Къ вопросу объ особенныхъ элементахъ коннекса.

IV. Основанія теоріи сопряженнаго коннекса.

Д. М. Синцова.

Въ развитіи теоріи коннексовъ важную роль сыграла статья K. Stephanos. Sur la théorie des connexes conjugués (Bull. des Sc. math. et astr (2) IV. 1880. P. 1-ère, p. 318—328). Къ ней примыкаютъ нѣкоторыя новѣйшія изслѣдованія, напр., Stuyvaert. Recherches relatives aux connexes de l'espace. Belg. Mém Cour. 8⁰ t. 61.

Небольшая по объему, она не содержитъ доказательствъ, а перечисляетъ лишь рядъ теоремъ, воспроизводя ходъ мысли автора. Представляетъ поэтому интересъ дать аналитическія доказательства всѣхъ разсматриваемыхъ свойствъ коннексовъ. Такія доказательства, только для случая коннекса кватернарнаго и были приведены частію въ моей работѣ: «Теорія коннексовъ въ пространствѣ etc.» Казань 1895. (Ученыя Записки Казан. Унив. 1894—5 гг.).

Въ настоящее время я намѣреваюсь дать систематическое изложеніе такихъ доказательствъ именно для тернарнаго коннекса. Такое изложеніе представляется мнѣ желательнымъ по связи съ другими моими изслѣдованіями по теоріи коннексовъ, часть которыхъ уже опубликована, въ статьяхъ подъ заглавіемъ «Къ вопросу объ особенныхъ элементахъ коннекса» ст. I, II. III. Изв. Каз. Физ.-Мат. Общ. (2) т. XI n⁰ 4. 1901 г. и Сообщенія Харьк. Мат. Общ. (2) т. X n⁰ 6 и XII n⁰ 1.

Замѣчу, что существенная часть нижеслѣдующаго была мною получена и изложена еще въ 1900 г., при обработкѣ первой изъ указанныхъ выше статей. По тѣсной связи съ нею я и остановился на томъ же заглавіи, чтобы тѣмъ подчеркнуть внутреннюю связь всѣхъ этихъ работъ.

§ 1.

Конфигурацію, опредѣленную уравненіемъ

$$f(x_1 x_2 x_3\,;\ u_1 u_2 u_3) = 0\,, \tag{1}$$

однороднымъ въ отношеніи точечныхъ координатъ x и въ отношеніи координатъ прямой u, Клебшъ назвалъ, какъ извѣстно, *коннексомъ*.

Это конфигурація трехъ измѣреній. Каждой точкѣ плоскости въ ней принадлежитъ кривая U_x, касательныя къ которой образуютъ вмѣстѣ съ точкою x элементы коннекса (1), и каждой прямой u—кривая X_u, точки которой дополняютъ ее до элемента коннекса.

Если возьмемъ какой-нибудь элементъ (x, u), принадлежащій коннексу, то x есть точка кривой X_u, и прямая u—касательная U_x. Пусть v есть касательная X_u въ точкѣ x, и y—точка прикосновенія u къ U_x. Когда переберемъ всѣ элементы (x, u) даннаго коннекса (1), элементы (y, v), такимъ образомъ опредѣленные, опишутъ новый коннексъ, которому Клебшъ придалъ названіе *сопряженнаго*. K. Stephanos предлагаетъ изучать *двойную связь* или двойное соотвѣтствіе, которое такимъ образомъ устанавливается между x и y, между u и v. Эти соотвѣтствія устанавливаются первое уравненіями:

$$\varrho y_i = \frac{\partial f(x\,;\ u)}{\partial u_i} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{2}$$

опредѣляющими точку y, второе—уравненіями

$$\sigma v_k = \frac{\partial f(x\,;\ u)}{\partial x_k} \qquad (k = 1,\ 2,\ 3) \tag{3}$$

опредѣляющими прямую v.

Необходимо отмѣтить, что въ уравненіи (1) можно считать x и u точками и прямыми одной плоскости или разныхъ и сообразно этому коваріантныя образованія одни сохраняются неизмѣнными лишь тогда когда u и x подвергаются взаимнымъ проэктивнымъ преобразованіямъ, другія—и тогда, когда x и u подвергаемъ независимымъ между собою проэктивнымъ преобразованіямъ. K. Stephanos придаетъ особенное значеніе послѣднимъ. Двойная связь, устанавливаемая уравненіями (1), (2), (4) между коннексомъ и ему сопряженнымъ, между x, y и между u, v, принадлежитъ къ числу послѣднихъ. Дѣйствительно, кривая X_u, въ плоскости x-овъ принадлежащая прямой u плоскости u-овъ, имѣетъ въ точкѣ x касательною v и точно также кривая U_x, огибаемая прямыми u, имѣетъ точкою прикосновенія той-же прямой u точку y, и какъ X_u можетъ быть разсматриваема, какъ огибаемая прямыми v, такъ и U_x можетъ быть разсматриваема, какъ геометрическое мѣсто точекъ y. Въ дальнѣйшемъ мы будемъ однако постоянно разсматривать плоскости x-овъ и u-овъ совмѣщенными.

Двойное соотвѣтствіе, опредѣляемое уравненіями (1), (2), (3), при этомъ геометрически можетъ быть описано такъ.

Возьмемъ точку y и пучекъ прямыхъ u, черезъ нее проходящихъ. Существуетъ ∞^1 кривыхъ U_x коннекса, которыя касаются прямыхъ пучка въ точкѣ y. Эти кривыя опредѣляются уравненіями (1) и (2), гдѣ y считаемъ данными. Каждая изъ этихъ кривыхъ принадлежитъ въ коннексѣ нѣкоторой точкѣ x плоскости. Всѣмъ ∞^1 кривымъ такого пучка отвѣчаютъ ∞^1 точекъ, образующихъ нѣкоторую кривую $\boldsymbol{X}_y$. Кривая эта представляетъ собою фигуру, преобразованную изъ точки y соотвѣтствіемъ (2) при посредствѣ (1), и обладаетъ прежде всего свойствами:

I. *Геометрическое мѣсто* $\boldsymbol{X}_y$ *точекъ* x, *соотвѣтствующія коимъ кривыя* U_x *коннекса (1) проходятъ черезъ неизмѣнную точку* y, *есть въ тоже время огибающая кривыхъ* X_u, *соотвѣтствующихъ прямымъ* u, *проходящимъ черезъ точку* y.

Прямой u, касательной въ y къ одной изъ кривыхъ U_x пучка принадлежитъ въ коннексѣ кривая X_u, проходящая черезъ точку x; безконечно-близкой прямой $u+du$ пучка принадлежитъ кривая X_{u+du}, содержащая точку $x+dx$, безконечно-близкую къ x. Когда du стремятся къ нулю, dx также, а прямая, соединяющая точки x и $x+dx$, обращается въ предѣлѣ въ касательную къ кривой, геометрическому мѣсту предѣльныхъ точекъ пересѣченія кривыхъ X_u и X_{u+du}, которыми и будетъ кривая $\boldsymbol{X}_y$. Аналитически это получится такъ: всѣ X_u опредѣляются уравненіемъ (1), гдѣ параметры u связаны уравненіемъ

$$u_y = 0 \quad (\equiv \Sigma u_i y_i). \tag{4}$$

Чтобы получить огибающую, надо по извѣстному правилу исключить λ и u изъ уравненій:

$$f'_{u_i} + \lambda y_i = 0, \qquad (i=1,\,2,\,3) \tag{5}$$

при помощи (1) и (4). Но уравненія (5) только обозначеніемъ множителя пропорціональности отличаются отъ (2), и при ихъ существованіи (4) есть слѣдствіе (1).

