Къ вопросу объ особенныхъ элементахъ коннекса.[1]

III. Пониженіе порядка и класса сопряженнаго пространственнаго коннекса благодаря наличности нѣкоторыхъ особенностей.

Д. М. Синцова.

1. Полученные для плоскостного коннекса (См. Сообщ. X. M. O. (2) X n⁰ 5—6) результаты непосредственно распространяются на пространственный коннексъ съ элементомъ (точка, плоскость).

Чтобы опредѣлить *порядокъ* коннекса, сопряженнаго коннексу:

$$f(x,\ u) = 0 \tag{1}$$

должны найти число элементовъ его, которыхъ точки лежатъ на данной прямой $(U,\ U')$ и которыхъ плоскости даны (или проходятъ черезъ три данныя точки: $X,\ X',\ X''$).

Это даетъ, что уравненіе $\sum y_i f'_x = 0$ должно удовлетвориться при замѣнѣ y черезъ $X,\ X',\ X''$:

$$\sum X f'_x = 0 \quad \sum X' f'_x = 0 \quad \sum X'' f'_x = 0 \tag{$2_{1,2,3}$}$$

и уравненіе $\sum v f'_u = 0$ (3) при замѣнѣ v на U *и* U':

$$\sum U f'_u = 0 \quad \sum U' f'_u = 0 \tag{$3_{1,2}$}$$

Но при этомъ совмѣстность (1) и $(2_{1,2,3})$ требуетъ, чтобы выполнялось условіе

$$(xXX'X'') = 0$$

и такимъ образомъ число искомыхъ элементовъ сопряженнаго коннекса равно числу элементовъ $(x,\ u)$ даннаго, которые выполняютъ уравненія (2), (3) и (4). По извѣстной формулѣ число элементовъ пересѣченія трехъ коннексовъ $(m-1,\ n)$, двухъ $(m,\ n-1)$ и одного $(1,\ 0)$ будетъ

[1]) Доложено на XII съѣздѣ Р. Ест. въ Москвѣ 31. XII. 1909 г.

$$3(m-1)^2 n(n-1)^2 + 6m(m-1)n^2(n-1) + m^2 n^3 = n[m^2n^2 + \\ + 6nm(m-1)(n-1) + 3(m-1)^2(n-1)^2],$$

формула, полученная мною въ 1894 г. [1]) и M. Stuyvaert'омъ [2]) въ 1900.

Двойственнымъ образомъ, чтобы опредѣлить *классъ* сопряженнаго коннекса мы будемъ искать число тѣхъ его элементовъ, которыхъ точка дана, а плоскость проходитъ черезъ данную прямую. Такъ какъ точка сопряженнаго коннекса, принадлежащая элементу, соотвѣтствующему (x, u), опредѣляется уравненіемъ (3), то должны быть даны *три* плоскости U, U', U'', которыя черезъ нее проходятъ, что даетъ:

$$\sum Uf'_u = 0, \ \sum U'f'_u = 0, \ \sum U''f'_u = 0 \qquad (5_{1,2,3})$$

Совмѣстность этихъ уравненій съ (1) требуетъ чтобы было выполнено уравненіе

$$(uUU'U'') = 0 \qquad (6)$$

которое показываетъ что точка элемента сопряженнаго коннекса лежитъ въ плоскости u соотвѣтственнаго элемента исходнаго коннекса.

Плоскость элемента опредѣляется уравненіемъ

$$\sum yf'_x = 0 \qquad (7)$$

она проходитъ черезъ данную прямую, если она проходитъ черезъ двѣ данныя точки X, X':

$$\sum X'f'_x = 0, \ \sum X'f'_x = 0. \qquad (7_{1,2})$$

Принимая въ уравненіяхъ $(5_{1,2,3})$, (6), $(7_{1,2})$ данными X, X', U, U', U'' получимъ шесть уравненій, опредѣляющихъ тѣ элементы коннекса (1), которымъ соотвѣтствуютъ элементы сопряженнаго, удовлетворяющіе требуемымъ условіемъ; число ихъ:

$$m^3n^2 + 6m^2(m-1)n(n-1) + 3m(m-1)^2(n-1)^2 = \\ = m[m^2n^2 + 6mn(m-1)(n-1) + 3(m-1)^2(n-1)^2].$$

2. Мы можемъ оцѣнить теперь вліяніе на порядокъ и классъ сопряженнаго коннекса наличности въ исходномъ коннексѣ основной точки или плоскости.

Напомнимъ опредѣленіе: мы называемъ основною точкою такую точку $x_{осн}$, подстановка координатъ которой въ уравненіе коннекса обра-

---

[1]) Теорія коннексовъ въ пространствѣ. Уч. Зап. Казан. Унив. 1894.

[2]) Recherches relatives aux connexes de l'espace. Belg. Mém. t. 61. 1902.

щаетъ его въ тожество, независимо отъ значеній u. Въ силу этого не только

$$f(x_{\text{осн}},\ u) = 0,$$

но и

$$f'_{u_i}(x_{\text{осн}},\ u) = 0\ \ (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Поэтому, если въ уравненія, опредѣляющія *классъ* сопряженнаго коннекса, подставить $x = x_{\text{осн}}$, то $(5_{1,2,3})$ обратятся въ тожество, и останутся уравненія (6) и $(7_{1,2})$:

$$(uUU'U'') = 0,\ \sum Xf'_x(x_{\text{осн}},\ u) = 0,\ \sum X'f(x_{\text{осн}},\ u) = 0$$

которыя даютъ n^2 значеній u, зависящихъ отъ U, U' и U'' только тѣмъ, что онѣ проходятъ черезъ точку $(U,\ U',\ U'')$. Слѣдовательно, какія бы плоскости этой связки ни брать, всегда эти значенія u будутъ одинаковы, поэтому эти рѣшенія суть посторонния и должны быть отброшены. Напротивъ подставляя координаты основной точки въ систему $(2_{1,2,3})$, $(3_{1,2})$ и (4), получимъ:

$$\sum Xf'_x(x_{\text{осн}},\ u) = 0,\ \sum X'f'_x(x_{\text{осн}},\ u) = 0,\ \sum X''f'_x(x_{\text{осн}},\ u) = 0$$

$$(x_{\text{осн}}XX'X'') = 0$$

послѣднее вообще невозможно, и эта система такимъ образомъ неудовлетворяется при произвольно выбранныхъ $XX'X''$ никакими значеніями u.

Итакъ: *I. Основная точка понижаетъ классъ сопряженнаго коннекса на n^2 единицъ и не оказываетъ вліянія на его порядокъ.*

Двойственно, предполагая, что коннексъ (1) имѣетъ *основную* плоскость $u_{\text{осн}}$ и подставляя въ тѣ же системы, изъ (2), (3), (4) получимъ—такъ какъ для основной плоскости не только $f(x,\ u_{\text{осн}}) = 0$, но и $f'_{x_i}(x,\ u_{\text{осн}}) = 0$ $(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$:

$$(xXX'X'') = 0,\ \sum Uf'_u(x,\ u_{\text{осн}}) = 0,\ \sum U'f'_u(x,\ u_{\text{осн}}) = 0$$

—три уравненія, имѣющія m^2 общихъ рѣшеній; подставляя въ (5) (6) $(7_{1,2})$ получимъ пять уравненій:

$$\sum Uf'_u(x,\ u_{\text{осн}}) = 0,\ \sum U'f'_u(x,\ u_{\text{осн}}) = 0,\ \sum U''f'_u(x,\ u_{\text{осн}}) = 0,\ (uUU'U') = 0$$

вообще несовмѣстныхъ (4-е не выполняется).

