Преобразованіе Лоренца и принципъ относительности.

А. П. Грузинцева.

Въ послѣднее время физики очень заинтересованы такъ называемымъ «принципомъ относительности». Сущность дѣла состоитъ въ томъ, что Лоренцъ въ своихъ изслѣдованіяхъ уравненій электричества для движущихся срединъ напалъ на одно преобразованіе координатъ и времени, которыя служили независимыми перемѣнными въ системѣ дифференціальныхъ уравненій электродинамики. Толкуя свои формулы преобразованія физически, онъ пришелъ къ крайне любопытнымъ выводамъ по отношенію нашихъ понятій о пространствѣ и времени, не говоря уже о выводахъ по отношенію къ «ньютоновой» механикѣ; но эти выводы, строго говоря, уже выходятъ изъ сферы чистой физики и принадлежатъ или къ механикѣ или къ общей теоріи познанія (гносеологіи); поэтому ограничимся лишь разсмотрѣніемъ ихъ математическаго и чисто физическаго характера. Оказывается, что если преобразуемъ уравненія электродинамики или, что тоже самое при извѣстныхъ условіяхъ, оптики *для чистаго эфира* отъ перемѣнныхъ x, y, z; t (координатъ и времени) къ новымъ перемѣннымъ x', y', z'; t' по формуламъ преобразованія, предложеннымъ Лоренцомъ, что уравненія сохраняютъ свой видъ. Въ этомъ послѣднемъ результатѣ и заключается предложеніе или теорема Лоренца. Тоже преобразованіе, но также только для эфира, выполнено было Миньковскимъ, Эйнштейномъ и А. Пуанкаре и предложеніе Лоренца въ этомъ случаѣ оказалось вѣрнымъ. Въ настоящей статьѣ я показываю, что предложеніе Лоренца оказывается справедливымъ *для всякой физической средины*, характеризуемой діэлектрической постоянной и коэффиціэнтомъ магнитной проницаемости отличными отъ единицы (для эфира $K=1$ и $\mu=1$); болѣе того, оно справедливо и для поглощающихъ срединъ (металлы). Но приложимость предложенія Лоренца въ обоихъ этихъ случаяхъ требуетъ соблюденія двухъ условій: 1) измѣненія электромагнитнаго поля должны быть *періодическими* во времени и 2) между діэлектрической постоянной и магнитной проницаемостью средины съ одной стороны и ея показателемъ преломленія съ другой должно существовать нѣкоторое соотношеніе. Это соотношеніе оказывается *закономъ Максвелла* $K\mu = n^2$.

Надо замѣтить, что изслѣдованія упомянутыхъ выше ученыхъ относились, собственно говоря, къ срединамъ безъ дисперсіи, но, принимая въ разсчетъ движеніе электроновъ (Лоренцъ), очень легко получается тотъ результатъ, что n (показатель преломленія) будетъ опредѣленной функціей періода или частоты перемѣнъ электромагнитнаго поля. Прибавимъ еще, что эти результаты получаются независимо отъ того, какого взгляда мы придерживаемся на токи проводимости: обычнаго ли (омовы токи), взглядовъ Д. Д. Томсона или Лоренца или считаемъ ихъ явленіемъ болѣе сложнаго характера.

Сказанное относится, собственно говоря, къ предложенію или теоремѣ Лоренца, что же касается его формулъ преобразованія, то для приложимости ихъ ко всякимъ срединамъ необходимо и достаточно, чтобы входящая въ нихъ скорость свѣта была не «универсальной» постоянной, т. е. скоростью свѣта въ эфирѣ, какъ полагаетъ, напр. Эйнштейнъ, а просто скоростью свѣта въ разсматриваемой срединѣ, т. е. въ той, для которой написаны дифференціальныя уравненія электромагнитнаго поля и изслѣдуются явленія происходящія въ ней. Такимъ образомъ, принявъ справедливость теоремы Лоренца, т. е. инваріантность дифференціальныхъ уравненій средины, мы безъ всякаго ихъ интегрированія очень просто находимъ законъ Максвелла и законъ дисперсіи.

Сверхъ того при помощи преобразованія Лоренца мы получаемъ просто и строго послѣдовательно законы аберраціи и законъ, извѣстный подъ именемъ принципа Допплера, что было указано и самимъ Лоренцомъ и Эйнштейномъ.

Все это заставляетъ признать за преобразованіемъ и теоремой Лоренца чрезвычайно важное значеніе.

I.

Теоріи физическихъ явленій, напр. электромагнитныхъ и оптическихъ, построены въ предположеніи, что средины, въ которыхъ онѣ происходятъ, *неподвижны* и законы ихъ получены, слѣдовательно, для случая неподвижныхъ срединъ. Такъ, если мы утверждаемъ, что свѣтовой лучъ отражается отъ зеркальной пластинки подъ такимъ же угломъ, подъ какимъ упалъ, то неявно предполагаемъ, что и отражающая пластинка, и окружающій воздухъ, въ которомъ происходитъ явленіе отраженія, неподвижны. Естественно является вопросъ: сохранятъ ли свою форму физическіе законы явленія при движеніи тѣлъ и срединъ, въ которыхъ ихъ наблюдаемъ? Въ частныхъ случаяхъ, напр. въ нѣкоторыхъ оптическихъ явленіяхъ, задачу эту пытались рѣшить съ давнихъ поръ, (Френель, Физо, Доплеръ), но удовлетворительнаго общаго рѣшенія вопроса не получили, напротивъ того въ нѣкоторыхъ случаяхъ получались отрицательные результаты (Майкельсонъ, Майкельсонъ и Морлей) необходимость же имѣть рѣшеніе ясна, хотя бы потому, что всѣ наблюдаемыя явленія на землѣ какъ разъ происходятъ въ движущихся срединахъ, т. е. въ тѣлахъ, увлекаемыхъ землей въ ея движеніи около своей оси и около солнца. Задача усложняется еще тѣмъ обстоятельствомъ, что мы не знаемъ ни одной матеріальной средины, которая находилась бы въ абсолютномъ покоѣ или, что тоже самое, что наблюдаемыя нами движенія тѣлъ суть движенія относительныя. Такимъ образомъ мы имѣемъ слѣдующую общую задачу: дать теорію физическаго явленія, происходящаго въ той или другой срединѣ, при непремѣнномъ условіи ея движенія. Анализируя эту задачу ближе, мы ее сведемъ къ другой болѣе простой по ея формулировкѣ. Дѣйствительно, въ настоящее время дать теорію физическаго явленія значитъ просто составить систему дифференціальныхъ уравненій, въ которой подъ видомъ ихъ рѣшеній и содержатся законы, управляющіе явленіемъ. Въ составъ же этихъ дифференціальныхъ уравненій будутъ входить нѣкоторыя функціи и производныя этихъ функцій, представляющихъ величину (напряженность) тѣхъ физическихъ факторовъ, которые участвуютъ въ явленіи, а независимыми перемѣнными въ окончательномъ итогѣ будутъ координаты той точки, въ которой наблюдаемъ явленіе и время момента наблюденія. Нужно впрочемъ оговориться: въ нѣкоторыхъ случаяхъ мы за независимыя перемѣнныя выбираемъ опредѣленныя функціи координатъ и времени, а не сводимъ ихъ къ этимъ послѣднимъ перемѣннымъ; въ такомъ положеніи находится, напр., термодинамика.

