Кривая отраженія солнца въ морѣ.

Д. М. Синцова.

Въ своей статьѣ „Immagine del sole riflessa nel mare“ [1]) A. Riccò, нынѣ уже покойный, описываетъ свои наблюденія надъ рѣдкимъ явленіемъ, когда отраженіе солнца поверхностью моря является ограниченнымъ замкнутою кривою,— это требуетъ исключительно спокойной поверхности моря и совершенно ясной погоды. Riccò нашелъ, что это изображеніе представляется гораздо болѣе сплющеннымъ, чѣмъ прямое, и приписываетъ это вліянію шарообразности земли.

Представляетъ поэтому извѣстный интересъ задача такого рода: *опредѣлить видъ кривой, ограничивающей отраженіе солнца* (или лучше свѣтящагося шара) *на сферической поверхности*“ [2]).

Я даю въ дальнѣйшемъ рѣшеніе этой задачи сначала точное, затѣмъ принимая во вниманіе реальныя условія, дѣлаю нѣкоторыя приближенныя допущенія, значительно упрощающія полученное уравненіе.

При этомъ однако не принимается во вниманіе рефракція, которая однако въ этомъ явленіи должна играть существенную роль, ибо самое явленіе возможно наблюдать только тогда, когда свѣтило находится не высоко надъ горизонтомъ.

Во второй части я дѣлаю попытку принять во вниманіе и вліяніе рефракціи,—по крайней мѣрѣ астрономической,—именно я предполагаю, что въ морѣ отражается не истинный дискъ солнца, а тотъ, какимъ онъ представляется непосредственно глазу наблюдателя.

§ 1. Рѣшеніе задачи при отсутствіи рефракціи.

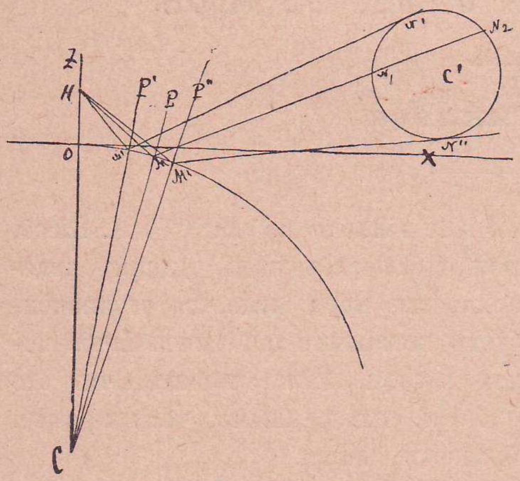
Примемъ поверхность свѣтящагося тѣла (солнца) и отражающаго (земли, покрытой водою) сферическими.

Выберемъ оси координатъ такъ, чтобы осью Z-овъ была прямая, соединяющая глазъ наблюдателя H съ центромъ земли C, и началомъ

[1]) Memorie della Società dei spettroscopisti italiani, Vol. VI.

[2]) Эта задача была мнѣ предложена проф. Д. И. Дубяго еще въ 1898 г. и тогда же мною было найдено приводимое теперь рѣшеніе. По обстоятельствамъ оно оставалось до сихъ поръ ненапечатаннымъ.

координатъ—точка встрѣчи HC съ земною поверхностью; положительное направленіе ея—отъ O къ H; за плоскость XOY примемъ касательную къ земной поверхности въ точкѣ O, и плоскость ZOX проведемъ черезъ центръ солнца C'.



Пусть Δ высота наблюдателя надъ поверхностью земли ($HO \equiv \Delta$), r—радіусъ земли и R—разстояніе OC'—начала координатъ отъ центра солнца.

При этихъ предположеніяхъ уравненіе отражающей (земной) поверхности напишется

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2rz = 0 \qquad (1)$$

уравненіе поверхности свѣтящагося тѣла (солнца):

$$(x - R\cos h_\odot)^2 + y^2 + (z - R\sin h_\odot)^2 = R^2 \sin^2 \varrho_\odot\,, \qquad (2)$$

гдѣ $h_\odot$—высота центра солнца надъ горизонтомъ въ точкѣ O и $\varrho_\odot$—угловой радіусъ солнца изъ O.

По закону отраженія точка $N \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ поверхности солнца, которая даетъ лучъ, отражающійся отъ поверхности моря въ точкѣ $M \equiv (x, y, z)$ и попадающій въ глазъ наблюдателя H, лежитъ въ плоскости, проведенной черезъ M и черезъ HC, т. е.