Точно также обнаруживается двойственная теорема:

II. *Огибающая* $\boldsymbol{U}_v$ *прямыхъ* u, *соотвѣтствующія которымъ кривыя* X_u *касаются одной и той же прямой* v, *есть въ тоже время огибающая кривыхъ* U_x, *соотвѣтствующихъ точкамъ* x *прямой* v.

Кривая $\boldsymbol{U}_v$ опредѣляется уравненіями (1) и (3) при данныхъ v. Кривыя U_x, соотвѣтствующія точкамъ x прямой v, опредѣляются (1) при условіи

$$v_x = 0. \tag{6}$$

Ихъ огибающая опредѣлится уравненіями

$$f'_{x_i} + \mu v_i = 0, \tag{7}$$

которыя только обозначеніемъ отличаются отъ (3).

III. *Кривыя X_u, принадлежащія прямымъ u пучка (4), касаются $\boldsymbol{X}_y$ въ m^2 точкахъ каждая; этимъ точкамъ принадлежатъ кривыя U_x, касающіяся въ точкѣ y прямыхъ пучка (4).*

Дѣйств., сосѣднія кривыя X_u и X_{u+du}, принадлежащія двумъ безконечно-близкимъ прямымъ пучка $u_y = 0$, пересѣкаются въ m^2 точкахъ; на каждой X_u предѣльныхъ точекъ будетъ m^2; въ нихъ по свойству огибающихъ и касаются X_u и $\boldsymbol{X}_y$.

Иначе: изъ уравненій $f(x; u) = 0$ и $f(x; u + du) = 0$ кривыхъ X_u и X_{u+du} заключаемъ:

$$\sum f'_u du = 0;$$

кромѣ того, въ силу $u_y = 0$ и $(u + du)_y = 0$ имѣемъ $\sum y_i du_i = 0$.

Изъ уравненія (1), которое можемъ переписать $\sum u_i f'_u = 0$, и изъ $\sum f'_u du = 0$ слѣдуетъ, что f'_{u_i} пропорціональны минорамъ матрицы

$$\left\| \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ du_1 & du_2 & du_3 \end{matrix} \right\|$$

Тѣмъ же минорамъ въ силу $u_y = 0$ и $\sum y_i du_i = 0$ пропорціональны и y_i. Отсюда

$$\frac{1}{y_1} f'_{u_1} = \frac{1}{y_2} f'_{u_2} = \frac{1}{y_3} f'_{u_3}, —$$

уравненія, равносильныя (2), имѣющія m^2 общихъ рѣшеній и выражающія при условіи (4), что y есть точка прикосновенія прямой u пучка (4) съ кривой U_x, соотвѣтствующей какой-нибудь предѣльной точкѣ кривой X_u.

Также обнаруживаемъ и двойственную теорему:

IV. *Кривыя U_x, принадлежащія точкамъ x прямой $v_x = 0$, имѣютъ съ $\boldsymbol{U}_v$ n^2 общихъ касательныхъ каждая; этимъ прямымъ принадлежатъ кривыя X_u, которыя касаются прямой v.*

Предѣльныя точки опредѣляются въ пересѣченіи U_x и U_{x+dx}, гдѣ $v_x = 0$ и $v_{x+dx} = 0$ (или $v_{dx} = 0$ т. е. уравненіями

$$f(x;u) = 0\,(1), \quad v_x = 0,$$

$$\sum f'_x dx = 0, \qquad v_{dx} = 0.$$

Переписавъ (1) подъ видомъ $\sum x f'_x = 0$, видимъ, что f'_{x_i} пропорціональны минорамъ матрицы:

$$\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{Vmatrix}$$

Тѣмъ же минорамъ пропорціональны въ силу двухъ другихъ уравненій и v_i. Поэтому

$$\frac{f'_{x_1}}{v_1} = \frac{f'_{x_2}}{v_2} = \frac{f'_{x_3}}{v_3}.$$

Два эти уравненія при данныхъ x_i, выполняющихъ $v_x = 0$, имѣютъ n^2 общихъ рѣшеній. Пусть w одно изъ нихъ. Тогда въ силу $v_x = 0$ эти уравненія даютъ $f(x;w) = 0$, а также $f'_{x_i}(x;w) = \sigma . v_i$ т. е. v есть касательная къ X_w въ точкѣ x.

V. *Кривая U_x, принадлежащая въ коннексъ (1) точкѣ x кривой $\boldsymbol{X}_y$, имѣетъ въ точкѣ y своею касательною прямую u, которой соотвѣтствуетъ кривая X_u, касающаяся $\boldsymbol{X}_y$ въ точкѣ x.*

Кривая U_x опредѣляется уравненіемъ (1), при чемъ x удовлетворяетъ уравненіямъ кривой $\boldsymbol{X}_y$, т. е. (1) и (2). Ея касательная въ точкѣ y есть одна изъ проходящихъ черезъ y прямыхъ u, которой въ коннексѣ (1) принадлежитъ кривая X_u. Уравненіе послѣдней $f(X;u) = 0$ въ силу (1)—(2) удовлетворяется при $X \equiv x$. Соотвѣтственная касательная

$$\sum X f'_x(x;\ u) = 0.$$

Касательная же въ этой точкѣ къ $\boldsymbol{X}_y$ имѣетъ уравненіе

$$\sum\nolimits_j X_j \left(f'_{x_j} + \sum f'_{u_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) = 0. \tag{8}$$

Дифференцируя (2), имѣемъ

$$\sum_{1}^{3}{}_k\, f''_{u_i u_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + f''_{u_i x_j} = 0 \qquad (j,\ i = 1,\ 2,\ 3)$$

Умножая на u_j и суммируя, найдемъ по свойству однородныхъ функцій

$$(n-1)\sum_k f'_{u_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}+nf'_{x_j}=0\,.$$

Подставляя значеніе суммы отсюда въ (8), приведемъ уравненіе касательной къ $\boldsymbol{X}_y$ къ виду

$$-\frac{1}{n-1}\sum X_i\,f'_{x_i}=0$$

т. е. касательныя X_u и $\boldsymbol{X}_y$ въ точкѣ x послѣдней будутъ общія.

Двойственно: VI. *Кривая X_u, принадлежащая касательной u кривой $\boldsymbol{U}_v$, касается v въ точкѣ x, принадлежащая которой кривая U_x касается $\boldsymbol{U}_v$, и ихъ общею касательною является прямая u.*

Кривая X_u опредѣляется уравненіемъ (1), причемъ u удовлетворяетъ (1) и (3), т. е. касается $\boldsymbol{U}_v$ и $v_x=0$,—т. о. при данныхъ u точка x лежитъ на X_u и на $\boldsymbol{U}_v$, и касательная къ X_u въ точкѣ x есть v. Принадлежащая такой точкѣ кривая U_x касается прямой u въ точкѣ $\sum Uf'_u=0$, а кривой $\boldsymbol{U}_v$— въ точкѣ

$$\sum\left(f'_{u_k}+\sum_j f'_{x_j}\frac{\partial x_j}{\partial u_k}\right)U_k=0.$$

Но дифференцируя (3) находимъ:

$$\sum_j f''_{x_j\,x_i}\frac{\partial x_j}{\partial u_k}+f''_{x_j u_k}=0,$$

или умножая на x_i и суммируя по i, имѣемъ по свойству однородныхъ функцій:

$$(m-1)\sum_j f'_{x_j}\frac{\partial x_j}{\partial u_k}+mf'_{u_k}=0\qquad (k=1,\,2\,,\,3)$$

Подставляя въ уравненіе точки прикосновенія $\boldsymbol{U}_v$ приводимъ это уравненіе къ виду:

$$-\frac{1}{(m-1)}\sum f'_{u_k}U_k=0\,,$$

т. е. X_u и $\boldsymbol{U}_v$ имѣютъ общую точку прикосновенія на прямой u, т. е. имѣютъ эту прямую своею общею касательною.