Итакъ: *II. Основная плоскость понижаетъ порядокъ сопряженнаго коннекса на m^2 единицъ, а классъ оставляетъ безъ измѣненія.*

3. Собственно—особенныхъ элементовъ коннексъ (1) вообще не имѣетъ. Для этого должно быть выполнено восемь уравненій

$$\left.\begin{array}{l} f'_{x_i} = 0 \ (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \\ f'_{u_k} = 0 \ (k = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \end{array}\right\} \qquad (8)$$

независимыхъ между которыми только *семь*, ибо $mf \equiv \sum x_i f'_{x_i}$ и $nf \equiv \sum u_u f'_{u_k}$ и такимъ образомъ если первые четыре уравненія выполнены, то и $\sum u_k f'_{u_k} = 0$, такъ что необходимо ввести еще лишь три уравненія $f'_{u_k} = 0$. Исключеніе 6 неизвѣстныхъ изъ 7 уравненій даетъ одно соотношеніе между коэффиціентами (1).

Пусть (1) имѣетъ одинъ собственно—особенный элементъ. Обращаясь снова къ системамъ $(2_{1,2,3})$, $(3_{1,2})$, (4) и $(5_{1,2,3})$, (6), $(7_{1,2})$ подставимъ въ тѣ и другія уравненія координаты этого собственно-особеннаго элемента. Тогда замѣтимъ, что $(2_{1,2,3})$, $(3_{1,2})$, (5) и $(7_{1.2})$ удовлетворятся, но (4) и (6) примутъ видъ

$$(x_{\text{с. о.}} XX'X'') = 0, \ (u_{\text{с. о.}} UU'U'') = 0$$

и вообще говоря не удовлетворяются.

Такимъ образомъ нельзя произвольно задаться плоскостью или точкою элемента сопряженнаго коннекса, такъ чтобы при существованіи собственно-особеннаго элемента этотъ послѣдній находился въ числѣ тѣхъ элементовъ даннаго коннекса, которые при этомъ даютъ соотвѣтственные элементы сопряженнаго.

Отсюда: *III. Существованіе въ данномъ коннексѣ одного* (или нѣсколькихъ) *собственно-особенныхъ элементовъ не оказываетъ вліянія на порядокъ и классъ сопряженнаго ему коннекса.*

3. Пусть далѣе 8 уравненій (8) имѣютъ ∞^1 общихъ рѣшеній, т. е. коннексъ (1) имѣетъ пару (кривая дв. кр., развертывающаяся пов.) собственно-особенныхъ элементовъ. Тогда мы можемъ доказать теорему:

IV. Если коннексъ (1) обладаетъ парою (кривая дв. кривизны, развертывающаяся поверхность) собственно особенныхъ элементовъ порядка μ и класса ν, то порядокъ его понижается на μ единицъ, а классъ на ν единицъ.

Дѣйствительно система (2), (3), (4) при этомъ удовлетворяется μ элементами собственно-особенными, коихъ точки лежатъ въ плоскости $(XX'X'')$, а система (5), (6), $(7_{1,2})$ — ν элементами, коихъ плоскости проходятъ черезъ точку $(UU'U'')$ и которые, какъ несобственные элементы пересѣченія, должны быть отброшены.

4. Пусть коннексъ (1) имѣетъ пару поверхностей собственно-особенныхъ элементовъ, которая пусть является, какъ пересѣченіе четырехъ коннексовъ

$$\varphi_j = 0 \, (j = 1, 2, 3, 4) \ldots (k_j, \varkappa_j)$$

$$f'_{x_i} = \sum_{j=1}^{j=4} A_j^{(i)} \varphi_j,\ f'_{u_i} = \sum B_j^{(i)} \varphi_j$$

здѣсь:

$A_j^{(i)}$ — порядка $m - k_i - 1$ и класса $n - \varkappa_i$

$B_j^{(i)}$ „ $m - k_i$ „ $n - \varkappa_i - 1$

Порядокъ, рангъ и классъ пары поверхностей выразятся:

$$\mu' = \sum k_1 \varkappa_2 \varkappa_3 \varkappa_4,\ \varrho' = \sum k_1 k_2 \varkappa_3 \varkappa_4 \text{ и } \nu' = \sum k_1 k_2 k_3 \varkappa_4$$

Четыре коннекса изъ пяти [(2), (3) или (5), $(7_{1,2})$] напр. $\sum X f'_x = 0$ $\sum X' f'_x = 0$ $\sum U f'_u = 0$ $\sum U' f'_u = 0$ имѣютъ, кромѣ этой пары, еще дополнительную общую пару поверхностей, которой порядокъ, рангъ и классъ суть:

$$\mu'_1 - \mu' = 2(m-1)n(n-1)^2 + 2mn^2(n-1) - \mu' = 2n(n-1)\{mn + (m-1)(n-1)\} - \mu'$$

$$\varrho'_1 - \varrho' = (m-1)^2(n-1)^2 + 4\,m(m-1)n(n-1) + m^2n^2 - \varrho'$$

$$\nu'_1 - \nu' = 2m(m-1)\{mn + (m-1)(n-1)\} - \nu'.$$

Опредѣляя порядокъ сопряженнаго коннекса, мы къ четыремъ выписаннымъ коннексамъ добавляемъ пятый $\sum X'' f'_x = 0$, а опредѣляя классъ—добавляемъ $\sum U'' f'_u = 0$.

Порядокъ 1-й пары: $(\varrho'_1 - \varrho')n + (\mu'_1 - \mu')(m - 1)$,

классъ ея $(\nu'_1 - \nu')n + (\varrho'_1 - \varrho')(m - 1)$.

Для 2-й порядокъ $(\varrho'_1 - \varrho')(n - 1) + (\mu'_1 - \mu')m$,

классъ: $(\mu'_1 - \mu')(n - 1) + (\varrho'_1 - \varrho')m$.

Но въ составъ этой пары входятъ еще лишніе элементы, которые должны быть отброшены,—а именно пересѣченіе дополнительной пары поверхностей съ парою собственно особенныхъ элементовъ,—которая представляетъ также пару (кривая дв. кр., разверт. пов.) и опредѣляется уравненіями:

$$\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = 0,\ \varphi_3 = 0,\ \varphi_4 = 0,\ \begin{vmatrix} A_X^{(1)} & A_X^{(2)} & A_X^{(3)} & A_X^{(4)} \\ A_{X'}^{(1)} & A_{X'}^{(2)} & A_{X'}^{(3)} & A_{X'}^{(4)} \\ U_{B^{(1)}} & U_{B^{(2)}} & U_{B^{(3)}} & U_{B^{(4)}} \\ U'_{B^{(1)}} & U'_{B^{(2)}} & U'_{B^{(3)}} & U'_{B^{(4)}} \end{vmatrix} \equiv (A_X^{(1)} A_{X'}^{(2)} U_{B^{(3)}}\ U_{B^{(4)}}) = 0$$

какъ пересѣченіе коннексовъ $(k_1, \varkappa_1)$, $(k_2, \varkappa_2)$, $(k_3, \varkappa_3)$, $(k_4, \varkappa_4)$ и $(4m - 2 - \sum k,\ 4n - 2 - \sum \varkappa)$, эта пара имѣетъ порядокъ и классъ соотв. равные:

$$(4m - 2 - \sum k)\,\mu' + (4n - 2 - \sum \varkappa)\varrho',$$

$$(4m - 2 - \sum k)\,\varrho' + (4n - 2 - \sum \varkappa)\nu'.$$

Отнимая эти числа, мы получимъ порядокъ и классъ искомой пары:

$$\mu'' = (\varrho_1' - \varrho')n + (\mu_1' - \mu')(m-1) - (4m - 2 - \sum k)\mu' - (4n - 2 - \sum \varkappa)\varrho',$$

$$\nu'' = (\nu_1' - \nu')(n-1) + (\varrho_1' - \varrho')m - (4m - 2 - \sum k)\varrho' - (4n - 2 - \sum \varkappa)\nu'.$$

