ уравненіе:

$$F(\xi,\ \eta,\ \zeta)=0,$$

рѣшающее нашу задачу.

§ 11. Если бы пожелали довести дѣло опредѣленія обертки плоскости (1), т. е. конуса съ вершиной въ S_0 и основаніемъ—изображеніемъ P контура M, то пересѣченіе этого конуса съ картинной плоскостью P, т. е. съ плоскостью

$$m\xi+n\eta+p\zeta+q=0$$

и было бы искомой кривой, но намъ достаточно уже найденнаго рѣшенія нашей задачи.

§ 12. Разсмотримъ нѣкоторые частные случаи, которые легко осуществить на опытѣ и тѣмъ, если угодно, повѣрить найденные результаты.

Пусть зеркало и картинная плоскость лежатъ въ двухъ взаимноперпендикулярныхъ плоскостяхъ; тогда, принявъ картинную плоскость за плоскость xz, плоскость зеркала за плоскость zy, будемъ имѣть:

$$\eta = 0 \quad \text{и} \quad x = 0$$

какъ уравненія этихъ плоскостей.

Затѣмъ получимъ, какъ слѣдствіе:

$$m = p = 0, \quad n = 1, \quad A_1 = 1, \quad B_1 = C_1 = 0$$

и уравненія (c) и (e) дадутъ поэтому:

$$D = 0, \quad q = 0.$$

Для постоянныхъ имѣемъ:

$$a = \alpha, \quad b = 0, \quad c = \beta;$$

$$\alpha_0 = -\alpha, \quad \beta_0 = \beta, \quad \gamma_0 = \gamma$$

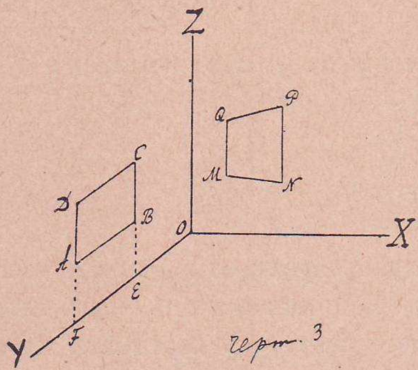
и

$$H = \xi + \alpha.$$

Въ этомъ случаѣ для координатъ x, y и z имѣемъ:

$$x = 0, \quad y = \frac{\beta\xi}{\xi + \alpha}, \quad z = \frac{\gamma\xi + \alpha\zeta}{\xi + \alpha} \tag{A}$$

и слѣдовательно уравненія контура—изображенія будутъ:



Черт. 3

$$f\left(0, \frac{\beta\xi}{\xi + \alpha}, \frac{\gamma\xi + \alpha\zeta}{\xi + \alpha}\right) = 0 \text{ и } \eta = 0. \tag{B}$$

причемъ, какъ помнимъ, f заданная напередъ функція.

§ 13. I. Примѣнимъ эти формулы къ случаю, когда контуръ M будетъ прямоугольникъ со сторонами параллельными осямъ y и z. Назовемъ координаты точки A буквами k_1, h, точки B буквами k, h и точки D буквами k_1, h_1, т. е. на чертежѣ будетъ:

$$OE = k; \quad OF = k_1; \quad AF = BE = h; \quad DF = h_1$$

При этомъ стороны прямоугольника будутъ:

$$AB = DC = k_1 - k; \quad BC = AD = h_1 - h.$$

Уравненія сторонъ будутъ:

$$1)\ AB \ldots z - h = 0; \quad 2)\ CD \ldots z - h_1 = 0; \quad 3)\ BC \ldots y - k = 0$$
$$\text{и} \quad 4)\ AD \ldots y - k_1 = 0.$$

Поэтому уравненія линій—изображеній сторонъ AB, CD, BC и AD, т. е. уравненіе $F(\xi, \eta, \zeta) = 0$ будутъ:

1) $$(\gamma - h)\xi + \alpha\zeta - \alpha h = 0,$$

т. е. прямая въ плоскости ZX, отсѣкающая на оси z'овъ отрѣзокъ h, а на оси x'овъ отрѣзокъ $\dfrac{\alpha h}{\gamma - h}$. Это прямая MN.