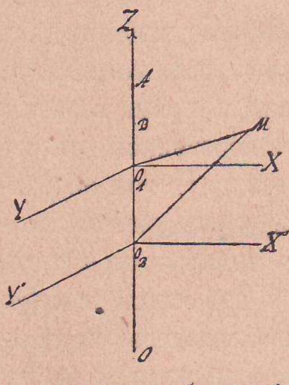
Итакъ поставленная задача будетъ состоять въ слѣдующемъ: дана система дифференціальныхъ уравненій нѣкоторыхъ функцій координатъ точки и времени. Система координатъ (прямолинейная и прямоугольная, разумѣется) сама перемѣщается въ пространствѣ съ постоянной относительной скоростью по сравненію съ нѣкоторой другой системой координатъ. При этомъ время, какъ *физическій факторъ*, опредѣляется соотвѣтствующимъ приборомъ (часами, регистрирующимъ аппаратомъ и т. п.), будетъ обозначаться или регистрироваться въ каждой изъ этихъ системъ координатъ своимъ числомъ; точно также и самъ наблюдатель, принадлежащій той или другой системѣ координатъ и времени, движется съ той же скоростью и наблюдаетъ соотвѣтственное время момента явленія. Спрашивается, какимъ образомъ мы можемъ перейти отъ системы дифференціальныхъ уравненій, установленныхъ для перваго случая перемѣнныхъ (координатъ и времени) къ системѣ дифференціальныхъ уравненій для перемѣнныхъ во второмъ случаѣ.

Облечемъ въ математическую форму эту задачу. Пусть въ системѣ, скажемъ A, перемѣнныя будутъ: x, y, z и t; а во второй, назовемъ ее системой B, будутъ соотвѣтственно x', y', z'; t', причемъ система B, положимъ, движется относительно системы A въ нѣкоторомъ направленіи съ постоянной скоростью v. Наша задача будетъ состоять въ опредѣленіи зависимостей системы перемѣнныхъ $(x, y, z; t)$ отъ системы $(x', y', z'; t')$ и обратно.

Первый, кто рѣшилъ эту задачу и нашелъ искомыя зависимости, былъ *Г. А. Лоренцъ* (1895) [1]), но путемъ сложнаго анализа, преобразовывая дифференціальныя уравненія электромагнитнаго поля въ эфирѣ, данныя раньше Максвелломъ и извѣстныя подъ именемъ Герцъ-Максвелловыхъ уравненій; сверхъ того въ пріемѣ Лоренца не выступалъ съ полной ясностью универсальный характеръ преобразованія и значеніе послѣдняго иногда затемнялось физическими толкованіями полученныхъ формулъ, толкованіями, съ которыми не всегда было возможно согласиться. Но во всякомъ случаѣ съ полнымъ правомъ мы можемъ говорить о *преобразованіи Лоренца.* Затѣмъ (1905) *Эйнштейнъ* [2]) независимо отъ уравненій электромагнитнаго поля установилъ соотношенія Лоренца между системой перемѣнныхъ $(x, y, z; t)$ и $(x', y', z'; t')$ при помощи опредѣленія времени, какъ физическаго фактора наблюдаемаго явленія. Зная эти соотношенія, уже легко переходить отъ одной системы дифференціальныхъ уравненій къ другой.

II.

Соображенія Эйнштейна состоятъ въ слѣдующемъ. Пусть имѣемъ двѣ системы, движущіяся другъ относительно друга съ постоянной скоростью v въ изотропномъ пространствѣ въ нѣкоторомъ направленіи OZ, которое примемъ за общую ось координатъ Z или Z'. Пусть O_A и O_B будутъ начала координатъ двухъ системъ, изъ которыхъ одну, а именно O_AXYZ можемъ принять за неподвижную, а другую $O_BX'Y'Z'$ движущейся со скоростью v по направленію прямой OZ относительно первой: оси O_BX', O_BY' соотвѣтственно параллельны O_AX и O_AY. Пусть координаты нѣкоторой точки M пространства въ системѣ A будутъ x, y, z



и моментъ наблюденія какого нибудь явленія, напримѣръ, свѣтящейся точки въ пунктѣ M, для наблюдателя связаннаго съ системой A, будетъ t. Это t есть отсчетъ въ моментъ наблюденія прибора, служащаго для опре-

---

[1]) См. напр. его Theory of electrons, p. 197. (1909).

[2]) Annalen d. Physik. Bd. 17, p. 891 (1905).

дѣленія времени въ системѣ A. Далѣе пусть x', y', z' и t' соотвѣтственныя величины въ системѣ B, опредѣляемыя наблюдателемъ, связаннымъ неизмѣняемо съ ней; приэтомъ необходимо, чтобы приборъ для регистрированія времени въ системѣ B былъ тождественнъ съ такимъ же приборомъ въ системѣ A.

Возьмемъ на оси OZ двѣ точки: A, принадлежащую системѣ A, и B—системѣ B. Пусть $AB=u$. Затѣмъ пусть изъ A идетъ свѣтовой лучъ къ B, гдѣ помѣщено зеркало, отражается отъ него и попадаетъ обратно въ A. Обозначимъ t_0', t_1', t_2' соотвѣтственно моменты времени въ системѣ B выхожденія луча изъ A, отраженія отъ B и возвращенія опять въ A; тогда ясно, что

$$t_1'-t_0'=t_2'-t_1'; \tag{1}$$

откуда находимъ:

$$2t_1'=t_0'+t_2'. \tag{2}$$

Согласно нашему взгляду на время t' мы можемъ написать, что вообще:

$$t'=\phi(z,\ t), \tag{3}$$

если z координата какой нибудь точки на оси OZ, а t соотвѣтственный моментъ времени въ системѣ A; что же касается ϕ, то это нѣкоторая *однозначная* функція; приэтомъ, ясно, что t' не зависитъ отъ x и y. При помощи (3) имѣемъ:

$$t_0'=\phi(z,\ t);\quad t_1'=\phi\left(z-u,\quad t+\frac{u}{\omega+v}\right);$$
$$t_2'=\phi\left(z,\ t+\frac{u}{\omega-v}+\frac{u}{\omega+v}\right), \tag{4}$$