Такимъ образомъ окончательно, порядокъ сопряженнаго коннекса:

$$m'' = n\{(m-1)^2(n-1)^2 + 4m(m-1)n(n-1) + m^2n^2 - \varrho'\}$$

$$+ (m-1)[2n(n-1)\{mn + (m-1)(n-1)\} - \mu']$$

$$- (4m-2)\mu' - (4n-2)\varrho' + \mu'\sum k + \varrho'\sum \varkappa =$$

$$= n\{m^2n^2 + 6m(m-1)n(n-1) + 3(n-1)^2(m-1)^2\}$$

$$- (5n-2)\varrho' - (5m-3)\mu' + \mu'\sum k + \varrho'\sum \varkappa$$

и подобнымъ образомъ, классъ его:

$$n' = m\{m^2n^2 + 6m(m-1)n(n-1) + 3(m-1)^2(n-1)^2\}$$

$$- (5m-2)\varrho' - (5n-3)\nu' + \varrho'\sum k + \nu'\sum \varkappa.$$

Итакъ: *V. Если коннексъ (1) имѣетъ* ∞^2 *собственно особенныхъ элементовъ, образующихъ пару поверхностей, которую можно разсматривать какъ полное пересѣченіе 4 коннексовъ* $(k_1, \varkappa_1)\ldots(k_4, \varkappa_4)$ *то пониженіе порядка сопряженнаго коннекса выразится:*

$$\Delta m' = (5m-3)\mu' + (5n-2)\varrho' - \mu'\sum k - \varrho'\sum \varkappa$$

и

$$\Delta n' = (5m-2)\varrho' + (5n-3)\nu' - \varrho'\sum k - \nu\sum \varkappa$$

5. Пусть коннексъ (1) имѣетъ ∞^3 собственно-особенныхъ элементовъ, образующихъ бикоинциденцію, которую можно разсматривать какъ пересѣченіе трехъ коннексовъ

$\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$ соотв. порядковъ и классовъ $(k_1, \varkappa_1)$, $(k_2, \varkappa_2)$ и $(k_3, \varkappa_3)$ такъ, что

$$f'_{x_i} = A_i\varphi + B_i\psi + C_i\chi,$$

$$f'_{u_i} = A_i'\varphi + B_i'\psi + C_i'\chi;$$

въ дальнѣйшемъ поэтому:

A_X и $A_{X'}$ суть формы $(m - k_1 - 1, n - \varkappa_1)$; $U_{A'}$ и $U'_{A'}$ — $(m - k_1, n - \varkappa_1 - 1)$

B_X и $B_{X'}$ „ „ $(m - k_2 - 1, n - \varkappa_2)$; $U_{B'}$ и $U'_{B'}$ — $(m - k_2, n - \varkappa_2 - 1)$

C_X и $C_{X'}$ „ „ $(m - k_3 - 1, n - \varkappa_3)$; $U_{C'}$ и $U'_{C'}$ — $(m - k_3, n - \varkappa_3 - 1)$

Чтобы вычислить проистекающее отсюда пониженіе порядка сопряженнаго коннекса, разсмотримъ сначала четыре коннекса

$$
(A)\qquad \begin{cases}
\sum X f'_x \equiv A_X\varphi + B_X\psi + C_X\chi = 0 & (m-1,\ n) \\
\sum X' f'_x \equiv A_{X'}.B + \varphi_{X'}.\psi + C_{X'}.\chi = 0 & (m-1,\ n) \\
\sum U f'_u \equiv U_{A'}\varphi + U_{B'}.\psi + U_{C'}\chi = 0 & (m,\ n-1) \\
\sum U' f'_u \equiv U'_{A'}\varphi + U'_{B'}.\psi + U'_{C'}\chi = 0 & (m,\ n-1)
\end{cases}
$$

Эти коннексы, кромѣ общей бикоинциденціи, имѣютъ еще общую пару поверхностей.

Порядокъ этой послѣдней опредѣлится такъ: первые три коннекса имѣютъ кромѣ ($\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$) еще дополнительную общую бикоинциденцію съ характеристиками, которыя мы изобразимъ обычной символикой (см. моя Теорія коннексовъ въ пространствѣ гл. I) въ видѣ одной формулы

$$
\begin{gathered}
[m(m-1)^2 - k_1k_2k_3]p^3 + \\
\{[(m-1)^2(n-1) + 2(m-1)mn] - [k_1k_2\varkappa_3 + k_1\varkappa_2k_3 + \varkappa_1k_2k_3]\}p_2e + \\
\{[mn^2 + 2(m-1)n(n-1)] - k_1\varkappa_2\varkappa_3 + k_2\varkappa_3\varkappa_1 + k_3\varkappa_1\varkappa_2]\}pe^2 + \\
+ [n^2(n-1) - \varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3]e^3.
\end{gathered}
$$

Двѣ эти бикоинциденціи имѣютъ общую пару поверхностей, опредѣляемую уравненіями

$$
\varphi = 0,\ \psi = 0,\ \chi = 0,\ (A_X B_{X'} U_{C'}) = 0,
$$

гдѣ послѣдній коннексъ—$(3m - 2 - \sum k,\ 3n - 1 - \sum \varkappa)$. Эта пара опредѣлится характеристическимъ выраженіемъ:

$$
\begin{gathered}
p^3e[k_1k_2k_3(3n - 1 - \sum\varkappa) + (3m - 2 - \sum k)\sum k_1k_2\varkappa_3] + \\
+ p^2e^2[(3n - 1 - \sum\varkappa)\sum k_1k_2\varkappa_3 + (3n - 2 - \sum k)\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3] + \\
+ pe^3[(3n - 1 - \sum\varkappa)\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3 + (3m - 2 - \sum k)\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3].
\end{gathered}
$$

четвертый коннексъ пересѣкаетъ вышеупомянутую бикоинциденцію по парѣ съ характеристиками

$$
\begin{gathered}
\{(m(m-1)^2 - k_1k_2k_3)(n-1) + [(m-1)^2(n-1) + 2mn(m-1) - \sum k_1k_2\varkappa_3]m\}p^3e \\
+ \{[mn^2 + 2n(n-1)(m-1) - \sum k_1\varkappa_2\varkappa_3]m + [(m-1)^2(n-1) + 2mn(m-1) - \\
- \sum k_1k_2\varkappa_3](n-1)\}p^2e^2 + \\
+ \{[mn^2 + 2n(n-1)(m-1) - \sum k_1\varkappa_2\varkappa_3](n-1) + [n^2(n-1) - \varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3]m\}pe^3,
\end{gathered}
$$

въ составъ которой входитъ указанная выше общая пара двухъ бикоинциденцій.

Взявъ разность соотвѣтствующихъ характеристическихъ чиселъ, получимъ характерическія числа для пары

$$\xi_2 e^2 = [m(m-1)^2 - k_1k_2k_3](n-1) + [(m-1)^2(n-1) + 2mn(m-1) -$$
$$-\sum k_1k_2\varkappa_3]m - (3m-1-\sum\varkappa)k_1k_2k_3 - (3m-2-\sum k)\sum k_1k_2\varkappa_3 =$$
$$= 2m(m-1)\{mn + (m-1)(n-1)\} - 2(2n-1)k_1k_2k_3 -$$
$$2(2m-1)\sum k_1k_2\varkappa_3 + k_1k_2k_3\sum\varkappa + \sum k.\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3;$$
$$\xi_2.pe = [m^2n^2 + 4m(m-1)n(n-1) + (m-1)^2(n-1)^2] -$$
$$-2(2n-1)\sum k_1k_2\varkappa_3 - 2(2m-1)\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3 + \sum\varkappa.\sum k_1k_2\varkappa_3 + \sum k.\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3;$$
$$\xi_2.p^2 = 2n(n-1)\{mn + (m-1)(n-1)\} - 2(2n-1)\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3 -$$
$$-2(2m-1)\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3 + \sum\varkappa.\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3 + \varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3\sum k.$$

Пересѣченіе этой пары съ коннексомъ

$$0 = \sum X''f'_x \equiv A_{X''}.\varphi + B_{X''}.\psi + C_{X''}\chi$$

или съ коннѐксомъ

$$0 = \sum U''f'_u \equiv U''_{A'}.\varphi + U''_{B'}.\psi + U''_{C'}.\chi$$

слагается во первыхъ изъ пересѣченія съ этою парою бикоинциденціи $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$ собственно-особенныхъ элементовъ, что̀ даетъ пару (кривая дв. кр., развертывающаяся пов.), и во вторыхъ изъ остаточной такой же пары, которая и есть собственно главное, что̀ намъ нужно.