2) Прямая PQ будетъ опредѣляться уравненіемъ:

$$(\gamma - h_1)\xi + \alpha\zeta - \alpha h_1 = 0.$$

Это прямая съ отрѣзками на осяхъ z'овъ и x'овъ равными h_1 и $\dfrac{\alpha h_1}{\gamma - h_1}$.

3) Прямая, соотвѣтствующая BC, будетъ MQ; ея уравненіе будетъ:

$$\xi = \frac{\alpha k}{\beta - k},$$

Это прямая, параллельная оси z'овъ.

4) Наконецъ прямая, соотвѣтствующая AD, будетъ NP, опредѣляемая уравненіемъ:

$$\xi = \frac{\alpha k_1}{\beta - h_1},$$

параллельная тоже оси z'овъ.

Итакъ изображеніе прямоугольника $ABCD$ будетъ трапеціей $MNPQ$.

Теперь можемъ опредѣлить координаты точекъ M, N, P, Q соотвѣтствующихъ точкамъ B, C, D, A. Они будутъ:

$$\xi_M = \frac{\alpha k}{\beta - k}, \quad \zeta_M = \frac{\beta h - \gamma k}{\beta - k}; \quad \xi_N = \frac{\alpha k_1}{\beta - k_1}, \quad \zeta_N = \frac{\beta h - \gamma k_1}{\beta - k_1};$$

$$\xi_P = \frac{\alpha k_1}{\beta - k_1}, \quad \zeta_P = \frac{\beta h_1 - \gamma k_1}{\beta - k_1}; \quad \xi_Q = \frac{\alpha k}{\beta - k}, \quad \zeta_Q = \frac{\beta h_1 - \gamma k}{\beta - k}.$$

Длины сторонъ будутъ:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{MN} &= \frac{\beta(k_1-k)}{(\beta-k)(\beta-k_1)}\sqrt{\alpha^2+(h-\gamma)^2}; \quad & \overline{NP} &= \beta\frac{h_1-h}{\beta-k_1};\\
\overline{PQ} &= \frac{\beta(k_1-k)}{(\beta-k)(\beta-k_1)}\sqrt{\alpha^2+(h_1-\gamma)^2}; \quad & \overline{QM} &= \beta\frac{h_1-h}{\beta-k}.
\end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

Если свѣтящаяся точка лежитъ въ плоскости параллельной плоскости xy, проведенной отъ послѣдней на разстояніи $f=\frac{h+h_1}{2}$, то трапеція получится равнобочная.

При помощи простой установки, которую здѣсь описывать неумѣстно, мы нашли для плоскаго зеркала съ размѣрами $\overset{\text{см.}}{17.0}$ и $\overset{\text{см.}}{22.0}$ въ случаѣ, когда было взято:

$$\alpha=\overset{\text{см.}}{80.0}; \quad \beta=\overset{\text{см.}}{174.0}; \quad \gamma=\overset{\text{см.}}{55.0}$$

и положеніе зеркала опредѣлялось величинами:

$$k=\overset{\text{см.}}{41.0}, \quad k_1=\overset{\text{см.}}{58.0}; \quad h=\overset{\text{см.}}{36.3}, \quad h_1=\overset{\text{см.}}{58.2};$$

