(Страссбургъ, Гамбургъ, Батавія, Буда-Пештъ, Загребъ) показало, что короткая длина часа на сейсмограммахъ ($1^h = 2^{cm}$) очень часто даетъ невѣрные результаты для моментовъ началъ различныхъ фазъ сейсмическаго возмущенія; однако несмотря на этотъ недостатокъ регистраціи можно было примѣнить отсчеты записей нѣкоторыхъ землетрясеній къ опредѣленію скоростей распространенія различныхъ сейсмическихъ волнъ: продольныхъ, поперечныхъ и поверхностныхъ. Сравненіе полученныхъ скоростей съ результатами наблюденій Rizzo и Milne'а дало вполнѣ удовлетворительное согласіе.

---

## О преподаваніи тригонометріи въ средней школѣ.

*Г. А. Грузинцева.*

(Доложено въ педагогическомъ засѣданіи Хар. Матем. О-ва 19 21/xi 09).

Теперь, какъ кажется, уже можно высказать увѣренность, что русская средняя школа наканунѣ реформы программъ и преподаванія математики. Общее направленіе реформы ясно: введеніе въ кругъ понятій средней школы идей т. н. высшей математики. Назрѣвшее измѣненіе характера преподаванія необходимо также и для проведенія въ жизнь этой точки зрѣнія. Много въ этомъ отношеніи намъ дастъ, конечно, опытъ западно-европейской и американской школы.

При преподаваніи тригонометріи мнѣ пришлось измѣнить обычное изложеніе этого предмета. Правда тригонометрія не такой основной предметъ, какъ алгебра или геометрія, но она легче поддается измѣненію въ духѣ новыхъ идей даже при сохраненіи старой программы. Измѣненія, о которыхъ я хочу говорить, относятся главнымъ образомъ къ первымъ урокамъ и къ такъ назыв. «гоніометріи».

Начинающій изучать тригонометрію бываетъ сначала ошеломленъ количествомъ новыхъ и совершенно непохожихъ на знакомыя ему раньше понятій: связь между углами и отрѣзками, синусы, косинусы и т. п., измѣненіе ихъ при измѣненіи угла или дуги, многозначность arcsinx и т. д. Въ особенности чуждой ему кажется идея о функціи, которая доминируетъ надъ этими понятіями, какъ бы ни замазывали это учебники и какъ бы ни загоняли ее въ мелкій шрифтъ и выноски.

Хотя въ концѣ концовъ учащійся довольно быстро осваивается съ этими понятіями, но я положительно утверждаю, что это дѣлается за счетъ ясности и точности представленій.

Какъ на примѣръ укажу на одну изъ самыхъ распространенныхъ ошибокъ учащихся—смѣшивать синусъ съ т. н. линіей синуса; также изъ цѣлаго отдѣла тригонометріи—измѣненіе тригонометрическихъ функцій у нихъ остается лишь то, что синусъ въ I и II четверти—положителенъ, въ III и IV отрицателенъ, а косинусъ и т. д.

Поэтому мнѣ кажется полезнымъ остановиться нѣсколько дольше на основныхъ понятіяхъ тригонометріи.

Что новаго узнаетъ учащійся въ тригонометріи съ самаго начала?

Стремленіе установить связь между сторонами и углами треугольника съ цѣлью ввести послѣдніе въ вычисленія—вотъ первое слѣдствіе постановки задачи тригонометріи. Введеніе тригонометрическихъ функцій должно у насъ явиться рѣшеніемъ этой предварительной задачи.

Поставимъ вопросъ: *да возможно ли* установить такую связь? Если намъ удастся, не вводя формально понятія о тригонометрическихъ функціяхъ, убѣдить въ этомъ учениковъ, то этимъ мы подготовимъ ихъ умы къ идеѣ функціи.

Углы и отрѣзки—слишкомъ различныя вещи, такъ что сначала кажется невозможнымъ и непонятнымъ, какъ они могутъ одновременно входить въ вычисленія: оказывается однако, что въ геометріи уже приходилось имѣть дѣло съ вычисленіями, гдѣ входятъ совершенно различныя величины: я говорю о вычисленіи площадей и объемовъ. Но введеніе площадей и объемовъ въ вычисленіе наравнѣ съ отрѣзками могло быть сдѣлано лишь послѣ того, какъ каждую площадь мы связали съ нѣкоторымъ опредѣленнымъ *числомъ*, зависящимъ отъ величины отрѣзковъ, опредѣляющихъ эту площадь. Это обстоятельство указываетъ на направленіе, въ которомъ слѣдуетъ искать рѣшеніе поставленной нами задачи.

