Масса электрона по электромагнитной теоріи проводниковъ.

Извѣстно, что *электромагнитныя* свойства какой-нибудь средины характеризуются ея діэлектрической постоянной, K, коэффиціентомъ электропроводности, C и коэффиціентомъ магнитной проницаемости, μ; съ другой стороны *оптическія* свойства той-же средины могутъ характеризоваться ея показателемъ преломленія, n и коэффиціентомъ поглощенія, $\varkappa$. Между этими величинами согласно теоріи Максвелла, существуютъ нѣкоторыя зависимости, а именно:

$$K\mu = n^2 \left(1 - \varkappa^2\right)$$

и

$$C\tau = n^2 \varkappa$$

гдѣ τ періодъ измѣненія того кинетическаго состоянія среды (ея эфира), которое воспринимается нами, какъ электромагнитное (оптическое) явленіе. Но эти соотношенія не представляютъ [1]) фактовъ дѣйствительности и замѣняются въ настоящее время иными, болѣе сложными.

Въ эти новыя соотношенія входятъ сверхъ перечисленныхъ постоянныхъ, (которыя вообще суть функціи періода τ) еще *двѣ* другихъ, которыя мы обозначили въ нашей „Электромагнитной теоріи" буквами γ и η и которыя характеризуютъ средину со стороны вліянія самой матеріи на кинетическое состояніе эфира. Необходимость введенія новыхъ физическихъ постоянныхъ, характеризующихъ электромагнитныя свойства среды, признавалась и признается всѣми изслѣдователями нашего вопроса, такъ Гельмгольцъ ввелъ діэлектрическую постоянную частицъ разсматриваемой средины; моя теорія вводитъ, какъ уже упомянуго, двѣ постоянныя; такъ дѣлаетъ Г. А. Лоренцъ, а также А. Шустеръ [2]) въ 1904 г.

Эти двѣ постоянныя вводятся въ моей теоріи: *одна* явленіями дисперсіи, а *другая* явленіями поляризаціи (оптической), но оба рода явленій оказываются зависимыми другъ отъ друга. Связь между K, μ и C

---

[1]) См. „Электромагнитная теорія проводниковъ" автора, стр. 10—11. 1899 г.

[2]) См. *A. Schuster* Einführung in die theoretische Optik, S. 292. или Phil. Mag. (6) p. 238 (1901).

съ одной и съ n и $\varkappa$ съ другой для даннаго періода въ моей теоріи выражаются однимъ соотношеніемъ, которое я называю *дисперсіоннымъ*; оно комплекснаго вида и содержитъ въ себѣ, слѣдовательно, два соотношенія между упомянутыми величинами и есть слѣдующее:

$$K\mu - \frac{1+\gamma u}{1+u} D\mu\sqrt{-1} = \frac{1-u}{1+u} V^2 e^{2v\sqrt{-1}} \tag{1}$$

въ немъ положено:

$$D = 2C\tau,\ V^2 e^{2v\sqrt{-1}} = n^2(1-\varkappa\sqrt{-1})^2,$$

и n съ $\varkappa$ относятся къ случаю нормальнаго паденія луча на границу средины [1]). О количествѣ u скажемъ ниже. Другое постоянное вводится соотношеніемъ, которое я называю *поляризаціоннымъ* [2]), и оно имѣетъ видъ:

$$\frac{1-u}{1-\eta u} = -\frac{e^{-2v\sqrt{-1}}}{V^2} \tag{2}$$

Это соотношеніе даетъ мѣсто теоріи поляризаціи на металлахъ, данной еще Коши.

Наконецъ величина, комплексная, u есть отношеніе между перемѣщеніями электрона (іона) и частицы эфира. Оно выражается въ зависимости отъ массы электрона, коэффиціента тренія и періода въ слѣдующей формѣ: [3])

$$\frac{1}{u} = \frac{\eta+1}{2} - mp^2 + kp\sqrt{-1} \tag{3}$$

причемъ:

$$m = \frac{K}{8\pi} m_1,\ k = \frac{K}{8\pi} k_1,\ p = \frac{2\pi}{\tau},$$

гдѣ m_1 масса электрона, а k_1 коэффиціентъ тренія средины.

Въ приведенныхъ уравненіяхъ (1)—(3) данными опыта для такихъ проводниковъ, какъ металлы, должны считаться количества: C, n и $\varkappa$ для даннаго періода τ или данной длины волны λ. Если изъ системы (1)—(3) исключить u, что получимъ *4* уравненія съ 5-ью неизвѣстными: K, η, γ, m_1 и k_1 (μ полагаемъ равнымъ 1-цѣ), а слѣдовательно можемъ выразить *четыре* величины при помощи *одной*, *пятой*. За эту послѣднюю мы примемъ *массу электрона* m_1.