причемъ z координата точки A, а ω *скорость свѣта въ той срединѣ, которой наполнено разсматриваемое пространство;* дробь $\frac{u}{\omega+v}$ есть время, въ теченіе котораго свѣтъ переходитъ отъ A до B, а $\frac{u}{\omega-v}$ время отъ B до A. Надо впрочемъ замѣтить, что самъ Эйнштейнъ разсматриваетъ случай, когда взятая средина—эфиръ. Разлагая t_1' и t_2' въ (4) по теоремѣ Тэйлора, въ предположеніи, что u безконечно-мало, найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} t_1'&=\phi(z,\ t)-\frac{\partial\phi}{\partial z}u+\frac{\partial\phi}{\partial t}\ \frac{u}{\omega+v};\\ t_2'&=\phi(z,\ t)+\frac{\partial\phi}{\partial t}\ \frac{2u\omega}{\omega^2-v^2},\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

но, какъ показываетъ чертежъ: $u=z-vt$, а потому:

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=\frac{\partial\phi}{\partial u};$$

подставивъ это въ выраженіе для t_1', получимъ:

$$t_1' = \phi(z,\ t) - \frac{\partial\phi}{\partial u}\,u + \frac{\partial\phi}{\partial t}\,\frac{u}{\omega + v}. \tag{6}$$

Подставивъ теперь значенія t_0' изъ (4), t_1' изъ (6) и t_2' изъ (5) въ равенство (2), по сокращеніи найдемъ:

$$\frac{\partial\phi}{\partial u} + \frac{v}{\omega^2 - v^2}\,\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0. \tag{7}$$

Интегралъ этого уравненія будетъ:

$$\phi = F(At + Bu)\,, \tag{8}$$

гдѣ F какая угодно *однозначная* функція t и u. Между постоянными A и B существуетъ зависимость:

$$A\,\frac{v}{\omega^2 - v^2} + B = 0\,, \tag{9}$$

которую получаемъ черезъ подстановку (8) въ (7). Опредѣливъ B изъ (9) и подставивъ въ (8), найдемъ:

$$\phi = F\left[A\left(t - \frac{uv}{\omega^2 - v^2}\right)\right],$$

или, подставляя значеніе $u = z - vt$, получимъ окончательно:

$$t' = F\left[a\left(t - \frac{v}{\omega^2}z\right)\right], \tag{10}$$

гдѣ написано a вмѣсто $\dfrac{A\omega^2}{\omega^2 - v^2}$.

Мы возьмемъ теперь вмѣсто произвольной функціи F *простѣйшую однозначную функцію*, а именно *линейную*, т. е. положимъ, что

$$t' = a\left(t - \frac{v}{\omega^2}z\right). \tag{11}$$

Здѣсь неизвѣстно постоянное a; его мы опредѣлимъ немного ниже.

Примѣняя подобный же пріемъ ко времени t, какъ функціи z' и t', очевидно найдемъ:

$$t = a\left(t' + \frac{v}{\omega^2}z'\right), \tag{12}$$

такъ какъ вся разница системъ A и B та, что если v скорость системы B относительно A, то скорость системы A относительно B будетъ $-v$.

Изъ уравненій (11) и (12) можемъ найти зависимость z отъ z' и t' или обратно: зависимость z' отъ z и t. Найдемъ первую. Умножимъ уравненіе (12) на a и сложимъ почленно съ (11); получимъ:

$$z = a(z' + mt'), \tag{13}$$

гдѣ положено:

$$m = \frac{a^2 - 1}{a^2}\frac{\omega^2}{v}. \tag{14}$$

Теперь намъ надо опредѣлить a. Но прежде, чѣмъ сдѣлать это, мы покажемъ, что въ предыдущемъ поставленная нами задача рѣшена.

Дѣйствительно, къ формуламъ (12) и (13) мы присоединимъ еще двѣ очевидныя:

$$x = x', \quad y = y', \tag{15}$$

тогда система соотношеній (15), (13) и (12), т. е.

$$x = x',\ y = y',\ z = a(z' + mt');\quad t = a\left(t' + \frac{v}{\omega^2}z'\right), \tag{a}$$

и будетъ искомой системой соотношеній между (x', y', z'; t') и (x, y, z; t). Для полученія обратныхъ соотношеній стоитъ только изъ (11) и (12) исключить t' и тогда получимъ z' и искомыя соотношенія будутъ:

$$x' = x,\ y' = y,\ z' = a(z - mt);\ t' = a\left(t - \frac{v}{\omega^2}z\right). \tag{b}$$

Займемся теперь опредѣленіемъ a. Съ этой цѣлью возьмемъ нѣкоторую точку M и примемъ, что свѣтъ доходитъ отъ нея до O_A во время t, тогда имѣемъ:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \omega^2 t^2, \tag{16}$$

приэтомъ ωt есть разстояніе $\overline{O_A M}$; если мы теперь замѣнимъ x, y, z и t ихъ значеніями въ функціи x', y', z'; t', то должны получить разстояніе $\overline{O_B M} = \omega t'$. Подставляя въ (16) значенія x, y, z; t изъ формулъ (a), находимъ:

$$x'^2 + y'^2 + a^2\left(1 - \frac{v^2}{\omega^2}\right)z'^2 = a^2(\omega^2 - m^2)t'^2 + 2a^2(v - m)z't'. \tag{17}$$

Чтобы это равенство превратилось въ *соотвѣтствующее равенству* (16), а именно:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \omega^2 t'^2, \tag{18}$$

необходимо и достаточно, чтобы:

$$a^2\left(1 - \frac{v^2}{\omega^2}\right) = 1;\quad v - m = 0;$$

тогда коэффиціентъ при t'^2 въ (17) будетъ равенъ ω^2. Итакъ имѣемъ:

$$a^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{\omega^2}}, \quad m = v. \tag{19}$$

При этихъ значеніяхъ a^2 и m полученное нами раньше уравненіе (14) превращается въ тождество. Положимъ:

$$k = + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\omega^2}}}, \tag{20}$$

тогда для однозначности рѣшеній примемъ, что $a = k$ и формулы преобразованія (a) и (b) напишутся въ видѣ:

$$x = x', \quad y = y', \quad z = k(z' + vt'); \quad t = k\left(t' + \frac{v}{\omega^2} z'\right) \tag{A}$$

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = k(z - vt); \quad t' = k\left(t' - \frac{v}{\omega^2} z\right) \tag{B}$$

Итакъ первая наша задача рѣшена.

