Электронная теорія въ оптикѣ.

I.

Электронная теорія разрабатывалась въ двухъ направленіяхъ. Въ одномъ, къ которому принадлежатъ работы П. Друде и Дж. Дж. Томсона, эта теорія разрабатывалась такъ сказать непосредственно, путемъ совершенно частныхъ и элементарныхъ соображеній, не связанныхъ съ общими методами изслѣдованія въ математической физикѣ, въ другомъ-же направленіи, представителями котораго должны считаться Г. А. Лоренцъ и Ларморъ, задача ставится уже на общую точку зрѣнія, но ихъ анализъ сложенъ и труденъ, да къ тому-же у Лоренца связанъ съ старыми представленіями о поляризаціи электроновъ, что дѣлаетъ его теорію искуственной. Поэтому не безинтересно попытаться дать электронную теорію хотя и простую, но совершенно общую. Мы и хотимъ изложить въ настоящей статьѣ подобную теорію. Разсмотримъ проводникъ, въ которомъ происходятъ электрическіе токи, на которые мы будемъ смотрѣть съ точки зрѣнія Максвелла, т. е. какъ на нѣкоторое *кинетическое состояніе эфира* среды, *періодическаго характера*; сверхъ того внутри среды движутся *электроны,* т. е. матеріальныя частицы, масса которыхъ (не болѣе) $\frac{1}{2000}$ доля массы атома водорода, заряженныя отрицательнымъ электричествомъ и движущіяся съ большой скоростью, примѣрно до $^1/_{10}$ или $^1/_3$ скорости свѣта.

Въ основу теоріи положимъ принципъ сохраненія энергіи и фактъ развитія магнитнаго поля электрическимъ токомъ.

Пусть

$$E \text{ и } H$$

будутъ энергіи электрическая и магнитная, расчитанныя на весь объемъ среды; затѣмъ пусть

$$R$$

будетъ работа диссипативныхъ силъ, приложенныхъ къ точкамъ разсматриваемой средины, тогда принципъ сохраненія энергіи представится въ видѣ:

$$\frac{d(E+H)}{dt}+R=0 \tag{1}$$

причемъ буквой t обозначимъ время.

Выразимъ теперь введенныя величины въ функціи другихъ, а именно электрическихъ силъ и перемѣщеній, а также и магнитныхъ силъ и перемѣшеній электрона. Пусть

$$E_x,\ E_y,\ E_z$$

будутъ составляющія электрической силы въ точкѣ $(x,\ y,\ z)$ среды, тогда будемъ имѣть

$$E=\int\frac{K}{8\pi}(E_x^2+E_y^2+E_z^2)d\tau \tag{2}$$

причемъ $d\tau$ есть элементъ объема и интегралъ распространенъ на весь объемъ, занимаемый разсматриваемой средой; количество K есть діэлектрическая постоянная среды (ея эфира, какъ думаютъ нѣкоторые физики). Но если $f,\ g,\ h$ суть проекціи такъ называемой Максвелломъ электрической пертурбаціи, т. е. перемѣщенія точки $(x,\ y,\ z)$ эфира, то по опредѣленію имѣемъ:

$$f=\frac{K}{4\pi}E_x,\ g=\frac{K}{4\pi}E_y,\ h=\frac{K}{4\pi}E_z \tag{3}$$

Подставляя отсюда значенія $E_x,\ E_y,\ E_z$, въ равенство (2) найдемъ для электрической энергіи выраженіе:

$$E=\int\frac{2\pi}{K}(f^2+g^2+h^2)d\tau \tag{4}$$

Затѣмъ, если обозначимъ $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ составляющія магнитной силы въ точкѣ $(x,\ y,\ z)$, то магнитная энергія среды будетъ выражаться формулой:

$$H=\int\frac{\mu}{8\pi}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)d\tau \tag{5}$$

и μ здѣсь есть коэффиціентъ магнитной проницаемости среды.

Работу диссипативныхъ силъ представимъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$R=\int\frac{2\pi}{K_0}(f_0^2+g_0^2+h_0^2)d\tau-\int\frac{4\pi}{K}(ff_0+gg_0+hh_0)d\tau+$$
$$+\int\frac{4\pi}{K}(fp+gq+hr)d\tau-\int\frac{m_0d\tau}{2}\left((\frac{df_0}{dt})^2+(\frac{dg_0}{dt})^2+(\frac{dh_0}{dt})^2\right)+$$
$$+\int(r_1f_0+r_2g_0+r_3h_0)d\tau \tag{6}$$

Здѣсь $f_0,\ g_0,\ h_0$ суть составляющія перемѣщенія электрона, m_0 масса единицы объема электрона, $p,\ q,\ r$ составляющія тока проводимости,

r_1, r_2, r_3 составляющія силы тренія, которое встрѣчаетъ электронъ со стороны среды; они выражаются такъ:

$$r_1 = k_0 \frac{df_0}{dt},\ r_2 = k_0 \frac{dg_0}{dt},\ r_3 = k_0 \frac{dh_0}{dt} \tag{7}$$

количество K_0 есть коэффиціентъ, аналогичный K. Первые два члена R аналогичны работѣ *quasi*—упругихъ силъ, третій членъ даетъ теплоту Джоула, а четвертый есть живая сила электрона, и вмѣсто него можно взять слѣдующій:

$$+\int \frac{m_0 d\tau}{2}\left(f_0 \frac{d^2 f_0}{dt^2} + g_0 \frac{d^2 g_0}{dt^2} + h_0 \frac{d^2 h_0}{dt^2}\right) \tag{8}$$

