Application de la méthode des fonctions fondamentales à l'étude de l'équation différentielle des verges vibrantes élastiques.

par J. D. Tamarkine.

L'étude des vibrations transversales d'une verge élastique nous ramène tout d'abord à l'intégration de l'équation différentielle

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[r(x)\frac{d^2V}{dx^2}\right] = \lambda p(x) V(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

où $r(x)$ et $p(x)$ sont les fonctions données dans l'intervalle (a, b) correspondant à la longueur totale de la verge considérée; λ est un paramètre indépendant. La fonction $V(x)$ doit encore remplire certaines conditions aux limites dont la forme est distincte selon que la verge sera *encastrée* ou seulement *appuyée* dans a et b.

Cette étude conduit ensuite au problème de développement d'une fonction donnée $f(x)$ suivant les intégrales particulières de l'équation (α). Les pages qui vont suivre seront consacrées à l'etude de ces deux questions.

Au lieu de l'équation (α) nous allons étudier l'équation plus générale

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[r(x)\frac{d^2V}{dx^2}\right] = [\lambda p(x) - q(x)]\, V(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

$q(x)$ étant de même une fonction donnée de x.

§ 1. Considérons d'abord un problème auxiliaire:

Déterminer la fonction $W(x)$ *finie et continue avec ses dérivées de quatre premiers ordres satisfaisant à l'équation différentielle*

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[r(x)\frac{d^2W}{dx^2}\right] = [\lambda p(x) - q(x)]\, W(x) + f(x) \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

jointe aux conditions aux limites

$$W(a) = W(b) = W'(a) = W'(b) = 0 \text{ [1]};\ldots\ldots\ldots \text{(Ia)}$$

dans cette équation $r(x)$ *est une fonction continue avec ses dérivées de deux premiers ordres dans* (a, b) *satisfaisant à la condition*

$$r(x) > r_0 > 0 \quad dans \quad (a, b) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Ib)}$$

r_0 *étant une constante positive;*

$q(x)$ *est une fonction continue satisfaisant à la condition*

$$q(x) \geq 0 \quad dans \quad (a, b) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Ic)}$$

$p(x)$ *et* $f(x)$ *sont les fonctions continues données dans* (a, b).

Enfin λ *est un paramètre indépendant.*

Dans tout ce qui va suivre nous écrirons simplement

$$\Omega(\varphi)$$

au lieu de l'expression

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[r(x)\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right].$$

Appliquons la méthode de la „variation des constantes“ à l'équation linéaire (I). En désignant par

$$v_1(x), \quad v_2(x), \quad v_3(x), \quad v_4(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1)}$$

les quatres intégrales particulières distinctes de l'équation

$$\Omega(v) = (\lambda p - q)\, v, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1a)}$$

[1]) Ces conditions correspondent au cas, où la verge est *encastrée* dans (a, b). On désigne par $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$, $F'''(x)$, $F^{IV}(x)$ les dérivées de quatre premiers ordres d'une fonction arbitraire $F(x)$.

l'intégrale générale de l'équation (I) sera:

$$W(x) = \sum_{k=1}^{4} C_k v_k(x) + \sum_{k=1}^{4} v_k(x) \int_a^x \frac{f X_k}{D} dx\,, \quad \ldots\ldots\ldots(2)$$

où l'on a:

$$D = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1' & v_2' & v_3' & v_4' \\ v_1'' & v_2'' & v_3'' & v_4'' \\ v_1''' & v_2''' & v_3''' & v_4''' \end{vmatrix}$$

les X_k étant les mineurs de ce déterminant relatifs à la dernière ligne. On sait bien que la fonction D ne dépend pas de λ [1]). Pour obtenir la solution du problème proposé on doit encore satisfaire aux conditions (Ia):

$$\left.\begin{aligned} W(a) &= \sum_{k=1}^{4} C_k v_k(a) = 0 \\ W(b) &= \sum_{k=1}^{4} C_k v_k(b) + m(b) = 0 \\ W'(a) &= \sum_{k=1}^{4} C_k v_k'(a) = 0 \\ W'(b) &= \sum_{k=1}^{4} C_k v_k'(b) + m'(b) = 0\,, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots(2a)$$

$m(x)$ désignant l'expression

$$\sum_{k=1}^{4} v_k(x) \int_a^x \frac{f X_k}{D} dx.$$

Il faut remarquer que les fonctions (1) sont des fonctions entières du paramètre λ (ce qu'on peut démontrer immédiatement). Il en sera de même de la fonction $m(x)$ et du déterminant $\omega(\lambda)$ du système des équations (2a) rélatif aux constantes C_k. Le système (2a) peut être résolu par rapport aux C_k, pourvu que $\omega(\lambda)$ soit différent de zéro; chacune de ces constantes sera représentée par une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des fonctions entières de λ.

Nous aurons, par conséquent,

$$W(x) = \frac{U(x, \lambda)}{\omega(\lambda)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$U(x, \lambda)$ et $\omega(\lambda)$ étant des fonction entières de λ.

---

[1]) Voir p. ex. *Goursat,* «Cours d'Analyse», t. II pag. 413—418.

Le second membre de la formule (3) cesse d'avoir un sens pour $\lambda = \lambda_0$, où λ_0 est une racine de l'équation

$$\omega(\lambda) = 0.$$

Le point $\lambda = \lambda_0$ représente une singularité de la fonction $W(x)$. Il est évident que toutes les singularités possibles de la fonction $W(x)$, considérée comme fonction de λ, sont des pôles. Nous verrons plus tard que $W(x)$ ne peut être holomorphe dans tout le plan de la variable complexe λ que lorsque $f(x)$ est nulle identiquement dans (a, b) [on aura alors $W(x) \equiv 0$ dans (a, b)]; — par conséquent $W(x)$ aura des pôles effectifs toutes les fois quand $f(x)$ n'est pas nulle identiquement dans (a, b).

Nous démontrerons maintenant qne tous les *pôles possibles de la fonction $W(x)$ sont toujours simples et réels.*

Soit

$$\lambda = \lambda_0$$

un de ces pôles, d'ordre $m\,(m > 1)$. On peut écrire:

$$W(x) = \frac{u_m(x)}{(\lambda - \lambda_0)^m} + \frac{u_{m-1}(x)}{(\lambda - \lambda_0)^{m-1}} + \ldots + \frac{u_1(x)}{(\lambda - \lambda_0)} + u(x, \lambda) \,..\, (3a)$$

la fonction $u(x, \lambda)$ étant holomorphe pour $\lambda - \lambda_0$. Substituons cette expression au lieu de $W(x)$ dans les équations (I) et (Ia); on trouve, après un calcul simple,

$$\left.\begin{array}{ll} \Omega(u_m) = (\lambda_0 p - q)\, u_m & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \Omega(u_{m-s}) = (\lambda_0 p - q)\, u_{m-s} + p u_{m-s+1} & (s = 1, 2 \ldots, m-1) \\ u_{m-s}(a) = u_{m-s}(b) = u_{m-s}(a) = u_{m-s}(b) = 0 & (s = 0, 1\ 2, \ldots, m-1) \end{array}\right\} \ldots (3b)$$

Les deux premières des équations (3b) nous donnent:

$$\int_a^b p u_m^2\, dx = \int_a^b \left[u_{m-1}\, \Omega(u_m) - u_m\, \Omega(u_{m-1}) \right] dx = 0.$$

D'une manière analogue on trouve

$$\lambda_0 \int_a^b p u_m^2 dx = \int_a^b u_m\, \Omega(u_m)\, dx + \int_a^b q u_m^2 dx = \int_a^b r\,(u_m'')^2 dx + \int_a^b q u_m^2 dx.$$

Pour que ces deux égalités soient compatibles, il faut et il suffit que la fonction $u_m(x)$ soit nulle identiquement dans (a, b).

