Addition à l'article intitulé „Application de la méthode des fonctions fondamentales à l'équation différentielle des verges vibrantes élastiques“ [1])

par J. D. Tamarkine.

Le théorème 3 (pag. 45) peut être complété de la manière suivante:

Théorème. *Si la fonction $f(x)$ admet les dérivées de deux premiers ordres intégrables dans (a, b) et vérifie en outre les conditions aux limites*

$$f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0 \,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

on a

$$f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(IV)}$$

$$f'(x) = \sum_{s=1}^{\infty} A_s V'_s(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(IVa)}$$

$$A_s = \int_b^a pfV_s dx \,,$$

les deux séries

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s(x) \,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s V'_s(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

étant uniformément convergentes dans (a, b)

Le développement (IV) est déja établi dans notre article indiqué ci-devant (Décembre 1909). Dans un article plus récent [2]) (Avril 1910) *M. N. Kryloff* a déduit la même formule (IV), ainsi que la formule (IVa). Il montre en premier lieu que le système de fonctions $V_s(x)$ est

---

[1]) Voir: Communications de la Société mathématique de Kharkow, 2-ème Série, t. XII, № 1 (1910), pag. 19.

[2]) Voir: *N. Kryloff*, «Sur les développements en séries des fonctions etc.», Annales de l'Université de Kieff, 1910.

«fermé». On doit remarquer que *M. W. Stekloff* a déja indiqué [1]) que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système quelconque de fonctions orthogonales $V_s(x)$ $(s = 1, 2 \ldots)$ soit «fermé» est donnée par l'égalité

$$\int_a^b pf^2 dx = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^2 ; \quad A_s = \int_a^b pfV_s dx ,$$

$f(x)$ étant une fonction quelconque, bornée et intégrable dans (a, b); or cette égalité est établie dans notre article (théorème 2, pag. 40) pour les fonctions $V_s(x)$ considérées ici; donc il est évident sans démonstrations que le système de fonctions $V_s(x)$ est «fermé». *M. Kryloff* établit ensuite la convergence uniforme de la série (3), ce qui donne immédiatement la convergence uniforme de la série (2). Conformément aux méthodes générales de *M. W. Stekloff* [2]) on peut alors supprimer toutes les considérations ultérieures de *M. Kryloff*, parce que le système de $V_s(x)$ étant «fermé» la convergence uniforme de la série (2) est la seule condition qui suffit pour établir la formule (IV).

Dans cette «Addition» nous voulons montrer en quelques mots que la formule (IVa) n'est qu'une simple conséquence immédiate d'une inégalité de notre article mentionné plus haut.

Posons

$$f(x) = \sum_{s=1}^{n} A_s V_s(x) + R_n(x)$$

On a

$$f'(x) = \sum_{s=1}^{n} A_s V_s'(x) + R_n'(x) .$$

On a évidemment

$$[R_n'(x)]^2 = 2 \int_a^x R_n' R_n'' \, dx < G \int_a^b (R_n')^2 \, dx$$

G étant une constante ne dépendant pas de n et de x [3]). Or nous avons établi

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b (R_n')^2 \, dx = 0 , \ ^{4)}$$

---

[1]) Voir: Bulletin du XII Congrès de Mathématiciens russes. (Moscou, 28 Déc. 1909—6 Janv. 1910), № 10, pp. 425—426; idem: C. R. 7 Mars 1910.

[2]) Comp. *W. Stekloff*, «Sur quelques égalités générales etc., Mém. de l'Acad. de Sciences de S. Pétersb. 1904.

[3]) Voir notre article, pag. 44.

[4]) Ibidem, pag. 44. Cela résulte de l'inégalité:

$$\int_a^b (R_n')^2 dx < \sqrt{\int_a^b R_n^2 \, dx \int_a^b (R_n'')^2 \, dx} .$$

ce qui nous donne finalement

$$\lim_{n=\infty} R'_n(x) = 0\ ,$$

cette égalité ayant lieu *uniformément* dans (a, b). La formule (IVa) est ainsi démontrée, en même temps que la convergence uniforme de la série (3). Il en est de même avec la série (2) et la formule (IV), c. q. f. d.