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{y}{x} = \operatorname{tang} A \qquad (3)$$

Уголъ A заключается въ предѣлахъ $\pm \varrho_\odot$.

Плоскость

$$y = x \operatorname{tg} A \qquad (3')$$

пересѣкаетъ поверхность солнца по кругу. Возьмемъ въ этой плоскости слѣдующую систему осей: ось Z-овъ прежнюю и ось U—пересѣченіе плоскости (3') съ плоскостью XOY.

Такимъ образомъ

$$u^2 = x^2 + y^2, \quad x = u\cos A\,, \quad y = u\sin A\,.$$

Уравненіе круга, по которому плоскость (3') пересѣкаетъ поверхность солнца, въ этой системѣ напишется:

$$(U - u_\odot)^2 + (Z - z_\odot)^2 = \tau^2 \qquad (4)$$

гдѣ, очевидно,

$$u_\odot = R \cos h_\odot \cos A$$

$$z_\odot = R \sin h_\odot$$

$$\tau^2 = R^2 (\sin^2 \varrho_\odot - \cos^2 h_\odot \sin^2 A)$$

($\tau^2 > 0$ ибо $|A| \leq \varrho_\odot$ и потому $\sin^2 \varrho_\odot \geq \sin^2 A$ и $\cos^2 h_\odot < 1$).

Земную поверхность плоскость (3′) пересѣкаетъ по большому кругу

$$u^2 + z^2 + 2rz = 0 \ . \tag{5}$$

Мы можемъ теперь представить, что нашъ чертежъ и есть сѣченіе плоскостью (3′).

Точки солнечной поверхности, дающія изображенія, видимыя изъ H, получимъ такъ: точка N поверхности солнца, изъ которой исходитъ лучъ, по отраженіи въ M попадающій въ точку H, есть, какъ извѣстно изъ геометрической оптики, въ тоже время точка пересѣченія съ поверхностью солнца луча, выходящаго изъ H (если бы H была свѣтящеюся точкою) и отражающагося въ точкѣ M, иными словами мы можемъ разсматривать свѣтящимся не дискъ солнца, а точку H, и искать тѣ точки отражающей поверхности, отраженные которыми лучи попадаютъ на поверхность солнца.

Точки, ограничивающія отраженное въ морѣ изображеніе солнца, будутъ въ тоже время предѣльными точками, отраженныя которыми лучи еще попадаютъ на поверхность солнца, а именно касаются ея.

Чтобы получить ихъ, выразимъ, что лучъ, исходящій изъ H и отраженный въ M, касается поверхности солнца, т. е. двѣ точки встрѣчи его съ этою послѣдней (стало быть съ кругомъ (C'), лежащимъ въ плоскости чертежа) совпадаютъ.

Уравненіе HM есть

$$Z - \varDelta = \frac{z - \varDelta}{u} U$$

Уравненіе CM

$$Z + r = \frac{z - r}{u} U$$

Если μ и ν — углы со осью U прямыхъ HM и CM, то уголъ

$$(MN,\ U) = \mu - 2(\mu - \nu) = 2\nu - \mu$$

Но

$$\operatorname{tg} 2\nu = \frac{2(z+r)u}{u^2 - (z+r)^2} = \frac{2(z+r)u}{r^2 - 2(z+r)^2} .$$

Поэтому

$$\operatorname{tg}(2\nu - \mu) = \frac{2(z+r)u^2 - (z-\varDelta)[r^2 - 2(z+r)^2]}{u[r^2 - 2(z+r)^2 + 2(z+r)(z-\varDelta)]} = \frac{\Xi}{u} \ .$$

если означимъ

$$\Xi = -\frac{2z^2(r+\Delta)+rz(3r+4\Delta)+\Delta . r^2}{r^2-2(z+r)(r+\Delta)} \tag{6}$$

Отсюда уравненіе прямой MN:

$$(Z-z)=\frac{\Xi}{u}(U-u) \quad \text{или} \quad Z-z=\frac{\Xi}{u}U-\Xi. \tag{7}$$

Точки пересѣченія MN съ (4) получимъ, подставляя Z или U изъ (7) въ (4). Получимъ уравненія

$$U^2\left(1+\frac{\Xi^2}{u^2}\right)-2U\left(u_\odot+\frac{\Xi}{u}(\Xi-z+z_\odot)\right)+$$
$$+u_\odot^2+(z-z_\odot-\Xi)^2-\tau^2=0 \tag{8}$$