Nous démontrerons de même que

$$u_{m-s}(x) \equiv 0 \quad \text{dans } (a\,,\, b) \qquad (s=1,\, 2,\, \ldots\, m-2),$$

c'est à dire que le pôle λ_0 de la fonction $W(x)$ ne peut être qu'un pôle simple, s'il existe en général. *Il est évident aussi que tous les pôles possibles de la fonction $W(x)$ sont distincts de zéro.*

Montrons maintenant que le *pôle λ_0 est réel.* Désignons par $U_0(x)$ le résidu correspondant de $W(x)$; c'est une fonction non nulle identiquement dans (a, b), si λ_0 est un pôle effectif de $W(x)$. On trouve sans peine

$$\left.\begin{array}{r} \Omega(U_0) = (\lambda_0 p - q)\, U_0 \\ U_0(a) = U_0(b) = U_0'(a) = U_0'(b) = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Soit λ_0 un nombre complexe

$$\lambda_0 = \lambda_0' + i\,\lambda_0''$$

et

$$U_0(x) = U_{01}(x) + i\, U_{02}(x).$$

On déduit de (4)

$$\begin{gathered} \Omega(U_{01}) = \lambda_0' p U_{01} - \lambda_0'' p U_{02} - q U_{01} \\ \Omega(U_{02}) = \lambda_0'' p U_{01} + \lambda_0' p U_{02} - q U_{02} \\ U_{01}(a) = U_{01}(b) = U'_{01}(a) = U'_{01}(b) = U_{02}(a) = U_{02}(b) = \\ = U'_{02}(a) = U'_{02}(b) = 0. \end{gathered}$$

De ces équations on tire

$$\lambda''_0 \int_a^b p\,(U_{01}^2 + U_{02}^2)\, dx = 0$$

$$\lambda_0' \int_a^b p\,(U_{01}^2 + U_{02}^2)\, dx = \int_a^b q\,(U_{01}^2 - U_{02}^2)\, dx + \int_a^b r\,[(U''_{01})^2 + (U''_{02})^2]\, dx$$

ce qui exige que l'on ait

$$\lambda_0'' = 0,$$

car $U_0(x)$ est différent de zéro, d'après l'hypothèse faite.

§ 2. Nous allons démontrer maintenant la proposition fondamentale que *la fonction $W(x)$ ne peut être holomorphe pour toute valeur de λ, x étant quelconque dans (a, b), que lorsque $f(x)$ est identiquement nulle dans (a, b).*

En appliquant la méthode classique des approximations successives, nous nous proposons de développer $W(x)$ suivant les puissances croissantes de λ:

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n w_n(x). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

On trouve

$$\Omega(w_0) = -qw_0 + f$$

$$\Omega(w_s) = -qw_s + pw_{s-1} \quad (s=1, 2\ldots) \quad \ldots\ldots (5a)$$

$$w_s(a) = w_s(b) = w_s'(a) = w_s'(b) = 0 \quad (s=0, 1, 2\ldots)$$

On doit remarquer d'abord que la somme de la série (5) vérifie en effet les équations (I) et (Ia) et présente la solution du problème proposé toutes les fois, quand elle converge uniformément dans (a, b). Pour nous en assurer, admettons la convergence uniforme de la série (5) pour une valeur de λ. En désignant pour un moment par $W(x)$ sa somme, la fonction $W(x)$ sera une fonction de x continue dans (a, b); nous pouvons donc déterminer une fonction $w(x)$ satisfaisant à l'équation

$$\Omega(w) = -qw + f(x) + \lambda p W(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5b)$$

avec les conditions aux limites:

$$w(a) = w(b) = w'(a) = w'(b) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5c)$$

On peut calculer cette fonction $w(x)$ [qui sera unique] à l'aide de la méthode de la „variation des constantes". Désignons par

$$y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x),\ y_4(x)$$

les quatre intégrales distinctes de l'équation différentielle

$$\Omega(y) = -q \cdot y.$$

L'intégrale générale de (5b) sera

$$w(x) = \sum_{k=1}^{4} C_k y_k(x) + n(x),$$

où

$$n(x) = \sum_{k=1}^{4} y_k(x) \int_a^x \frac{(f + \lambda p W)\, Y_k}{\Delta}\, dx,$$

$\varDelta$ désignant le déterminant

$$\varDelta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_1' & y_2' & y_3' & y_4' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & y_4'' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' & y_4''' \end{vmatrix}$$

et Y_k ses mineurs relatifs à la dernière ligne. Il ne nous reste qu'à satisfaire aux conditions

$$w(a) = \sum_{k=1}^{4} C_k y_k(a) = 0$$
$$w(b) = \sum_{k=1}^{4} C_k y_k(b) + n(b) = 0 ,$$
$$w'(a) = \sum_{k=1}^{4} C_k y'_k(a) = 0 ,$$
$$w'(b) = \sum_{k=1}^{4} C_k y'_k(b) + n'(b) = 0 .$$

Cela est toujours possible, si nous choisissons les intégrales y_k d'une manière convenable. D'une manière tout à fait analogue on calculera successivement les fonctions $w_s(x)$ définies par les équations (5a). Substituons maintenant dans l'expression trouvée ci-dessus de $w(x)$ la série (5) au lieu de $W(x)$ et intégrons membre par membre; en comparant le résultat ainsi obtenu avec les expressions analogues pour $w_s(x)$, on s'assure, après quelques calculs simples, que la fonction $w(x)$ est identique à la fonction $W(x)$. Nous aurons alors:

$$\Omega(W) = (\lambda p - q)\, W + f$$
$$W(a) = W(b) = W'(a) = W'(b) = 0$$

c. q. f. d.