Для первой опредѣлимъ характеристическія числа такъ. Беремъ пересѣченіе бикоинциденціи собственно-особенныхъ элементовъ $\varphi = 0, \psi = 0, \chi = 0$

съ кониціденціею $(A_X B_{X'} U_{C'}) = 0$, $(A_X B_{X'} U'_{C'}) = 0$

—пересѣченія двухъ коннексовъ $(3m - 2 - \sum k,\ 3n - 1\sum\varkappa)$.

При этомъ въ послѣднюю однако дважды входитъ и потому должна быть одинъ разъ отброшена коинциденція

$$A_X B'_X - B_X A_{X'} = 0 \quad A_X C_{X'} - C_X A_{X'} = 0$$

—ибо для ея элементовъ $\dfrac{A_X}{A_{X'}} = \dfrac{B_X}{B_{X'}} = \dfrac{C_X}{C_{X'}}$ и оба опредѣлителя 3-го порядка обращаются въ нуль; нужно однако еще добавить дважды приэтомъ отброшенную коинциденцію

$$A_X = 0,\ A_{X'} = 0$$

— пересѣченіе двухъ коннексовъ $(m - k_1 - 1,\ n - \varkappa_1)$. Характеристическая формула первой коинциденціи

$$[(3m-2-\sum k)p+(3n-1-\sum\varkappa)e]^2 \equiv p^2(3m-2-\sum k)^2+$$
$$+2(3m-2-\sum k)(3n-1-\sum\varkappa)pe+(3n-1-\sum\varkappa)^2)e^2$$

для второй (отбрасываемой):

$$(2m-1-k_1-k_2)(2m-2-k_1-k_3)p^2+$$
$$+[(2m-2-k_1-k_2)(2n-\varkappa_1-\varkappa_3)+(2m-2-k_1-k_3)(2n-\varkappa_1-\varkappa_2)]pe$$
$$+(2n-\varkappa_1-\varkappa_2)(2n-\varkappa_1-\varkappa_3)e^2,$$

для третьей — прибавляемой —

$$(m-k_1-1)^2p^2+2(m-k_1-1)(n-\varkappa_1)pe+(n-\varkappa_1)^2e^2.$$

Въ итогѣ надо искать пару пересѣченія бикоинциденціи собственно-особенныхъ элементовъ съ коинциденціей, которой характеристическія числа суть:

$$\alpha=(3m-2-\sum k)^2-(2m-2-k_1-k_2)(2m-2-k_1-k_3)+$$
$$+(m-k_1-1)^2=(6m^2-6m+1)-2(2m-1)\sum k+(\sum k)^2-\sum k_1k_2;$$
$$\beta=2(3m-2-\sum k)(3n-1-\sum\varkappa)-(2m-2-k_1-k_2)(2n-\varkappa_1-\varkappa_3)-$$
$$-(2m-2-k_1-k_3)(2n-\varkappa_1-\varkappa_2)+2(m-k_1-1)(n-\varkappa_1)=$$
$$=2(6mn-3m-3n+2)-2(2n-1)\sum k-2(2m-1)\sum\varkappa$$
$$+\sum k.\sum\varkappa+\sum k\varkappa;$$
$$\gamma=(3n-1-\sum\varkappa)^2-(2n-\varkappa_1-\varkappa_2)(2n-\varkappa_1-\varkappa_3)+(n-\varkappa_1)^2$$
$$=6n^2-6n+1-2(2n-1)\sum\varkappa+(\sum\varkappa)^2-\sum\varkappa_1\varkappa_2.$$

характеристическое выраженіе этой коинциденціи поэтому

$$\xi_1=\alpha.p^2+\beta.pe+\gamma.e^2$$

характеристическая же формула для бикоинциденціи собственно-особенныхъ элементовъ

$$p^3k_1k_2k_3+p^2e.\sum k_1k_2\varkappa_3+pe^2\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3+e^3x_1x_2\varkappa_3$$

Перемноживъ ихъ получимъ характеристическую формулу искомой пары (кривая дв. кр., разверт. пов.):

$$\xi_3=p^3e^2[\alpha\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3+\beta.\sum k_1k_2\varkappa_3+\gamma k_1k_2k_3]+$$
$$+p^2e^3[\alpha\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3+\beta\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3+\gamma.\sum k_1k_2\varkappa_3].$$

Теперь мы можемъ уже приступить къ опредѣленію порядка и класса сопряженнаго коннекса; для этого пару (A) нужно пересѣчь коннексомъ $(m-1,\ n)$: $\sum X'' f'_x = 0$ и для опредѣленія его остаточной пары отнять только что вычисленную; добавивъ сюда уравненіе $(xXX'X'') = 0$ и получимъ искомый порядокъ. Это доставитъ

$$\xi_2.[(m-1)p + n.e].p = \xi_2.p^2.(m-1) + \xi_2.pe.n =$$

$$= (m-1)[2n(n-1)\{mn+(m-1)(n-1)\} - 2(2n-1)\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3 -$$
$$-2(2m-1)\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3 + \sum\varkappa.\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3 + \varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3\sum k] + n[m^2n^2 + 4mn(m-1)(n-1) +$$
$$+(m-1)^2(n-1)^2 - 2(2n-1)\sum k_1k_2\varkappa_3 - 2(2m-1)\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3 + \sum k_1k_2\varkappa_3\sum\varkappa +$$
$$+\sum k.\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3]$$

и отсюда надо отнять только что найденное число

$$\alpha\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3 + \beta\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3 + \gamma\sum k_1k_1\varkappa_3;$$

это доставитъ

$$m' = n[m^2n^2 + 6m(m-1)n(n-1) + 3(m-1)^2(n-1)^2]$$
$$-(10m^2 - 12m + 3)\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3 - 2(10mn - 4m - 6n + 3)\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3$$
$$-(10n^2 - 8n + 1)\sum k_1k_2\varkappa_3 + (5m-3)(\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3\sum k + \sum k_1\varkappa_2\varkappa_3\sum\varkappa)$$
$$+(5n-2)(\sum k\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3 + \sum\varkappa.\sum k_1k_2\varkappa_3)$$
$$-\sum k_1k_2\varkappa_3(\sum\varkappa^2 + \sum\varkappa_1\varkappa_2) - \sum k_1\varkappa_2\varkappa_3(\sum k.\sum\varkappa + \sum k\varkappa)$$
$$-(\sum k^2 + \sum k_1k_2)\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3.$$

Сюда можно было бы ввести сокращенныя обозначенія для характеристическихъ чиселъ бикоинциденціи собственно особенныхъ элементовъ: *VI. Если*

$$\mu_1 = k_1k_2k_3,\ \varrho_1 = \sum k_1k_2\varkappa_3,\ \lambda_1 = \sum k_1\varkappa_2\varkappa_3,\ v_1 = \varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3,$$

то пониженіе порядка сопряженнаго коннекса благодаря наличности въ данномъ такой бикоинциденціи собственно-особенныхъ элементовъ, которая можетъ быть опредѣлена, какъ полное пересѣченіе трехъ коннексовъ $(k_1,\ \varkappa_1)$, $(k_2,\ \varkappa_2)$, $(k_3,\ \varkappa_3)$, *таково:*

$$-\Delta m' = (10m^2 - 12m - 3)v_1 + 2(10mn - 6n - 4m + 3)\lambda_1 +$$
$$+(10n^2 - 8n + 1)\varrho_1 - (5m-3)(v_1\sum k + \lambda_1\sum\varkappa)$$
$$-(5n-2)(\lambda_1\sum k + \varrho_1\sum\varkappa) + \varrho_1(\sum\varkappa^2 + \sum\varkappa_1\varkappa_2)$$
$$+\lambda_1(\sum k.\sum\varkappa + \sum k\varkappa) + v_1(\sum k^2 + \sum k_1k_2).$$

Для опредѣленія *класса* сопряженнаго коннекса къ уравненіямъ (A) этого параграфа присоединяемъ уравненіе $(m,\ n-1)$: $\sum U'' f'_u = 0$ и ищемъ затѣмъ тѣ элементы полученной такимъ образомъ пары (кривая дв. кр., разв. пов.), уменьшенной на выше вычисленную лишнюю пару, которыхъ плоскости выполняютъ условіе $(uUU'U'') = 0$.