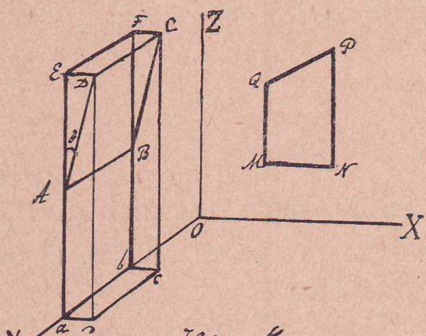
по нашимъ формуламъ найдено было:

$$\overline{MN}=\overset{\text{см.}}{15.8}; \quad \overline{NP}=\overset{\text{см.}}{32.8}; \quad \overline{PQ}=\overset{\text{см.}}{15.4}; \quad \overline{QM}=\overset{\text{см.}}{28.7}.$$

Опытъ же далъ:

$$\overline{MN}=\overset{\text{см.}}{15.3}; \quad \overline{NP}=\overset{\text{см.}}{32.8}; \quad \overline{PQ}=\overset{\text{см.}}{15.4}; \quad \overline{QM}=\overset{\text{см.}}{28.8}.$$

Измѣренія производились самымъ простымъ образомъ.



черт. 4.

§ 14. II. Пусть зеркало $ABCD$ повѣшено наклонно къ координатной плоскости YOZ и такимъ образомъ, что AB параллельно оси Y'овъ.

Тогда имѣемъ:

$$B_1=0$$

и если координаты точекъ A, B, D и C будутъ:

$$Oa=k_1; \quad Ob=k; \quad Aa=Bb=h;$$
$$Cc=D\partial=Ea=h_1 \quad \text{и} \quad ED=d,$$

то получимъ:

$$A_1=\cos\theta=\frac{h_1-h}{\sqrt{d^2+(h_1-h)^2}}, \qquad C_1=-\sin\theta=\frac{d}{\sqrt{d^2+(h_1-h)^2}} \quad (a)$$

и затѣмъ:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{d}{h_1 - h}, \tag{b}$$

$$D = -C_1 h = -C_1 h_1 - A_1 d \tag{c}$$

или

$$D = \frac{hd}{\sqrt{d^2 + (h_1 - h)^2}}. \tag{d}$$

Теперь уравненіе $f(x, y, z) = 0$ будетъ послѣдовательно: 1) для стороны AB $z - h = 0$; 2) для стороны BC $y - k = 0$; 3) для стороны CD $z - h_1 = 0$ и наконецъ 4) для стороны DA $y - k_1 = 0$.

Уравненіе картинной плоскости будетъ: $\eta = 0$, а потому

$$m = p = 0, \quad n = 1, \quad q = 0.$$

Далѣе формулы (B) и (C) дадутъ въ нашемъ случаѣ:

$$a = A_1\alpha + C_1\gamma + D; \quad H = A_1\xi + C_1\zeta + D + a. \tag{e}$$

Для координатъ точки $S_0(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ получимъ формулы:

$$\alpha_0 = \alpha - 2A_1 a; \quad \beta_0 = \beta; \quad \gamma_0 = \gamma - 2C_1 a.$$

Подставляя все это въ формулы (I) § 5, найдемъ:

$$\begin{aligned} Hx &= (\alpha - 2A_1 a) H + (\xi - \alpha + 2A_1 a) a, \\ Hy &= \beta(A_1\xi + C_1\zeta + D), \\ Hz &= (\gamma - 2C_1 a) H + (\zeta - \gamma + 2C_1 a) a. \end{aligned}$$

Поэтому получимъ для контура $MNPQ$ изображенія $ABCD$ на картинной плоскости слѣдующія уравненія:

I. Для прямой $MN\ldots(\gamma - h - 2C_1 a) H + (\zeta - \gamma + C_1 a) a = 0$

IV. Для прямой $MQ\ldots(\beta - k) H - a\beta = 0$

II. Для прямой $PN\ldots(\beta - k_1) H - a\beta = 0$

III. Для прямой $PQ\ldots(\gamma - h_1 - 2C_1 a) H + (\zeta - \gamma + 2C_1 a) a = 0$.

Теперь преобразуемъ эти уравненія.