Tout est ramené ainsi à l'étude de la convergence uniforme de la série (5). Nous avons déja vu que les pôles possibles de la fonction $W(x)$ sont distincts de zéro. Cela nous affirme l'existence d'un nombre $\lambda' > 0$ tel que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n w_n(x)$$

soit convergent et représente la fonction $W(x)$ pour toute valeur de x dans (a, b), pourvu qu'on ait

$$|\lambda| < \lambda' .$$

On peut démontrer sans peine que cette série est *uniformément convergente*, pourvu que $|\lambda| < \lambda'$. Désignons maintenant par λ_1 la plus grande de valeurs de $|\lambda|$, pour lesquelles la série (5) est uniformément convergente dans (a, b) [plus exactement: λ_1 est la limite supérieure précise de dites valeurs]. Il est évident que

$$\lambda_1 \geq \lambda' > 0.$$

Nous dirons que λ_1 est le «rayon de convergene uniforme» de la série (5). Il est clair que λ_1 sera en même temps le rayon de convergence uniforme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n w_n(x)$$

et, par suite, λ_1 ne peut pas surpasser le rayon de convergence uniforme de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{2n-1} w_{2n-1}(x).$$

Multiplions celle-ci par $p(x)\, w_0(x)$ et intégrons membre par membre entre a et b. Il en résultera la série

$$\sum_{n-1}^{\infty} \lambda^{2n-1} W_n, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

W_n désignant l'intégrale

$$W_n = \int_a^b p w_0 w_{2n-1}\, dx \qquad (n = 1, 2 \ldots)$$

Le rayon de convergence λ'' de cette série ne peut pas surpasser λ_1. Calculons λ''. Intégrons pour cela W_n par parties en tenant compte des équations (5a); on trouve

$$W_n = \int_a^b p w_0 w_{2n-1}\, dx = \int_a^b p w_1 w_{2n-2}\, dx = \ldots =$$
$$= \int_a^b p w_{n-1} w_n dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6a)$$

et de même:

$$W_n = \int_a^b p w_{n-1} w_n dx = \int_a^b w_n [\Omega(w_n) + q w_n]\, dx =$$
$$= \int_a^b r (w_n'')^2\, dx + \int_a^b q w_n^2\, dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6b)$$

d'où il suit

$$W_n > 0.$$

On a enfin

$$W_n = \int_a^b p w_{n-2}\, w_{n+1}\, dx = \int_a^b w_{n+1} [\Omega(u_{n-1}) + q w_{n-1}]\, dx =$$

$$= \int_a^b r w''_{n-1}\, w''_{n+1}\, dx + \int_a^b q w_{n-1}\, w_{n+1} dx.$$

Moyenant les inégalités connues de *Schwarz* [plus exactement celles de *Bouniakowsky* [1])] on trouve sans peine

$$W_n^2 < W_{n-1}\, W_{n+1}$$

et

$$\frac{W_1}{W_2} > \frac{W_2}{W_3} > \ldots > \frac{W_{n-1}}{W_u} > \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots(6c)$$

Les inégalités (6c) nous affirment l'existence de la limite

$$\lim_{n=\infty} \sqrt{\frac{W_{n-1}}{W_n}} \geq 0\,.$$

Or cette limite, quand elle existe, est égale exactement au rayon de convergence de la série (6), donc

$$\lim_{n=\infty} \sqrt{\frac{W_{n-1}}{W_n}} = \lambda'' > 0\,.$$

Nous avons enfin

$$\lambda_1 \leq \lambda'' < \frac{W_1}{W_2}.$$

Le rapport $\frac{W_1}{W_2}$ a une valeur déterminée et finie quand $f(x)$ n'est pas nulle identiquement dans $(a\,,\,b)$; donc le rayon de convergence uniforme de la série (5) est fini. On en conclut immédiatement que la fonction $W(x)$ ne peut pas être holomorphe dans tout le plan de la variable complexe λ, si $f(x)$ n'est pas nulle identiquement dans $(a\,,\,b)$. L'existence des pôles de la fonction $W(x)$ est ainsi établie. Ces pôles sont tous simples et réels, et le plus petit entre eux est égal à $\pm\,\lambda_1$.

---

[1]) Voir *Bouniakowsky*, «Sur quelques inégalités concern. les intégr. ordinaires etc.» Mémoires de l'Acad. de S.-Pétersbourg, Sér. VII, t. 1. (1853).

§ 3. Désignons par

$$\lambda_1\,,\ \lambda_2\,,\ldots\lambda_s\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

les pôles consécutifs de la fonction $W(x)$, rangés par l'ordre croissant de grandeur de leurs modules. Soient

$$U_1(x)\,,\quad U_2(x)\,,\ldots,\ U_3(x)\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(7a)$$

les résidus correspondants de $W(x)$. On trouve sans peine

$$\begin{gathered}\Omega(U_s)=(\lambda_s p-q)\,U_s\\ U_s(a)=U_s(b)=U_s'(a)=U_s'(b)=0\,.\end{gathered} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(7b)$$

Ces formules nous donnent d'un côté:

$$\int_a^b pU_sU_{s_1}dx=0\,,\qquad \text{si } s\neq s_1, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(7c)$$

et de l'autre:

$$\begin{aligned}\lambda_s\int_a^b pU_s^2\,dx&=\int_a^b \Omega(U_s)\,U_s\,dx+\int_a^b qU_s^2\,dx=\\ &=\int_a^b r\,(U_s'')^2\,dx+\int_a^b qU_s^2\,dx.\end{aligned} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(7d)$$

La fonction $U_s(x)$ étant différente de zéro dans $(a,\ b)$, nous pouvons conclure de cela que l'intégrale

$$\int_a^b pU_s^2\,dx\,,$$

est toujours différente de zéro et qu'elle a le même signe que λ_s. Nous pouvons donc toujours construire les fonctions $V_s(x)$ ne différant de $U_s(x)$ que par des facteurs constants, et vérifiant non seulement les équations de la forme (7b), (7c), mais encore l'équation

$$\int_a^b pV_s^2\,dx=\pm 1\,,$$

où le signe $\pm$ est pris selon que λ_s soit positif ou négatif.

La formule (7d) nous donne alors

$$\int_a^b r\,(V_s'')^2\,dx+\int_a^b qV_s^2\,dx=|\,\lambda_s\,|$$

ce qui nous permet d'établir une propriété remarquable des fonctions $V_s(x)$. En effet, la formule précédente nous montre que

$$\int_a^b (V_s'')^2\,dx < \frac{|\lambda_s|}{r_0}.$$

On peut donc écrire

$$\Big[V_s(x)\Big]^2 = \Big[\int_a^x V_s' dx\Big]^2 < (b-a)\int_a^b (V_s')^2\,dx\,,$$

$$\int_a^b (V_s')^2\,dx = -\int_a^b V_s V_s''\,dx < \sqrt{\int_a^b V_s^2 dx \int_a^b (V_s'')^2 dx}.$$

Par conséquent, on a

$$\Big[V_s(x)\Big]^2 < \frac{b-a}{\sqrt{r_0}}\sqrt{|\lambda_s|}\sqrt{\int_a^b V_s^2 dx}.$$

Intégrons les deux membres de cette inégalité entre a et b et divisons ensuite par

$$\sqrt{\int_a^b V_s^2 dx}.$$

On trouve

$$\sqrt{\int_a^b V_s^2\,dx} < \frac{(b-a)^2}{\sqrt{r_0}}\sqrt{|\lambda_s|}$$

ce qui nous donne enfin

$$|V_s(x)| < N\sqrt{|\lambda_s|} \qquad \text{dans } (a,\, b),$$

où N est une constante ne dépendant que de la forme de la fonction $r(x)$.