Дѣйствительно, стоитъ только уравненіе (1) умножить на dt и взять интегралъ за все время существованія изучаемаго явленія, т. е. отъ $t = t_1$ до $t = t_2$, тогда, не измѣняя ничего въ остальныхъ членахъ, получимъ:

$$-\iint \frac{m_0 d\tau}{2}\left(\left(\frac{df_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dg_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dh_0}{dt}\right)^2\right)dt = -\int \frac{m_0 d\tau}{2}\int dt\left(\frac{df_0}{dt}\cdot\frac{df_0}{dt} + \right.$$
$$\left. + \frac{dg_0}{dt}\cdot\frac{dg_0}{dt} + \frac{dh_0}{dt}\cdot\frac{dh_0}{dt}\right) = +\int \frac{m_0 d\tau}{2}\int\left(f_0 \frac{d^2 f_0}{dt^2} + g_0 \frac{d^2 g_0}{dt^2} + h_0 \frac{d^2 h_0}{dt^9}\right),$$

ибо проинтегрированная часть обращается въ ноль, такъ какъ для $t = t_1$ и $t = t_2$ должно быть:

$$f_0 = g_0 = h_0 = 0.$$

Теперь мы займемся выводомъ основнаго соотношенія между электрическимъ токомъ и развиваемымъ имъ магнитнымъ полемъ.

Пусть J будетъ сила тока, выраженнаго въ электромагнитныхъ единицахъ, тогда работа затрачиваемая токомъ на перемѣщеніе единицы положительной магнитной массы вдоль замкнутаго контура (силовой линіи) представится такъ:

$$4\pi A J = \int(\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) \tag{9}$$

Но если $J_x dS$, $J_y dS$, $J_z dS$ будутъ составляющія электрическаго тока черезъ элементъ сѣченія проводника dS, то легко видѣть, что

$$J = \int\left((J_x \cos(nx) + J_y \cos(ny) + J_z \cos(nz)\right)dS \tag{10}$$

гдѣ n направленіе нормали къ элементу dS, проведенной въ сторону тока. Сравнивая (9) и (10) и примѣняя къ линейному интегралу теорему Стокса, найдемъ:

$$4\pi A\int\Big(J_x\cos(nx)+J_y\cos(ny)+J_z\cos(nz)\Big)dS=\int\Big((\frac{d\beta}{dz}-\frac{d\gamma}{dy})\cos(nx)+$$

$$+(\frac{d\gamma}{dx}-\frac{d\alpha}{dz})\cos(ny)+(\frac{d\alpha}{dy}-\frac{d\beta}{dx})\cos(nz)\Big)dS.$$

Такъ какъ это равенство справедливо при всякомъ контурѣ, на который опирается поверхность S, то заключаемъ, что

$$\left.\begin{aligned}4\pi AJ_x&=\frac{d\beta}{dz}-\frac{d\gamma}{dy}\\4\pi AJ_y&=\frac{d\gamma}{dx}-\frac{d\alpha}{dz}\\4\pi AJ_z&=\frac{d\alpha}{dy}-\frac{d\beta}{dx}\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

причемъ $A=\frac{1}{\omega_0}$ и ω_0 есть скорость свѣта въ пустотѣ, т. е. въ міровомъ эфирѣ.

Съ другой стороны съ точки зрѣнія теоріи Максвелла мы должны имѣть:

$$J_x=\frac{df}{dt}+p,\ J_y=\frac{dg}{dt}+q,\ J_z=\frac{dh}{dt}+r\qquad(12)$$

Смыслъ этихъ равенствъ ясенъ: первые члены ихъ правыхъ частей суть максвелловскіе пертурбаціонные токи или токи перемѣщенія.

Пользуясь равенствами (12), мы преобразуемъ выраженіе $\frac{dE}{dt}$.

Изъ равенствъ (11) и (12) получаемъ:

$$\frac{df}{dt}=\frac{1}{4\pi A}\Big(\frac{d\beta}{dz}-\frac{d\gamma}{dy}\Big)-p,$$

$$\frac{dg}{dt}=\frac{1}{4\pi A}\Big(\frac{d\gamma}{dx}-\frac{d\alpha}{dz}\Big)-q,$$

$$\frac{dh}{dt}=\frac{1}{4\pi A}\Big(\frac{d\alpha}{dy}-\frac{d\beta}{dx}\Big)-r;$$

поэтому, подставивъ эти значенія въ формулу (4) для $\frac{dE}{dt}$, найдемъ:

$$\frac{dE}{dt}=\int\frac{d\tau}{AK}\Big[f\Big(\frac{d\beta}{dz}-\frac{d\gamma}{dy}\Big)+g\Big(\frac{d\gamma}{dx}-\frac{d\alpha}{dz}\Big)+h\Big(\frac{d\alpha}{dy}-\frac{d\beta}{dx}\Big)\Big]-$$

$$-\int\frac{4\pi d\tau}{K}\Big(fp+gq+hr\Big).$$

Или примѣняя къ первому интегралу теорему Грина, найдемъ:

$$\frac{dE}{dt}=\frac{1}{AK}\int d\tau\Big[\alpha\Big(\frac{dg}{dz}-\frac{dh}{dy}\Big)+\beta\Big(\frac{dh}{dx}-\frac{df}{dz}\Big)+\gamma\Big(\frac{df}{dy}-\frac{dg}{dx}\Big)\Big]-$$

$$-\frac{4\pi}{K}\int d\tau\Big(fp+gq+hr\Big)+\frac{1}{AK}\int dS\Big[f\Big(\beta\cos(nz)-\gamma\cos(ny)\Big)+$$

$$+g\Big(\gamma\cos(nx)-\alpha\cos(nz)\Big)+h\Big(\alpha\cos(ny)-\beta\cos(nx)\Big)\Big] \qquad (13)$$

причемъ dS элементъ поверхности, ограничивающей разсматриваемую средину, а n направленіе внѣшней нормали къ нему.