Основною теоремою въ изложеніи K. Stephanos'а является теорема VII. *Геометрическое мѣсто $\boldsymbol{X}_y$ точекъ x, которымъ въ коннексѣ (1) соотвѣтствуютъ кривыя U_x, проходящія черезъ y, совпадаетъ съ кривою U_y, принадлежащей точкѣ y въ сопряженномъ коннексѣ.*

Уравненія (1) и (2) даютъ по исключеніи u уравненіе $\boldsymbol{X}_y$ въ точечныхъ координатахъ. Чтобы получить уравненіе $\boldsymbol{X}_y$ въ тангенціальныхъ координатахъ v, дифференцируемъ (1), считая u функціями x, опредѣленными уравненіями (2). Имѣемъ:

$$\sigma v_k = f'_{x_k} + \sum_i f'_{u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$$

или въ силу (2):

$$\sigma v_k = f'_{x_k} + \varrho \sum_i y_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \tag{9}$$

Но въ силу $u_y = 0$ имѣемъ

$$\sum y_i \frac{\partial u_i}{\partial x_u} = - \sum u_i \frac{\partial y_i}{\partial x_k}$$

или съ помощью (2):

$$= \sum_i u_i \frac{\partial\left(\frac{1}{\varrho} f'_{u_i}\right)}{\partial x_k}$$

$$= \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial \varrho}{\partial x_k} \sum u_i f'_{u_i} - \frac{1}{\varrho} \sum u_i f''_{u_i\, x_k}$$

$$= \frac{n}{\varrho^2} \frac{\partial \varrho}{\partial x_k} f(x, u) - \frac{n}{\varrho} f'_{x_k}$$

или съ помощью (1) для всѣхъ (x, u), его выполняющихъ:

$$\sum y_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = - \frac{n}{\varrho} f'_{x_k}$$

Подставляя въ (9) находимъ:

$$\sigma v_k = (1 - n) f'_{x_k}, -$$

что и требовалось доказать. Подобнымъ образомъ докажемъ двойственную теорему:

VIII. *Огибающая $\boldsymbol{U}_v$ прямыхъ u, коимъ въ коннексъ (1) соотвѣтствуютъ кривыя X_u, касающіяся прямой v, совпадаетъ съ кривой Y_v соотвѣтствующей v въ коннексѣ сопряженномъ.*

Тангенціальное уравненіе U_v получается исключеніемъ $x_1 x_2 x_3$ изъ уравненій (1) и (3),—причемъ отсюда $v_x = 0$. Ищемъ точечное уравненіе $\boldsymbol{U}_v$; его найдемъ извѣстнымъ пріемомъ:

$$\varrho y_i = f'_{u_i} + \sum_k f'_{x_k} \frac{\partial x_k}{\partial u_i} \equiv f'_{u_i} + \sigma \sum_k v_k \frac{\partial x_k}{\partial u_i}$$

Но дифференцируя $v_x = 0$ имѣемъ:

$$\sum v_k \frac{\partial x_k}{\partial u_i} = -\sum x_k \frac{\partial v_k}{\partial u_i}$$

а

$$\frac{\partial v_k}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{1}{\sigma} f'_{x_k}\right) = -\frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial \sigma}{\partial u_i} f'_{x_k} + \frac{1}{\sigma} f''_{u_i x_k}.$$

Отсюда

$$-\sum_k x_k \frac{\partial v_k}{\partial u_i} \equiv \frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial \sigma}{\partial u_i}\sum x_k f'_{x_k} - \frac{1}{\sigma}\sum x_k f''_{u_i x_k} =$$

$$= \frac{m}{\sigma^2}\frac{\partial \sigma}{\partial u_i} f(x;u) - \frac{m}{\sigma} f'_{u_i}$$

и слѣдовательно,

$$\varrho y_i = (1-m) f'_{u_i} + \frac{m}{\sigma} f(x;u),$$

и въ силу уравненія (1) для элементовъ коннекса (1)

$$\varrho y_i = (1-m) f'_{u_i}$$

ч. и т. д.

Итакъ кривыя $\boldsymbol{X}_y$ и $\boldsymbol{U}_v$ совпадаютъ съ кривыми V_y и Y_v, соотвѣтствующими точкѣ y, соотв. прямой v въ сопряженномъ коннексѣ.

По доказанному (теор. III) кривыя X_u и V_y касаются прямой v въ точкѣ x, и кривыя U_x и Y_v — прямой u въ точкѣ y. Такимъ образомъ между ними связь взаимная, и отсюда вытекаетъ результатъ Клебша:

IX. *Коннексомъ, сопряженнымъ сопряженному, является данный коннексъ*, и связи (x, y) и (v, u) также сопряженны одна другой.

Каждые два элемента (y, v) и (x, u) совершенно симметричны относительно проходящихъ черезъ нихъ соотвѣтствующихъ кривыхъ и т. о. если для сопряженнаго коннекса построимъ кривую $\boldsymbol{Y}_x$, гомологичную $\boldsymbol{X}_y$, то она совпадаетъ съ U_x и кривая $\boldsymbol{V}_u$, гомологичная $\boldsymbol{U}_v$, совпадаетъ съ X_u.

У К. Stephanos'а это является однако, какъ слѣдствіе основной теоремы (теорема VII и VIII), и значительно ниже приводится теор. IX. Можно поэтому поставить себѣ задачу доказать это независимо отъ теор. IX. Мы можемъ прійти къ этому путемъ нижеслѣдующихъ разсужденій.

Сопряженный коннексъ, какъ было уже упомянуто, опредѣляется уравненіемъ

$$f(x; u) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = \varrho y_i \quad (2), \qquad \frac{\partial f}{\partial x_k} = \sigma v_k \quad (3), \qquad (i=1.2.3)$$

причемъ (1) съ помощью (2) можетъ быть замѣнено черезъ $u_y = 0$, а съ помощью (3) черезъ $v_x = 0$.

Попробуемъ составить для него кривую $\boldsymbol{Y}_{x'}$, т. е. геометрическое мѣсто такихъ точекъ y, которымъ въ (сопряженномъ) коннексѣ принадлежатъ кривыя V_y, проходящія черезъ данную точку x'.