III.

Теперь намъ предстоитъ показать чрезвычайно важное свойство *преобразованія Лоренца*, а именно, что дифференціальныя уравненія электродинамики и оптики сохраняютъ свой видъ, будутъ ли приняты за независимыя перемѣнныя система $(x, y, z; t)$ или система $(x', y', z'; t')$. Приэтомъ формулы (A) или (B) можно считать съ точки зрѣнія анализа прямо данными; другими словами дальнѣйшій анализъ не зависитъ отъ соображеній предыдущаго параграфа.

Разсмотримъ сначала случай діэлектрика, характеризуемаго физически діэлектрической постоянной K и магнитной проницаемостью μ. Пусть составляющія магнитной силы, разсчитанной на единицу магнитной массы, будутъ α, β, γ; составляющія электрическаго смѣщенія f, g, h и электрическаго тока u, v, w. Тогда уравненія электромагнитнаго поля въ точкѣ (x, y, z) въ моментъ времени t будутъ:

$$4\pi A u = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \quad 4\pi A v = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \quad 4\pi A w = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \tag{1}$$

$$u = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad v = \frac{\partial g}{\partial t}, \quad w = \frac{\partial h}{\partial t} \tag{2}$$

$$AK\mu\frac{\partial\alpha}{\partial t}=4\pi\left(\frac{\partial g}{\partial z}-\frac{\partial h}{\partial y}\right);\quad AK\mu\frac{\partial\beta}{\partial t}=4\pi\left(\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial z}\right);$$
$$AK\mu\frac{\partial\gamma}{\partial t}=4\pi\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial x}\right)\tag{3}$$

и

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}=0\,,\tag{4}$$

причемъ $A=\frac{1}{\omega_0}$ и ω_0 есть скорость свѣта въ пустотѣ.

Мы выписали лишь самыя необходимыя уравненія; въ ученіи объ электромагнитныхъ поляхъ употребляются еще многія другія уравненія, но онѣ суть слѣдствія приведенныхъ. Далѣе для преобразованія системы уравненій (1)—(4) отъ перемѣнныхъ (x, y, z, t) къ системѣ (x', y', z', t') мы должны будемъ пользоваться слѣдующими формулами, легко получаемыми при помощи уравненій (B) § II:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=k\left(\frac{\partial U}{\partial t'}-v\frac{\partial U}{\partial z'}\right);\quad \frac{\partial U}{\partial z}=k\left(\frac{\partial U}{\partial z'}-\frac{v}{\omega^2}\frac{\partial U}{\partial t'}\right);\quad \frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial x'},\quad \frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial y'},\tag{a}$$

гдѣ U какая угодно конечная и непрерывная функція координатъ и времени.

Преобразуемъ сначала уравненія (3). Находимъ при помощи (a):

$$\left.\begin{aligned}AK\mu\frac{\partial}{\partial t'}\left(k\alpha+\frac{4\pi kv}{AK\mu\omega^2}g\right)&=4\pi\left[\frac{\partial}{\partial z'}\left(kg+\frac{AK\mu kv}{4\pi}\alpha\right)-\frac{\partial h}{\partial y'}\right]\\AK\mu\frac{\partial}{\partial t'}\left(k\beta-\frac{4\pi kv}{AK\mu\omega^2}f\right)&=4\pi\left[\frac{\partial h}{\partial x'}-\frac{\partial}{\partial z'}\left(kf-\frac{AK\mu kv}{4\pi}\beta\right)\right]\end{aligned}\right\}.\tag{b}$$

Затѣмъ третье уравненіе въ системѣ (3) даетъ сначала:

$$AK\mu k\left(\frac{\partial\gamma}{\partial t'}-v\frac{\partial\gamma}{\partial z'}\right)=4\pi\left(\frac{\partial f}{\partial y'}-\frac{\partial g}{\partial x'}\right),$$

но (4) дастъ при помощи (a):

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x'}+\frac{\partial\beta}{\partial y'}+k\left(\frac{\partial\gamma}{\partial z'}-\frac{v}{\omega^2}\frac{\partial\gamma}{\partial t'}\right)=0\,;$$

опредѣливъ отсюда $\frac{\partial\gamma}{\partial z'}$ и подставивъ въ предыдущее уравненіе, получимъ, зная по (20) § II, что $1-\frac{v^2}{\omega^2}=\frac{1}{k^2}$, послѣ очевидныхъ преобразованій слѣдующее:

$$AK\mu\,\frac{\partial\gamma}{\partial t'}=4\pi\left[\frac{\partial}{\partial y'}\left(kf-\frac{AK\mu kv}{4\pi}\,\beta\right)-\frac{\partial}{\partial x'}\left(kg+\frac{AK\mu kv}{4\pi}\,\alpha\right)\right]. \qquad \text{(c)}$$

Положимъ теперь:

$$\left.\begin{aligned}&k\left(f-\frac{AK\mu v}{4\pi}\,\beta\right)=Nf';\quad k\left(g+\frac{AK\mu v}{4\pi}\,\alpha\right)=Ng';\quad h=Nh'\\&k\left(\alpha+\frac{4\pi v}{AK\mu\omega^2}\,g\right)=N\alpha';\quad k\left(\beta-\frac{4\pi v}{AK\mu\omega^2}\,f\right)=N\beta';\quad \gamma=N\gamma',\end{aligned}\right\}\qquad \text{(A)}$$

причемъ N нѣкоторый постоянный коэффиціентъ; тогда уравненія (b) и (c) будутъ имѣть видъ:

$$\left.\begin{aligned}&AK\mu\,\frac{\partial\alpha'}{\partial t'}=4\pi\left(\frac{\partial g'}{\partial z'}-\frac{\partial h'}{\partial y'}\right);\quad AK\mu\,\frac{\partial\beta'}{\partial t'}=4\pi\left(\frac{\partial h'}{\partial x'}-\frac{\partial f'}{\partial z'}\right);\\&AK\mu\,\frac{\partial\gamma'}{\partial t'}=4\pi\left(\frac{\partial f'}{\partial y'}-\frac{\partial g'}{\partial x'}\right);\end{aligned}\right.\qquad \text{(3 bis)}$$

эти уравненія того же вида, какъ и уравненія (3) въ системѣ перемѣнныхъ (x, y, z; t); здѣсь слѣдовательно функціи f, g, h; α, β, γ преобразовались въ f', g', h' и α', β', γ'. Коэффиціентъ N зависитъ отъ нашего произвола; его можно взять, напр., равнымъ единицѣ. Перейдемъ теперь къ системамъ (1) и (2) совмѣстно.