Подставляя теперь въ равенство (1) значеніе найденныхъ и приведенныхъ его частей, получимъ слѣдующее выраженіе:

$$\int d\tau\Big\{\alpha\Big[\frac{\mu}{4\pi}\frac{d\alpha}{dt}-\frac{1}{AK}\Big(\frac{dh}{dy}-\frac{dg}{dz}\Big)\Big]+\beta\Big[\frac{\mu}{4\pi}\frac{\lambda\beta}{dt}-\frac{1}{AK}\Big(\frac{df}{dz}-\frac{dh}{dx}\Big)\Big]+$$

$$+\gamma\Big[\frac{\mu}{4\pi}\frac{d\gamma}{dt}-\frac{1}{AK}\Big(\frac{dg}{dx}-\frac{df}{dy}\Big)\Big]+f_0\Big[\frac{m_0}{2}\frac{d^2f_0}{dt^2}+\frac{2\pi}{K_0}f_0+r_1-\frac{4\pi}{K}f\Big]+$$

$$+g_0\Big[\frac{m_0}{2}\frac{d^2g_0}{dt^2}+\frac{2\pi}{K_0}g_0+r_2-\frac{4\pi}{K}g\Big]+h_0\Big[\frac{m_0}{2}\frac{d^2h_0}{dt^2}+\frac{2\pi}{K_0}h_0+r_3-\frac{4\pi}{K}h\Big]\Big\}+$$

$$+\frac{1}{A}\int\frac{dS}{K}\Big[f\Big(\beta\cos(nz)-\gamma\cos(ny)\Big)+g\Big(\gamma\cos(nx)-\alpha\cos(nz)\Big)+$$

$$+h\Big(\alpha\cos(ny)-\beta\cos(nx)\Big)\Big]=0 \qquad (14).$$

Такъ какъ это равенство имѣетъ мѣсто для всякаго объема средины, какъ-бы онъ малъ ни былъ, то заключаемъ, что коэффиціенты при α, β, γ и f_0, g_0, h_0 должны быть равны нулю, а потому получаемъ слѣдующія двѣ системы уравненій: первую

$$\left.\begin{aligned}AK\mu\frac{d\alpha}{dt}&=4\pi\Big(\frac{dh}{dy}-\frac{dg}{dz}\Big)\\ AK\mu\frac{d\beta}{dt}&=4\pi\Big(\frac{df}{dz}-\frac{dh}{dx}\Big)\\ AK\mu\frac{d\gamma}{dt}&=4\pi\Big(\frac{dg}{dx}-\frac{df}{dy}\Big)\end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

и затѣмъ вторую:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2f_0}{dt^2}+k\frac{df_0}{dt}+\eta f_0 &= f \\ m\frac{d^2g_0}{dt^2}+k\frac{dg_0}{dt}+\eta g_0 &= g \\ m\frac{d^2h_0}{dt^2}+k\frac{dh_0}{dt}+\eta h_0 &= h \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

гдѣ положено:

$$\frac{Km_0}{8\pi}=m,\ \frac{Kk_0}{4\pi}=k,\ \frac{K}{K_0}=\eta \tag{15}$$

причемъ мы пользовались равенствами (7).

Къ этимъ уравненіямъ надо присоединить еще систему, которую мы можемъ получить изъ уравненій (11) и (12) и которая представляетъ связь, устанавливаемую опытомъ, между электрическимъ токомъ и магнитной силой; эта система будетъ:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi A\frac{df}{dt}+4\pi Ap &= \frac{d\beta}{dz}-\frac{d\gamma}{dy} \\ 4\pi A\frac{dg}{dt}+4\pi Aq &= \frac{d\gamma}{dx}-\frac{d\alpha}{dz} \\ 4\pi A\frac{dh}{dt}+4\pi Ar &= \frac{d\alpha}{dy}-\frac{d\beta}{dx} \end{aligned}\right\} \tag{III}$$

Система (I) и система (III) представляютъ Герцъ-Максвелловскія уравненія; система-же (II), дающая движеніе электрона, есть дополнительная и дана была сначала Гельмгольцемъ [1]), затѣмъ Друде и Г. Лоренцомъ.

Въ системѣ (III) для токовъ проводимости Г. А. Лоренцъ [2]) беретъ:

$$p=\varrho\frac{df_0}{dt},\ q=\varrho\frac{dg_0}{dt},\ r=\varrho\frac{dh_0}{dt} \tag{L}$$

гдѣ ϱ объемная электрическая плотность въ точкѣ (x, y, z). Дж. Дж. Томсонъ полагаетъ [3]), что электроны противодѣйствуютъ токамъ проводимости, понимаемымъ въ обычномъ смыслѣ этого слова, поэтому мы можемъ представить токи p, q, r въ видѣ:

$$p=\frac{4\pi C}{K}\left(f-\gamma\frac{df_0}{dt}\right),\ q=\frac{4\pi C}{K}\left(g-\gamma\frac{dg_0}{dt}\right),\ r=\frac{4\pi C}{K}\left(h-\gamma\frac{dh_0}{dt}\right) \tag{G}$$

---

[1]) См. «Электромагнитная теорія проводниковъ» автора, стр. 33, уравненія (1).

[2]) Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. BdV₂. S. 156.

[3]) *J. J. Thomson.* Die Corpusculartheorie der Materie. S. 47.

гдѣ C коэффиціентъ электропроводности средины, а γ постоянное. Дѣйствительно, прежде всего мы имѣемъ:

$$p = CE_x - C'\frac{df_0}{dt} \text{ и т. п. уравненія для } q \text{ и } r.$$

Но можно взять:

$$C' = \frac{4\pi}{K_0} C_0,$$

да сверхъ того извѣстно, что $E_x = \frac{4\pi}{K} f$, а потому, если положимъ, что

$$\gamma = \frac{C_0}{C}\eta, \tag{16}$$

то и получимъ равенства (G).

Въ обычной теоріи $C_0 = 0$.

Мы здѣсь разработаемъ точку зрѣнія Дж. Дж. Томсона, которая намъ кажется болѣе пріемлемой, чѣмъ точка зрѣнія Г. А. Лоренца на токи проводимости.