À chaque fonction donnée $f(x)$ on peut faire correspondre un ensemble déterminé de „fonctions fondamentales“ $V_s(x)$ et de „nombres caractéristiques“ correspondants λ_s. Nous allons démontrer qu'il existe une *infinité* de fonctions fondamentales linéairement distinctes et de nombres caractéristiques. Supposons pour cela que le nombre de fonctions $V_s(x)$ linéairement distinctes correspondant à une fonction donnée $f(x)$ soit fini et égale à m. On pourra toujours construire une fonction $\varphi(x)$, non nulle identiquement dans $(a,\, b)$, vérifiant les conditions

$$\int_a^b \varphi V_s dx = 0 \qquad (s=1,\, 2\ldots m) \qquad \ldots\ldots (8)$$

Désignons par W_1 la fonction analogue à $W(x)$ vérifiant les équations

$$\Omega(W_1) = (\lambda p - q) W_1 + \varphi$$
$$W_1(a) = W_1(b) = W_1'(a) = W_1'(b) = 0. \quad \ldots\ldots\ldots (8a)$$

La fonction $W_1(x)$ est une fonction méromorphe de λ, parce que $\varphi(x)$ n'est pas nulle identiquement dans (a, b). Soit μ_0 un de ses pôles effectifs et $U_0(x)$ le résidu correspondant. C'est une fonction non-nulle identiquement dans (a, b), et l'intégrale

$$\int_a^b p\, U_0^2\, dx\,,$$

est différent de zéro, ce qu'on peut démontrer par des considérations identiques à celles des pages précédentes. On a en outre

$$\Omega(U_0) = (\mu_0 p - q)\, U_0$$
$$U_0(a) = U_0(b) = U_0'(a) = U_0'(b) = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8b)$$

Les équations (8b) et (8a) nous montrent:

$$\int_a^b \varphi U_0 dx + (\lambda - \mu_0) \int_a^b p U_0 W_1\, dx = 0\,.$$

Or en voisinage du point $\lambda = \mu_0$ on peut poser

$$W_1 = \frac{U_0}{\lambda - \mu_0} + u(x, \lambda)$$

$u(x, \lambda)$ étant une fonction holomorphe de λ pour $\lambda = \mu_0$. Substituons cette expression au lieu de $W_1(x)$ dans la formule précédente et passons à la limite pour $\lambda = \mu_0$; on trouve sans peine

$$\int_a^b \varphi U_0 dx + \int_a^b p U_0^2\, dx = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8c)$$

Supposons maintenant qu'on peut présenter la fonction $U_0(x)$ comme une combinaison linéaire des fonctions $V_s(x)$. On peut écrire alors

$$U_0(x) = \sum_{s=1}^{m} a_s V_s(x)\,,$$

a_s étant des constantes. Les formules (8c) et (8) nous donnent

$$\int_a^b p U_0^2 dx = 0,$$

ce qui est absurde, d'après les considérations précédentes.

Nous pouvons donc toujours obtenir une fonction fondamentale $V_0(x)$, qui sera linéairement distincte de $V_s(x)$ $(s=1,\dots m)$, en multipliant $U_0(x)$ par un facteur constant convenablement choisi. On peut déduire de cela l'existence d'une infinité de fonctions fondamentales linéairement distinctes.

Construisons maintenant toutes les fonctions fondamentales possibles correspondant aux diverses fonctions $f(x)$. Nous les désignerons par

$$\dots V_{-s}(x), \dots V_{-1}(x), \ V_1(x), \ V_2(x) \dots, \ V_s(x) \dots.$$

Les fonctions fondamentales

$$V_{-1}(x), \quad V_{-2}(x), \dots \ V_{-s}(x) \dots$$

correspondent ici aux nombres caractéristiques

$$\lambda_{-1}, \quad \lambda_{-2}, \dots \ \lambda_{-s}, \dots$$

négatifs, rangés par l'ordre croissant de leurs modules, de même les fonctions fondamentales

$$V_1(x), \quad V_2(x), \dots \ V_s(x), \dots.$$

correspondent aux nombres caractéristiques

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \dots \ \lambda_s, \dots$$

rangés de la manière analogue.

Nous allons établir l'inégalité importante

$$|\lambda_{\pm s}| < A s^4$$

A étant une constante positive ne dépendant pas de s. Il nous faudra démontrer d'abord deux lemmes préliminaires,

Lemme 1. *Si une fonction continue $\omega(x)$ a les dérivées intégrables de deux prémiers ordres dans (a, b) et en outre satisfait aux conditions*

$$\omega(a) = \omega(b); \quad \int_a^b \omega(x)\, dx = 0, \quad \dots\dots\dots\dots (9)$$

on aura toujours

$$\frac{\int_a^b (\omega'')^2\, dx}{\int_a^b \omega^2\, dx} \geq \frac{\pi^4}{(b-a)^4} \quad \dots\dots\dots\dots\dots (9a)$$

M. *W. Stekloff* a montré dans son mémoire important [1]), qu'on a

$$\frac{\int_a^b (\Theta')^2\,dx}{\int_a^b \Theta^2\,dx} \geq \frac{\pi^2}{(b-a)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

pour chaque fonction $\Theta(x)$ ayant la dérivée première intégrable dans (a, b), si elle vérifie en outre la condition

$$\int_a^b \Theta(x)\,dx = 0.$$

Cette condition est satisfaite par les deux fonctions $\omega(x)$ et $\omega'(x)$. En les substituant au lieu de $\Theta(x)$ dans (10), on déduit:

$$\frac{\int_a^b (\omega')^2\,dx}{\int_a^b \omega^2\,dx} \geq \frac{\pi^2}{(b-a)^2},$$

$$\frac{\int_a^b (\omega'')^2\,dx}{\int_a^b (\omega')^2\,dx} \geq \frac{\pi^2}{(b-a)^2}.$$

En multipliant membre par membre ces deux formules, on trouve (9a), c. q. f. d.

Lemme 2. *Si les fonctions données*

$$\varphi_1(x), \ldots \varphi_{2m+3}(x)$$

non-nulles identiquement dans (a, b) *ont les dérivées intégrables de deux premiers ordres dans* (a, b), *on peut toujours choisir les constantes*

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2m+3}$$

dans l'expression

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{2m+3} \alpha_k \varphi_k(x)$$

---

[1]) Voir: «Problème de refroidissement d'une barre hétérogène». Ann. de la fac. des sciences de Toulouse, 1901, pag. 295—296.

de la manière qu'on ait

$$\frac{\int_a^b (\varphi'')^2\,dx}{\int_a^b \varphi^2\,dx} > Lm^4$$

L étant une constante ne dépendante pas de m et de la forme de $\varphi_k(x)$.

Divisons l'intervalle $(a,\ b)$ en $(m+1)$ parties

$$(a,\ a_1),\quad (a_1,\ a_2),\ldots(a_{m-1},\ a_m),\quad (a_m,\ b),\quad \ldots\ldots..(11)$$

dont chacune a la longueur totale moindre que $\frac{b-a}{m}$.