Первыя два уравненія дадутъ при помощи формулы (a):

$$\left.\begin{aligned}&4\pi A\,\frac{\partial}{\partial t'}\left(kf-\frac{kv}{4\pi A\omega^2}\,\beta\right)=\frac{\partial\gamma}{\partial y'}-\frac{\partial}{\partial z'}(k\beta-4\pi Akvf)\\&4\pi A\,\frac{\partial}{\partial t'}\left(kg+\frac{kv}{4\pi A\omega^2}\,\alpha\right)=\frac{\partial}{\partial z'}(k\alpha+4\pi Akvg)-\frac{\partial\gamma}{\partial x'}.\end{aligned}\right\}\qquad \text{(d)}$$

Для преобразованія третьяго уравненія воспользуемся соотношеніемъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}=0, \qquad (5)$$

вытекающимъ изъ (1) и (2). Тогда подобно тому, какъ и выше, получимъ:

$$4\pi A\,\frac{\partial h}{\partial t'}=\frac{\partial}{\partial x'}(k\beta-4\pi Akvf)-\frac{\partial}{\partial y'}(k\alpha+4\pi Akvg). \qquad \text{(e)}$$

Уравненія (d) и (e) будутъ имѣть видъ системъ (1) и (2), если *возможно* положить:

$$\left.\begin{aligned} k\left(f-\frac{v}{4\pi A\omega^2}\beta\right)=N'f',\quad k\left(g+\frac{v}{4\pi A\omega^2}\alpha\right)=N'g',\quad h=N'h' \\ k(\alpha+4\pi Avg)=N'\alpha';\qquad k(\beta-4\pi Avf)=N'\beta',\quad \gamma=N'\gamma', \end{aligned}\right\}\quad (\mathrm{B})$$

тогда (d) и (e) будутъ:

$$4\pi A\frac{\partial f'}{\partial t'}=\frac{\partial\gamma'}{\partial y'}-\frac{\partial\beta'}{\partial z'};\quad 4\pi A\frac{\partial g'}{\partial t'}=\frac{\partial\alpha'}{\partial z'}-\frac{\partial\gamma'}{\partial x'};\quad 4\pi A\frac{\partial h'}{\partial t'}=\frac{\partial\beta'}{\partial x'}-\frac{\partial\alpha'}{\partial y'},\ (1\,\mathrm{bis})$$

Итакъ система уравненій (1)—(3) превращается преобразованіемъ Лоренца въ подобную же систему, если *возможно совмѣстное существованіе условій* (A) *и* (B); но это требуетъ, чтобы соблюдено было: 1) $N'=N$ и 2) соотношеніе между коэффиціентами K и μ:

$$A^2K\mu\omega^2=1;\qquad (\mathrm{f})$$

но если положимъ:

$$\frac{\omega_0}{\omega}=n,$$

т. е. n будетъ показатель преломленія нашей средины (K, μ); тогда равенство (f) будетъ:

$$K\mu=n^2.\qquad (6)$$

А это извѣстное соотношеніе Максвелла.

Такимъ образомъ оказался неожиданный результатъ: допущеніе справедливости преобразованія Лоренца привело насъ къ выводу (6), который полученъ Максвелломъ, какъ результатъ интегрированія дифференціальныхъ уравненій электромагнитнаго поля. Это обстоятельство заставляетъ признать за пріемомъ Лоренца важное значеніе.

Замѣтимъ, что самъ Лоренцъ, а также Минковскій [1]), Эйнштейнъ и А. Пуанкаре [2]) доказали справедливость «теоремы Лоренца» для случая чистаго эфира, т. е. когда $K=1$, $\mu=1$ или, какъ можно убѣдиться, для болѣе общаго случая, когда $K\mu=1\ (n=1)$; причемъ u, v, w были согласно взглядамъ Лоренца:

---

[1]) *Minkowski.* Zwei Abhandlungen über die Grundgleichungen der Elektrodynamik изданныя Блюменталемъ (1910).

[2]) *H. Poincaré.* Sur la dynamique de l'électron. Rend. del Circ. math. di Palermo. T. XXI (1906).

$$u = \frac{\partial f}{\partial t} + \varrho \xi, \quad v = \frac{\partial g}{\partial t} + \varrho \eta, \quad w = \frac{\partial h}{\partial t} + \varrho \zeta,$$

гдѣ ξ, η, ζ составляющія скорости электрона, а

$$\varrho = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z},$$

объемная плотность электричества въ точкѣ (x, y, z).

IV.

Положимъ, что предложеніе Лоренца справедливо будетъ и въ томъ случаѣ, когда въ срединѣ имѣются движущіеся съ зарядами электроны, т. е. когда средина будетъ обладать дисперсіей.

Пусть (f_i, g_i, h_i) будутъ проекціи перемѣщенія электрона рода i (мы разсматриваемъ одинъ родъ электроновъ въ видахъ простоты анализа), тогда составляющія электрическаго тока будутъ имѣть видъ, обозначивъ C_i нѣкоторое постоянное, въ разсмотрѣніе физическаго смысла котораго пока не входимъ:

$$u = \frac{\partial f}{\partial t} + C_i \frac{\partial f_i}{\partial t}, \quad v = \frac{\partial g}{\partial t} + C_i \frac{\partial g_i}{\partial t}, \quad w = \frac{\partial h}{\partial t} + C_i \frac{\partial h_i}{\partial t}, \qquad (1)$$

Уравненія (1), (3) и (4) § III останутся въ силѣ и здѣсь. Члены

$$C_i \frac{\partial f_i}{\partial t}, \quad C_i \frac{\partial g_i}{\partial t}, \quad C_i \frac{\partial h_i}{\partial t}$$

будутъ составляющими тока переноса.

Что касается движенія электрона, то оно, разумѣется, представляется соотвѣтственными уравненіями вида:

$$m_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2} + k_i \frac{\partial f_i}{\partial t} + a_i^2 f_i = b_i f \quad \text{и т. п.}$$

физическій смыслъ коэффиціентовъ m_i, k_i, a_i^2 и b_i понятенъ самъ собой.

Для *періодическихъ* измѣненій средины можно убѣдиться [1]), что:

$$f_i = u_i f, \quad g_i = u_i g, \quad h_i = u_i h, \qquad (2)$$

гдѣ u_i функція періода измѣненій электромагнитнаго поля или частоты v и выражается такъ:

$$u_i = \frac{b_i}{a_i^2 - m_i v^2 + k_i v \sqrt{-1}}.$$

---

[1]) См. напр. *А. Грузинцевъ*. Электронная теорія въ оптикѣ. Сообщ. Хар. Мат. Общества Т. XII (2), № 2 стр. 64 (1910).

