Un théorème sur les fonctions continues

par G. Grousinzeff.

Considérons une fonction réelle uniforme

$$y = f(x)$$

bornée et définie pour toutes les valeurs d'une variable réelle x dans l'intervalle quelconque borné (a, b), extremités comprises.

Soit A l'affixe d'une valeur de x dans cet intervalle et soient $M(f, A)$, $m(f, A)$ et

$$\omega(f, A) = M(f, A) - m(f, A)$$

le maximum, le minimum et l'oscillation de f *au point* A [1]).

La fonction $f(x)$ est dite continue dans l'intervalle (a, b), si partout dans cet intervalle ω est égal à zéro.

Au point de vue de la théorie des ensembles les fonctions continuesi jouissent d'une propriété remarquable:

Étant donné dans l'intervalle (a, b) un ensemble fermé quelconque, l'ensemble des valeurs correspondantes d'une fonction continue sera auss fermé.

Je n'ai pas à démontrer ici ce beau théorème, dû à M. Jordan [2]).

Nous allons nous poser la question, si cette propriété est caractéristique pour les fonctions continues?

Un exemple très simple nous montrera que le théorème réciproque de celui de M. Jordan n'est pas vrai.

Soit

$$y = 1 \qquad \text{pour} \qquad \frac{1}{2} < x \leq 1$$

$$y = \frac{1}{2} \qquad \text{pour} \qquad \frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2}$$

---

1) V. par ex. *Baire.* Leçons sur les fonctions discontinues, pp. 70—71.

2) Cours d'analyse. t. I. 2-e éd. pp. 51—53.

et en général

$$y = \frac{1}{n} \quad \text{pour} \quad \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$$

soit enfin

$$y = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0.$$

La fonction est évidemment discontinue, mais aux ensembles fermés des x correspondent toujours les ensembles fermés des y.

En effet, à chaque ensemble fermé des x dans l'intervalle $(0, 1)$ contenant le zéro comme point limite correspond un ensemble fermé des y, ayant le zéro pour point limite unique; à un ensemble fermé des x n'ayant pas zéro comme point limite correspond évidemment un ensemble fini c'est à dire fermé des y.

Démontrons que, *si à chaque ensemble* **infini et fermé** *des valeurs de la variable indépendente correspond toujours un ensemble* **infini et fermé** *des valeurs de la fonction, la fonction est continue.*

Nous devons dans ce but entrer dans quelques détails sur les façons dont la fonction discontinue se comporte au voisinage d'un point.

Considérons sur l'axe des y l'ensemble E qui consiste de point $f(A)$ et de limites vers lesquelles tendent les valeurs de la fonction $f(x)$ auprès $x = A$ et dont $M(f, A)$ et $m(f, A)$ sont la borne supérieure et la borne inférieure.

Remarquons, en passant, que l'ensemble E est fermé, le mode de démonstration étant le même que pour les ensembles dérivés; en particulier E peut se réduire à un point—c'est le cas de continuité [1]).

Désignons par G l'ensemble des points d'un intervalle suffisamment petit CD contenu dans (a, b) et dont A est un point intérieur et par H l'ensemble des valeurs de $f(x)$ correspondantes; tous deux sont évidemment bornés.

Désignons enfin par H' l'ensemble limite pour $CD = 0$ de l'ensemble dérivé de H et par H_1 l'ensemble des points de E non contenus dans H'.

Ce sont les y des points infiniment voisins de notre point qui sont situés seulement sur les droites parallèles à l'axe des x.

---

[1]) E ne doit pas être necéssairement fini.

Voici un exemple d'une telle fonction dans l'intervalle $(0,1)$.

Écrivons la variable indépendente x en système décimal.

Soit $y = 1$, si x est une fraction infinie. Lisons x, s'il est une fraction finie, de la main droite à gauche et faisons y égal à la fraction ainsi obtenue. Si par ex., $x = 0{,}231$, $y = 0{,}132$.