Уравненіе MN будетъ по подстановкѣ значенія H и приведеніи:

$$A_1(\gamma - h - 2C_1 a)\xi + [C_1(\gamma - h - 2C_1 a) + a](\zeta - h) = 0. \tag{I}$$

Уравненія прямыхъ MQ и PN будутъ послѣ подобныхъ же преобразованій:

$$\text{для } MQ\ldots[A_1\xi + C_1(\zeta - h)](\beta - k) - ak = 0 \qquad \text{(IV)}$$

$$\text{для } PN\ldots[A_1\xi + C_1(\zeta - h)](\beta - k_1) - ak_1 = 0 \qquad \text{(II)}$$

Отсюда заключаемъ, что прямыя MQ и NP всегда параллельны. Для симметріи можно придать послѣднему уравненію видъ:

$$[A_1(\xi - d) + C_1(\zeta - h_1)](\beta - k_1) - ak_1 = 0 \qquad \text{(II bis)}$$

подставивъ въ (II) вмѣсто C_1h его значеніе изъ (c).

Наконецъ уравненіе прямой PQ будетъ:

$$A_1(\gamma - h_1 - 2C_1a)(\xi - d) + [C_1(\gamma - h_1 - 2C_1a) + a](\zeta - h_1) = 0 \quad \text{(III)}$$

Разсматривая эти уравненія по два совмѣстно, найдемъ координаты точекъ пересѣченія. Мы опредѣлимъ сначала координаты точекъ M, N, P, Q. Послѣдовательно находимъ изъ уравненій (I) и (IV):

$$\xi_M = \frac{k[C_1(\gamma - h - 2C_1a) + a]}{A_1(\beta - k)}, \quad \zeta_M = h - \frac{k(\gamma - h - 2C_1a)}{\beta - k}.$$

Изъ уравненій (I) и (II) опредѣляемъ:

$$\xi_N = \frac{k_1[C_1(\gamma - h - 2C_1a) + a]}{A_1(\beta - k_1)}, \quad \zeta_N = h - \frac{k_1(\gamma - h - 2C_1a)}{\beta - k_1}.$$

Затѣмъ изъ уравненій (II bis) и (III) получаемъ:

$$\xi_P = d + \frac{k_1[C_1(\gamma - h_1 - 2C_1a) + a]}{A_1(\beta - k_1)}, \quad \zeta_P = h_1 - \frac{k_1(\gamma - h_1 - 2C_1a)}{\beta - k_1}.$$

Наконецъ уравненія (III) и (IV) дадутъ:

$$\xi_Q = d + \frac{k[C_1(\gamma - h_1 - 2C_1a] + a]}{A_1(\beta - k)}, \quad \zeta_Q = h_1 - \frac{k(\gamma - h_1 - 2C_1a)}{\beta - k}.$$

Теперь по координатамъ этихъ вершинъ находимъ длины сторонъ:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{MN} &= \frac{\beta(k_1 - k)}{A_1(\beta - k)(\beta - k_1)}\sqrt{(\gamma - h)^2 + a^2 - 2C_1a(\gamma - h)},\\
\overline{NP} &= \frac{\beta}{\beta - k_1}\sqrt{d^2 + (h_1 - h)^2}; \quad \overline{MQ} = \frac{\beta}{\beta - k}\sqrt{d^2 + (h_1 - h)^2}\\
\text{и} \quad \overline{PQ} &= \frac{\beta(k_1 - k)}{A_1(\beta - k)(\beta - k_1)}\sqrt{(\gamma - h_1)^2 + a^2 - 2C_1a(\gamma - h_1)}.
\end{aligned}\right\} \quad \text{(A)}$$

Если $d = 0$, то эти формулы обращаются въ формулы (A) § 13.

Такъ-какъ прямыя MQ и NP всегда параллельны, то фигура $MNPQ$ будетъ трапеціей и если стороны ея MN и PQ равны, то получимъ равнобочную трапецію. Это возможно при условіи:

$$A_1\left(\gamma - \frac{h_1 + h}{2}\right) - C_1\left(\alpha - \frac{d}{2}\right) = 0,$$

которое получимъ, подставляя въ равенство:

$$\overline{MN} = \overline{PQ}$$

значенія отрѣзковъ изъ формулъ (A) и преобразовавъ результатъ.