---

[1]) Электромагнитная теорія проводниковъ, стр. 44 и 62.

[2]) Тамъ-же, стр. 57 и 62.

[3]) Тамъ-же, стр. 32, 37 и 43. Это уравненіе имѣетъ мѣсто только при одномъ родѣ іоновъ.

Введемъ для удобства вычисленій слѣдующія обозначенія:

$$\alpha=\frac{m_1}{4\pi};\ \beta=\frac{k_1}{4\pi};\ A=V^2 cos2v;\ B=V^2 sin2v,$$

гдѣ, слѣдовательно:

$$A=n^2(1-\varkappa^2);\ B=-2n^2\varkappa. \tag{4}$$

Такимъ образомъ мы будемъ имѣть систему уравненій:

$$K=\frac{(\frac{1}{u}-1)(A+B\sqrt{-1})+(\gamma+\frac{1}{u})D\sqrt{-1}}{1+\frac{1}{u}} \tag{a}$$

$$\eta=\left(\frac{1}{u}-1\right)(A+B\sqrt{-1})+\frac{1}{u} \tag{b}$$

$$\eta=\frac{2}{u}-1+K\alpha p^2-K\beta p\sqrt{-1} \tag{c}$$

Въ этой системѣ, слѣдовательно, извѣстны изъ опыта количества: A, B, D, для даннаго каждый разъ p. Займемся теперь рѣшеніемъ этой системы (a) — (c). Изъ равенства (b) находимъ:

$$\frac{1}{u}=\frac{\eta+A+B\sqrt{-1}}{P_1+B\sqrt{-1}} \tag{a$_1$}$$

гдѣ положено:

$$P_1=A+1. \tag{d}$$

Подставивъ это значеніе $\frac{1}{u}$ въ уравненіе (c), получимъ:

$$\eta=\frac{2\eta+A-1+B\sqrt{-1}}{P_1+B\sqrt{-1}}+K(\alpha p^2-\beta p\sqrt{-1}).$$

Отсюда находимъ K, а именно:

$$K=\frac{(A-1+B\sqrt{-1})(\eta-1)}{(P_1+B\sqrt{-1})(\alpha p^2-\beta p\sqrt{-1})} \tag{b$_1$}$$

Это равенство распадается на два слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} K\ (P_1\alpha p^2+B\beta p)&=(A-1)(\eta-1)\\ K\ (B\alpha p^2-P_1\beta p)&=B(\eta-1)\end{aligned}\right\} \tag{e}$$

Отсюда, исключая K: $(\eta-1)$, найдемъ:

$$2B\alpha p^2=-(\Gamma-1)\beta p, \tag{f}$$

гдѣ положено:

$$\Gamma = A^2 + B^2$$

и для удобства дальнѣйшихъ вычисленій мы равенство (f) на p не сокращаемъ.

Далѣе изъ перваго равенства въ системѣ (e) находимъ:

$$K = \frac{(A-1)(\eta-1)}{P_1 a p^2 + B\beta p},$$

а затѣмъ, подставивъ сюда значеніе βp изъ (f), по преобразованіи найдемъ:

$$K = \frac{\eta - 1}{P\, a p^2}, \tag{g}$$

гдѣ положено:

$$P = \frac{\Gamma + 2A + 1}{\Gamma - 1}.$$

Подставимъ теперь найденное значеніе K изъ (g), а также значеніе $\frac{1}{u}$ изъ (a_1) въ равенство (a); по сравненіи дѣйствительныхъ и мнимыхъ частей получимъ:

$$\left.\begin{array}{l} \eta^2 + DBPap^2\gamma - (APap^2 - 2A)\,\eta = -(A + DB)\,Pap^2 + 2A + 1 \\ -DP_1Pap^2\gamma - (BPap^2 - 2B + DPap^2)\,\eta = -(B - AD)\,Pap^2 + 2B \end{array}\right\} \text{(h)}$$

Исключая отсюда γ, послѣ нѣкоторыхъ преобразованій найдемъ:

$$P_1\eta^2 - [(\Gamma + A + BD)\,Pap^2 - 2(\Gamma + A)]\,\eta = -(\Gamma + A + BD)Pap^2 + \\ + 2\Gamma + 3A + 1.$$

Если здѣсь положимъ, какъ въ „Электромагнитной теоріи проводниковъ" (стр. 63):

$$M_1 = \Gamma + A + BD;\ N_1 = 2\Gamma + 3A + 1,$$

то получимъ:

$$P_1\eta^2 - (M_1Pap^2 - 2\Gamma - 2A)\,\eta + M_1Pap^2 - N_1 = 0 \tag{I}$$

Это уравненіе для удобствъ рѣшенія его можно еще преобразовать.