Déterminons ensuite les constantes

$$\alpha_1,\quad \alpha_2,\ldots\ \alpha_{2m+3}$$

[ou, plus exactement, leurs rapports] de la manière suivante:

$$\int_a^{a_1} \varphi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{2m+3} \alpha_k \int_a^{a_1} \varphi_k(x)\,dx = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int_{a_m}^{b} \varphi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{2m+1} \alpha_k \int_{a_m}^{b} \varphi_k(x)\,dx = 0,$$

$$\varphi(a_1) - \varphi(a) = \sum_{k=1}^{2m+3} \alpha_k[\varphi_k(a_1) - \varphi_k(a)] = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi(b) - \varphi(a_m) = \sum_{k=1}^{2m+3} \alpha_k[\varphi_k(b) - \varphi_k(a_m)] = 0,$$

ce qui sera toujours possible. Posons pour la symétrie

$$a_0 = a;\quad a_{m+1} = b.$$

Le lemme 1. nous apprend que

$$\frac{\int_{a_s}^{a_{s+1}} (\varphi'')\,dx^2}{\int_{a_s}^{a_{s+1}} \varphi^2\,dx} \geq \frac{\pi^4}{(a_{s+1} - a_s)^4} \qquad (s = 0,\ 1,\ 2,\ldots m),$$

par ce que la fonction $\varphi(x)$ satisfait aux conditions du lemme 1, quand les α_k sont choisies de la manière indiquée. Or on a, d'après la supposition faite,

$$a_{s+1} - a_s < \frac{b-a}{m} \qquad (s=0,\ 1, \ldots m),$$

donc on aura

$$\frac{\int_{a_s}^{a_{s+1}} (\varphi'')^2\, dx}{\int_{a_s}^{a_{s+1}} \varphi^2\, dx} \geq \frac{\pi^4 . m^4}{(b-a)^4}.$$

D'un autre côté

$$\frac{\int_a^b (\varphi'')^2\, dx}{\int_a^b \varphi^2\, dx} = \frac{\sum_{s=0}^{m} \int_{a_s}^{a_{s+1}} (\varphi'')^2\, dx}{\sum_{s=0}^{m} \int_{a_s}^{a_{s+1}} \varphi^2\, dx},$$

ce qui nous montre immédiatement que

$$\frac{\int_a^b (\varphi'')^2\, dx}{\int_a^b \varphi^2\, dx} > \frac{\pi^4 . m^4}{(b-a)^4} = Lm^4.$$

c. q. f. d.

Revenons maintenant aux nombres λ_s. Posons:

$$V(x) = \sum_{k=1}^{2s+3} \alpha_k V_k(x),$$

$$I = \int_a^b V^2\, dx; \quad I' = \int_a^b r\, (V'')^2\, dx.$$

Choisissons les α_k de la manière qu'on ait

$$\frac{I'}{I} > \frac{1}{r_0} \cdot \frac{\int_a^b (V'')^2\, dx}{\int_a^b V^2\, dx} > \frac{L}{r_0} s^4,$$

ce qui est possible en vertu du lemme 2. Nous aurons

$$I' = \sum_{k=1}^{2s+3} \alpha_k^2 \int_a^b r\, (V_k'')^2\, dx + 2 \sum_{k,\, j} \alpha_k \alpha_j \int_a^b r V_k'' V_j''\, dx =$$
$$= \sum_{k=1}^{2s+3} \lambda_k \alpha_k^2 - \int_a^b q \left[\sum_{k=1}^{2s+3} \alpha_k V_k \right]^2 dx < \sum_{k=1}^{2s+3} \lambda_k \alpha_k^2.$$

On trouve de même

$$I > \frac{1}{P}\int_a^b V^2 dx = \frac{1}{P}\sum_{k=1}^{2s+3} \alpha_k{}^2$$

P désignant max $|p|$ dans (a, b). On a donc, en remarquant que λ_k sont rangés par l'ordre croissant de leurs grandeurs,

$$\frac{I'}{I} < P\frac{\sum\limits_{k=1}^{2s+3} \lambda_k \alpha_k^2}{\sum\limits_{k=1}^{2s+3} \alpha_k{}^2} \leq \lambda_{2s+3}\,.$$

Par un calcul simple on déduit ensuite

$$\lambda_s > A s^4,$$

A étant une constante positive ne dépendante pas de s, c. q. f. d. Les mêmes conclusions subsistent aussi dans le cas de s négatif. Les considérations précedentes nous affirment cette proposition fondamentale:

Théorème 1. *Tout intervalle* (a, b) *donne lieu à une infinité de nombres caractéristiques négatifs et positifs*

$$\lambda_{-s}, \ldots \lambda_{-2}, \lambda_{-1}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots(\mathrm{II})$$

[*rangés par l'ordre indiqué sur la page 28*] *et de fonctions fondamentales correspondantes*

$$V_{-s}(x), \ldots V_{-2}(x),\ V_{-1}(x),\ V_1(x),\ V_2(x), \ldots V_s(x) \qquad \ldots(\mathrm{IIa})$$

vérifiant les équations différentielles

$$\Omega(V_s) = [\lambda_s p(x) - q(x)]\, V_s(x) \qquad (s = \pm 1, \pm 2, \ldots) \quad ..(\mathrm{IIb})$$

jointes aux conditions aux limites

$$V_s(a) = V_s(b) = V'_s(a) = V'_s(b) = 0. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{IIc})$$

Chacune des fonctions $V_s(x)$ *sera bien déterminée, si nous ajoutons encore la condition suivante*

$$\int_a^b p V_s^2\, dx = \pm 1,$$

le signe $\pm$ *étant pris selon que* λ_s *soit positif ou négatif. Les fonctions* $V_s(x)$ *satisfont en outre aux conditions*

$$\int_a^b p V_s V_{s_1} dx = 0 \quad si \quad s \neq s_1 ,$$

$$| V_s(x) | < N \sqrt{|\lambda_s|} \quad (s = \pm 1, \pm 2, \ldots), \quad \ldots\ldots\ldots(\mathrm{IId})$$

N étant une constante positive ne dépendante pas de s; les nombres λ satisfont aux inégalités

$$|\lambda_s| < A s^4 \quad (s = \pm 1, \pm 2, \ldots). \quad \ldots\ldots\ldots(\mathrm{IIg})$$

La solution de l'équation différentielle

$$\Omega(W) = [\lambda p(x) - q(x)] W(x) + f(x), \quad \ldots\ldots\ldots(\mathrm{I})$$

jointe aux conditions

$$W(a) = W(b) = W'(a) = W'(b) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(\mathrm{Ia})$$

$f(x)$ étant une fonction continue dans (a, b),— est une fonction méromorphe de λ dont tous les pôles font partie de la suite (II) *et tous les résidus ne diffèrent des termes correspondants de la suite* (IIa) *que par des facteurs constants. Pour qu'un nombre λ_s ne soit pas pôle de $W(x)$ il faut et il suffit que l'on ait:*

$$\int_a^b f V_s(x)\, dx = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(\mathrm{IIk})$$

Rémarquons que les propositions analogues rélatives au problème de refroidissement d'une barre hétérogène (l'équation differentielle du 2me ordre) sont établies récemment par M. M. *Mauro Picone* et *Sanielevici* [1]), à l'aide des méthodes tout à fait différentes des nôtres ayant pour base la théorie des équations intégrales. Dans l'application au problème des verges vibrantes élastiques les propositions analogues au théorème 1 sont obtenues par M. *A. Davidoglou* [2]) dans les conditions beaucoup moins générales $[p(x) \geq 0$ dans $(a\ b)$, $q(x) \equiv 0]$ et par les méthodes différentes des notres. Les méthodes exposées plus haut sont analogues à celles de M. *W. Stekloff,* qui les a introduit dans l'étude du problème de refroidissement d'une barre hétérogène depuis l'année 1896, dans une série de travaux [3]).