Имѣемъ такимъ образомъ во-первыхъ

$$\xi_2(m.p + (n-1)e)e = \xi_2 pe.m + \xi_2 e^2(n-1)$$

и отсюда отнимаемъ

$$\alpha\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3 + \beta\sum k_1k_2\varkappa_3 + \gamma k_1k_2k_3.$$

Такимъ образомъ получимъ

$$\begin{aligned} n' = [&m^2n^2 + 4mn(m-1)(n-1) + (m-1)^2(n-1)^2 - 2(2n-1)\sum k_1k_2\varkappa_3 \\ &- 2(2m-1)\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3 + \sum\varkappa.\sum k_1k_2\varkappa_3 + \sum k\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3]m + \\ + [&2m(m-1)\{mn + (m-1)(n-1)\} - 2(2n-1)k_1k_2k_3 - 2(2m-1)\sum k_1k_2\varkappa_3 \\ &+ k_1k_2k_3\sum\varkappa + \sum k.\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3].(n-1) \\ &- \alpha\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3 - \beta\sum k_1k_2\varkappa_3 - \gamma k_1k_2k_3 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} n' = m[&m^2n^2 + 6m(m-1)n(n-1) + 3(m-1)^2(n-1)^2] \\ &- (10mn - 4n - 6m + 3)\varrho_1 - (10m^2 - 8m + 1)\lambda_1 - (10n^2 - 12n + 3)\mu_1 \\ &+ (5m-2)(\lambda_1\sum k + \varrho_1\sum\varkappa) + (5n-3)(\mu_1\sum\varkappa + \varrho_1\sum k) \\ &- \lambda_1(\sum k^2 + \sum k_1k_2) - \varrho_1(\sum k.\sum\varkappa + \sum\varkappa k) - \mu_1(\sum\varkappa^2 + \sum\varkappa_1\varkappa_2) \end{aligned}$$

Такимъ образомъ: *VII. Пониженіе класса выразится:*

$$\begin{aligned} -\Delta n' = &(10m^2 - 8m + 1)\lambda_1 + (10mn - 4n - 6m + 3)\varrho_1 + (10n^2 - 12n + 3)\mu_1 \\ &- (5m-2)(\lambda_1\sum k + \varrho_1\sum\varkappa) - (5n-3)(\mu_1\sum\varkappa + \varrho_1\sum k) \\ &+ \lambda_1(\sum k^2 + \sum k_1k_2) + \varrho_1(\sum k\sum\varkappa + \sum k\varkappa) + \mu_1(\sum\varkappa^2 + \sum\varkappa_1\varkappa_2). \end{aligned}$$

6. Пусть теперь коннексъ имѣетъ ∞^4 собственно-особенныхъ элементовъ, образующихъ коинциденцію, которую можно разсматривать какъ полное пересѣченіе двухъ коннексовъ $\varphi = 0$, $\psi = 0$ (a)
соотв. $(k, \varkappa)$, $(k', \varkappa')$. Тогда пусть

$$(i = 1, 2, 3, 4) \quad \begin{aligned} f'_{x_i} &= A_i\varphi + B_i\psi \\ f'_{u_i} &= C_i\varphi + D_i\psi \end{aligned} \qquad \text{(b)}$$

Здѣсь A_i суть $(m-1-k, n-\varkappa)$, B_i суть $(m-1-k', n-\varkappa')$, C_i суть $(m-k, n-\varkappa-1)$, D_i суть $(m-k', n-\varkappa'-1)$

Составляемъ снова сначала

$$(A_1)\begin{cases}\sum Xf'_x \equiv A_X\varphi + B_X\psi = 0 & (m-1,\ n)\\ \sum X'f'_x \equiv A_{X'}\varphi + B_{X'}\psi = 0 & (m-1,\ n)\\ \sum Uf'_u \equiv U_C\varphi + U_D\psi = 0 & (m,\ n-1)\\ \sum U'f'_u \equiv U'_C\varphi + U'_D\psi = 0 & (m,\ n-1)\end{cases}$$

Эти четыре коннекса, кромѣ коинциденціи $\varphi=0,\ \psi=0$ имѣютъ еще общую пару поверхностей. Для опредѣленія ея порядка и класса замѣтимъ, что два первые, кромѣ коинциденціи $\varphi=0,\ \psi=0$ порядка kk'_1, класса $\varkappa\varkappa'$ и ранга $k\varkappa'+k'\varkappa$, имѣютъ еще добавочную коинциденцію общую—порядка $(m-1)^2-kk'$, ранга $2(m-1)n-(k\varkappa'+k'\varkappa)$ и класса $n^2-\varkappa\varkappa'$. Съ коинциденціей $\varphi=0, \psi=0$ эта коинциденція имѣетъ общую бикоинциденцію

$$\varphi=0,\ \psi=0,\ A_XB_{X'}-A_{X'}B_X=0\ (c).$$

Послѣдній коннексъ порядка $2m-k-k'-2$, класса $2n-\varkappa-\varkappa'$, и потому характеристическое выраженіе для этой бикоинциденціи:

$$\begin{aligned}\xi_3 = {} & (2m-2-k-k')kk'p^3 + \\ & +[(2m-2-k-k')(k\varkappa'+k'\varkappa)+(2n-\varkappa-\varkappa')kk']p^2e+\\ & +[(2m-2-k-k')\varkappa\varkappa'+(2n-\varkappa-\varkappa'+(k\varkappa'+k'\varkappa)]pe^2+\\ & +(2n-\varkappa-\varkappa')\varkappa\varkappa' e^3\end{aligned}$$

Если возьмемъ еще третій коннексъ, то его пересѣченіе съ двумя первыми, кромѣ общей коинциденціи, слагается изъ бикоинциденціи, которую получимъ, какъ пересѣченіе вышеуказанной дополнительной коинциденціи и этого 3-го коннекса, безъ бикоинциденціи (c).

Итакъ характеристическое выраженіе для остаточной бикоинциденціи

$$\begin{aligned}\xi'_3 = {} & \{[(m-1)^2-kk']p^2+[2(m-1)n-(k\varkappa'+k'\varkappa)]pe+\\ & +(n^2-\varkappa\varkappa')e^2\}(mp+(n-1)e)-\xi_3.\end{aligned}$$

Произведя перемноженія, получимъ по приведеніи

$$\begin{aligned}\xi'_3 = {} & \{m(m-1)^2-(3m-2)kk'+(k+k')kk'\}p^3+\\ & +\{(m-1)[(m-1)(n-1)+2mn]-(3n-1)kk'-(3m-2)(k\varkappa'+k'\varkappa)+\\ & +(k+k')(k\varkappa'+k\varkappa')+(\varkappa+\varkappa')kk'\}p^2e+\{n[2(m-1)(n-1)+mn]-\\ & -(3n-1)(k\varkappa'+k'\varkappa)-(3m-2)\varkappa\varkappa'+(k+k')\varkappa\varkappa'+(\varkappa+\varkappa')(k\varkappa'+k'\varkappa)\}pe^2\\ & +\{n^2(n-1)-(3n-1)\varkappa\varkappa'+(\varkappa+\varkappa')\varkappa\varkappa'\}e^3 \qquad \text{(d)}\end{aligned}$$

Добавляемъ четвертый коннексъ $\sum U'f'_u=0$ порядка m и класса $n-1$. Кромѣ коинциденціи (a), онъ имѣетъ съ первыми тремя общую пару поверхностей, въ которую, какъ лишнее и подлежащее исключенію, входитъ пересѣченіе только что разсмотрѣнной остаточной бикоинцидеиціи (d) съ коинциденціей (a): эта пара поверхностей опредѣляется уравненіями

$$\varphi = 0,\ \psi = 0,\ A_X B_{X'} - A_{X'} B_X = 0,\ A_X U_D - B_X U_C = 0 \qquad \text{(e)}$$