Мы должны такимъ образомъ составить точечное уравненіе кривой V_y, опредѣленной (1), (2) и (3) при *данныхъ* y_i. Дифференцируя (1) въ предположеніи (2) и (3), имѣемъ

$$\tau z_k = \sum\nolimits_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial v_k} + \frac{\partial f}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial v_k} \right)$$

или

$$\tau . z_k = \sum\nolimits_i \left(\frac{1}{\sigma} v_i \frac{\partial x_i}{\partial v_k} + \frac{1}{\varrho} y_i \frac{\partial u_i}{\partial v_k} \right)$$

Но въ силу $u_y = 0$ и $v_x = 0$

$$\sum y_i \frac{\partial u_i}{\partial v_k} = - \sum u_i \frac{\partial y_i}{\partial v_k} = 0,$$

ибо y_i данныя

$$\sum v_i \frac{\partial x_i}{\partial v_k} = - \sum x_i \frac{\partial v_i}{\partial v_k} = - x_k$$

Итакъ

$$\tau . z_k = - \frac{1}{\varrho} x_k.$$

Сюда мы и должны подставить $z_i = x'_i$; такимъ образомъ $x'_i = k . x_i$, т. е. для полученія кривой $\boldsymbol{Y}_{x'}$ нужно взять уравненія

$$f(x'; u) = 0 \tag{1'}$$

$$\varrho y_i = \frac{\partial f(x'; u)}{\partial u_i} \tag{2'}$$

$$\sigma . v_k = \frac{\partial f(x'; u)}{\partial x'_k} \tag{3'}$$

три послѣднихъ уравненія отпадаютъ, (2') даютъ переходъ къ точечнымъ координатамъ для кривой $U_{x'}$ и т. о. уравненіе кривой $\boldsymbol{Y}_{x'}$ совпадаетъ съ уравненіемъ кривой $U_{x'}$.

Значительный интересъ представляютъ далѣе теоремы относительно кривыхъ, соотвѣтствующихъ особеннымъ точкамъ.

X. *Кривая* V_y, *соотвѣтствующая въ сопряженномъ коннексѣ двойной точкѣ* y *кривой* U_x, *имѣетъ точку* x *двойною.*

Дѣйствительно, пусть въ коннексѣ (1) точкѣ x принадлежитъ кривая U_x, имѣющая двойную точку y. Въ этой точкѣ U_x имѣетъ двѣ различныхъ касательныхъ u, дѣйствительныхъ или мнимыхъ, каждой изъ которыхъ принадлежитъ по кривой X_u, проходящей черезъ точку x. Та и другая кривая имѣютъ въ точкѣ x касательную v, въ общемъ двѣ, которыя и суть касательныя къ кривой V_y сопряженнаго коннекса, принадлежащей точкѣ y. Такимъ образомъ V_y имѣетъ въ точкѣ x двѣ касательныхъ и слѣдовательно x есть ея двойная точка.

Пусть теперь двѣ касательныя u въ точкѣ y къ U_x сливаются (т. е. y есть точка возврата); тогда сливаются и соотвѣтствующія имъ кривыя X_u, а стало быть совпадаютъ и касательныя къ нимъ въ точкѣ x,—такимъ образомъ въ этой точкѣ V_y имѣетъ двѣ слившихся касательныхъ, т. е. въ этомъ случаѣ x есть точка возврата на V_y.

Итакъ: XI. *Кривая* V_y, *соотвѣтствующая точкѣ возврата* y *кривой* U_x, *имѣетъ точку* x *также точкою возврата.*

Двойственными разсужденіями докажемъ:

XII. *Кривая* Y_v, *соотвѣтствующая двойной касательной* v *кривой* X_u, *имѣетъ* u *двойною же касательной, и если* v *есть возвратная касательная (касательная въ точкѣ перегиба)* X_u, *то соотвѣтствующая* Y_v *имѣетъ прямую* u *также касательною возвратною.*

Въ дополненіе къ предыдущему остановимся на случаѣ основной точки и прямой, которыя K. Stephanos не разсматриваетъ.

Пусть $x_{\text{осн}}$ — основная точка, для которой $f(x_{\text{осн.}};\, u) \equiv 0$ при всякихъ u. Всѣ X_u проходятъ черезъ основную точку. $U_{x_{\text{осн.}}}$ есть $0=0$, и каждая проходящая черезъ произвольно взятую точку y прямая u можетъ быть разсматриваема, какъ касательная къ $U_{x_{\text{осн}}}$. Каждой принадлежитъ кривая X_u, проходящая черезъ $x_{\text{осн.}}$ и слѣдовательно, V_y проходитъ черезъ $x_{\text{осн.}}$ и имѣетъ въ этой точкѣ пучекъ касательныхъ $v_{x_{\text{осн.}}}=0$, и слѣдовательно, $v_{x_{\text{осн.}}}$ войдетъ въ нѣкоторой степени λ множителемъ въ ураавненіе V_y. Такъ какъ при томъ производныя до n—1-го порядка включительно по u отъ (1) для основной точки уничтожаются, а производныя n-го порядка уже не заключаютъ u, то имѣемъ право считать каждую прямую $(x_{\text{осн.}};\, y)$ n-кратною касательною, и потому $\lambda = n$, къ чему мы въ другомъ мѣстѣ пришли инымъ путемъ:

XIII. *Если коннексъ (1) имѣетъ основную точку, изъ уравненія сопряженнаго коннекса выдѣляется множитель* $v^n_{x_{\text{осн.}}}$, *и такимъ образомъ классъ его понижается на* n *единицъ.*

Двойственно: Если $f(x; u) = 0$ имѣетъ основную прямую $u_{\text{осн.}}$, то каждой точкѣ x плоскости принадлежитъ кривая U_x, касательная къ $u_{\text{осн.}}$. Съ другой стороны $X_{u_{\text{осн.}}}$ сводится къ $0 = 0$, и каждая точка произвольно взятой прямой v можетъ быть разсматриваема, какъ точка прикосновенія съ $X_{u_{\text{осн.}}}$. Каждой точкѣ принадлежитъ кривая U_x, касательная къ $u_{\text{осн.}}$ и слѣдовательно, Y_v, принадлежащая произвольно взятой прямой въ сопряженномъ коннексѣ, касается $u_{\text{осн.}}$ и при томъ въ каждой ея точкѣ; для этого изъ уравненія Y_v долженъ выдѣляться множитель $u_{x_{\text{осн.}}}$ въ нѣкоторой степени μ. Такъ какъ другими соображеніями мы убѣдились въ томъ, что основная прямая понижаетъ *порядокъ* сопряженнаго коннекса на m единицъ, то $\mu = m$.

XIV. *Если коннексъ (1) имѣетъ основную прямую w, то въ уравненіи сопряженнаго коннекса выдѣляется множитель w_y^m, и порядокъ его понижается на m единицъ.*

§ 2.

Связь между $x_1 x_2 x_3$ и $y_1 y_2 y_3$ устанавливается уравненіями

$$f(x; u) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{1}{y_1} f'_{u_1} = \frac{1}{y_2} f'_{u_2} = \frac{1}{y_3} f'_{u_3};$$

вмѣсто (1) можно взять $u_y = 0$.