On peut montrer sans peine que les séries (2) et (3) sont *absolument* convergentes. Considérons d'abord la série (3). On a évidemment:

$$|A_s V'_s| < \frac{\lambda_s A_s^2 + \dfrac{V'^2_s}{\lambda_s}}{2}.$$

La fonction $f(x)$ vérifiant les conditions (1) nous avons établi la convergence de la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s A_s^2$$ [1].

Il ne nous reste qu'à considérer la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{V'^2_s}{\lambda_s}.$$

Soit maintenant $F(x)$ une fonction quelconque, bornée et intégrable dans (a, b). Posons:

$$F(x) = \sum_{s=1}^{n} B_s \frac{V''_s(x)}{\sqrt{\lambda_s}} + \varrho_n(x)\,; \quad B_s = \int_a^b rF\, \frac{V''_s}{\sqrt{\lambda_s}}\, dx.$$

Par un calcul simple on trouve

$$\int_a^b r\varrho_n^2\, dx = \int_a^b rF^2 dx - \sum_{s=1}^{n} B_s^2 - \int_a^b q \left(\sum_{s=1}^{n} B_s \frac{V_s}{\sqrt{\lambda_s}} \right)^2 dx \geq 0\,,$$

ce qui nous montre que la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} B_s^2$$

est convergente dans (a, b). Si l'on pose

$$F(z) = \frac{1}{r(z)} \quad \text{pour} \quad a \leq z \leq x$$

$$F(z) = 0 \quad \text{pour} \quad x < z \leq b\,,$$

---

[1]) Ibidem, pag. 41.

on a

$$B_s = \int_a^x \frac{V_s''}{\sqrt{\lambda_s}} dx = \frac{V_s'(x)}{\sqrt{\lambda_s}},$$

ce qui nous affirme la convergence absolue de la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{V_s'^2}{\lambda_s}.$$

Donc la série (3) est absolument convergente. En intégrant membre par membre on trouve la série (2) qui est alors de même absolument convergente, c. q. f. d.

On peut compléter les considération précédentes par la proposition suivante:

La fonction $f(x)$ ayant les dérivées de deux premiers ordres, intégrables dans (a, b), les conditions (1) sont non seulement suffisantes, mais encore nécessaires pour qu'on ait toujours

$$\int_a^b (R_n'')^2 \, dx < G. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

Soit, en effet, $f(x)$ une fonction ayant les dérivées de deux premiers ordres, intégrables dans (a, b), et telle encore que l'inégalité (α) soit satisfaite. On trouve

$$R_n(a) = f(a); \quad R_n'(a) = f'(a); \quad R_n(b) = f(b); \quad R_n'(b) = f'(b)$$

$$\int_a^b (R_n')^2 dx = [f(b) f'(b) - f(a) f'(a)] - \int_a^b R_n R_n'' dx < F, \ldots\ldots (\beta)$$

F étant une constante ne dépendant pas de n [parce qu'on a

$$\lim_{n=\infty} \int_v^b R_n R'' dx \leq \lim_{n=\infty} \sqrt{G \int_a^b R_n^2 \, dx} = 0,$$

en vertu de (α)]. L'inegalité (18) de notre article mentionné plus haut (pag. 44) nous donne alors immédiatement

$$\lim_{n=\infty} R_n(x) = f(a) = f(b) = 0.$$

On aura alors

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b (R_n')^2 dx = 0,$$

d'où l'on déduit de la manière analogue

$$\lim_{n=\infty} R'_n(x) = f'(a) = f'(b) = 0\,,$$

c. q. f. d. Rémarquons enfin que toutes les considérations précédentes restent encore valables, quand la fonction $f(x)$ admet la dérivée unique dans $(a,\ b)$ qui peut être présentée sous la forme $\int \varphi(x)\,dx$, $\varphi(x)$ étant une fonction intégrable dans $(a,\ b)$, comme nous l'a indiqué *M. Stekloff.*

S. Pétersbourg, 20 Septembre 1910.