Положимъ, что

$$\frac{9\pi}{\lambda_1{}^2} P = L,\ 10^{30} m_1 = x,$$

то получимъ:

$$Pap^2 = Lx.$$

Дѣйствительно имѣемъ:

$$ap^2 = \frac{m_1}{4\pi} \cdot \frac{4\pi^2\omega_0^2}{\lambda_0^2} = \frac{9\pi}{\lambda_1^2} \cdot 10^{30} m_1,$$

ибо

$$p = \frac{2\pi}{\tau},\ \tau = \frac{\lambda_0}{\omega_0},$$

гдѣ λ_0 длина волны, соотвѣтствующей данному періоду τ, а $\omega_0 = 3.10^{10} \frac{\text{см.}}{\text{сек.}}$ — скорость свѣта въ міровомъ эфирѣ; затѣмъ для удобства числовыхъ вычисленій положено:

$$\lambda_0 = \lambda_1 . 10.^{-5}$$

Итакъ уравненіе (I) можно теперь написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$P_1\eta^2 - (M_1Lx - 2\,\Gamma - 2A)\,\eta + M_1Lx - N_1 = 0 \qquad \text{(I bis)}$$

Положимъ здѣсь:

$$\frac{M_1}{P_1} = K_\infty,\ \frac{N_1}{P_1} = -\eta_0;\ LK_\infty = H,\ \Gamma + A = P_1h,$$

тогда уравненіе (I bis) приметъ видъ:

$$\eta^2 - (Hx - 2h)\,\eta + Hx + \eta_0 = 0 \qquad \text{(I ter)}$$

Въ этомъ уравненіи всѣ количества, кромѣ η и x, извѣстны изъ опыта.

Рѣшая это уравненіе и замѣчая, что

$$(Hx - 2h)^2 - 4\,(Hx + \eta_0) = (Hx + \eta_0 - 1)^2,$$

ибо

$$2h = \frac{2\Gamma + 2A}{P_1} = \frac{N_1 - 3A - 1 + 2A}{P_1} = -\eta_0 - 1,$$

получимъ:

$$2\eta = Hx + \eta_0 + 1 \pm (Hx + \eta_0 - 1).$$

Первый корень будетъ:

$$\eta = Hx + \eta_0 \qquad \text{(A)}$$

а второй

$$\eta = 1.$$

Но этотъ корень $\eta = 1$ не годится [1]), ибо тогда имѣли-бы по уравненію (b):

$$A + B\sqrt{-1} = -1,$$

чего быть не можетъ.

Зная η, можно опредѣлить окончательно K, а именно изъ равенства (g), помня, что

$$Pap^2 = Lx,$$

[1]) Въ «Электромагнитной теоріи проводниковъ», стр. 63, показано, что это значеніе η приводитъ къ первоначальной теоріи Максвелла.

получаемъ:

$$K = K_\infty + \frac{G}{x} \qquad \text{(B)}$$

причемъ положено:

$$G = \frac{\eta_0 - 1}{L}$$

и замѣчено, что

$$H = LK_\infty .$$

Прежде чѣмъ идти дальше замѣтимъ, что, если-бы подставили значеніе x изъ уравненія (A) въ уравненіи (B), то по замѣнѣ коэффиціентовъ K_∞, η_0, G и H ихъ значеніями, получили-бы формулу:

$$K = \frac{M_1(\eta - 1)}{N_1 + P_1\eta},$$

данную въ „Электромагнитной теоріи проводниковъ“ на стр. 67. Корню $\eta = 1$, соотвѣтствовалъ бы корень $K = 0$ (Planck). Теперь займемся опредѣленіемъ коэффиціента γ.

Второе равенство въ системѣ (h) даетъ по подстановкѣ значенія η [1]):

$$D\gamma = \frac{B - AD}{P_1} - \frac{2B}{P_1 Lx} - \left(\frac{B + D}{P_1} - \frac{2B}{P_1 Lx}\right)(\eta_0 + Hx)$$

или, окончательно:

$$\gamma = \gamma_0 - H_1 x + \frac{G_1}{x} \qquad \text{(C)}$$

гдѣ положено

$$\gamma_0 = \frac{2B}{DP_1} K_\infty - \frac{B + D}{DP_1}\eta_0 + \frac{B - AD}{DP_1},$$

$$H_1 = \frac{(D + B)H}{DP_1}, \quad G_1 = \frac{2BG}{DP_1}.$$

Остается опредѣлить K_0. Находимъ:

$$K_0 = \frac{G + K_\infty x}{(Hx + \eta_0)x} \qquad \text{(D)}$$

Такимъ образомъ всѣ постоянныя теоріи, т. е. K, η, γ и K_0 опредѣлены въ функціи одной перемѣнной x, т. е. въ функціи массы іона (электрона), ибо

$$x = m_1 \,.\, 10^{30},$$

а m_1 масса іона.