Исключая отсюда u_i, возьмемъ уравненія

$$u_y = 0$$

$$y_1 f'_{u_2} - y_2 f'_{u_1} = 0, \quad y_1 f'_{u_3} - y_3 f'_{u_1} = 0$$

результатъ исключенія будетъ степени $(n-1)^2$ относительно коэффиціентовъ 1-го уравненія и степени $1.(n-1)$ относительно коэффиціентовъ 2-го и 3-го. Стало быть его степень относительно x_i равна

$$0.(n-1)^2 + 2m(n-1) = 2m(n-1),$$

относительно y_i:

$$1.(n-1)^2 + 2(n-1) = n^2 - 1.$$

Но при этой оцѣнкѣ у насъ вошли лишніе множители, именно: наша 2-я система удовлетворяется при

$$u_y = 0, \quad y_1 = 0, \quad f'_{u_1} = 0,$$

не удовлетворяющихъ 1-ой. Поэтому надо отбросить лишніе множители, которые будутъ относительно коэффиціентовъ 1-го степени 0-й, относительно коэффиціентовъ 2-го $(n-1)$-ой и относительно коэффиціентовъ 3-го 0-ой; поэтому относительно x_i степень ихъ будетъ 0, относительно y_i— степень $(n-1)$. Окончательно поэтому степень искомой связи — взаимной f относительно u будетъ: относительно x степени $2m(n-1)$, относительно y— степени $n^2-1-(n-1)=n(n-1)$. Двойственное разсужденіе показываетъ, что связь между u и v будетъ въ отношеніи u степени $m(m-1)$, а относительно v—степени $2n(m-1)$.

Итакъ связь (x, y) выражается уравненіемъ вида

$$R_u f \equiv (x_1x_2x_3)^{2m(n-1)} \quad (y_1y_2y_3)^{n(n-1)} = 0.$$

Степень относительно y можно показать еще такимъ разсужденіемъ: чтобы опредѣлить степень $R_u f$ относительно y, нужно знать число значеній y, соотвѣтствующихъ данному значенію x и удовлетворяющихъ нѣкоторому линейному условію, наприм., лежать на данной прямой U. Мы найдемъ это такъ. При данныхъ x каждому значенію u отвѣчаетъ одно значеніе y. Слѣдовательно, мы можемъ искать вмѣсто числа значеній y число значеній u, удовлетворяющихъ соотвѣтственнымъ условіямъ, а это мы найдемъ при данныхъ x изъ уравненій

$$f(x; u) = 0, \quad \sum U f'_u = 0$$

т. е. получимъ $n(n-1)$ рѣшеній u и столько же рѣшеній для y.

Еще можно проще сказать такъ: мы ищемъ *порядокъ* кривой U_x класса n; онъ, какъ извѣстно, опредѣляется, какъ число рѣшеній уравненій

$$f(x; u) = 0 \quad \varrho y_i = \frac{\partial f}{\partial u_i} \text{ при данныхъ } x, \text{—и будетъ } n(n-1).$$

Точно также, разыскивая степень связи (u, v) т. е. $R_x f = 0$ въ отношеніи v, мы ищемъ при данныхъ u уравненіе въ тангенціальныхъ координатахъ кривой X_u, т. е. исключаемъ x изъ уравненій

$$f(x; u) = 0, \quad \sigma v_k = \frac{\partial f}{\partial x_k};$$

результатъ относительно v—степени $m(m-1)$; степень $R_x f$ относительно u найдемъ прежнимъ способомъ равною $2n(m-1)$.

$$R_x f = (v_1v_2v_3)^{m(m-1)} \quad (u_1u_2u_3)^{2n(m-1)}.$$

Обратимъ вниманіе на то, какъ относится $R_u f$ (соотвѣт. $R_x f$) къ уравненію $F(y; v) = 0$ сопряженнаго коннекса.

$R_u f$, какъ уже указано, получается исключеніемъ u_i изъ уравненій:

$$f(x;\ u) = 0\,, \quad \varrho y_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}.$$

Чтобы получить $F(y\,;\ v) = 0$, нужно еще добавить уравненія

$$\sigma v_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}\,,$$

т. е. $R_u f = 0$ есть выраженное въ точечныхъ координатахъ уравненіе кривой V_y, принадлежащей точкѣ y въ сопряженномъ коннексѣ. Означимъ его $F(x\,;\ y) = 0$. Оно, какъ видѣли, степени $2m\,(n-1)$ относительно x, т. е. V_y вообще кривая порядка $2m\,(n-1)$ и классъ V_y (т. е. степень $F(y\,;\ v)$ относительно v) будетъ поэтому

$$2m\,(n-1)\,[2m\,(n-1)-1] - 2d - 3r\,,$$

гдѣ d и r число точекъ двойныхъ и возврата кривой V_y.

Эти послѣднія числа опредѣлены F. Lindemann'омъ. Vorlesungen über Geometrie von Alfred Clebsch B. I. 1876, s. 970 и 971. Франц. пер. Benoist. III. p. 393.

Опредѣленіе это выполняется у Линдеманна, l. c., такъ.

По формуламъ Плюккера число двойныхъ точекъ кривой n-го класса, не имѣющей двойныхъ и возвратныхъ касательныхъ, равно

$$\frac{1}{2}\,n\,(n^2-9)\,(n-2).$$

Таково будетъ вообще число указанныхъ элементарныхъ тангенціальныхъ особенностей кривой U_x, принадлежащей точкѣ x. Но V_y совпадаетъ съ $\boldsymbol{X}_y$, геометрическомъ мѣстомъ точекъ x, коимъ соотвѣтствуютъ кривыя U_x, проходящія черезъ данную точку y. Если x—двойная точка $\boldsymbol{X}_y$, значитъ U_x дважды проходитъ черезъ y, т. е. имѣетъ y—двойною точкою (теорема X).

Итакъ: XV. *Число двойныхъ точекъ кривой V_y равно числу кривыхъ U_x, имѣющихъ точку y двойною.* И обратно: *число двойныхъ точекъ кривой U_x равно числу кривыхъ V_y, имѣющихъ точку x двойною точкою.*

Тоже самое относится и къ точкамъ возврата. Число кривыхъ U_x имѣющихъ y двойною точкою Lindemann опредѣляетъ такъ: число касающихся u и проходящихъ черезъ y кривыхъ U_x есть $2\,(n-1)\,m^2$,— въ томъ числѣ m^2 касаются u въ самой точкѣ y, какъ видѣли выше; эти m^2 касаній поглощаютъ $2m^2$ прохожденій, поэтому имѣется $2\,(n-2)\,m^2$ кривыхъ U_x, касающихся u и не въ точкѣ y и проходящихъ черезъ эту точку.

Число касательныхъ, которыя можно провести къ каждой изъ этихъ U_x черезъ точку y, равно $n-2-1=n-3$ (двѣ поглощаются касательною въ y и еще одна—прямая u). Всего слѣдовательно черезъ y получается $2m^2(n-2)(n-3)$ лучей v, касательныхъ къ кривымъ U_x, проходящимъ черезъ y и касательнымъ къ прямой u; стало быть если взять одинъ изъ такихъ лучей v, проходящихъ, черезъ y, то ему соотвѣтствуетъ $2m^2(n-2)(n-3)$ прямыхъ u, касательныхъ къ кривымъ U_x, проходящимъ черезъ y и касательнымъ къ v не въ точкѣ y. Такимъ образомъ установилось соотвѣтствіе

$$[2m^2(n-2)(n-3),\quad 2m^2(n-2)(n-3)],$$

число совпаденій соотвѣтственныхъ лучей u и v будетъ поэтому

$$2m^2(n-2)(n-3)\,.\,2\times\frac{1}{2}.$$

При каждомъ изъ такихъ совпаденій U_x снова пройдетъ черезъ y, т. е. будетъ имѣть въ y двойную точку; найденное число $2m^2(n-2)(n-3)$ и есть искомое число двойныхъ точекъ.