Нужно, значитъ, связать каждый уголъ съ нѣкоторымъ числомъ, находящимся въ зависимости отъ величины отрѣзковъ, опредѣляющихъ этотъ уголъ.

Если мы послѣ этихъ разсужденій, иллюстрированныхъ—само собой разумѣется—частными примѣрами, введемъ тригонометрическіе функціи, то, я думаю, учащійся не будетъ смѣшивать синусъ съ перпердикуляромъ, опущеннымъ и т. д.

Такъ какъ съ самаго начала я поставилъ введеніе тригонометрическихъ функцій въ связь съ задачей тригонометріи—рѣшеніемъ треугольниковъ, я буду говорить, разумѣется, о синусѣ *угла*, косинусѣ *угла* и т. д., а не о синусѣ дуги, косинусѣ дуги. Хотя такое изложеніе съ теоретической точки зрѣнія имѣетъ свои недостатки, но дидактическія преимущества его слишкомъ очевидны.

Впослѣдствіи, когда учащіеся уже освоятся съ новыми понятіями, введеніе этого болѣе широкаго взгляда будетъ необходимо; безъ него т. н. обобщеніе понятія объ углѣ и понятіе о періодичности тригонометрическихъ функцій не могутъ быть усвоены съ достаточнымъ пониманіемъ.

Итакъ, нужно каждый уголъ связать съ числомъ, зависящимъ отъ опредѣляющихъ этотъ уголъ отрѣзковъ.

Изъ тѣхъ же соображенiй, по какимъ я дольше останавливался на вопросахъ, обычно затрагиваемыхъ вскользь, я ввожу первоначально *одну тригонометрическую функцiю* $\sin x$. Это я дѣлаю съ тѣмъ большей охотой, что всѣмъ ходомъ предыдущихъ разсужденiй учащiеся приведены къ убѣжденiю—съ точки зрѣнiя теорiи вполнѣ правильному—въ необходимости и *достаточности* введенiя хоть одного числа, связывающаго уголъ съ отрѣзками.

Почему я ввожу именно $\sin x$, а не $\cos x$ или $\operatorname{tg} x$? Преимущества $\sin x$ заключаются въ томъ, что основныя формулы, изъ которыхъ можно вывести все необходимое для рѣшенiя косоугольныхъ треугольниковъ, могутъ быть выведены изъ уравненiй, въ которыя входитъ только синусъ, я говорю о т. н. «формулѣ синусовъ».

Синусъ я опредѣляю, какъ отношенiе въ прямоугольномъ треугольникѣ противолежащаго катета къ гипотенузѣ. Мы искали число, связывающее уголъ съ отрѣзками,—это отношенiе и есть искомое число. Со всевозможной убѣдительностью необходимо, конечно, доказать учащимся, что синусъ (остраго угла) вполнѣ опредѣленъ величиной даннаго угла и и, обратно, синусъ вполнѣ опредѣляетъ соотвѣтствующiй ему уголъ.

У учащихся естественно является вопросъ, какъ же воспользоваться этой идеей для «практики»? Легкое наведенiе со стороны преподавателя приводитъ ихъ къ отвѣту: надо составить таблицу—«какому углу соотвѣтствуетъ какой синусъ».

Опредѣленiе (посредствомъ извѣстнаго построенiя) синуса по углу учащимся извѣстно. Для систематическаго построенiя таблицы синусовъ мы пользуемся миллиметровой бумагой и транспортиромъ. При аккуратной работѣ и достаточно большомъ радiусѣ окружности она даетъ точность до 0,01.

Такимъ образомъ у каждаго ученика имѣется составленная имъ самимъ таблица синусовъ для угловъ отъ $0^0$ до $90^0$; *этими таблицами мы первое время пользуемся при рѣшенiи численныхъ задачъ.*

Конечно до того, какъ ими пользоваться, мы посвящаемъ нѣкоторое время на ихъ исправленiе и *изученiе.*

Разсматривая наши таблицы, мы замѣчаемъ, что, какъ и слѣдовало ожидать по геометрическимъ соображенiямъ, съ возрастанiемъ угла синусъ также возрастаетъ; кромѣ того мы видимъ, что синусъ возрастаетъ *не пропорцiонально* углу.

На послѣднее обстоятельство, мнѣ кажется, полезно указать отдѣльно, хотя бы безъ доказательства. Вѣдь къ числу довольно распространенныхъ ошибокъ начинающихъ относится увѣренность, что

$$\sin 2x = 2\sin x \quad \text{и т. п.}$$

И если они впослѣдствіи не пишутъ этого, то чаще бываетъ это не потому, что они убѣждены въ противномъ, а потому, что они просто выучили новую формулу

$$\sin 2x = 2 \sin x . \cos x .$$

Это изученіе было-бы не закончено, если-бы мы прошли мимо того факта, что при *небольшихъ* измѣненіяхъ угла синусъ измѣняется пропорціонально; учащимся при этомъ полезно указать, что это имѣетъ связь съ тѣмъ обстоятельствомъ, что синусъ измѣняется *постепенно*. Эта мысль, какъ я замѣтилъ, воспринимается ими безъ труда.