Искомое условіе получимъ выразивъ, что это уравненіе имѣетъ равные корни:

$$\left[u_\odot+\frac{\Xi}{u}(\Xi-z+z_\odot)\right]^2-\left(1+\frac{\Xi^2}{u^2}\right)[u^2_\odot-\tau^2+(z-z_\odot-\Xi)^2]=0 \tag{9}$$

Умножимъ (9) на u^2 и возстановимъ здѣсь x и y вмѣсто u; имѣемъ

$$uu_\odot = u\cos A . R\cos h_\odot = xR\cos h_\odot, \quad u^2=x^2+y^2$$
$$u^2_\odot-\tau^2=R^2(\cos^2 h_\odot-\sin^2 \varrho_\odot).$$

Такимъ образомъ (9) приметъ видъ:

$$0=[xR\cos h_\odot+\Xi(\Xi-z+z_\odot)]^2-$$
$$-(x^2+y^2+\Xi^2)[R^2(\cos^2 h_\odot-\sin^2\varrho_\odot)+(\Xi-z+z_\odot)^2]. \tag{10}$$

Это уравненіе не содержитъ A. Оно одинаково для всѣхъ значеній A. Это и есть, слѣдовательно, уравненіе, которое связываетъ координаты точекъ искомаго геометрическаго мѣста. Вмѣстѣ съ (1) уравненіе (10) опредѣляетъ кривую, ограничивающую изображеніе отраженія солнца въ морѣ.

Уравненіе (10) довольно сложно. Мы можемъ его значительно упростить, замѣтивъ, что z величина сравнительно малая и не можетъ превышать $\dfrac{\Delta}{1+\dfrac{\Delta}{2r}}$ Тѣмъ болѣе можемъ пренебречь ею сравнительно съ R. Поэтому раздѣлимъ лѣвую часть (10) на R^2, припомнивъ, что $z_\odot = R\sin h_\odot$ и положимъ $\dfrac{1}{R}=0$.

Имѣемъ:

$$0 = [x \cos h\odot + \Xi \sin h\odot]^2 - (x^2 + y^2 + \Xi^2)(\cos^2 h\odot - \sin^2 \varrho\odot + \sin^2 h\odot)$$

или

$$0 = [x \cos h\odot + \Xi \sin h\odot]^2 - (x^2 + y^2 + \Xi^2) \cos^2 \varrho\odot \qquad (10')$$

Остается лишь замѣнить Ξ приведеннымъ выше его значеніемъ, которое мы перепишемъ

$$\Xi = \frac{\Delta + 3z + \frac{1}{r}(4\Delta z + 2z^2) + 2\Delta \cdot \frac{1}{r^2}}{1 + 2(z + \Delta)\frac{1}{r} + 2\Delta z \cdot \frac{1}{r^2}} \qquad (11)$$

такимъ образомъ (10′) представляетъ уравненіе 4-ой степени.

Если же замѣтить что z и Δ—величины одного порядка и весьма малыя сравнительно съ r, то можемъ во всякомъ случаѣ пренебречь членами съ $\frac{1}{r^2}$; тогда

$$\Xi = \Delta . 3z - \frac{2}{r}[(z + \Delta)^2 + z^2] \qquad (11')$$

и слѣдовательно

$$\Xi^2 = (\Delta + 3z)^2 - 4\,\frac{(\Delta + 3z)[(z + \Delta)^2 + z^2]}{r}$$

и (10′) представляетъ уравненіе 3-ьей степени.

Мы можемъ однако идти еще дальше. Высота наблюдателя надъ уровнемъ моря величина вообще весьма малая сравнительно съ радіусомъ земли. Въ Палермо, гдѣ производилъ наблюденія Riccò, $\Delta = 72$ m; что касается z, то хотя благодаря рефракціи, понижающей горизонтъ, оно можетъ получить значенія, бо́льшія вышеуказаннаго, но все же не превышающія нѣкотораго кратнаго Δ [1]).

Мы можемъ поэтому пренебречь и членами, содержащими $\frac{1}{r}$, т. е. принять

$$\Xi = \Delta + 3z,$$

и тогда уравненіе (10) приметъ видъ

$$0 = (x \cos h\odot + (\Delta + 3z) \sin h\odot)^2 - [x^2 + y^2 + (\Delta + 3z)^2] \cos^2 \varrho\odot, \qquad (12)$$

т. е. изображаетъ конусъ 2-го порядка, имѣющій вершину въ точкѣ

$$\left(0,\ 0, -\frac{\Delta}{3}\right).$$

---

[1]) Riccò видѣлъ точки моря на разстояніи 33 km, что даетъ для z верхній предѣлъ 0.182 m; при этомъ $\Delta + 3z = 618$ m, и отбрасываемый членъ—0.0235 m.