Что касается числа точекъ возврата, то F. Lindemann l. c. 970 указываетъ лишь, что число это получается разсмотрѣніемъ соотвѣтствія $[m^2(n-2),\ 2m^2(n-2)]$ между лучами произвольнаго пучка и равно $3m^2(n-2)$.

Можно примѣнить къ нахожденію его и такой однако методъ.

Число точекъ возврата кривой n-го класса, не имѣющей двойныхъ и возвратныхъ касательныхъ, равно $3n(n-2)$; оно т. о. конечно.

Для кривой V_y, тожественной съ $\boldsymbol{X}_y$— геометрическимъ мѣстомъ точекъ, которыхъ кривыя коннекса U_x проходятъ черезъ y,— какъ уже указано, число это совпадаетъ съ числомъ кривыхъ U_x, имѣющихъ въ y точку возврата. Касательныя въ точкахъ возврата кривой U_x выдѣляются на ней уравненіемъ.

$$\left| f''_{ik} \right| = 0,$$

гдѣ вторыя производныя берутся по перемѣннымъ u; эти касательныя пройдутъ черезъ точку y, лежащую на U_x, при условіяхъ

$$\frac{f'_{u_1}}{y_1}=\frac{f'_{u_2}}{y_2}=\frac{f'_{u_3}}{y_3}$$

Такимъ образомъ имѣемъ уравненія

$$\left| f''_{ik} \right| = 0,\quad y_1 f'_{u_2}-y_2 f'_{u_1}=0,\quad y_2 f'_{u_3}-y_3 f'_{u_2}=0,\quad u_x=0.$$

Но въ этомъ числѣ лишнія суть

a) рѣшенія системы

$$f'_{u_2}=0\,,\quad u_2=0\,,\quad u_y=0\quad \left|\, f''_{ik}\,\right|=0$$

b) тангенціально-особенные элементы, коихъ прямыя проходятъ черезъ y:

$$f'_{u_1}=0\quad f'_{u_2}=0\quad f'_{u_3}=0\quad u_y=0\,,$$

и полученное такимъ образомъ число будетъ вдвое больше дѣйствительнаго, ибо каждая касательная, какъ совпаденіе двухъ, получается дважды; число элементовъ пересѣченія коннексовъ

$$[3m,\ 3(n-2)]\,,\quad (m,\ n-1),\quad (m,\ n-1)\ \text{и}\ (0,1)$$

есть

$$3m^2(3n-4)\,;$$

отсюда исключается

$$\text{a)}\ 3m^2\quad \text{и}\quad \text{b)}\ 3m^2(n-1)$$

искомое число поэтому равно:

$$\frac{1}{2}[3m^2(3n-4)-3m^2-3m^2(n-1)]=3m^2(n-2).$$

Такимъ образомъ

$$d=2m^2(n-2)(n-3)$$

и

$$r=3m^2(n-2)$$

Отсюда и получается у K. Stephanos'a классъ V_y, а слѣдовательно и классъ сопряженнаго коннекса:

$$2m(n-1)\{2m(n-1)-1\}-2\,.\,2m^2(n-2)(n-3)-3\,.\,3m^2(n-2)$$
$$=m[mn+2(m-1)(n-1)].$$

Двойственныя разсужденія покажутъ, что кривая Y_v — класса $2n(m-1)$. Число ея двойныхъ касательныхъ равно

$$2n^2(m-2)(m-3)\,;$$

число ея возвратныхъ касательныхъ равно

$$3n^2(m-2).$$

Поэтому ея порядокъ и въ тоже время порядокъ сопряженнаго коннекса:

$$2n(m-1)[2n(m-1)-1]-2\,.\,2n^2(m-2)(n-3)$$
$$-3\,.\,3n^2(m-2)=n[mn+2(m-1)(n-1)].$$

§ 3.

Уже въ предыдущемъ приходилось разсматривать уравненіе

$$\sum U f'_u = 0. \tag{10}$$

При (x, u) данномъ и U перемѣнныхъ это уравненіе выражаетъ точку прикосновенія u къ кривой U_x коннекса. K. Stephanos разсматриваетъ такія кривыя при U, безконечно близкихъ къ u, и говоритъ, что тогда это уравненіе выражаетъ сѣть (réseau) кривыхъ, соотвѣтствующую прямымъ, безконечно-близкимъ къ u. Такое опредѣленіе не совсѣмъ правильно. Вѣрнѣе будетъ сказать такъ. Пусть u' — прямая безконечно-близкая къ u. Можемъ положить $u' = u + \varepsilon\, U$, гдѣ U—прямая, которая проходитъ черезъ точку пересѣченія u и u'.

Тогда съ точностью до безконечно-малыхъ 1 порядка уравненіе $X_{u'}$ принимаетъ видъ: $f(x;\, u) + \varepsilon \,.\sum U f'_u = 0$. Вотъ собственно уравненіе пучка кривыхъ $X_{u'}$,— при всевозможныхъ ε получаемъ кривыя, проходящія черезъ точки пересѣченія $f = 0$ и $\sum U f'_u = 0$.

Сѣть кривыхъ $\sum U f'_u = 0$ — это кривыя 1-ыя поляры X_u въ отношеніи прямыхъ U. Если y — точка пересѣченія u и U, т. е. $y = (u, U)$ и слѣдовательно y_i пропорціональны минорамъ митрицы

$$\left\| \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ U_1 & U_2 & U_3 \end{matrix} \right\|,$$

то изъ уравненій (1) и (10) имѣемъ, что и f'_{u_i} пропорціональны тѣмъ же минорамъ и слѣдовательно, $\varrho y_i = f'_{u_i}$, т. е. точки пересѣченія (1) и (10) суть (по теоремѣ III) точки прикосновенія X_u и V_y, соотвѣтствующей точкѣ $y = (u, U)$ (въ числѣ m^2).

При всевозможныхъ значеніяхъ U получимъ безчисленное множество (∞^1) группъ по m^2 точекъ, того свойства, что каждая точка кривой X_u принадлежитъ только къ одной изъ этихъ группъ. Дѣйствительно, уравненія

$$f(x;\, u) = 0 \quad \text{или} \quad \sum u f'_u = 0$$

$$\sum U f'_u = 0 \quad \sum U' f'_u = 0$$

совмѣстны при $(uUU') = 0$, т. е. если U' проходитъ черезъ точку пересѣченія u и U,— т. е. каждая группа точекъ принадлежитъ опредѣленной точкѣ прямой u, какова бы ни была прямая U, проходящая черезъ эту точку. Если же U' не проходитъ черезъ эту точку, то три уравненія несовмѣстны.

Исключеніе составляютъ тѣ случаи, когда всѣ частныя производныя по u_i 1-го порядка обращаются въ 0:

$$f'_{u_i}=0 \ (i=1,\ 2,\ 3);$$

черезъ такія точки проходятъ всѣ кривыя сѣти (10).

XVI. *Если кривыя X_u, соотвѣтствующія прямымъ u', безконечно-близкимъ къ u, встрѣчаютъ всѣ кривую X_u въ одной и той же точкѣ x, кривая U_x имѣетъ эту точку двойною касательной.*

Иными словами: если первыя поляры $\sum U f'_u = 0$ независимо отъ U встрѣчаютъ X_u въ одной и той же точкѣ x, то для этого необходимо, чтобы уравненіе 1-ой поляры удовлетворялось независимо отъ U, т. е. должны быть выполнены $f'_{u_1}=0$ $f'_{u_2}=0$ $f'_{u_3}=0$,—т. е. прямая u должна быть особенной касательной къ $f(x; u)=0$. Дѣйствительно, изъ

$$\frac{1}{x_1} f'_{u_1} = \frac{1}{x_2} f'_{u_2} = \frac{1}{x_3} f'_{u_3},$$

подстановка въ $f(x; u)=0$ даетъ $u_x=0$.