---

[1]) Корню $\eta = 1$ соотвѣтствовалъ бы корень $\gamma = -1$.

Само собой разумѣется, что всѣ предыдущіе расчеты могутъ быть примѣнены лишь къ случаю, когда въ явленіи участвуетъ только одинъ родъ іоновъ, т. е. къ области дисперсіи, незаключающей въ себѣ полосы поглощенія [1]). Прежде чѣмъ изслѣдовать полученные выводы, соединимъ въ порядкѣ, необходимомъ для вычисленій, всѣ формулы. Мы будемъ считать для всякой длины волны λ_0 данными n и $\varkappa$ (для случая нормальнаго паденія луча на изслѣдуемую средину), а также коэффиціентъ электропроводности C изслѣдуемаго металла. Находимъ послѣдовательно:

$$A = n^2(1 - \varkappa^2),\ B = -2n^2\varkappa,\ \varGamma = A^2 + B^2,\ P_1 = A + 1,\ C_1 = C.10^5,$$

приэтомъ C должно быть выражено въ абсолютныхъ электро-магнитныхъ единицахъ.

$$\lambda_1 = \lambda_0.10^5,\ D = 6C_1\lambda_1;\ P = 1 + \frac{2P_1}{\varGamma - 1},\ L = \frac{9\pi}{\lambda_1^2}P,$$

$$M_1 = A + \varGamma + BD,\ N_1 = 2\varGamma + 3A + 1,\ \eta_0 = -\frac{N_1}{P_1},\ K_\infty = \frac{M_1}{P_1}.$$

Затѣмъ

$$G = \frac{\eta_0 - 1}{L},\ H = LK_\infty,\ K_1 = \frac{2B}{DP_1}K_\infty,\ \eta_1 = \frac{D + B}{DP_1}\eta_0,$$

$$G_1 = \frac{2B}{DP_1}G,\ H_1 = \frac{D + B}{DP_1}H_1,\ H_2 = \frac{B - AD}{DP_1},\ \gamma_0 = K_1 - \eta_1 + H_2.$$

Вычисливъ эти коэффиціенты, найдемъ по формуламъ (A), (B), (C), (D) количества η, K, γ и K_0 въ функціи x'а. Мы пока ограничимся опредѣленіемъ K и η. Мы нашли для нихъ формулы:

$$K = K_\infty + \frac{G}{x},\ \eta = Hx + \eta_0.$$

Зная x, мы опредѣлили-бы обѣ эти величины. Въ нашей электромагнитной теоріи мы вычисляли K и η въ предположеніи, что коэффиціентъ $K_0 = 0.5$ для всѣхъ металловъ, въ этомъ случаѣ имѣли-бы приближенно:

$$x = \frac{2}{L}$$

и затѣмъ нашли-бы K и η по приведеннымъ формуламъ. Это предположеніе мы могли сдѣлать, допустивъ, что въ срединѣ дѣйствуютъ іоны,

---

[1]) Ср. Дисперсія металловъ. Сообщенія Харьк. Матем. Общества. Т. IX (1904) стр. 1—2.

число различныхъ видовъ которыхъ очень велико, такъ—что ихъ можно было-бы замѣнить іонами одного рода, *физически-эквивалентнаго* имъ.

Если положимъ, что $K_0 = 0.5$, то изъ формулы (D) нашли-бы

$$x = \frac{2K_\infty - \eta_0 \pm \sqrt{(2K_\infty - \eta_0)^2 + 8HG}}{2H}. \qquad \text{(E)}$$

Такъ какъ η_0 по сравненію съ 1-цей довольно велико, то можно взять приближенно по формулѣ для G:

$$GL = \eta_0,$$

въ такомъ случаѣ положительный корень (E) будетъ:

$$x = \frac{2}{L}. \qquad \text{(F)}$$

Примѣняя эту формулу къ наблюденіямъ Друде (Электромагнитная теорія проводниковъ, стр. 73) находимъ слѣдующія значенія x для красныхъ и желтыхъ лучей:

Таблица значеній x.