Если бы земля была плоскостью, имѣли бы $r = \infty$, и (1) замѣнилось бы уравненіемъ $z = 0$. Тогда $\Xi = \Delta$ и уравненіе кривой изображенія приняло бы видъ

$$0 = [x \cos h_\odot + \Delta \sin h_\odot]^2 - (x^2 + y^2 + \Delta^2) \cos^2 \varrho_\odot ,$$

Это коническое сѣченіе

$$x^2 [\cos^2 h_\odot - \cos^2 \varrho_\odot] - y^2 \cos^2 \varrho_\odot + \Delta . x \sin^2 h_\odot = \Delta^2 \cos^2 \varrho_\odot$$

будетъ эллипсомъ при

$$\cos^2 h_\odot < \cos^2 \varrho_\odot \left(\text{т. е. для } h_\odot \leqq \frac{\pi}{2} \text{ при } h_\odot > \varrho_\odot\right),$$

отношеніе осей котораго есть

$$\sqrt{1 - \frac{\cos^2 h_\odot}{\cos^2 \varrho_\odot}}$$

При $h_\odot = \varrho_\odot$ этотъ эллипсъ обращается въ параболу

$$y^2 = 2\Delta . x \cos \varrho_\odot - \Delta^2.$$

Но пренебрегать величиною $3z$ сравнительно съ Δ мы не имѣемъ права, ибо это величины одного порядка. Такимъ образомъ дѣйствительно, пока не принимать во вниманіе рефракцію, вліяніе шарообразности земли несомнѣнно.

§ 2. Изображеніе солнца при дѣйствіи рефракціи.

Попробуемъ получить кривую, ограничивающую изображеніе солнца, принимая въ соображеніе вліяніе рефракціи.

Послѣднее состоитъ изъ двухъ частей: во-первыхъ, астрономической рефракціи, искривляющей лучъ падающій, и земной, искривляющей лучъ отраженный. Послѣднее вліяніе менѣе значительно, ибо разность уровня моря и мѣста наблюдателя незначительна сравнительно съ высотою атмосферы, и потому отражаемый лучъ проходитъ черезъ слои, мало отличающіеся по своей плотности. Между тѣмъ оцѣнка вліянія и земной рефракціи представляетъ въ данномъ случаѣ значительныя аналитическія трудности. Ограничимся поэтому введеніемъ вліянія рефракціи астрономической, именно предположимъ, что *въ морѣ отражается не истинный дискъ солнца, а видимый, какъ онъ представляется наблюдателю благодаря рефракціи.* Мы говоримъ уже не о шарѣ, а *дискѣ* солнца, при чемъ, какъ это указываетъ, напр., Савичъ [1]), принимаемъ, что плоскость его перпендикулярна къ лучу зрѣнія, направленному въ центръ его,— т. е. касательна къ небесной сферѣ точки наблюденія.

---

[1]) Сферическая астрономія. Спб. 1874, с. 142 и слѣд.

Пусть ξ, η, ζ координаты точки контура этого диска. Тогда плоскость его выразится уравненіемъ

$$\xi \cos h_\odot + \zeta \sin h_\odot - R = 0 \tag{1}$$

Пусть X, Y координаты точки контура относительно осей, взятыхъ въ этой плоскости, и пусть уравненіе контура въ этой системѣ есть

$$\varphi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = 0 \tag{2}$$

Уравненіе прямой MN (та же прямая что въ § 1) должно удовлетворяться координатами ξ, η, ζ; такимъ образомъ

$$\left.\begin{aligned} &\zeta - z = \Xi\left(\frac{\xi}{x} - 1\right) \\ &\eta x - \xi y = 0 \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Исключая изъ четырехъ уравненій (1), (2), (3) ξ, η, ζ получимъ искомое уравненіе, вмѣстѣ съ (1) § 1 опредѣляющее кривую отраженія.

Замѣтимъ, что во (2)

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{X} = \eta, \\ &\mathrm{Y} = (\zeta - R \sin h_\odot) : \cos h_\odot, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

если принять, что за начало осей XY принимаемъ центръ диска.