но изъ нея надо отбросить еще пару:

$$\varphi = 0,\ \psi = 0,\ A_X = 0,\ B_X = 0 \qquad \text{(f)}$$

Такимъ образомъ эта пара опредѣляется, какъ пересѣченіе коинциденціи (a) съ характеристическимъ выраженіемъ:

$$\xi_1 = kk'.p^2 + (k\varkappa' + k'\varkappa).pe + \varkappa\varkappa'.e^2$$

и коинциденціи съ характеристическимъ выраженіемъ

$$\begin{aligned} \xi'_1 = {} & [(3m-1)(m-1) - (3m-2)(k+k') + (k^2 + kk' + k'^2)].p^2 + \\ & + [6mn - 2m - 4n + 2 - (3n-1)(k+k') - (3m-2)(\varkappa+\varkappa') + \\ & + 2(k+k')(\varkappa+\varkappa') - (k\varkappa' + k'\varkappa)]pe + [n(3n-2) - (3n-1)(\varkappa+\varkappa') + \\ & + \varkappa^2 + \varkappa\varkappa' + \varkappa'^2].e^2 \end{aligned}$$

Выраженіе характеристическое остаточной пары, о которой идетъ рѣчь, будетъ поэтому таково (пару (e)—(f] мы уже исключили):

$$\begin{aligned} \text{(g)}\ \xi_4 = {} & p^3e[2m(m-1)\{mn + (m-1)(n-1)\} - kk'(12mn - 6m - 6n + 4) - \\ & - (k\varkappa' + k'\varkappa)(6m^2 - 6m + 1) + (4n-2)kk'(k+k') + \\ & (4m-2)\{(k+k')(k\varkappa'+k'\varkappa) + kk'(\varkappa+\varkappa')\} - (k^2+k'^2)(k\varkappa'+k'\varkappa) - 2kk'(\varkappa+\varkappa')(k+k')] + \\ & p^2e^2[m^2n^2 + 4mn(m-1)(n-1) + (m-1)^2(n-1)^2 - kk'(6n^2 - 6n + 1) - \\ & - (k\varkappa' + k'\varkappa)(12mn - 6m - 6n + 4) - \varkappa\varkappa'(6m^2 - 6m + 1) + \\ & (4m-2)\{(k+k')\varkappa\varkappa' + (\varkappa+\varkappa')(k\varkappa'+k'\varkappa)\} + (4n-2)\{(k+k')(k\varkappa'+k'\varkappa) + kk'(\varkappa+\varkappa')\} \\ & - kk'(\varkappa^2 + \varkappa\varkappa' + \varkappa'^2) - 2(k\varkappa' + k'\varkappa)(k+k')(\varkappa+\varkappa') - \varkappa\varkappa'(k' + kk' + k'^2) - \\ & (k\varkappa' + k'\varkappa)^2] + pe^3[2m(n-1)\{mn + (m-1)(n-1)\} - \varkappa\varkappa'(12mn - 6m - 6n + 4) \\ & - (k\varkappa' + k'\varkappa)(6n^2 - 6n + 1) + (4m-2)(\varkappa+\varkappa')\varkappa\varkappa' + \\ & (4n\ \ 2)\{(k+k')\varkappa\varkappa' + (k\varkappa'+k'\varkappa)(\varkappa+\varkappa')\} - (k\varkappa'+k'\varkappa)(\varkappa^2+\varkappa'^2) - 2\varkappa\varkappa'(\varkappa+\varkappa')(k+k')]. \end{aligned}$$

Для опредѣленія порядка и класса сопряженнаго коннекса нужно найти пересѣченіе этой остаточной пары съ характеристическимъ выраженіемъ (g) въ первомъ случаѣ съ коннексомъ $0 = \sum X''f'_x \equiv A_{X''}.\varphi + B_{X''}.\psi$ и найти элементы, коихъ точки удовлетворяютъ условію $(xXX'X'') = 0$, а во второмъ—съ коннексомъ $0 = \sum U''f_u \equiv U''_C.\varphi + U''_D.\varphi$ и найти тѣ элементы, коихъ плоскости выполняютъ условію $(uUU'U'')=0$. Мы должны только при этомъ отъ получаемой пары (кривая дв. крив., развертыв. пов.) отбросить въ обоихъ случаяхъ такую же пару, по которой коинциденція $\varphi=0$, $\psi=0$ пересѣкается съ остаточной парой.

Послѣднее пересѣченіе мы опредѣляемъ основываясь на томъ соображеніи, что исключеніе φ и ψ изъ четырехъ уравненій (A_1) приводитъ къ шести уравненіямъ:

$$A_X B_{X'} - B_X A_{X'} = 0 \ldots (2m-k-k'-2,\ 2n-\varkappa-\varkappa')$$

$$A_X U_D - B_X U_C = 0 \ldots (2m-k-k'-1,\ 2n-\varkappa-\varkappa'-1)$$

$$A_X U'_D - B_X U'_C = 0 \ldots (2m-k-k'-1,\ 2n-\varkappa-\varkappa'-1)$$

$$A_{X'} U_D - B_{X'} U_C = 0 \ldots (2m-k-k'-1,\ 2n-\varkappa-\varkappa'-1)$$

$$A_{X'} U'_D - B_{X'} U'_C = 0 \ldots (2m-k-k'-1,\ 2n-\varkappa-\varkappa'-1)$$

$$U_C U'_D - U_D U'_C = 0 \ldots (2m-k-k,\ 2n-\varkappa-\varkappa'-1)$$

Независимыхъ между ними три. Возьмемъ 1-ое, 2-ое и 6-ое. Эти уравненія удовлетворятся при

$$A_X=0\ B_X=0,\ U_C U'_D - U'_C U_D = 0$$

и при

$$A_X B_{X'} - B_X A_{X'} = 0,\ U_C=0,\ U_D=0$$

которые не обращаютъ въ тожества остальныя три уравненія; такимъ образомъ отъ бикоинциденціи, общей коннексамъ

$$(2m-k-k'-2,\ 2n-\varkappa-\varkappa'),\ (2m-k-k'-1,\ 2n-\varkappa-\varkappa'-1),$$
$$(2m-k-k',\ 2n-\varkappa-\varkappa'-2),$$

надо отнять бикоинциденцію, общую коннексамъ

$$(m-k-1,\ n-\varkappa),\ (m-k'-1,\ n-\varkappa'),\ (2m-k-k',\ 2n-\varkappa-\varkappa'-2)$$

и бикоинциденцію, общую коннексамъ

$$(m-k,\ n-\varkappa-1),\ (m-k',\ n-\varkappa'-1),\ (2m-k-k'-2,\ 2n-\varkappa-\varkappa').$$

Такимъ путемъ получимъ для пересѣченія коинциденціи (a) съ остаточной парой характеристическое уравненіе:

$$\xi'_5 = (kk'.p^2 + (k\varkappa' + k'\varkappa)pe + \varkappa\varkappa'.e^2) \times$$
$$[\{(2m-2-k-k')p + (2n-\varkappa-\varkappa').e\} \times$$

$$\{(2m-1-\varkappa-\varkappa')p+(2n-1-\varkappa-\varkappa')e\}.\{(2m-k-k')p+(2n-2-\varkappa-\varkappa')e\}$$
$$-\{(m-1-k).p-(n-\varkappa)e\}\{(m-1-k').p+(n-\varkappa')e\}\{(2m-k-k')p+$$
$$+(2n-2-\varkappa-\varkappa')e\}-\{(m-k)p+(n-1-\varkappa)e\}\{(m-k')p+(n-1-\varkappa')e\}$$
$$\times\{(2m-2-k-k')p+(2n-\varkappa-\varkappa')e\}]=$$
$$=\{kk'.p^2+(k\varkappa'+k'\varkappa).pe+\varkappa\varkappa'.e^2\}(\mu_2'.p^3+\lambda_2'p^2e+\varrho_2'.pe^2+\nu_2'.e^3)$$