Но прежде чѣмъ приступить къ этой разработкѣ, мы докончимъ выводъ слѣдствій изъ равенства (14). Въ немъ еще остается условіе на границахъ, а именно: должно быть удовлетворено условіе:

$$\int\frac{dS}{K}\Big[\int f\Big(\beta\cos(nz) - \gamma\cos(ny)\Big) + g\Big(\gamma\cos(nx) - \alpha\cos(nz)\Big) + h\Big(\alpha\cos(ny) - \\ - \beta\cos(nx)\Big)\Big] = 0 \qquad \text{(IV)}$$

Этому уравненію обыкновенно удовлетворяютъ, полагая, что если n взять за ось z-овъ, а оси x, y въ плоскости границы срединъ, тогда будетъ:

$$\cos(nx) = \cos(ny) = 0, \ \cos(nz) = \pm 1,$$

причемъ для верхней среды надо взять, напр., знакъ $+$, а для нижней знакъ $-$ Итакъ (IV) даетъ теперь болѣе простое условіе:

$$\int\frac{dS}{K}\Big[f(\beta) - g(\alpha)\Big] = 0$$

гдѣ $(\alpha) = \alpha + \alpha' - \alpha_1$, $(\beta) = \beta + \beta' - \beta_1$, и количества α, β относятся къ падающему лучу; α', β' къ отраженному, а α_1, β_1 къ преломленному. Теперь получаемъ:

$$\alpha + \alpha' = \alpha_1, \ \beta + \beta' = \beta_1 \tag{17}$$

и затѣмъ обыкновенно берутъ еще:

$$\frac{f}{K} + \frac{f'}{K'} = \frac{f_1}{K_1}, \ \frac{g}{K} + \frac{g'}{K'} = \frac{g_1}{K_1} \tag{18}$$

Мы и возьмемъ эти условія, хотя можно пользоваться условіемъ (IV') непосредственно, какъ показано мной въ 1893 году [1]). Надо замѣтить, что вмѣсто (18) можно взять другія. Условія (17) и (18) суть обычныя условія равенства электрическихъ и магнитныхъ силъ, параллельныхъ поверхности раздѣла срединъ, и даны были еще Г. Герцомъ.

II.

Займемся теперь выводомъ слѣдствій изъ системъ уравненій (I), (II) и (III).

Пусть частными рѣшеніями уравненій для f, g, h будутъ выраженія:

$$f = Me^{Q},\ g = Ne^{Q},\ h = Pe^{Q} \tag{19}$$

гдѣ M, N, P комплексныя постоянныя, и количество Q опредѣляется уравненіемъ:

$$Q = pt\sqrt{-1} + ax + by + cz \tag{20}$$

причемъ a, b, c тоже комплексныя постоянныя, а

$$p = \frac{2\pi}{\tau} \tag{21}$$

есть частота перемѣнъ кинетическаго состоянія эфира. Подставимъ эти значенія f, g, h въ уравненія (I) и интегрируя ихъ по t, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} A\mu\alpha &= -\frac{4\pi\sqrt{-1}}{Kp}(Pb - Mc)e^{Q}, \\ A\mu\beta &= -\frac{4\pi\sqrt{-1}}{Kp}(Mc - Pa)e^{Q}, \\ A\mu\gamma &= -\frac{4\pi\sqrt{-1}}{Kp}(Na - Mb)e^{Q} \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

постоянныя интегрированія для $t = t_1$ равны нулю по положенію.

Подставимъ теперь значенія α, β, γ изъ (22) въ систему (III), но замѣтивъ предварительно, что по уравненіямъ (G) получаемъ:

$$p = \frac{4\pi C}{K}(1 - \gamma pu\sqrt{-1})f,\ q = \frac{4\pi C}{K}(1 - \gamma pu\sqrt{-1})g,\ r = \frac{4\pi C}{K}(1 - \gamma pu\sqrt{-1})h,$$

гдѣ положено:

$$f = uf,\ g_0 = ug,\ h_0 = uh \ ^{2)}; \tag{24}$$

[1]) *А. П. Грузинцевъ.* Электромагнитная теорія свѣта, стр. 89, § 60.

[2]) См. VI въ концѣ настоящей статьи.

Сдѣлавъ теперь указанную подстановку и полагая $\frac{4\pi C}{p} = 2C\tau = \mathrm{D}$, находимъ:

$$M[K\mu - D\mu\sqrt{-1}(1-\gamma pu\sqrt{-1})] = -\frac{1}{A^2p^2}[M(a^2+b^2+c^2) - a(Ma+Nb+Pc)],$$

$$N[K\mu - D\mu\sqrt{-1}(1-\gamma pu\sqrt{-1})] = -\frac{1}{A^2p^2}[N(a^2+b^2+c^2) - b(Ma+Nb+Pc)],$$

$$P[K\mu - D\mu\sqrt{-1}(1-\gamma pu\sqrt{-1})] = -\frac{1}{A^2p^2}P(a^2+b^2+c^2) - c(Ma+Nb+Pc)].$$

Умножая эти уравненія на порядку на a, b, c и складывая результаты, найдемъ:

$$(Ma + Mb + Pc)[K\mu - D\mu\sqrt{-1}(1 - \gamma pu\sqrt{-1})] = 0$$

Отсюда заключаемъ, что

$$Ma + Nb + Pc = 0 \tag{25}$$

а потому предыдущая система обращается въ одно уравненіе:

$$K\mu - D\mu\sqrt{-1}(1 - \gamma pu\sqrt{-1}) = -\frac{a^2+b^2+c^2}{A^2p^2}$$

Положимъ здѣсь:

$$a^2 + b^2 + c^2 = -A^2p^2V^2e^{2v\sqrt{-1}}; \tag{26}$$

получимъ такъ называемое *дисперсіонное соотношеніе*

$$K\mu - D\mu(\sqrt{-1} + \gamma pu) = V^2e^{2v\sqrt{-1}} \tag{A}$$

Здѣсь V и v суть оптическія постоянныя и связаны съ показателемъ преломленія n_0 и коэффиціентомъ поглощенія $\varkappa_0$ при нормальномъ паденіи, какъ будетъ показано ниже, слѣдующими соотношеніями:

$$V^2e^{2v\sqrt{-1}} = n_0^2(1 - \varkappa_0\sqrt{-1})^2 \tag{27}$$

Количество u, входящее въ равенство (A), есть функція періода τ или длины волны. Дѣйствительно, уравненія (II) даютъ такъ называемое *электронное соотношеніе* (см. стр. 17):

$$\frac{1}{u} = \eta - mp^2 + kp\sqrt{-1} \tag{B}$$

Подставляя это значеніе u въ (A), получимъ слѣдующее соотношеніе:

$$A + B\sqrt{-1} = K\mu - D\mu\sqrt{-1} - D\mu p\gamma[(\eta - mp^2) - kp\sqrt{-1}]:[(\eta - mp^2)^2 + k^2p^2],$$