§ 15. III. Примѣнимъ наши формулы къ случаю, когда контуръ M будетъ кругъ. Его уравненіе пусть будетъ:

$$(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - R^2 = 0,$$

гдѣ R радіусъ круга, а y_0 и z_0 координаты его центра.

Уравненія изображенія контура будутъ:

$$\left(\frac{\beta\xi}{\xi + \alpha} - y_0\right)^2 + \left(\frac{\gamma\xi + \alpha\zeta}{\xi + \alpha} - z_0\right)^2 - R^2 = 0, \quad \eta = 0$$

или по приведеніи:

$$[(\beta - y_0)^2 + (\gamma - z_0)^2 - R^2]\xi^2 + \alpha^2\zeta^2 + 2\alpha(\gamma - z_0)\xi\zeta - 2\alpha[(\beta - y_0)y_0 +$$
$$+ (\gamma - z_0)z_0 + R^2]\xi - 2\alpha^2 z_0\zeta + \alpha^2(y_0^2 + z_0^2 - R^2) = 0.$$

Это уравненіе эллипсиса, ибо дискриминанъ полученнаго уравненія будетъ:

$$B^2 - 4AC = 4\alpha^2(R^2 - (\beta - y_0)^2) < 0,$$

такъ-какъ R всегда меньше абсолютной величины $\beta - y_0$.

Если свѣтящаяся точка помѣщена въ такомъ пунктѣ, что

$$\alpha = \sqrt{(\beta - y_0)^2 - R^2}, \quad \gamma = z_0,$$

то эллипсъ обратится въ кругъ.

§ 16. IV. Разсмотримъ еще любопытный случай, когда контуръ M будетъ эллипсисъ, котораго оси параллельны координатнымъ осямъ y'овъ и z'овъ.

Уравненіе этого эллипсиса будетъ:

$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}-1=0. \tag{a}$$

Въ такомъ случаѣ (§ 5) вмѣсто уравненія

$$F(\xi,\ \eta,\ \zeta)=0$$

получимъ:

$$\begin{aligned}[c^2(\beta-y_0)^2+b^2(\gamma-z_0)^2-b^2c^2]\xi^2+\alpha^2b^2\zeta^2+2\alpha b^2(\gamma-z_0)\xi\zeta-\\ -2\alpha[c^2(\beta-y_0)y_0+b^2(\gamma-z_0)z_0+b^2c^2]\xi-2\alpha^2b^2z_0\zeta+\\ +\alpha^2(c^2y_0^2+b^2z_0^2-b^2c^2)=0.\end{aligned} \tag{b}$$

Дискриминанъ этого уравненія

$$-\alpha^2b^2[(\beta-y_0)^2-c^2]<0,$$

ибо всегда

$$c<|\beta-y_0|,$$

а потому (b) представляетъ эллипсисъ.

Если $b=c=R$, то уравненіе (b) превращается въ соотвѣтственное уравненіе предыдущаго параграфа.

§ 17. Интересенъ частный случай, когда уравненіе (b) будетъ уравненіемъ круга, т. е. случай, когда эллиптическій контуръ рисуется на картинной плоскости кругомъ.

Пусть уравненіе этого круга будетъ:

$$(\xi-\xi_0)^2+(\zeta-\zeta_0)^2-P^2=0, \tag{c}$$

гдѣ ξ_0, ζ_0 координаты его центра, а P радіусъ.

Сравнивая (b) и (c), получимъ достаточное число уравненій для опредѣленія ξ_0, ζ_0 и P, а также получимъ и условіе возможности обращенія эллипсиса (b) въ кругъ (c).