Soit enfin $y = 1$, si $x = 1$ et si $x = 0$.

Il est évident que y sera toujours compris entre $0{,}1$ et 1 et que, quelque soit x, y peut s'approcher autant que l'on veut de chaque nombre compris entre $0{,}1$ et 1. C'est à dire que l'ensemble E pour x quelconque contient *tous* les points de l'intervalle de $0{,}1$ à 1.

Chaque point de H', soit e_1, est au contraire caracterisé par la propriété d'avoir dans ses environs un nombre infini de points de H non égaux à e_1.

S'il en était autrement, on pourrait prendre CD assez petit, pour que H ne contienne près de e_1 que des points égaux à e_1, donc e_1 serait un point de H_1, mais non de H'.

Si $f(A)$ n'appartient pas à H', joignons le à H_1.

Alors E, qui est l'ensemble limite de H pour $CD = 0$.

$$E = H' + H_1.$$

En général H' contient des points non égaux à $f(A)$.

Il nous est important de considérer les cas particuliers suivants:

1) $$H' = 0 \qquad H_1 \neq 0.$$

Telle est la fonction du premier exemple dans tous les points ou $x = \frac{1}{n}$, n etant un entier.

2) H' ne contient qu'un seul point $f(A)$; $H_1 \neq 0$.

Puisque dans ces deux cas $H_1 \neq 0$, il y a aux environs du point $x = A$ une infinité de valeurs de la fonction égales entre elles; autrement dit il existe un ensemble des x, infini et ayant A comme point limite, auquel correspond *une* valeur de $f(x)$.

Prenons de cet ensemble un ensemble particulier à point limite unique A et ajoutons y le point A. Nous aurons un ensemble infini et fermé des x, auquel correspond l'ensemble des y, qui contient deux points au plus.

Donc, *si la fonction $f(x)$ a au moins dans un point des singularités de ces deux espèces particulières nous pouvons toujours choisir un ensemble infini et fermé des x, l'ensemble des y correspondants étant fini.*

Revenons au cas général.

H_1 différant de zéro ou non H' doit contenir alors au moins un point distinct de $f(A)$, soit e_1.

L'ensemble G de points de l'intervalle CD, auquel correspond H entier, a entre autres points limites le point A.

Rejetons de l'ensemble G tous les points dont les ordonnées sont précisément égales à e_1. Comme nous avons dit, l'ensemble des x ne se reduira pas alors à un nombre fini de points.

De cet ensemble resté des x nous prenons un ensemble infini particulier G_0, fermé et à point limite unique A.

Quant à l'ensemble correspondant des y, soit H_0, il ne le sera pas car e_1, qui est un de ses points limites, ne lui appartient pas.

Donc, *si la fonction $f(x)$ a au moins dans un point, la singularité d'espèce que j'ai appelée générale, nous savons toujours prendre un ensemble fermé des x, tel que l'ensemble correspondant des y ne soit pas fermé.*

En résumé si à chaque ensemble *infini et fermé* de valeurs de la variable indépendente correspond toujours un ensemble de valeurs de la fonction qui est aussi *infini et fermé*, la fonction est *continue*.

Donc le théorème réciproque à celui de M. Jordan n'est vrai que sous la restriction indiquée ci-dessus.

Il est évident qu'une telle fonction ne sera pas la fonction continue générale: quelques fonctions continues avec une infinité des maxima et minima (par ex., $x \sin \frac{1}{x}$) et les fonctions qui sont constantes dans quelques intervalles ne jouissent pas de cette propriété.

Considérons la classe de fonctions continues caractérisées par cette propriété.

Je dis que c'est la classe des fonctions dont la fonction inverse a partout *un nombre fini* des valeurs.

En effet c'est dans ce cas seulement que nous ne pouvons pas choisir un ensemble infini des x, l'ensemble correspondant des y étant fini.

Donc, ce sont les seules fonctions continues telles qu'à chaque ensemble infini et fermé des x correspond un ensemble infini et fermé des y.