Благодаря уравненіямъ (2) равенства (1), положивъ въ нихъ $D_i = 1 + C_i u_i$, можно написать въ видѣ:

$$u = D_i \frac{\partial f}{\partial t}; \quad v = D_i \frac{\partial g}{\partial t}; \quad w = D_i \frac{\partial h}{\partial t} \tag{3}$$

и уравненія (1) и (2) § III будутъ:

$$\begin{gathered} 4\pi A D_i \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \quad 4\pi A D_i \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \\ 4\pi A D_i \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}; \end{gathered} \tag{4}$$

уравненія же (3) и (4) останутся въ прежнемъ видѣ.

Преобразуя уравненія (4) при помощи формулъ (a) § III къ новымъ перемѣннымъ x', y', z'; t' и пользуясь равенствами:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0, \quad 1 - \frac{v^2}{\omega^2} = \frac{1}{k^2},$$

получимъ:

$$\begin{gathered} 4\pi A D_i \frac{\partial f'}{\partial t'} = \frac{\partial \gamma'}{\partial y'} - \frac{\partial \beta'}{\partial z'}; \quad 4\pi A D_i \frac{\partial g'}{\partial t'} = \frac{\partial \alpha'}{\partial z'} - \frac{\partial \gamma'}{\partial x'}; \\ 4\pi A D_i \frac{\partial h'}{\partial t'} = \frac{\partial \beta'}{\partial x'} - \frac{\partial \alpha'}{\partial y'}, \end{gathered} \tag{4 bis}$$

того же вида, какъ и уравненія (4); причемъ положено:

$$\left.\begin{aligned} k\left(f - \frac{v}{4\pi A \omega^2 D_i}\beta\right) = N f'; \quad k\left(g + \frac{v}{4\pi A \omega^2 D_i}\alpha\right) = N g'; \quad h = N h'; \\ k(\alpha + 4\pi A v D_i g) = N\alpha'; \quad k(\beta - 4\pi A v D_i f) = N\beta'; \quad \gamma = N\gamma'. \end{aligned}\right\} \text{(A)}$$

Подобнымъ же образомъ преобразуемъ систему (3) § III къ новымъ перемѣннымъ x', y', z'; t'; получимъ слѣдующую систему уравненій того же вида (3):

$$\begin{gathered} AK\mu \frac{\partial \alpha'}{\partial t'} = 4\pi\left(\frac{\partial g'}{\partial z'} - \frac{\partial h'}{\partial y'}\right); \quad AK\mu \frac{\partial \beta'}{\partial t'} = 4\pi\left(\frac{\partial h'}{\partial x'} - \frac{\partial f'}{\partial z'}\right); \\ AK\mu \frac{\partial \gamma'}{\partial t'} = 4\pi\left(\frac{\partial f'}{\partial y'} - \frac{\partial g'}{\partial x'}\right). \end{gathered} \tag{3 bis}$$

Здѣсь положено:

$$\left.\begin{aligned} k\left(f - \frac{AK\mu v}{4\pi}\beta\right) = N' f'; \quad k\left(g + \frac{AK\mu v}{4\pi}\alpha\right) = N' g'; \quad h = N' h' \\ k\left(\alpha + \frac{4\pi v}{AK\mu\omega^2} g\right) = N'\alpha'; \quad k\left(\beta - \frac{4\pi v}{AK\mu\omega^2} f\right) = N'\beta'; \quad \gamma = N'\gamma'. \end{aligned}\right\} \text{(B)}$$

Для того же, чтобы векторы (f', g', h') и $(\alpha', \beta', \gamma')$ въ системахъ (A) и (B) были тождественны, необходимо и достаточно соблюденіе двухъ условій:

$$N = N'$$

и

$$A^2 K\mu\omega^2 D_i = 1. \tag{C}$$

Первое условіе есть простое равенство коэффиціентовъ пропорціональности, второе же есть *извѣстное дисперсіонное соотношеніе*. Дѣйствительно, такъ какъ D_i комплексно, ибо входящее въ него количество, какъ мы знаемъ,

$$u_i = \frac{b_i}{a_i^2 - m_i v^2 + k_i v\sqrt{-1}} \tag{a}$$

само комплексно, а потому должны положить, что ω комплексно; пусть

$$\frac{\omega_0}{\omega} = \frac{1}{A\omega} = n\,(1 - \varkappa\sqrt{-1}), \tag{b}$$

тогда уравненіе (C) приметъ видъ:

$$n^2(1 - \varkappa\sqrt{-1})^2 = K\mu + \frac{K\mu b_i C_i}{a_i^2 - m_i v^2 + k_i v\sqrt{-1}}, \tag{D}$$

а это и есть дисперсіонное соотношеніе общепринятое въ настоящее время. При этомъ n и $\varkappa$ суть показатель преломленія и коэффиціентъ поглощенія средины при нормальномъ паденіи луча на ея границу.

Такимъ образомъ и здѣсь преобразованіе Лоренца приводитъ къ важному результату, обыкновенно получаемому черезъ интегрированіе уравненій электромагнитнаго поля.

V.

Если мы примемъ во вниманіе и токи проводимости въ обычномъ смыслѣ слова, то получимъ для u, v, w слѣдующія формулы опять таки для случая *періодическихъ измѣненій* кинетическаго состоянія средины:

$$u = E\frac{\partial f}{\partial t}, \quad v = E\frac{\partial g}{\partial t}, \quad w = E\frac{\partial h}{\partial t}, \tag{1}$$

гдѣ положено:

$$E = 1 + D_i - \frac{4\pi C}{Kv}\sqrt{-1}, \tag{2}$$

при чемъ C коэффиціентъ электропроводности средины, выраженный въ электростатическихъ единицахъ, а v, какъ и прежде, частота измѣненій электромагнитнаго поля. Уравненія поля будутъ имѣть прежній видъ въ системѣ перемѣнныхъ x', y', z'; t', а коэффиціенты, характеризующіе физическія свойства среды будутъ удовлетворять соотношенію, аналогичному (C) предыдущаго параграфа, а именно:

$$A^2K\mu\omega^2E=1\,, \tag{E}$$

откуда найдемъ дисперсіонное соотношеніе въ видѣ:

$$n^2(1-\varkappa\sqrt{-1})^2=K\mu-\frac{4\pi C\mu}{v}\sqrt{-1}+\frac{K\mu b_iC_i}{a_i^2-m_iv^2+k_iv\sqrt{-1}}\,. \tag{F}$$

Если примемъ, что $C_i=0$, то получимъ извѣстныя формулы Максвелла для проводниковъ (металловъ) или, что все равно, для поглощающихъ срединъ.

VI.