гдѣ

$$\mu_2'=2m(m-1)(2m-1)-(k+k')(6m^2-6m+1)+$$
$$+(4m-2)(k^2+kk'+k'^2)-(k+k')(k^2+k'^2),$$

$$\lambda_2'=2n(6m^2-6m+1)-6m^2+8m-2-2(k+k')(6mn-3m-3n+2)$$
$$-(\varkappa+\varkappa')(6m^2-6m+1)+\{2(k+k')(\varkappa+\varkappa')-(k\varkappa'+k'\varkappa)\}(4m-2)+$$
$$(k^2+kk'+k'^2)(4n-2)-2(k+k')(k\varkappa+k'\varkappa')-(\varkappa+\varkappa')(k^2+k'^2).$$

$$\varrho_2'=2m(6n^2-6n+1)-6n^2+8n-2-(k+k')(6n^2-6n+1)-$$
$$-2(\varkappa+\varkappa')(6mn-3m-3n+2)+[2(k+k')(\varkappa+\varkappa')-(k\varkappa'+k'\varkappa)](4n-2)+$$
$$+(\varkappa^2+\varkappa\varkappa'+\varkappa'^2)(4m-2)-2(\varkappa+\varkappa')(k\varkappa+k'\varkappa)-(k+k')(\varkappa^2+\varkappa'^2)$$

$$\nu_2'=2n(n-1)(2n-1)-(\varkappa+\varkappa')(6n^2-6n+1)+$$
$$(\varkappa^2+\varkappa\varkappa'+\varkappa'^2)(4n-2)-(\varkappa+\varkappa')(\varkappa^2+\varkappa'^2).$$

Такимъ образомъ характеристическое выраженіе для подлежащей вычитанію пары

$$\xi_5'=p^3e^2[\mu_2'\varkappa\varkappa'+\lambda_2'(k\varkappa'+k'\varkappa)+\varrho_2'kk']+p^2e^3[\lambda_2'\varkappa\varkappa'+\varrho_2'(k\varkappa'+k'\varkappa)+\nu_2'kk']$$

здѣсь

$$\mu_2'\varkappa\varkappa'+\lambda_2'(k\varkappa'+k'\varkappa)+\varrho_2'kk'=\{2m(6n^2-6n+1)-(6n^2-8n+2)\}kk'+$$
$$+(k\varkappa'+k'\varkappa)\{2n(6m^2-6m+1)-(6m^2-8m+2)\}+2m(m-1)(2m-1)\varkappa\varkappa'$$
$$-(6m^2-6m+1)[(k+k')\varkappa\varkappa'+(k\varkappa'+k'\varkappa)(\varkappa+\varkappa')]-$$
$$(6n^2-6n+1)(k+k')kk'-2(6mn-3m-3n+2)[(k+k')(k\varkappa'+k'\varkappa)+kk'(\varkappa+\varkappa')]+$$
$$+(4m-2)[3(k\varkappa'+k'\varkappa)(k\varkappa+k'\varkappa')+(k\varkappa'+k'\varkappa)^2+2kk'\varkappa\varkappa']+$$
$$+(4n-2)[(k+k')^2(k\varkappa'+k'\varkappa)+2kk'(k\varkappa+k'\varkappa')]-$$
$$-[\{(k\varkappa'+k'\varkappa)(\varkappa+\varkappa')+(k+k')\varkappa\varkappa'\}(k^2+kk'+k'^2)+3kk'(k\varkappa^2+k'\varkappa'^2)].$$

$$\lambda_2\varkappa\varkappa'+\varrho_2'(k\varkappa'+k'\varkappa)+\nu_2'kk'=[2n(6m^2-6m+1)-6m^2+8m-2]\varkappa\varkappa'$$
$$+[2m(6n^2-6n+1)-6n^2+8n-2](k\varkappa'+k'\varkappa)+2n(n-1)(2n-1)kk'$$
$$-2(6mn-3m-3n+2)\{(k+k')\varkappa\varkappa'+(\varkappa+\varkappa')(k\varkappa'+k'\varkappa)\}-$$
$$-(6n^2-6n+1)((k\varkappa'+k'\varkappa)(k+k')+kk'(\varkappa+\varkappa'))-(6m^2-6m+1)(\varkappa+\varkappa')\varkappa\varkappa'+$$

$$+(4m-2)(k\varkappa'+k'\varkappa)(\varkappa+\varkappa')^2+2\varkappa\varkappa'(k\varkappa+k'\varkappa')\}+$$
$$+(4n-2)\{3(k\varkappa'+k'\varkappa)(k\varkappa+k'\varkappa')+(k\varkappa'+k'\varkappa)^2+2kk'.\varkappa\varkappa')$$
$$-[(k\varkappa'+k'\varkappa)\{(k+k')(\varkappa+\varkappa')^2+2(k\varkappa^2+k'\varkappa'^2)\}$$
$$+\varkappa\varkappa'(\{\varkappa+\varkappa')(k+k')^2+2(k^2\varkappa+k'^2\varkappa')\}+kk'(\varkappa+\varkappa')(\varkappa'+\varkappa'^2)].$$

Пересѣченіе остаточной пары съ характеристическимъ выраженіемъ

$$(g)\ \xi_2=p^3e.\mu_2+p^2e^2\varrho_2+pe^3\nu_2$$

съ коннексомъ $(m-1,\ n)$ имѣетъ характеристическое выраженіе

$$\xi_1=p^3e^2\{\mu_2n+\varrho_2(m-1)\}+p^2e^3\{\varrho_2n+\nu_2(m-1)\}.$$

Намъ нужно знать собственно только порядокъ этой пары, т. е. вычислить нужно только:

$$\varrho_2n+\nu_2(m-1)=n[m^2n^2+4mn(m-1)(n-1)+(m-1)^2(n-1)^2]$$
$$+2(m-1)n(n-1)\{mn+(m-1)(n-1)\}-kk'.n(6n^2-6n+1)$$
$$-(k\varkappa'+k'\varkappa)\{12mn^2-6mn-6n^2+4n+6(m-1)n^2-6(m-1)n+(m-1)\}$$
$$-\varkappa\varkappa'\{(6m^2-6m+1)n+(m-1)(12mn-6m-6n+4)\}+$$
$$\{\varkappa\varkappa'(k+k')+(\varkappa+\varkappa')(k\varkappa'+k'\varkappa)\}\{(4m-2)n+(4n-2)(m-1)\}+$$
$$+(4n-2)n\{(k+k')(k\varkappa'+k'\varkappa)+kk'(\varkappa+\varkappa')\}+$$
$$+(4m-2)(m-1)\varkappa\varkappa'(\varkappa+\varkappa')-$$
$$n[kk'(\varkappa^2+\varkappa\varkappa'+\varkappa'^2)+\varkappa\varkappa'(k^2+kk'+k'^2)+2(k+k')(\varkappa+\varkappa')(k\varkappa'+k'\varkappa)-(k\varkappa'+k'\varkappa)^2]$$
$$-(m-1)\{(k\varkappa'+k'\varkappa)(\varkappa^2+\varkappa'^2)+2\varkappa\varkappa'(k+k')(\varkappa+\varkappa')\}.$$

Отнимая отсюда $\varkappa\varkappa'\lambda_2'+(k\varkappa'+k'\varkappa)\varrho_2'+kk'\nu_2'$, въ разности получимъ искомый порядокъ сопряженнаго коннекса:

$$n[m^2n^2+6mn(m-1)(n-1)+3(m-1)^2(n-1)^2]-kk'.n(10n^2-12n+3)$$
$$-(k\varkappa'+k'\varkappa)\{(m(30n^2-24n+3)-(18n^2-18n+3)\}-\varkappa\varkappa'\{3n(10m^2-18m+3)$$
$$-6(2m^2-3m+1)\}+[\varkappa\varkappa'(k+k')+(\varkappa+\varkappa')(k\varkappa'+k'\varkappa)(20mn-12n-8m+6)$$
$$+\{(k+k')(k\varkappa'+k'\varkappa)+kk'(\varkappa+\varkappa')\}(10n^2-8n+1)+$$
$$\varkappa\varkappa'(\varkappa+\varkappa')(10m^2-12m+3)-(5m-3)\{(2\varkappa\varkappa'(\varkappa+\varkappa')(k+k')+(\varkappa^2+\varkappa'^2)(k\varkappa'+k'\varkappa)\}$$
$$-(5n-2)[kk'(\varkappa^2+\varkappa\varkappa'+\varkappa'^2)+\varkappa\varkappa'(k^2+kk'+k'^2)+2(k+k')(\varkappa+\varkappa')(k\varkappa'+k'\varkappa)$$
$$-(k\varkappa'+k'\varkappa)^2]+$$
$$+[kk'(\varkappa+\varkappa')^3+3(\varkappa+\varkappa')(k+k')\{\varkappa\varkappa'(k+k')+(k\varkappa'+k'\varkappa)(\varkappa+\varkappa')\}-$$
$$-4\varkappa\varkappa'\{kk'(\varkappa+\varkappa')+(k\varkappa'+k'\varkappa)(k+k')\}-2(\varkappa+\varkappa')(k\varkappa'+k'\varkappa)^2].$$