Находимъ уравненія, если обозначимъ буквой k коэффиціентъ пропорціональности:

$$\begin{gathered}c^2(\beta-y_0)^2+b^2(\gamma-z_0)^2-b^2c^2=k;\quad b^2\alpha^2=k;\quad b^2\alpha(\gamma-z_0)=0,\\ \alpha^2b^2z_0=k\zeta_0,\quad \alpha^2[c^2(\beta-y_0)y_0+b^2(\gamma-z_0)z_0+b^2c^2]=k\xi_0;\\ \alpha^2(c^2y_0^2+b^2z_0^2-b^2c^2)=k(\xi_0^2+\zeta_0^2-P^2).\end{gathered}$$

Отсюда находимъ:

$$k=\alpha^2b^2,\quad \gamma=z_0,\quad \zeta_0=z_0. \tag{d}$$

Затѣмъ опредѣляемъ:

$$\alpha = \frac{c}{b}\sqrt{(\beta - y_0)^2 - b^2}; \quad \xi_0 = \frac{c}{b}\frac{(\beta - y_0)y_0 + b^2}{\sqrt{(\beta - y_0)^2 - b^2}}. \tag{e}$$

Слѣдовательно, заключаемъ, что изображеніе на картинномъ экранѣ эллиптическаго контура (или зеркала) въ видѣ круга получается лишь тогда, когда свѣтящаяся точка лежитъ въ одной плоскости, параллельной плоскости xy, съ центромъ зеркала и координата α опредѣляется изъ уравненія:

$$\alpha = \frac{c}{b}\sqrt{(\beta - y_0)^2 - b^2}.$$

Радіусъ круга—изображенія будетъ:

$$P = \frac{c\beta}{\sqrt{(\beta - y_0)^2 - b^2}}. \tag{f}$$

§ 18. Для случая круглаго контура (круглаго зеркала) получаемъ уравненіе ($b = c = R$):

$$\gamma = z_0; \quad \zeta_0 = z_0; \quad \xi_0 = \frac{(\beta - y_0)y_0 + R^2}{\sqrt{(\beta - y_0)^2 - R^2}}; \quad P = \frac{R\beta}{\sqrt{(\beta - y_0)^2 - R^2}}$$

и

$$\alpha = \sqrt{(\beta - y_0)^2 - R^2}.$$

§ 19. Уравненіе (b) § 16 будетъ представлять эллипсисъ, отнесенный къ своимъ осямъ, если имѣемъ условіе:

$$z_0 = \gamma, \tag{h}$$

т. е. если свѣтящаяся точка и центръ зеркала лежатъ въ плоскости параллельной плоскости xy'овъ.

Если уравненіе эллипсиса—изображенія напишемъ для этого случая въ видѣ:

$$\frac{(\xi - \xi_0)^2}{A^2} + \frac{(\zeta - \zeta_0)^2}{C^2} - 1 = 0, \tag{k}$$

то сравненіе коэффиціентовъ, подобно случаю § 17, дастъ:

$$A = \frac{\alpha\beta b}{(\beta - y_0)^2 - b^2}, \quad C = \frac{c\beta}{\sqrt{(\beta - y_0)^2 - b^2}},$$

$$\xi_0 = \frac{\alpha[(\beta - y_0)y_0 + b^2]}{(\beta - y_0)^2 - b^2}, \quad \zeta_0 = z_0. \tag{l}$$

Эти формулы обращаются въ формулы § 16, если возьмемъ:

$$A = C = P.$$

Для круговаго контура формулы (l) будутъ:

$$A = \frac{\alpha\beta R}{(\beta - y_0)^2 - R^2}, \quad C = \frac{\beta R}{\sqrt{(\beta - y_0)^2 - R^2}},$$
$$\xi_0 = \frac{\alpha((\beta - y_0)y_0 + R^2)}{(\beta - y_0)^2 - R^2}, \quad \zeta_0 = z_0.$$

2 февраля 1909 г.