гдѣ положено для простоты письма:

$$V^2 e^{2v\sqrt{-1}} = A + B\sqrt{-1}, \tag{28}$$

т. е.

$$A = n_0^2(1 - \varkappa_0^2), \quad B = -2n_0^2\varkappa \tag{29}$$

Положимъ теперь:

$$\lambda_m = 2\pi\omega_0\sqrt{\frac{m}{\eta}}; \; g_m = \frac{2\pi\omega_0 k}{\eta}; \; P_m = 4\pi C_0\mu \tag{30}$$

въ такомъ случаѣ предыдущее равенство распадается на два слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} A &= K\mu - \frac{P_m(\lambda_0^2 - \lambda_m^2)\lambda_0^2}{(\lambda_0^2 - \lambda_m^2)^2 + g_m^2\lambda_0^2} \\ B &= -D\mu + \frac{P_m g_m \lambda_0^3}{(\lambda_0^2 - \lambda_m^2)^2 + g_m^2\lambda_0^2} \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

причемъ пользовались соотношеніемъ:

$$p = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi\omega_0}{\lambda_0} \tag{32}$$

Остановимся нѣсколько на соотношеніяхъ (31).

По теоріи самого Максвелла, который не принималъ, да и не могъ принимать въ расчетъ дѣйствіе электроновъ (т. II, § 798, уравненія (3) и (4)), имѣли-бы вмѣсто (31) слѣдующія соотношенія при условіи $C_0 = 0$:

$$A = K\mu, \; B = -D\mu$$

Такимъ образомъ равенства (31) даютъ законы *дисперсіи* въ случаѣ, разумѣется, существованія одной полосы поглощенія въ спектрѣ тѣла.

Замѣтимъ, что по равенству (B) имѣемъ:

$$u = \frac{1}{\eta}\frac{(\lambda_0^2 - \lambda_m^2)\lambda_0^2 - g_m\lambda_0^3\sqrt{-1}}{(\lambda_0^2 - \lambda_m^2)^2 + g_m^2\lambda_0^2} \tag{B bis}$$

или

$$u = u' - u''\sqrt{-1} \tag{33}$$

гдѣ положено:

$$\eta u' = \frac{(\lambda_0^2 - \lambda_m^2)\lambda_0^2}{(\lambda_0^2 - \lambda_m^2)^2 + g_m^2\lambda_0^2}, \; \eta u'' = \frac{g_m\lambda_0^3}{(\lambda_0^2 - \lambda_m^2)^2 + g_m^2\lambda_0^2} \tag{34}$$

Если введемъ (33) въ дисперсіонное соотношеніе (A), то по сравненіи дѣйствительныхъ и мнимыхъ частей получимъ слѣдующія двѣ формулы:

$$\left.\begin{aligned} A &= K\mu - D_0\mu\gamma u' \\ B &= -D\mu + D_0\mu\gamma u'' \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

причемъ положено $Dp = D_0 = 4\pi C$ (36)

Такъ какъ по равенству (16)

$$\gamma = \frac{C_0}{C}\eta,$$

то по (36)

$$D_0\gamma = 4\pi C_0\eta \tag{37}$$

слѣдовательно для діэлектриковъ, т. е. когда $C = 0$, $D_0\gamma$ не равно нулю. Формула (A) даетъ намъ двѣ слѣдующія:

$$K\mu - D_0\mu\gamma u' = A, -D\mu - D_0\mu\gamma u' = B,$$

если вспомнимъ, что $Dp = D_0$. (a)

Первая формула даетъ:

$$\frac{A - K\mu}{A + D_0\mu\gamma} = \frac{D_0\mu\gamma u'}{K\mu + D_0\mu\gamma(1 - u')} \tag{b}$$

Пусть $\mu = 1$, что всегда можно допустить для малыхъ періодовъ и кромѣ того согласно H. A. Lorentz'у можно положить $K = 1$; въ такомъ случаѣ формула (b) даетъ:

$$\frac{A - 1}{A + D_0\gamma} = \frac{D_0\gamma u'}{1 + D_0\gamma - D_0\gamma u'}. \tag{c}$$

Вспомнивъ значеніе $D_0\gamma$, имѣемъ:

$$D_0\gamma = 4\pi C\gamma = 4\pi\frac{C_0}{K_0}.$$

Если положимъ, что

$$K_0 = 2\pi C_0, \tag{d}$$

то получимъ:

$$D_0\gamma = 2 \tag{e}$$

и формула (c) будетъ:

$$\frac{A - 1}{A + 2} = \frac{u'}{3 - 2u'}$$

или, приближенно, если g_m очень мало,

$$\frac{A - 1}{A + 2} = \frac{u'}{3} \tag{f}$$

Но (формула (34)):

$$u' = \frac{K_0\lambda_0^2}{\lambda_0^2 - \lambda_m^2},$$

а потому (f) будетъ:

$$\frac{A+2}{A-1} = \frac{3}{K_0}\left(1 - \frac{\lambda_m^2}{\lambda_0^2}\right) \tag{g}$$

Здѣсь можно взять n_0 вмѣсто A и тогда получится формула Лоренцовъ, данная *H. A. Lorentz*'омъ [1]) въ Лейденѣ и *Lorenz*'омъ въ Копенгагенѣ еще въ 1880 г.