---

[1]) Voir: *M. Picone,* «Sui valori eccezionali di un parametro» etc., Pisa 1909. *S. Sanielevici* «Sur les équations différent.» etc. Ann. de l'Ec. Norm. Ser. 3. t. 25 (1909).

[2]) *A. Davidoglou.* Sur les équat. de vibrat. des verges élast. Annales de l'Éc. Norm. Sup. 3 Sér., t. 17 (1901) ainsi que «Étude de l'équat. différent.» etc. Ibidem, 3 Sér., t. 22 (1905).

[3]) Voir C. R. depuis 1896 et surtout le Mémoire cité plus haut.

La démonstration précédente peut être divisée en deux parties essentielles: 1) on doit établir que la fonction $W(x)$ est une fonction méromorphe de λ; 2) on doit montrer que cette fonction aura des pôles effectifs toutes les fois que $f(x)$ ne sera pas nulle identiquement dans (a, b). La première partie peut être établie aussi par la méthode classique de M. *H. Poincaré,* si l'on y fait une modification que M. *W. Stekloff* nous a indiquée quelque temps auparavant, relativement au problème de refroidissement d'une barre hétérogène. Cette modification peut être appliquée aussi à notre problème. Nous l'exposerons et déduirons en même temps l'expression pour la valeur absolue du premier pôle de la fonction $W(x)$.

Nous avons montré plus haut que

$$|\lambda_1| \leq \lambda'' = \lim_{n=\infty} \sqrt{\frac{W_{n-1}}{W_n}}$$

[voir les pages 7—8]. Montrons maintenant qu'on a en même temps

$$\lim_{n=\infty} \sqrt{\frac{W_{n-1}}{W_n}} \leq |\lambda_1| \quad ^{1)}.$$

Les équations (5a) nous donneut

$$w_n(x) = \int_a^x w_n'(x)\, dx$$

d'où

$$[w_n(x)]^2 < (b-a) \int_a^x (w_n')^2\, dx.$$

On a de même

$$\int_a^b (w_n')^2\, dx = -\int_a^b w_n w_n''\, dx < \sqrt{\int_a^b w_n^2\, dx \int_a^b (w_n'')^2 dx}.$$

Or la formule (6b) nous montre que

$$\int_a^b (w_n'')^2\, dx < \frac{1}{r_0} W_n,$$

donc

$$[w_n(x)]^2 < \frac{b-a}{\sqrt{r_0}} \sqrt{\int_a^b w_n^2\, dx} \sqrt{W_n}.$$

On en déduit:

$$\sqrt{\int_a^b w_n^2 dx} < \frac{b-a}{r_0} \sqrt{W_n} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

[1]) λ_1 désigne ici *le premier pôle de* $W(x)$ qui peut être différent du premier terme dans la suite (II) de nombres caractéristiques.

et finalement:

$$|w_n(x)| < Q.\sqrt{W_n}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12a)$$

Q étant une constante positive ne dépendante pas de n et de la forme de la fonction $f(x)$.

Les considérations précédentes nous montrent que le rayon de convergence uniforme de la série (5) est au moins égal au rayon de convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \sqrt{W_n}.$$

Donc on a

$$|\lambda_1| \geq \lim_{n=\infty} \sqrt{\frac{W_{n-1}}{W_n}},$$

c. q. f. d. On en peut conclure que

$$|\lambda_1| = \lim_{n=\infty} \sqrt{\frac{W_{n-1}}{W_n}}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12b)$$

La formule (12) nous donne

$$\int_a^b w_n^2\, dx < Q_1 W_n$$

Q_1 étant une constante analogue à Q. Or les formules (6a) nous montrent que

$$W_n^2 = \left[\int_a^b p w_{n-1} w_n\, dx\right]^2 < P^2 \int_a^b w_{n-1}^2 dx \int_a^b w_n^2\, dx < Q_2 W_n \int_a^b w_{n-1} dx$$

P désignant max $|p|$ dans (a, b) et Q_2 étant la constante analogue à Q et Q_1. Donc

$$W_n < Q_2 \int_a^b w_{n-1}^2\, dx.$$

On déduit des formules (6b)

$$W_{n-1} > r_0 \int_a^b (w_n'')^2\, dx,$$

et on trouve finalemen :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \sqrt{\frac{W_{n-1}}{W_n}} > L_1 \frac{\sqrt{\int_a^b (w_n'')^2\, dx}}{\sqrt{\int_a^b w_n^2\, dx}}$$

L_1 étant une constante analogue à Q_2.

Posons maintenant

$$f(x) = \sum_{k=1}^{2m+3} \alpha_k f_k(x)$$

$f_k(x)$ étant des fonctions données quelconques continues dans (a, b). Toutes les fonctions $w_n(x)$ correspondant à cette fonction $f(x)$ seront de même les formes linéaires homogènes des constantes α_k. Or en vertu du lemme 2 on peut toujours choisir ces constantes de la manière qu'on ait pour chaque valeur de n:

$$\frac{\int_a^b (w_n'')^2 dx}{\int_a^b w_n^2 dx} > L_2 m^4,$$

L_2 étant une constante analogue à L_1. On en conclut, comme l'a fait *M. H. Poincaré* [1]), que

$$\sqrt{\frac{W_1}{W_2}} > \ldots > \sqrt{\frac{W_{n-1}}{W_n}} > \ldots > \lim_{n=\infty} \sqrt{\frac{W_{n-1}}{W_n}} > Lm^2,$$

L étant une costante ne dépendante pas de la forme des fonctions $f_k(x)$ et de m. En comparant avec (12b) on trouve

$$\lambda_1 > Lm^2.$$

Nous pouvons donc choisir les constantes α_k ou, ce qui est la même chose, la fonction $f(x)$ de la manière que la fonction $W(x)$ reste holomorphe dans l'interieur d'un cercle du rayon aussi grand que l'on voudra (pour m suffisamment grand). La méthode de *M. H. Poincaré* [2]) nous assurera alors que la fonction $W(x)$ est en effet une fonction méromorphe de λ.

Nous achevons ici les considérations concernant le théorème d'existence des fonctions fondamentales et commençons l'étude du problème de développement d'une fonction donnée $f(x)$ suivant les fonctions fondamentales.

§ 4. Dans tout ce qui va suivre nous ajouterons aux conditions de la page 2 rélatives aux fonctions $r(x)$, $q(x)$, et $p(x)$ encore la condition suivante

$$p(x) \geq p_0 > 0 \quad \text{dans } (a, b) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

---

[1]) Voir *H. Poincaré* «Sur les équat. de la phys. mathém.», Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, t. (1894).

[2]) Ibidem.

p_0 étant une constante positive. Cette condition est essentielle pour toute la théorie, et dans son absence la possibilité même du développement dévient douteuse.