Что касается до уравненія этого послѣдняго, то если высота центра солнца больше 2^0, можемъ принимать дискъ ограниченнымъ дугами эллипса, такъ что (2) для верхней половины

$$\frac{\mathrm{X}^2}{R^2 \sin^2 \varrho_\odot} + \frac{\mathrm{Y}^2}{R^2 \sin^2 \varrho'_\odot} = 1 \qquad (\mathrm{Y} > 0)$$

для нижней (5)

$$\frac{\mathrm{X}^2}{R^2 \sin^2 \varrho_\odot} + \frac{\mathrm{Y}^2}{R^2 \sin^2 \varrho''_\odot} = 1 \qquad (\mathrm{Y} < 0)$$

Очевидно, что если бы взяли иную кривую въ качествѣ (2) для $h_\odot < 2^0$, то пріемъ отъ этого не измѣнился бы.

Изъ (1) и (3) найдемъ

$$\zeta = \frac{(z - \Xi)\, x \cos h_\odot + \Xi . R}{x \cos h_\odot + \Xi \sin h_\odot}, \quad \eta = y\, \frac{R - (z - \Xi) \sin h_\odot}{x \cos h_\odot + \Xi \sin h_\odot}.$$

Подставляя въ (5), раздѣляя на R^2 и полагая $\frac{1}{R} = 0$ получимъ:

$$\sin^2 \varrho_\odot \,[x \cos h_\odot + \Xi \sin h_\odot]^2 = y^2 + (\Xi \cos h_\odot - x \sin h_\odot)^2 \frac{\sin^2 \varrho_\odot}{\sin^2 \varrho_\odot^{(i)}} \tag{6}$$

смотря потому, которую часть контура возьмемъ,—верхнюю или нижнюю.

При этомъ для Ξ, конечно, достаточно брать найденное выше второе приближенное значенiе

$$\Xi = \Delta + 3z,$$

Такимъ образомъ искомое уравненiе приметъ видъ

$$\sin^2 \varrho_\odot \, [x \cos h_\odot + (\Delta + 3z) \sin h]^2_\odot =$$
$$y^2 + [x \sin h_\odot - (\Delta + 3z) \cos h_\odot]^2 \frac{\sin^2 \varrho_\odot}{\sin^2 \varrho^{(i)}_\odot} \qquad (7)$$

Такъ же какъ и (12) § 1 это уравненiе выражаетъ конусъ 2-го порядка съ вершиною въ точкѣ $\left(0,\ 0,\ -\frac{\Delta}{3}\right)$. Кривая изображенiя солнца получается такимъ образомъ, какъ пересѣченiе одной полости этого конуса со сферою, и оказывается такимъ образомъ сферическимъ эллипсомъ (т. е. собственно тою его частью, которая при нашемъ выборѣ осей координатъ лежитъ въ углѣ положительныхъ x-овъ и y-овъ).

Въ виду того, что высота солнца при этихъ наблюденiяхъ не можетъ быть значительна, можно было бы при нашемъ приближенномъ рѣшенiи безъ существеннаго ущерба допустить, что свѣтлый дискъ солнца лежитъ въ плоскости, перпендикулярной къ горизонту (и къ оси x-овъ). Отличiе отъ предыдущаго получилось бы то, что уравненiе (1) этого §'а замѣнилось бы черезъ $\xi = R \cos h_\odot$, и уравненiя (4) на

$$X = \eta, \quad Y = \zeta - R \sin h_\odot .$$

Особенныхъ упрощенiй это впрочемъ не вводитъ.

Въ уравненiя (3) и (6) входитъ таже величина Ξ, что и въ § 1, которая, если бы земля была плоской, равнялась бы Δ. Тогда вмѣсто (1) и (7), кривая изображенiя солнца опредѣлялась бы уравненiями:

$$z = 0$$
$$\sin^2 \varrho_\odot \, [x \cos h_\odot + \Delta \sin h_\odot]^2 = y^2 + [x \sin h_\odot - \Delta \cos h_\odot]^2 \frac{\sin^2 \varrho_\odot}{\sin^2 \varrho^{(i)}_\odot}$$

Интересно было бы сравнить полученный результатъ съ наблюденiями. Изъ приводимыхъ въ статьѣ Riccò случаевъ только $^1/_{\text{IX}}$—1888 удалось ему наблюдать, когда свѣтило было приблизительно на высотѣ $1^1/_2{}^0$, (минутъ черезъ 10 послѣ отдѣленiя отъ самаго диска) изображенiе въ видѣ кривой эллиптическаго вида, вертикальный дiаметръ котораго былъ вдвое меньше горизонтальнаго; Riccò, по его словамъ, могъ еще около 20 минутъ различать изображенiе, которое передъ исчезновенiемъ стало гораздо шире, но все еще оставалось чувствительно эллиптическимъ. Однако, эти данныя слишкомъ недостаточны, чтобы произвести сравненiе.

$^{14}/_{\text{VI}}$—09.