Преобразованіе Лоренца очень просто и строго послѣдовательно приводитъ насъ къ законамъ аберраціи и Допплера (принципу Допплера). Разсмотримъ случай прозрачнаго діэлектрика и пусть имѣемъ частныя рѣшенія для f, g, h слѣдующаго обычнаго вида:

$$f=f_0\sin Q\,,\quad g=g_0\sin Q\,,\quad h=h_0\sin Q\,, \tag{1}$$

гдѣ положено

$$Q=v\left(t-\frac{mx+ny+pz}{\omega}\right), \tag{2}$$

слѣдовательно v будетъ частота измѣненія электромагнитнаго поля, а m, n, p косинусы направленія вектора Пойнтинга или, проще, свѣтового луча. При помощи соотношеній (3) § III легко находимъ для составляющихъ магнитной силы слѣдующія выраженія, помня, что $AK\mu\omega=\frac{1}{A\omega}$:

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=4\pi A\omega\,(nh_0-pg_0)\sin Q\,,\\ \beta&=4\pi A\omega\,(pf_0-mh_0)\sin Q\,,\\ \gamma&=4\pi A\omega\,(mg_0-nf_0)\sin Q\,.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Теперь формулы (A) или (B) § III, дадутъ:

$$Nf'=k\left[\left(1-\frac{v}{\omega}p\right)f_0+\frac{mv}{\omega}h_0\right]\sin Q\,;$$

$$Ng'=k\left[\left(1-\frac{v}{\omega}p\right)g_0+\frac{nv}{\omega}h_0\right]\sin Q\,;\quad Nh'=h_0\sin Q\,.$$

Отсюда при помощи соотношенія

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}=0\,,$$

которое теперь превращается въ соотношеніе:

$$mf_0 + ng_0 + ph_0 = 0$$

и равенства:

$$\frac{1}{k^2} = 1 - \frac{v^2}{\omega^2},$$

находимъ:

$$ND' = k\left(1 - \frac{v}{\omega}p\right) D_0 \sin Q,$$

если положимъ:

$$D_0 = \sqrt{f_0{}^2 + g_0{}^2 + h_0{}^2}, \quad D' = \sqrt{f'^2 + g'^2 + h'^2}. \tag{5}$$

Но подставляя въ Q значенія x, y, z и t изъ формулъ преобразованія (A) § II и полагая:

$$v' = vk\left(1 - \frac{v}{\omega}p\right), \tag{a}$$

$$m' = \frac{m}{k\left(1 - \frac{v}{\omega}p\right)}, \quad n' = \frac{n}{k\left(1 - \frac{v}{\omega}p\right)}, \quad p' = \frac{p - \frac{v}{\omega}}{1 - \frac{v}{\omega}p}, \tag{b}$$

находимъ:

$$Q = v'\left(t' - \frac{m'x' + n'y' + p'z'}{\omega}\right) \tag{6}$$

формула (a) представляетъ, ясно, принципъ Допплера въ общей формѣ, а формулы (b) даютъ законы аберраціи.

Если-бы взяли общій случай § III и положили бы, что

$$f = Me^Q, \quad g = Ne^Q, \quad h = Pe^Q,$$

причемъ

$$Q = vt\sqrt{-1} + ax + by + cz$$

и M, N, P; a, b, c комплексныя постоянныя, то получили бы изъ формулы (3) § III:

$$\alpha = \frac{4\pi\sqrt{-1}}{AK\mu v}(Pb - Nc)e^Q; \quad \beta = \frac{4\pi\sqrt{-1}}{AK\mu v}(Mc - Pa)e^Q;$$

$$\gamma = \frac{4\pi\sqrt{-1}}{AK\mu v}(Na - Mb)e^Q, \tag{7}$$

Формулы (A) дадутъ:

$$\left.\begin{aligned} Nf' &= k\left[M\left(1 - \frac{v}{v}c\sqrt{-1}\right) + \frac{v}{v}aP\sqrt{-1}\right]e^Q \\ Ng' &= k\left[N\left(1 - \frac{v}{v}c\sqrt{-1}\right) + \frac{v}{v}bP\sqrt{-1}\right]e^Q \\ Nh' &= Pe^Q. \end{aligned}\right\}$$

Положимъ, какъ и выше:

$$M^2 + N^2 + P^2 = D_0^2,$$

тогда зная, что

$$Ma + Nb + Pc = 0,$$

изъ предыдущихъ равенствъ получимъ:

$$N^2(f'^2 + g'^2 + h'^2) = k^2 \left[\left(1 - \frac{v}{v} c \sqrt{-1}\right)^2 (D_0^2 - P^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{P^2}{k^2} - \frac{v^2}{v^2}(a^2 + b^2) P^2 - \frac{2vc}{v} P \sqrt{-1} \left(1 - \frac{v}{v} c \sqrt{-1}\right) \right] e^{2Q}.$$

Но легко убѣдиться, сопоставляя уравненія (1), (2) и (3) § III, что

$$a^2 + b^2 + c^2 = - A^2 v^2 n^2,$$

гдѣ

$$n = \frac{\omega_0}{\omega} = n_0 (1 - \varkappa \sqrt{-1}) \tag{8}$$

есть комплексный показатель преломленія, а потому предыдущее равенство будетъ имѣть видъ:

$$N^2(f'^2 + g'^2 + h'^2) = k^2 \left[\left(1 - \frac{v}{v} c \sqrt{-1}\right)^2 D_0^2 - P^2 \left(1 - \frac{1}{k^2} - A^2 v^2 n^2\right) \right] e^{2Q}.$$

Но по (8):

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{v^2}{\omega^2} = A^2 v^2 n^2,$$

а слѣдовательно:

$$N \sqrt{f'^2 + g'^2 + h'^2} = k \left(1 - \frac{v}{v} c \sqrt{-1}\right) D_0 e^{Q}. \tag{9}$$

Преобразуя Q, найдемъ:

$$Q = v' t' \sqrt{-1} + a'x' + b'y' + c'z',$$

если положимъ:

$$v' = kv \left(1 - \frac{v}{v} c \sqrt{-1}\right), \quad a' = a, \quad b' = b, \quad c' = k \left(c + \frac{v}{\omega^2} v \sqrt{-1}\right). \tag{10}$$

Эти формулы даютъ принципъ Допплера и законы аберраціи въ поглощающихъ срединахъ и имѣютъ пока въ настоящее время лишь теоретическій интересъ.

VII.