Но u не проходитъ чрезъ точку x, слѣдовательно должны обращаться въ 0 частныя производныя f по u_i.

Такіе элементы, которые выполняютъ выписанныя выше уравненія степени m относительно $x_1 x_2 x_3$ и степени $n—1$ относительно $u_1 u_2 u_3$, я называю тангенціально-особенными элементами коннекса (1). Они образуютъ многообразіе $\infty^{4-3}=\infty^1$ измѣренія,—*пару кривыхъ*: точки этихъ элементовъ образуютъ кривую (*геометрическое мѣсто точекъ x, принадлежащія которымъ кривыя U_x имѣютъ двойную касательную*), порядокъ которой равенъ $3m(n-1)^2$,—ибо ея уравненіе, какъ результатъ исключенія u изъ трехъ уравненій степени $n—1$, будетъ степени $(n—1)^2$ относительно коэффиціентовъ каждаго уравненія, которые степени m относительно x_i. *Вторая кривая пары*, уравненіе коей получимъ, исключая изъ трехъ уравненій $x_1 x_2 x_3$, *есть огибающая двойныхъ касательныхъ кривыхъ U_x; это кривая класса $3m^2(n-1)$.*

Означимъ вслѣдъ за K. Stephanos'омъ вторую кривую Σ, первую S. Онѣ находятся въ однозначномъ соотвѣтствіи: точкѣ одной соотвѣтствуетъ касательная другой и обратно. Кривая X_u, принадлежащая въ коннексѣ касательной u кривой Σ, проходитъ черезъ соотвѣтствующую этой касательной точку x кривой S. Но можно показать, что *X_u и S въ этой точкѣ касаются.*

Дѣйствительно, мы можемъ одно изъ трехъ уравненій $f'_{u_i}=0$ замѣнить черезъ $f(x; u)=0$ и считать здѣсь u выраженными въ функціи x

изъ остальныхъ двухъ (или трехъ). Пусть $\Omega(x_1x_2x_3)=0$ т. о. получаемое уравненіе; тогда

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum\frac{\partial f}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

въ силу уравненій кривой S.

Итакъ касательная къ S въ точкѣ x выразится уравненіемъ $\sum Xf'_x=0$. Эта есть въ тоже время первая поляра точки X. Классъ кривой S есть число ея касательныхъ, проходящихъ черезъ точку X, не лежащую на кривой, т. е. число элементовъ, общихъ четыремъ коннексамъ

$$f'_{u_i}=0 \ (i=1,\ 2,\ 3) \quad \text{и} \quad \sum Xf'_x=0;$$

т. е.

$$(m,\ n-1),\quad (m,\ n-1),\quad (m,\ n-1)\quad \text{и}\quad (m-1,\ n)$$

по общей формулѣ это число равно

$$3m(n-1)[mn+(m-1)(n-1)].$$

Двойственныя разсужденія даютъ слѣдующее:

Кривая X_u имѣетъ двойную точку, если выполнены уравненія

$$f'_{x_1}=0 \quad f'_{x_2}=0 \quad f'_{x_3}=0 \tag{11}$$

исключая отсюда u, получаемъ кривую S'— геометрическое мѣсто двойныхъ точекъ кривыхъ X_u, а исключая x — огибающую Σ' тѣхъ прямыхъ u, принадлежащія которымъ кривыя X_u имѣютъ двойную точку. Кривая Σ' класса $3n(m-1)^2$, кривая S'— порядка $3n^2(m-1)$.

Кривая U_x, принадлежащая въ коннексѣ точкѣ x кривой S', касается соотвѣтствующей касательной u кривой Σ'. Но можно убѣдиться, что точка прикосновенія U_x и Σ' къ u будетъ общею, т. е. онѣ касаются въ этой точкѣ между собою. Дѣйствительно, уравненія Σ' суть (11). Одно мы можемъ замѣнить черезъ $f(x;\ u)=0$, считая здѣсь x замѣненными по (11). Пусть это $\omega(u_1u_2u_3)=0$. Ищемъ точку прикосновенія

$$\frac{\partial\omega}{\partial u_i}=\frac{\partial f}{\partial u_i}+\sum_k\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial u_i}=\frac{\partial f}{\partial u_i}$$

въ силу (11). Итакъ точка прикосновенія u къ Σ' выразится $\sum Uf'_u=0$, а это и будетъ точка прикосновенія u съ U_x.

Въ тоже время при данныхъ U уравненіе

$$\sum Uf'_u=0 \tag{10}$$

есть уравненіе 1-ой поляры Σ' въ отношеніи u, и порядокъ кривой Σ' есть число точекъ, общихъ ей и ея 1-ой полярѣ, т. е. число элементовъ, общихъ уравненіямъ (11) и (10). Итакъ порядокъ Σ' есть

$$3\,(m-1)\,n\,[mn+(m-1)\,(n-1)]\,.$$

Возвращаемся снова къ кривымъ S и Σ'.

XVII. *Всякой двойной точкѣ x кривой S соотвѣтствуетъ кривая U_x, имѣющая двѣ двойныхъ касательныхъ.*

Дѣйствительно, каждой точкѣ x кривой S соотвѣтствуетъ кривая U_x, имѣющая двойную касательную. При непрерывномъ измѣненіи x вдоль кривой S кривая U_x измѣняется также непрерывно, измѣняется и двойная касательная. Если S имѣетъ двойную точку, значитъ послѣ обхода мы возвращаемся снова въ ту же точку x, снова получаемъ туже кривую U_x, но двойная касательная, измѣнявшаяся также непрерывно, вообще говоря придетъ къ другому значенію, т. е. U_x, соотвѣтствующая двойной точкѣ S, будетъ имѣть вообще двѣ двойныхъ касательныхъ.

Допустимъ теперь, что S имѣетъ *точку возврата.*

XVIII. *Точкѣ возврата S соотвѣтствуетъ въ коннексѣ (1) кривая U_x, имѣющая одну возвратную касательную.*

Точка прикосновенія возвратной касательной кривой U_x выражается уравненіемъ

$$\sum f''_{u_i u_k}\, U_i U_k = 0\,. \tag{12}$$

которое должно обращаться въ точный квадратъ. Для этого должно быть

$$f''_{11}=\gamma\omega_1{}^2,\quad f''_{12}=\gamma\omega_1\omega_2\,,\quad f''_{13}=\gamma\omega_1\omega_3$$
$$f''_{22}=\gamma\omega_2{}^2,\quad f''_{23}=\gamma\omega_2\omega_3\,,\quad f''_{33}=\gamma\omega_3{}^2,$$

если для краткости писать $f''_{ik}=f''_{u_i u_k}$; такимъ образомъ должны быть выполнены условія

$$f''_{ik}\,f''_{jl}-f''_{ij}\,f''_{kl}=0\,,\qquad (i\,,\,j\,,\,k\,,\,l=1\,,\,2\,,\,3)$$