Nous allons établir maintenant ce théorème important:

Théorème 2. *Quelle que soit la fonction $f(x)$, bornée et intégrable dans (a, b) on a toujours le développement suivant*

$$\int_a^b pf^2\,dx = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^2; \quad A_s = \int_a^b pfV_s dx \qquad \text{..........(III)}$$

Posons

$$f(x) = \sum_{s=1}^{n} A_s V_s(x) + R_n(x), \text{ [1]}$$

$$S_n = \int_a^b pR_n^2\,dx. \qquad \text{..............(14)}$$

En utilisant les propriétés des fonctions $V_s(x)$ énoncées dans le théorème 1 on trouve

$$S_n = \int_a^b pf^2\,dx - \sum_{s=1}^{n} A_s^2. \qquad \text{..................(15)}$$

Par conséquent le théorème 2 est équivalent à la formule suivante

$$\lim_{n=\infty} S_n = 0,$$

que nous démontrerons d'abord en faisant une supposition particulière sur la fonction $f(x)$.

En premier lieu nous allons établir le lemme suivant:

Lemme 3. *Si la fonction $f(x)$ admet les dérivées de deux premiers ordres intégrables dans (a, b) et vérifie les conditions aux limites*

$$f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0,$$

la quantité positive

$$I_n = \int_a^b r\,(R''_n)^2\,dx + \int_a^b qR_n^2\,dx \qquad \text{............(16)}$$

ne surpasse pas un nombre positif G ne dépendant que de la fonction $f(x)$.

---

[1]) Les considérations du § 3 nous montrent que tous les nombres caractéristiques λ_s sont positifs, parce que l'intégrale

$$\int_a^b p\,V_s^2\,dx$$

est évidemment positive sous la condition (13). La suite (II) se réduit à la suite: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_s, \ldots,$ et de même la suite (IIa) — à la suite: $V_1(x), \ldots V_s(x), \ldots$

Les formules (14) nous donnent

$$\int_a^b r(R_n'')^2 dx = \int_a^b r(f'')^2\,dx - 2\sum_{s=1}^{n} A_s \int_a^b r f'' V_s''\,dx +$$
$$+ 2\sum_{s,\,t} A_s A_t \int_a^b r V_s'' V_t'' dx + \sum_{s=1}^{n} A_s^2 \int_a^b r(V_s'')^2\,dx\,.$$

En intégrant par parties on trouve

$$T_n = \int_a^b r(f'')^2\,dx + \int_a^b qf^2\,dx - \sum_{s=1}^{n} \lambda_s A_s^2 <$$
$$< \int_a^b r(f'')\,dx + \int_a^b qf^2\,dx = G$$

c. q. f. d.

Considérons maintenant l'équation différentielle

$$\Omega(W) = (\lambda p - q)\,W(x) + pR_n(x)$$

jointe aux conditions aux limites

$$W(a) = W(b) = W'(a) = W'(b) = 0\,.$$

En vertu du théorème 1, la fonction $W(x)$ est une fonction méromophe de λ dont tous les pôles font partie de la suite

$$\lambda_1\,,\quad \lambda_2\,,\,\ldots\quad \lambda_s\,,\,\ldots$$

Or il est évident que la fonction $pR_n(x)$ remplit les conditions (IIk) $(s = 1\,,\,2\ldots n)$. Donc le plus petit des pôles de $W(x)$ est nécessairement plus grand que λ_n, parce qu'en raison du même théorème 1 le rayon de convergence uniforme de la série

$$W(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s w_s(x)$$

est plus grand que λ_n. Les fonctions $w_s(x)$ sont définies par les équations

$$\Omega(w_0) = -qw_0 + pR_n$$
$$\Omega(w_s) = -qw_s + pw_{s-1} \quad (s = 1\,,\,2\ldots)$$

jointes aux conditions

$$w_s(a) = w_s(b) = w_s'(a) = w_s'(b) = 0 \quad (s = 0,\,1,\ldots)\,.$$

Introduisons les intégrales

$$W_0 = \int_a^b p w_0 R_n dx\,; \quad W_s = \int_a^b p w_0 w_{2s-1} dx \quad (s = 1,\ 2, \ldots).$$

On trouve sans peine

$$\sqrt{\frac{W_0}{W_1}} > \sqrt{\frac{W_1}{W_2}} > \ldots > \lim_{s=\infty} \sqrt{\frac{W_{s-1}}{W_s}} > \lambda_n$$

On a ensuite

$$S_n = \int_a^b p\, R_n^2\, dx = \int_a^b r w_0'' R_n'' dx + \int_a^b q w_0 R_n dx$$

$$\int_a^b p\, w_0^2\, dx = \int_a^b r w_1'' w_0'' dx + \int_a^b q w_1 w_0 dx\,,$$

d'où

$$S_n^2 < W_0 \left[\int_a^b r (R_n'')^2\, dx + \int_a^b q\, R_n^2\, dx \right] = W_0 T_n$$

$$\int_a^b p\, w_0^2\, dx < \sqrt{W_0 W_1}.$$

Or on a

$$W_0^2 < S_n \cdot \int_a^b p w_0^2 dx\,,$$

donc

$$\frac{S_n}{T_n} < \frac{W_0}{S_n} < \frac{\int_a^b p w_0^2 dx}{W_0} < \sqrt{\frac{W_1}{W_0}} < \frac{1}{\lambda_n}.$$

En vertu du lemme 3 on a pour n quelconque

$$T_n < G\,;$$

on a, en outre,

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\lambda_n} = 0.$$

On peut donc affirmer que

$$\lim_{n=\infty} S_n = 0,$$

si la fonction $f(x)$ vérifie les conditions du lemme 3.

Mais on s'assure sans peine d'abord que les conditions

$$f(a)=f(b)=f'(a)=f'(b)=0$$

sont superflues,— en introduisant la fonction auxiliaire $\psi(x)$ définie de la manière suivante:

Désignons par (a', b') un intervalle situé dans l'intérieur de (a, b) [c'est à dire, on a : $a<a'<b'<b$]. Soit

$$\psi(x)\equiv f(x) \quad \text{dans} \quad (a', b'),$$

$$\psi(a)=\psi(b)=\psi'(a)=\psi'(b)=0.$$

On suppose enfin que la fonction $\psi(x)$ admet les dérivées de deux premiers ordres intégrables dans (a, b) et que la différence $[f(x)-\psi(x)]$ a une limite supérieure ne dépendante que de la nature de $f(x)$. On peut construire une infinité de fonctions $\psi(x)$ jouissant de propriétés indiquées. Pour une telle foncton $\psi(x)$ on peut reproduire textuellement le raisonnement de M. *W. Stekloff* exposé dans son mémoire *«Sur les fonctions harmoniques de M. H. Poincaré»* [1]), et nous pouvons affirmer l'exactitude du théorème 2 pour la fonction quelconque $f(x)$ ayant seulement les dérivées intégrables de deux premiers ordres dans (a, b),— en particuler pour un polynôme quelconque. Mais alors les fonctions $V_s(x)$ vérifient les conditions d'un théorème générale de M. *W. Stekloff* [2]), qui nous apprend que le théorème 2 a lieu por une fonction quelconque $f(x)$, bornée et intégrable dans (a, b). À l'aide du même théorème de M. *W. Stekloff* on peut établir une proposition dont le théorème 2 n'est qu'un cas particulier:

Théorème 2a. *Soit $f(x)$ une fonction, bornée et intégrable dans (a, b); soit $\varphi(x)$ une autre fonction pouvant devenir infinie aux environs de certains points isolés d'un intervalle (a', b') intérieur à (a, b), mais tel que les intégrales*

$$\int_{a'}^{b'} pf\varphi\, dx\,; \quad \int_{a'}^{b'} p\varphi V_s dx\,; \quad \int_{a'}^{b'} p\varphi^2 dx$$

aient un sens bien déterminé.