III.

Если мы имѣемъ не одинъ родъ электроновъ, а нѣсколько, тогда обозначивъ m_i, C_i, K_i; f_i, g_i, h_i [2]) количества относящіяся къ i-му электрону, т. е. къ электрону i-го рода, тогда въ нашей теоріи взойдутъ измѣненія лишь въ величины R и p, q, r, которыя будетъ имѣть другой видъ, а именно: по формулѣ (6) имѣемъ для R:

$$R = \int 2\pi \sum_1^n \frac{1}{K_i}(f_i^2 + g_i^2 + h_i^2)d\tau - \int \frac{4\pi}{K}\sum_1^n (ff_i + gg_i + hh_i)d\tau +$$

$$+ \int \frac{4\pi}{K}(fp + gq + hr)d\tau + \int d\tau \sum_1^n \frac{m_i}{2}\left[f_i\frac{d^2 f_i}{dt^2} + g_i\frac{d^2 g_i}{dt^2} + h_i\frac{d^2 h_i}{dt^2}\right] +$$

$$+ \int d\tau \sum_1^n (r_1 f_i + r_2 g_i + r_3 h_i),$$

причемъ съ живой силой уже произведено преобразованіе, указанное формулой (8).

Затѣмъ для p, q, r будемъ имѣть:

$$p = \frac{4\pi C}{K}\left(f - \sum \gamma_i \frac{df_i}{dt}\right),\ q = \frac{4\pi C}{K}\left(g - \sum \gamma_i \frac{dg_i}{dt}\right),\ r = \frac{4\pi C}{K}\left(h - \sum \gamma_i \frac{dh_i}{dt}\right),$$

причемъ

$$\gamma_i = \frac{C_i}{C}\eta_i,\ \eta_i = \frac{K}{K_i} \tag{38}$$

и затѣмъ въ выраженіи для R:

$$r_1 = k_i \frac{df_i}{dt},\ r_2 = k_i \frac{dg_i}{dt},\ r_3 = k_i \frac{dh_i}{dt} \tag{39}$$

Въ такомъ случаѣ система (I) вполнѣ сохранитъ свой видъ; система (II) будетъ имѣть видъ сначала

---

[1]) *H. A. Lorentz*: The theory of electrons. § 123 (1909).

[2]) Здѣсь теперь вводится указатель i вмѣсто o.

$$\frac{m_i}{2}\frac{d^2 f_i}{dt^2}+r_1+\frac{2\pi}{K_i}f_i-\frac{4\pi}{K}f=0$$

или:

$$m^{(i)}\frac{d^2 f_i}{dt^2}+k^{(i)}\frac{df_i}{dt}+\eta_i f_i=f \tag{II bis}$$

и подобные уравненія для g_i и h_i, причемъ положено:

$$\frac{Km_i}{8\pi}=m^{(i)};\ \frac{Kk_i}{4\pi}=k^{(i)};\ \frac{K}{K_i}=\eta_i. \tag{40}$$

Система (III) сохранитъ свой видъ, но въ ней будетъ:

$$p=\frac{4\pi C}{K}\left(1-\sum\gamma_i p u_i\sqrt{-1}\right)f;\ q=\frac{4\pi C}{K}\left(1-\sum\gamma_i p u_i\sqrt{-1}\right)g;$$

$$r=\frac{4\pi C}{K}\left(1-\sum\gamma_i p u_i\right)h.$$

гдѣ положено:

$$f_i=u_i f,\ g_i=u_i g,\ h_i=u_i h \tag{41}$$

и для u_i имѣемъ выраженіе:

$$u_i=\frac{1}{\eta_i-m^{(i)}p^2+k^{(i)}p\sqrt{-1}} \tag{42}$$

или

$$u_i=\frac{(\eta_i-m^{(i)}p^2)-k^{(i)}p\sqrt{-1}}{(\eta_i-m^{(i)}p^2)^2+k^{(i)2}p^2} \tag{43}$$

Поэтому дисперсіонное уравненіе будетъ:

$$K\mu-D\mu(\sqrt{-1}+p\sum\gamma_i u_i)=V^2e^{2v\sqrt{-1}} \tag{A bis}$$

Если теперь положимъ:

$$\lambda_i=2\pi\omega_0\sqrt{\frac{m^{(i)}}{\eta_i}};\ g_i=\frac{2\pi\omega_0 k^{(i)}}{\eta_i};\ P_i=4\pi C_i\mu, \tag{44}$$

то (A bis) превратится въ слѣдующее уравненіе:

$$K\mu-D\mu\sqrt{-1}-\sum_{i=1}^{i=n}\frac{P_i[(\lambda_0^2-\lambda_i^2)\lambda_0^2-g_i\lambda_0^3\sqrt{-1}]}{(\lambda_0^2-\lambda_i^2)^2+g_i^2\lambda_0^2}=A+B\sqrt{-1}.$$

Отсюда находимъ:

$$\left.\begin{aligned} A &= K\mu - \sum_{1}^{n} {}_i \frac{P_i(\lambda_0^2 - \lambda_i^2)\lambda_0^2}{(\lambda_0^2 - \lambda_i^2)^2 + g_i^2\lambda_0^2} \\ B &= -D\mu + \sum_{1}^{n} {}_i \frac{P_i g_i \lambda_0^3}{(\lambda_0^2 - \lambda_i^2)^2 + g_i^2\lambda_0^2} \end{aligned}\right\} \quad (45)$$

Выдѣляя въ первой формулѣ цѣлую часть, получимъ:

$$A = K\mu - \sum_{1}^{n} {}_i P_i - \sum_{1}^{n} {}_i \frac{A_i\lambda_0^2 - B}{(\lambda_0^2 - \lambda_i^2)^2 + g_i^2\lambda_0^2},$$

гдѣ положено:

$$A_i = P_i(\lambda_i^2 - g_i^2), \ B_i = P_i\lambda_i^4$$

Количество $K\mu - \sum_{1}^{n} {}_i P_i$ можетъ считаться діэлектрической постоянной среды.