Металлъ	Красные лучи $\lambda_0 = 6.3 . 10^{-5}$ см.	Желтые лучи $\lambda_0 = 5.893 . 10^{-5}$ см.
Ag	3.092	2.720
Cu	3.237	2.930
Au	3.261	2.941
Al	2.919	2.572
Mg	3.025	2.670
Zn	2.889	2.543
Cd	2.939	2.596
Co	2.902	2.559
Sn	2.923	2.577
Fe	2.905	2.514
Ni	2.940	2.641
Pt	2.914	2.564
Pb	2.932	2.568
Sb	2.876	2.522
Bi	3.013	2.618
Среднее	2.967	2.626

Хотя n_0 измѣняется для различныхъ металловъ очень значительно: примѣрно отъ 0.2 (*Ag*) до 3.1 (*Sb*), а $n_0 \varkappa_0$ отъ 3.0 (*Ag*) до 5.5 (*Zn*), коэффиціентъ—же электропроводности измѣняется еще значительнѣе: отъ 0.9 (Bi) до 63 (Ag), но все это почти не вліяетъ на величину x' а.

Итакъ *въ среднемъ* для металловъ для желтыхъ и красныхъ лучей можно взять $x = 2 \cdot 8$,—т. е. масса электрона m_1 будетъ:

$$m_1 = 2 \cdot 8 . 10^{-30} \text{ грамма.}$$

Масса водороднаго атома по расчетамъ Планка [1]) равна

$$m_H = 0 \cdot 81 . 10^{-24} \text{ грамма,}$$

слѣдовательно, выходитъ, что масса электрона въ металлѣ примѣрно въ 3.10^5 разъ меньше массы водороднаго атома. Если-же сравнимъ массу электрона въ металлѣ съ массой электрона, несущаго свой отрицательный зарядъ въ катодномъ лучѣ, считая эту послѣднюю примѣрно въ 1000 разъ меньшей массы водороднаго атома, (т. е. $m_1 = 8.1.10^{-28}$ гр. [2]) то получимъ, что масса металлическаго электрона меньше массы электрона въ катодномъ лучѣ въ 300 разъ.

Интересно сравнить найденное значеніе массы металлическаго электрона съ массой, найденной другими изслѣдователями и по другимъ методамъ.

Langevin въ 1903 году опубликовалъ работу [3]), въ которой даетъ формулу:

$$m_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{aV^2},$$

гдѣ m_1 — масса электрона, e его отрицательный зарядъ, V скорость свѣта $\left(V = 3.10^{10} \frac{\text{см.}}{\text{сек.}}\right)$ и a радіусъ электрона, считаемаго сферой.

Примемъ, какъ нѣкоторое среднее, что зарядъ электрона

$$e = 4 \cdot 7 . 10^{-10} \text{ абс. } C.G.S \text{ единицъ,}$$

тогда

$$m_e = \frac{1 \cdot 64 . 10^{-40}}{a} \text{ см. гр.}$$

и если для радіуса a возмемъ число *M. Abraham*'а т. е.

$$a = 5 \cdot 5 . 10^{-13} \text{ см.,}$$

---

[1]) *Drude's* Annalen der Physik. Bd. 9, S. 640 (1902).

[2]) По *J. J. Thomson*'у $m_1 = 5.9.10^{-28}$ гр. *Die Korpusculartheorie der Materie.* S. 83. (1908).

[3]) Annales de physique et de chemie, t. 28 (7 s.) p. 354 (1903).

то

$$m_1 = 3.10^{-28} \text{ гр.}$$

Если возмемъ радіусъ a въ 100 разъ большимъ, то получимъ:

$$m_1 = 3.10^{-30} \text{ гр.}$$

— число тождественное съ нашимъ.

Чтобы имѣть болѣе ясное представленіе о размѣрахъ электрона при этихъ расчетахъ вспомнимъ, что по даннымъ кинетической теоріи газовъ можно взять для атомовъ кислорода или водорода:

$$a_O = 4 \cdot 5.10^{-8} \text{ см.}, \quad a_H = 2.10^{-8} \text{ см.},$$

а при нашихъ расчетахъ для металлическаго электрона:

$$a_1 = 5 \cdot 5.10^{-11} \text{ см.}$$

т. е. въ 1000 разъ менѣе.

Таковы расчеты въ предположеніи, что въ срединѣ дѣйствуетъ одинъ родъ іоновъ, когда-же имѣетъ мѣсто случай многихъ родовъ іоновъ и, слѣдовательно, имѣемъ дѣло съ спектромъ, въ которомъ много полосъ поглощенія, тогда расчетъ сильно усложняется, ибо тогда коэффиціенты η и γ сами комплексны.

Апрѣль 1909 г.