---

[1]) Voir «Annales de la fac. des Sciences de Toulouse», 1900, pag. 282—284.

[2]) «Sur quelques égalités générales» etc., Mém. de l'Acad. des Sc. de S.-Pétersb., t. 15 (1904), pag. 14.

Ces conditions étant remplies, on a toujours

$$\int_{a'}^{b'} pf\varphi dx = \sum_{s=1}^{\infty} A_s B_s$$

$$A_s = \int_a^b pfV_s dx ; \quad B_s = \int_{a'}^{b'} p\varphi V_s dx. \text{ [1]}$$

Le théorème 2 et le lemme 3 étant établies nous pouvons en déduire sans peine certaines conditions assez générales pour la possibilité du développement d'une fonction donnée $f(x)$ suivant les fonctions $V_s(x)$.

Soit $f(x)$ une fonction vérifiant les conditions du lemme 3. La formule (14) nous donne

$$R_n(a) = R_n(b) = R'_n(a) = R'_n(b) = 0. \quad \dots\dots\dots\dots(17)$$

On a donc

$$\left[R_n(x)\right]^2 = \left[\int_a^x R'_n dx\right]^2 < (b-a)\int_a^b (R'_n)^2 dx. \text{ [2]} \quad \dots\dots(18)$$

On a aussi

$$\int_a^b (R'_n)^2 dx = -\int_a^b R_n R''_n \, dx < \sqrt{\int_a^b R_n^2 \, dx \int_a^b (R''_n)^2 dx},$$

ce qui nous donne, en vertu de (18),

$$\left[R_n(x)\right]^2 < (b-a)\sqrt{\int_a^b R_n^2 \, dx \int_a^b (R''_n)^2 dx}. \quad \dots\dots\dots(18a)$$

Or l'inégalité (13) et le lemme 3 nous donnent

$$\int_a^b R_n^2 \, dx < \frac{1}{p_0}\int_a^b pR_n^2 \, dx = \frac{S_n}{p_0} ; \quad \int_a^b (R''_n)^2 \, dx < \frac{I_n}{r_0} < \frac{G}{r_0}.$$

On déduit donc de (18a):

$$|R_n(x)| < FS_n^{1/4} \text{ dans } (a, b),$$

F étant une constante ne dépendante pas de n. Nous avons, d'après le théorème 2,

$$\lim_{n=\infty} S_n = 0.$$

---

1) Ibidem, pag. 16.

2) Comp. *W. Stekloff.* «Sur un problème d'Analyse» etc. C. R. 1907.

On peut donc trouver toujours un tel nombre N qu'on ait pour chaque valeur de x dans (a, b)

$$|R_n(x)| < \varepsilon,$$

à seule condition

$$n > N,$$

ε étant arbitrairement petit. Cela nous assure que la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s$$

est uniformement convergente dans (a, b) et y représente la fonction $f(x)$. On a donc la proposition suivante:

Théorème 3. *Si la fonction $f(x)$ admet les dérivées de deux premiers ordres intégrables dans (a, b) et vérifie en outre les conditions aux limites*

$$f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

on peut développer la fonction $f(x)$ en une série uniformement convergente dans (a, b):

$$f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} V_s(x) \cdot \int_a^b p f V_s dx. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{IV})$$

Cette proposition n'a pas été encore établie jusqu'à present. Les propositions analogues des M. M. *Davidoglou* et *Myller* [1]) sont beaucoup moins générales que le théorème 3. Ces auteurs supposent en effet que la fonction $f(x)$ non seulement vérifie les conditions aux limites (19), mais possède encore les dérivées de *quatre* premiers ordres dans (a, b).

§ 5. Dans les §§ 1—4 nous avons étudié le cas où la verge vibrante est *encastrée dans a et b*. Nous allons considérer ici les deux autres cas où la verge est 1) *encastrée dans a et appuyée dans b* et 2) *appuyée dans a et b*. Nous arrivons à la même équation différentielle

$$\Omega(V) = (\lambda p - q) V,$$

mais jointe aux autres conditions aux limites, à savoir:

$$V(a) = V(b) = V'(a) = V''(b) = 0$$

dans le cas 1) et

$$V(a) = V(b) = V''(a) = V''(b) = 0$$

---

[1]) Voir *A. Davidoglou*, mém. cité plus haut, pag. 406—421.

A. Myller, «Gewöhnliche Diff-Gleich. höh. Ordnung in ihrer Beziehung zu den Integral-Gleich.» Göttingen, Dissertation (1906), s. 15—16.

dans le cas 2). Tous les raisonnements des §§ 1—3 peuvent être transportés textuellement à ces deux cas nouveaux, et *nous pouvons affirmer l'exactitude du théorème 1 aussi pour les conditions aux limites transformées.*

La possibilité du développement de la fonction donnée $f(x)$ suivant les nouvelles fonctions $V_s(x)$ peut être établie dans les conditions même un peu plus générales qu'auparavant. On s'assure sans peine que le lemme 3 est le fondement de tous les raisonnements du § 4. Etudions ce lemme dans l'application aux nouvelles fonctions $V_s(x)$. On aura, en employant les notations du § 4,

$$T_n = \int_a^b r\,(R_n'')^2\,dx + \int_a^b qR_n^2\,dx = \int_a^b r\,(f'')^2 dx + \int_a^b qf^2 dx - \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s A_s^2$$

l'égalité qui est vraie toutes les fois que la fonction $f(x)$ admettant les dérivées de deux premiers ordres intégrables dans (a, b) vérifie encore les conditions aux limites

$$f(a) = f(b) = f'(a) = 0 \qquad \text{[dans le cas 1)]}$$

ou

$$f(a) = f(b) = 0 \qquad \text{[dans le cas 2)]}$$

Il ne nous reste qu'à répéter presque textuellement les raisonnements du § 4 pour établir la proposition suivante:

Théorème 4. *La série*

$$\sum_{s=1}^{\infty} V_s(x) \cdot \int_a^b pfV_s dx \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{V})$$

converge uniformément et représente la fonction donnée $f(x)$ dans (a, b), si celle-ci vérifie les conditions

$$f(a) = f(b) = f'(a) = 0\,,$$

ou

$$f(a) = f(b) = 0\,,$$

correspondant aux deux cas divers des fonctions $V_s(x)$. On suppose, en outre, que $f(x)$ admet les dérivées de deux premiers ordres intégrables dans (a, b).

Il est évident que les théorèmes 2 et 2a subsistent aussi pour les nouvelles fonctions $V_s(x)$.

S.-Pétersbourg, Décembre 1909.