IV.

Обратимся теперь къ условіямъ на границѣ средины.

За пограничныя условія возмемъ (17) и (18). Для преломленнаго луча получимъ, отмѣчая величины относящіяся къ нему указателемъ *1*:

$$\alpha_1 = -\frac{4\pi\sqrt{-1}}{A\mu_1 K_1 p}(P_1 b_1 - N_1 c_1)e^{Q_1}; \ \beta_1 = -\frac{4\pi\sqrt{-1}}{AK_1\mu_1 p}(M_1 c_1 - P_1 a_1)e^{Q_1}$$

Изъ условій: $Q = Q' = Q_1$ находимъ:

$p_1 = p' = p$; $a_1 = a' = a$; $b_1 = b' = b$ и если примемъ за плоскость xz плоскость паденія, то: $b' = 0$, $b_1 = 0$, $b = 0$ и условія (17) теперь дадутъ:

$$\frac{Nc + N'c'}{K\mu} = \frac{N_1 c_1}{K_1\mu_1}, \ \frac{(Mc - Pa) + (M'c' - P'a)}{K\mu} = \frac{M_1 c_1 - P_1 a}{K_1\mu_1} \quad (46)$$

При этомъ имѣемъ условіе (25), которое будетъ здѣсь имѣть видъ:

$$Ma + Pc = 0, \ M'a + P'c' = 0, \ M_1 a + P_1 c_1 = 0 \quad (47)$$

Опредѣляя отсюда P, P' и P_1 и подставляя во второе системы (46), получимъ:

$$\frac{M(a^2 + c^2)}{c} + \frac{M'(a^2 + c'^2)}{c'} = \frac{M_1(a^2 + c_1{}^2)}{c_1}\frac{K\mu}{K_1\mu_1} \quad (47)$$

Условія (18) дадутъ:

$$M + M' = \frac{K}{K_1}M_1, \ N + N' = \frac{K}{K_1}N_1 \quad (48)$$

Для рѣшенія этихъ уравненій положимъ [1]) въ (47):

$$a^2 + c_1^2 = -A^2p^2V^2e^{2v\sqrt{-1}},\ c_1 = -Ap\sqrt{-1}\,Ue^{u\sqrt{-1}};\ a = -Apn\sin i\sqrt{-1},$$

$$c = -Apn\cos i\sqrt{-1};\ c' = Apn\cos i\sqrt{-1} \text{ и } n\sin i = n_1\sin\sigma,$$

тогда уравненія (47) дадутъ:

$$(M-M')\frac{n}{\cos i} = \frac{K\mu}{K_1\mu_1}\frac{V^2}{U}e^{(2v-u)\sqrt{-1}}M_1;\ (N-N')n\cos i = \frac{K\mu}{K_1\mu_1}Ue^{u\sqrt{-1}}N_1 \quad (49)$$

Рѣшеніе этихъ уравненій дано нами въ цитированномъ выше сочиненіи (стр. 95 и слѣдующія), стоитъ только положить тамъ $u = u_1 = 0$.

V.

Если имѣемъ внѣшнее магнитное поле, то легко ввести его дѣйствіе въ общее уравненіе (*1*). Стоитъ только въ R ввести работу магнитныхъ силъ въ видѣ, обозначивъ зарядъ электрона буквой e:

$$+\int\frac{Ae}{2}\left[\left(\gamma\frac{dg_0}{dt} - \beta\frac{dh_0}{dt}\right)f_0 + \left(\alpha\frac{dh_0}{dt} - \gamma\frac{df_0}{dt}\right)g_0 + \left(\beta\frac{df_0}{dt} - \alpha\frac{dg_0}{dt}\right)h_0\right]d\tau. \quad (50)$$

Тогда въ уравненіяхъ для f_0, g_0, h_0, т. е. въ уравненіяхъ (II), взойдутъ члены, которые дадутъ возможность объяснить явленіе Земана.

VI.

Докажемъ теперь соотношенія (24) стр. 8.

Съ этой цѣлью намъ надо проинтегрировать уравненія (II) стр. 6.

Такъ какъ у насъ взято (фор. 19, стр. 8):

$$f = Me^Q,\ g = Ne^Q,\ h = Pe^Q$$

и

$$Q = pt\sqrt{-1} + ax + by + cz,$$

то слѣдовательно намъ надо проинтегрировать уравненія вида:

$$m\frac{d^2f_0}{dt^2} + k\frac{df_0}{dt} + \eta f_0 = Me^Q.$$

Проинтегрируемъ сначала уравненіе безъ второй части, а именно:

$$m\frac{d^2f_0}{dt_0} + k\frac{df_0}{dt} + \eta f_0 = 0. \quad (a)$$

Пусть

$$f_0 = ce^{st}$$

[1]) Ср. «Электромагнитная теорія проводниковъ» автора, стр. 93—94.

будетъ частнымъ рѣшеніемъ уравненія (а).

Для опредѣленія s имѣемъ уравненіе:

$$ms^2 + ks + \eta = 0,$$

откуда находимъ:

$$s = -s_0 \pm p_0\sqrt{-1},$$

гдѣ положено:

$$s_0 = \frac{k}{2m},\ p_0 = \frac{\sqrt{4m\eta - k^2}}{2m} \tag{b}$$

причемъ k^2 вообще мало и меньше $4m\eta$.