Всѣ эти указанія подготовляютъ почву для идеи *непрерывности* и для уясненія сущности *интерполированія таблицъ*.

Полезно использовать т. н. таблицы «натуральныхъ синусовъ» (напр. у Пржевальскаго); тамъ это свойство синусовъ, конечно, замѣтнѣе.

Кромѣ всего этого мы замѣчаемъ—если не замѣтили раньше,—что $\sin x < 1$.

Теперь, когда у насъ составлена таблица синусовъ и ясно сознана возможность, зная величину остраго угла, найти его синусъ, можно перейти къ понятію *о функціи*.

Опираясь на таблицу синусовъ, мы даемъ опредѣленіе функціи: если каждому значенію одной перемѣнной, напр. $x$, соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленное значеніе другой, напр. $y$, то мы называемъ $y$ функціей $x$'а.

Это опредѣленіе, какъ видно, вполнѣ научное.

Учащихся не затрудняетъ и обозначеніе $y = f(x)$.

На понятіи о функціи, конечно, необходимо остановиться. Примѣры изъ геометріи дадутъ возможность съ большей ясностью представить себѣ функціональную зависимость, какъ *зависимость* между двумя перемѣнными величинами.

Пользуясь однимъ синусомъ, можно уже рѣшать треугольники. Прежде всего прямоугольные. Хотя теоретически при помощи одного синуса можно рѣшать задачи всѣхъ типовъ на прямоугольные треугольники, но слѣдуетъ обратить вниманіе, что практически пользованіе Пиѳагоровой теоремой слишкомъ сложно. Это указаніе всегда встрѣчаетъ сочувствіе у учащихся.

Переходимъ къ косоугольнымъ треугольникомъ.

«Формула синусовъ», которую мы выводимъ, даетъ возможность легко рѣшать треугольники по двумъ угламъ и одной сторонѣ, а также по двумъ сторонамъ и противолежащему углу. Задачи остальныхъ типовъ теоретически разрѣшимы, такъ какъ число уравненій достаточно, но практически мы пока еще не можемъ ихъ рѣшить относительно неизвѣстныхъ.

Для рѣшенія этихъ уравненій вводятъ еще тригонометрическія функціи, которыя учащійся воспринимаетъ, какъ нѣкоторыя преобразованія синуса.

Выведя соотношенія между различными тригонометрическими функціями одного и того-же угла, познакомивъ учащихся съ обобщеніемъ понятія угла и дуги, съ теоремой сложенія $\sin x$, $\cos x$ и $\operatorname{tg} x$ и приведеніемъ формулъ къ логариѳмическому виду, мы можемъ дать точное опредѣленіе непрерывной функціи и доказать также вполнѣ точно, что $\sin x$ и $\cos x$ непрерывны при всякихъ значеніяхъ $x$, а $\operatorname{tg} x$ для всякаго $x$, неравнаго

$$(2k+1)\frac{\pi}{2}$$

Изученіе разности

$$f(x+h)-f(x)$$

при безконечно-маломъ $h$ дается ученикамъ легко.

Идея періодичности тригонометрическихъ функцій, формулированная въ такой формѣ

$$f(x+a)=f(x),$$

также вполнѣ имъ доступна.

Изученіе измѣненія тригонометрическихъ функцій въ зависимости отъ аргумента было бы, конечно, не полно безъ графическаго изображенія $\sin x$, $\cos x$ и $\operatorname{tg} x$.

Въ дальнѣйшемъ преподаваніи тригонометріи, какъ мнѣ кажется, нѣтъ необходимости измѣнять обычный порядокъ изложенія предмета.

Резюмирую сказанное: я пытался при преподаваніи послѣдовательно провести дидактическій пріемъ—не вводить новыхъ понятій, не подготовивъ къ нимъ умы учащихся.

Это, привело меня къ измѣненію послѣдовательности изложенія матерьяла; болѣе того въ этомъ небольшомъ курсѣ можно даже замѣтить концентричность.

Введеніе въ кругозоръ учащихся сначала *одной* тригонометрической функціи подсказано тѣмъ же стремленіемъ. Съ другой стороны, такъ сказать, въ вознагражденіе за потерянную систематичность, мы получаемъ возможность ввести бóльшую строгость и достигнуть полнаго усвоенія учащимися идей, которыя много дадутъ имъ и для общаго развитія.