Такимъ образомъ *VIII. Пониженіе порядка сопряженнаго коннекса благодаря существованію коинциденціи собственно-особенныхъ элементовъ, опредѣленной, какъ полное пересѣченіе двухъ коннексовъ* $(k, \varkappa)$ и $(k', \varkappa')$ *таково:*

$$
\begin{aligned}
-\Delta m' = {} & kk'n(10n^2-12n+3)+\\
& +(k\varkappa'+k'\varkappa)[m(30n^2-24n+3)-(18n^2-18n+3)]\\
& +\varkappa\varkappa'(3n(10m^2-18m+3)-6(2m^2-3m+1))-\\
& -[\varkappa\varkappa'(k+k')+(\varkappa+\varkappa')(k\varkappa'+\varkappa'k)](20mn-12n-8m+6)-\\
& -\{(k+k')(k\varkappa'+k'\varkappa)+kk'(\varkappa+\varkappa')\}(10n^2-8n+1)-\\
& -\varkappa\varkappa'(\varkappa+\varkappa')(10m^2-12m+3)+\\
& (5m-3)[2\varkappa\varkappa'\{(\varkappa+\varkappa')(k+k')-(k\varkappa'+k'\varkappa)\}+(\varkappa+\varkappa')^2(k\varkappa'+k'\varkappa)]+\\
& +(5n-2)[kk'(\varkappa+\varkappa')^2+\varkappa\varkappa'(k+k')^2-2\varkappa\varkappa'kk'+\\
& +2(k+k')(\varkappa+\varkappa')(k\varkappa'+k\varkappa')-(k\varkappa'+k'\varkappa)^2]\\
& -[kk'(\varkappa+\varkappa')^3+3(\varkappa+\varkappa')(k+k')\{\varkappa\varkappa'(k+k')+(k\varkappa'+k'\varkappa)(\varkappa+\varkappa')\}-\\
& -4\varkappa\varkappa'\{kk'(\varkappa+\varkappa')+(k\varkappa'+k'\varkappa)(k+k')\}-2(\varkappa+\varkappa')(k\varkappa'+k'\varkappa)^2].
\end{aligned}
$$

Намъ остается еще опредѣлить пониженіе *класса* сопряженнаго коннекса. Мы имѣемъ (при тѣхъ же обозначеніяхъ).

$$
\begin{aligned}
n' = {} & \mu_2(n-1)+\varrho_2 m-(\mu_2'\varkappa\varkappa'+\lambda_2(k\varkappa'+k'\varkappa)+kk'\varrho_2')\\
= {} & m[m^2n^2+6mn(m-1)(n-1)+3(m-1)^2(n-1)^2]\\
& -\varkappa\varkappa'm(10m^2-12m+3)-(k\varkappa'+k'\varkappa)[n(30m^2-24m+3)-(18m^2-18m+3)]\\
& -kk'[3m(10n^2-12n+3)-6(2n^2-3n+1)]+kk'(k+k')(10n^2-12n+3)+\\
& +[(k+k')(k\varkappa'+k'\varkappa)+kk'(\varkappa+\varkappa')](20mn-8n-12m+6)\\
& +[(k+k')\varkappa\varkappa'+(\varkappa+\varkappa')(k\varkappa'+k'\varkappa)](10m^2-8m+1)\\
& +(5m-2)[\varkappa\varkappa'(k+k')^2-4\varkappa\varkappa'kk'+kk'(\varkappa+\varkappa')^2+\\
& +2(k+k')(\varkappa+\varkappa')(k\varkappa'+k'\varkappa)-(k\varkappa'+k'\varkappa)^2]-\\
& -(5n-3)[(k+k')^2(k\varkappa'+k'\varkappa)+2kk'\{(k+k')(\varkappa+\varkappa')-(k\varkappa'+k'\varkappa\})\\
& +[(k+k')^3\varkappa\varkappa'+3(k+k')(\varkappa+\varkappa')\{((\varkappa+\varkappa')kk'+(k+k')(k\varkappa'+k'\varkappa)\}\\
& -4kk'\{(\varkappa+\varkappa')(k\varkappa'+k'\varkappa)+(k+k')\varkappa\varkappa'\}\\
& -2(k+k')(k\varkappa'+k'\varkappa)^2].
\end{aligned}
$$

Такимъ образомъ *IX. Пониженіе класса сопряженнаго коннекса благодаря наличности коинциденціи собственно-особенныхъ элементовъ, опредѣленной, какъ полное пересѣченіе двухъ коннексовъ* $(k, \varkappa)$ и $(k', \varkappa')$, *выражается формулою:*

$$
\begin{aligned}
-\Delta n' = \varkappa\varkappa' m(10m^2 - 12m + 3) + \\
+ (k\varkappa' + k'\varkappa)\{(3n(10m^2 - 8m + 1) - 3(6m^2 - 6m + 1)\} \\
+ kk'\{(3m(10n^2 - 12n + 3) - 6(2n^2 - 3n + 1)\} \\
- kk'(k + k')(10n^2 - 12n + 3) \\
- \{(k + k')(k\varkappa' + k'\varkappa) + kk'(\varkappa + \varkappa')\}(20mn - 8n - 12m + 6) \\
- \{(k + k')\varkappa\varkappa' + (\varkappa + \varkappa')(k\varkappa' + k'\varkappa)\}(10m^2 - 8m + 1) \\
+ (5m - 2)[\varkappa\varkappa'(k + k')^2 - 4kk'\varkappa\varkappa' + kk'(\varkappa + \varkappa')^2 + \\
2(k + k')(\varkappa + \varkappa')(k\varkappa' + k'\varkappa) - (k\varkappa' + k'\varkappa)^2] \\
+ (5n - 3)[(k + k')^2\varkappa\varkappa' + 2kk'\{(k + k')(\varkappa + \varkappa') - (k\varkappa' + k'\varkappa)\}] \\
- [(k + k')^3\varkappa\varkappa' + 3(k + k')(\varkappa + \varkappa')\{kk'(\varkappa + \varkappa') + (k + k')(k\varkappa' + k'\varkappa)\} \\
- 4kk'\{(\varkappa + \varkappa')(k\varkappa' + k'\varkappa) + (k + k')\varkappa\varkappa'\} \\
- 2(k + k')(k\varkappa' + k'\varkappa)^2].
\end{aligned}
$$

Въ предыдущемъ разсмотрѣны лишь простѣйшія особенности. Такъ я не останавливался на вліяніи особенныхъ основныхъ точекъ и плоскостей, а также на томъ случаѣ, когда основныя точки образуютъ кривую двоякой кривизны или плоскости основныя огибаютъ развертывающуюся поверхность.

При томъ самый пріемъ, которымъ получены всѣ результаты, обусловилъ то ограниченіе, что всѣ разсмотрѣнныя многообразія собственно-особенныхъ элементовъ—за исключеніемъ многообразія одного измѣренія (теорема II)—предполагаются опредѣленными, какъ полное пересѣченіе соотвѣтствующаго числа коннексовъ.

Равнымъ образомъ я не привожу примѣровъ, хотя не трудно было бы построить примѣры, аналогичные тѣмъ, которые даны въ предыдущей моей статьѣ (Сообщ. Хар. Мат. Общ. (2) X n⁰ 5 и 6).