Примѣнимъ къ движенію электроновъ преобразованіе Лоренца. Уравненія движенія мы возмемъ въ видѣ данномъ нами въ § IV, предположивъ только, что онѣ отнесены къ системѣ $(x', y', z'; t')$; поэтому будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} m_i\frac{\partial^2 f_i}{\partial t'^2}+k_i\frac{\partial f_i}{\partial t'}+a_i{}^2 f_i=b_i f', \\ m_i\frac{\partial^2 g_i}{\partial t'^2}+k_i\frac{\partial g_i}{\partial t'}+a_i{}^2 g_i=b_i g', \\ m_i\frac{\partial^2 h_i}{\partial t'^2}+k_i\frac{\partial h_i}{\partial t'}+a_i{}^2 h_i=b_i h', \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

причемъ количества f', g', h' даны уравненіями (A) § III, а именно:

$$Nf'=k\left(f-\frac{AK\mu v}{4\pi}\beta\right);\quad Ng'=k\left(g+\frac{AK\mu v}{4\pi}\alpha\right);\quad Nh'=h. \tag{2}$$

Допустимъ для простоты, что электронъ (f_i, g_i, h_i) лежитъ въ началѣ координатъ O_B, тогда f_i, g_i, h_i не будутъ зависѣть отъ z и по формуламъ преобразованія (a) § III мы получимъ:

$$\frac{\partial f}{\partial t'}=k\frac{\partial f_i}{\partial t},\quad \frac{\partial^2 f_i}{\partial t'^2}=k^2\frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2}\quad \text{и т. п.}$$

Подставивъ значенія эти въ уравненія (1) и пользуясь (2), получимъ:

$$\left.\begin{aligned} m_ik^2\frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2}+k_ik\frac{\partial f_i}{\partial t}+a_i{}^2 f_i=\frac{b_ik}{N}\left(f-\frac{AK\mu v}{4\pi}\beta\right) \\ m_ik^2\frac{\partial^2 g_i}{\partial t^2}+k_ik\frac{\partial g_i}{\partial t}+a_i{}^2 g_i=\frac{b_ik}{N}\left(g+\frac{AK\mu v}{4\pi}\alpha\right) \\ m_ik^2\frac{\partial^2 h_i}{\partial t^2}+k_ik\frac{\partial h_i}{\partial t}+a_i{}^2 h_i=\frac{b_i}{N}h. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Послѣднее уравненіе напишемъ въ видѣ:

$$m_ik^3\frac{\partial^2 h_i}{\partial t^2}+k_ik^2\frac{\partial h_i}{\partial t}+a_i{}^2 kh_i=\frac{b_ik}{N}h. \tag{4}$$

Далѣе такъ какъ коэффиціентъ N произволенъ, то, какъ это неявно сдѣлано и у Лоренца, и у Эйнштейна, можемъ положить, что $N=k$ и тогда уравненія (3) и (4) будутъ имѣть видъ:

$$\left.\begin{aligned} m_i k^2 \frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2} + k_i k \frac{\partial f_i}{\partial t} + a_i^2 f_i &= b_i\left(f - \frac{AK\mu v}{4\pi}\beta\right) \\ m_i k^2 \frac{\partial^2 g_i}{\partial t^2} + k_i k \frac{\partial g_i}{\partial t} + a_i^2 g_i &= b_i\left(g - \frac{AK\mu v}{4\pi}\alpha\right) \\ m_i k^3 \frac{\partial^2 h_i}{\partial t^2} + k_i k^2 \frac{\partial h_i}{\partial t} + a_i^2 k h_i &= b_i h. \end{aligned}\right\} \tag{A}$$

Это уравненія движенія электрона въ системѣ $(x, y, z; t)$; въ нихъ масса электрона представляется для проекціи перемѣщенія вдоль оси z въ видѣ:

$$m_i k^3 = \frac{m_i}{\left(1 - \frac{v^2}{\omega^2}\right)^{\frac{3}{2}}}, \tag{B}$$

а для проекцій перемѣщеній вдоль осей x и y въ видѣ:

$$m_i k^2 = \frac{m_i}{1 - \frac{v^2}{\omega^2}}. \tag{C}$$

Лоренцъ далъ первой массѣ названіе *продольной*, и второй—*поперечной*, причемъ у него $K=1$, $\mu=1$. Точно также и силы сопротивленія и *quasi*-упругія силы представляются съ различными коэффиціентами, смотря по тому будетъ-ли движеніе продольно или поперечно относительно направленія перемѣщенія системы координатъ.

VIII.

Изъ содержанія параграфовъ III — VI заключаемъ, что преобразованіе Лоренца (равенства (A) и (B) § II) остается справедливымъ и для случая, когда скорость свѣта ω будетъ количествомъ комплекснымъ, т. е. преобразованіе Лоренца примѣнимо и къ случаю такъ называемыхъ *поглощающихъ срединъ*. Для послѣднихъ коэффиціентъ k_i въ выраженіи u_i отличенъ отъ нуля; для срединъ же прозрачныхъ (прозрачныхъ діэлектриковъ) $k_i=0$ и тогда u_i и, слѣдовательно, ω количества дѣйствительныя. Сверхъ того ясно, что преобразованіе Лоренца для общихъ случаевъ (k_i и C отличны отъ нуля) имѣетъ мѣсто лишь для періодическихъ измѣненій электромагнитнаго поля, а это есть случай всей области оптическихъ явленій и большей части, если не всей, электродинамики.

Изъ полученнаго и сказаннаго вытекаетъ вся важность и значеніе преобразованія Лоренца для современныхъ теорій электродинамики и оптики, но пока въ чисто математическомъ смыслѣ слова. Но Лоренцъ и многіе физики въ томъ обстоятельствѣ, что уравненія электромагнитнаго поля сохраняютъ свой видъ при переходѣ отъ перемѣнныхъ $(x, y, z; t)$ къ перемѣннымъ $(x', y', z'; t')$ усматриваютъ проявленіе особаго общаго принципа — *принципа относительности (Relativitätsprinzip)*, какъ его называютъ; но, намъ кажется, еще не имѣется къ тому вполнѣ обоснованныхъ данныхъ, такъ какъ одного отрицательнаго результата опытовъ Майкельсона, на которые опирается Лоренцъ, еще не достаточно; главнѣйше съ экспериментальной стороны дѣла, да и съ принципіальной стороны имѣются, если не возраженія, то во всякомъ случаѣ, недоразумѣнія и сомнѣнія. Дѣйствительно, до сихъ поръ физики были убѣждены, что достаточно для пріемлемости той или другой теоріи физическихъ явленій при одинаковыхъ прочихъ обстоятельствахъ условія удовлетворенія принципу сохраненія энергіи, а при выдвигаемой новой точкѣ зрѣнія является необходимость считаться съ принципомъ относительности. Во всякомъ случаѣ надо подождать болѣе детальнаго и всесторонняго разсмотрѣнія вопроса.