Такимъ образомъ полное рѣшеніе уравненія (а) будетъ:

$$f_0 = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} \tag{c}$$

гдѣ положено:

$$s_1 = -s_0 + p_0\sqrt{-1},\ s_2 = -s_0 - p_0\sqrt{-1} \tag{d}$$

Подставляя теперь значеніе f_0 изъ (c) въ первоначальное уравненіе для f_0, получимъ для опредѣленія c_1 и c_2 слѣдующія уравненія:

$$e^{s_1 t}\frac{dc_1}{dt} + e^{s_2 t}\frac{dc_2}{dt} = 0$$

$$ms_1 e^{s_1 t}\frac{dc_1}{dt} + ms_2 e^{s_2 t}\frac{dc_2}{dt} = Me^{Q}.$$

Отсюда находимъ:

$$m(s_1 - s_2)e^{s_1 t}\frac{dc_1}{dt} = Me^{Q}$$

$$m(s_1 - s_2)e^{s_2 t}\frac{dc_2}{dt} = -Me^{Q}$$

Интегрируя эти уравненія, находимъ:

$$c_1 = \frac{Me^{-s_1 t}}{m(s_1 - s_2)(p\sqrt{-1} - s_1)}e^{Q} + f_0'$$

$$c_2 = -\frac{Me^{-s_2 t}}{m(s_1 - s_2)(p\sqrt{-1} - s_2)}e^{Q} + f_0''$$

гдѣ f_0, f_0'' окончательныя постоянныя интегрированія и суть функціи x, y, z.

Подставляя эти значенія c_1 и c_2 въ равенство (с), находимъ по приведеніи и сокращеніи на $(s_1 - s_2)$:

$$f_0 = \frac{Me^{Q}}{[ms_1 s_2 - p^2 - p(s_1 + s_2)\sqrt{-1}]} + f_0' e^{s_1 t} + f_0'' e^{s_2 t}.$$

Но формулы (d) даютъ:

$$s_1 s_2 = s_0^2 + p_0^2;\ s_1 + s_2 = -2s_0,$$

а потому

$$s_1 s_2 - p^2 - p(s_1 + s_2)\sqrt{-1} = s_0^2 + p_0^2 - p^2 + 2s_0 p\sqrt{-1},$$

или, подставляя значенія s_0 и p_0 изъ равенствъ (b), получимъ окончательно:

$$s_1 s_2 - p^2 - p(s_1 + s_2)\sqrt{-1} = \frac{\eta - mp^2 + kp\sqrt{-1}}{m},$$

а затѣмъ f_0 и слѣдовательно, g_0 и h_0 будутъ опредѣляться формулами:

$$\left.\begin{aligned} f_0 &= uf + f_0' e^{s_1 t} + f_0'' e^{s_2 t} \\ g_0 &= ug + g_0' e^{s_1 t} + g_0'' e^{s_2 t} \\ h_0 &= uh + h_0' e^{s_1 t} + h_0'' e^{s_2 t} \end{aligned}\right\} \tag{A}$$

гдѣ f_0', f_0'', $\ldots h_0''$ суть нѣкоторыя функціи x, y, z и сверхъ того положено:

$$\frac{1}{\eta - mp^2 + kp\sqrt{-1}} = u \tag{B}$$

Опредѣливъ f_0, g_0, h_0, найдемъ выраженія для составляющихъ полнаго электрическаго тока; для этого воспользуемся уравненіями (G) стр. 6. Находимъ при помощи уравненій (A) слѣдующія формулы:

$$p = \frac{4\pi C}{K}(1 - \gamma pu\sqrt{-1})f - \frac{4\pi C\gamma}{K}\left(s_1 f_0' e^{s_1 t} + s_2 f_0'' e^{s_2 t}\right),$$

$$q = \frac{4\pi C}{K}(1 - \gamma pu\sqrt{-1})g - \frac{4\pi C\gamma}{K}\left(s_1 g_0' e^{s_1 t} + s_2 g_0'' c^{s_2 t}\right),$$

$$r = \frac{4\pi C}{K}(1 - \gamma pu\sqrt{-1}h - \frac{4\pi C\gamma}{K}\left(s_1 h_0' e^{s_1 t} + s_2 h_0'' e^{s_2 t}\right),$$

Подставимъ теперь эти значенія p, q и r, а также значенія α, β, γ изъ уравненій (22) въ систему (III) стр. 6, получимъ:

$$[K\mu - D\mu(\sqrt{-1} + \gamma pu)]Me^{\varrho} + D\mu\gamma\sqrt{-1}\left(s_1 f_0' e^{s_1 t} + s_2 f_0'' e^{s_2 t}\right) =$$

$$= -\frac{e^{\varrho}}{A^2 p^2}\left[M(a^2 + b^2 + c^2) - a(Ma + Nb + Pc)\right]$$

и подобныя уравненія для g и h.

Положимъ для простоты письма и удобства вычисленій:

$$K\mu - D\mu(\sqrt{-1} + \gamma p u) = U,$$

$$Ma + Nb + Pc = A^2 p^2 S,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = - A^2 p^2 V^2 e^{2v\sqrt{-1}}$$

тогда получимъ слѣдующую систему уравненій:

$$(U - V^2 e^{2v\sqrt{-1}}) M e^{\varrho} - a S e^{\varrho} = - D\mu\gamma\sqrt{-1}\left(s_1 f_0' e^{s_1 t} + s_2 f_0'' e^{s_2 t}\right)$$

и подобныя уравненія для осей y и z.

Но лѣвыя части суть періодическія функціи времени, между тѣмъ какъ правыя, заключая общій множитель $e^{s_0 t}$, измѣняются со временемъ въ одномъ направленіи, а потому заключаемъ, что функціи f_0', g_0', h_0', а также f_0'', g_0'', h_0'' должны быть нулями.

Итакъ имѣемъ (форм. (А)):

$$f_0 = uf, \; g_0 = ug, \; h_0 = uh,$$

что мы и хотѣли доказать.

Такимъ образомъ у насъ останутся уравненія:

$$(U - V^2 e^{2v\sqrt{-1}}) M - aS = 0$$

$$(U - V^2 e^{2v\sqrt{-1}}) N - bS = 0$$

$$(U - V^2 e^{2v\sqrt{-1}}) P - cS = 0.$$

Отсюда безъ труда заключаемъ, что

$$S = 0, \; U - V^2 e^{2v\sqrt{-1}} = 0,$$

а это суть уравненія (25) и (А) стр. 9.

23 марта 1910.