т. е. не только опредѣлитель

$$\left|\; f''_{ik} \;\right| = 0\,,$$

но и всѣ его миноры 2-го порядка обращаются въ 0; независимыхъ между ними три; беремъ

$$f_{11}\,f_{23}-f_{12}\,f_{13}=0$$
$$f_{12}\,f_{23}-f_{13}\,f_{22}=0$$
$$f_{12}\,f_{33}-f_{13}\,f_{23}=0\,.$$

Дѣйствительно, въ силу ихъ не только

$$\frac{f_{11}}{f_{12}}=\frac{f_{12}}{f_{22}}=\frac{f_{13}}{f_{23}};$$

но и

$$\frac{f_{12}}{f_{13}}=\frac{f_{22}}{f_{23}}=\frac{f_{23}}{f_{33}};$$

а слѣдовательно и

$$\frac{f_{11}}{f_{13}}=\frac{f_{12}}{f_{13}}=\frac{f_{23}}{f_{33}}.$$

Пара, общая тремъ этимъ коннексамъ $(2m, 2n-4)$, имѣетъ характеристики $24m(n-2)^2$, $24m^2(n-2)$. Но въ эти числа входятъ лишнія слагаемыя—характеристики четырехъ паръ

$$\begin{array}{lll} f_{11}=0 & f_{12}=0 & f_{13}=0 \\ f_{12}=0 & f_{22}=0 & f_{23}=0 \\ f_{13}=0 & f_{23}=0 & f_{33}=0 \\ f_{12}=0 & f_{23}=0 & f_{13}=0 \end{array}$$

каждая опредѣляемая пересѣченіемъ трехъ коннексовъ $(m, n-2)$. Ихъ характеристики поэтому $3m(n-2)^2$, $3m^2(n-2)$ каждой. Отбрасывая эти пары, получимъ какъ остаточную, пару съ характеристиками

$$12m(n-2)^2, \quad 12m^2(n-2).$$

Съ коннексомъ (m, n) эта пара имѣетъ

$$12m(n-2)^2 \cdot m+12m^2(n-2)n\equiv 24m^2(n-1)(n-2).$$

общихъ элементовъ. Но такъ какъ $\sum f''_{ik}U_iU_k=0$ обращается въ точный квадратъ, то и самый коннексъ въ элементѣ (x, u) разсматриваемаго типа имѣетъ квадратичный характеръ, и каждый элементъ пересѣченія является поэтому вдвойнѣ,— а потому искомое число касательныхъ въ точкахъ возврата оказывается равнымъ

$$\frac{1}{2}24m^2(n-1)(n-2)=12m^2(n-1)(n-2).$$

Нѣкоторый интересъ представляетъ другой способъ подсчета того же числа, основанный на нѣсколько иныхъ соображеніяхъ. Тангенціально-особенные элементы опредѣляются уравненіями

$$f'_{u_1}=0 \quad f'_{u_2}=0 \quad f'_{u_3}=0.$$

Добавочное условіе, чтобы прямая была возвратною касательною, еще одно; беремъ за таковое

$$f''_{11} f''_{33} - f''^2_{13} = 0 \tag{13}$$

но при этомъ излишними оказываются опредѣляемыя уравненіями

$$u_2 = 0 \quad f'_{u_1} = 0 \quad f'_{u_2} = 0 \quad f''_{11} f''_{33} - f''^2_{13} = 0\,;$$

первыя четыре имѣютъ

$$6m^2 (n-1)(2n-3)$$

общихъ элементовъ, но отброшены отсюда должны быть элементы общіе вторымъ четыремъ коннексамъ,—въ числѣ

$$2m^2 (n-2) + 4m^2 (n-1)$$

по исключеніи ихъ, имѣемъ

$$12m^2 (n-1)(n-2) + 2m^2,\text{—}$$

полученный результатъ отличается отъ предыдущаго.

Мы получимъ требуемое пониженіе, если отъ совокупности тангенціально-особенныхъ элементовъ, удовлетворяющихъ добавочному условію (13), отбросимъ тѣ, которые выполняютъ уравненія

$$u_2 = 0 \quad f'_{u_1} = 0 \quad f = 0 \quad f''_{11} f''_{33} - f''^2_{13} = 0\,.$$

Элементовъ, общихъ этимъ коннексамъ (0,1), $(m, n-2)$, $[2m, 2(n-1)]$ будетъ

$$2m^2 + 2m^2 (n-1) + m^2 \,.\, 2(n-2) \equiv 6m^2 (n-1)\,,$$

вычитая которые изъ $6m^2 (n-1)(2n-3)\,n$, получимъ какъ разъ

$$12m^2 (n-1)(n-2)$$

искомыхъ элементовъ. Такая обратная замѣна $f'_{u_1} = 0$ или $f'_{u_2} = 0$ черезъ $f = 0$ можетъ быть мотивирована тѣмъ, что только три уравненія тангенціально-особенныхъ элементовъ могутъ замѣнить $f = 0$, но когда отбрасываемъ одно изъ нихъ, однимъ изъ двухъ остальныхъ непремѣнно должно быть само уравненіе коннекса $f = 0$.

Такимъ образомъ для кривой S опредѣлены

порядокъ: $m' = 3m(n-1)^2$
классъ: $n' = 3m(n-1)[mn + (m-1)(n-1)]$

и число точекъ возврата

$$r' = 12m^2(n-1)(n-2);$$

отсюда по извѣстной формулѣ находимъ число двойныхъ точекъ S:

$$d' = \frac{3}{2}m^2(n-1)(n-2)(3n^2-3n-11).$$

Можемъ опредѣлить и *родъ* кривой S,— онъ оказывается равнымъ

$$p' = \frac{9}{2}m(n-1)\{2mn-3m-n+1\}+1,$$

или если означить $\tau = mn + (m-1)(n-1)$,

$$p' = \frac{9}{2}m(n-1)\{\tau-2m\}+1.$$

Если кривая Σ имѣетъ двойную касательную u, это значитъ, что соотвѣтствующія двумъ различнымъ точкамъ x и x' кривыя U_x и $U_{x'}$ имѣютъ двойною касательною одну и ту же прямую u. Поэтому уже не одну общую точку имѣютъ всѣ кривыя $X_{u'}$ принадлежащія въ коннексѣ (1) прямымъ u', безконечно-близкимъ къ u, а двѣ точки x и x' будутъ общими всѣмъ этимъ кривымъ. Если двойная касательная обращается въ касательную въ точкѣ перегиба, то и соотвѣтственная точки x и x' кривой S сливаются, и всѣ кривыя $X_{u'}$ въ этой точкѣ касаются между собою и касаются кривой S.

Послѣднее требуетъ выполненія добавочныхъ условій, и кривыя Σ касательныхъ возвратныхъ вообще не имѣютъ.

Такимъ образомъ для Σ извѣстны классъ $n' = 3m^2(n-1)$ родъ равный роду S вслѣдствіе однозначнаго между ними соотвѣтствія, такъ что

$$2p'-2 = 9m(n-1)\{\tau-2m\},$$

и число возвратныхъ касательныхъ ($\equiv$ точекъ перегиба) $\varrho'=0$. Отсюда порядокъ

$$m' = 3m(n-1)\{3\tau-4m\}.$$

Число двойныхъ касательныхъ

$$\delta = \frac{9}{2}m(n-1)\{\tau-3m+m^3(n-1)\},$$

Число двойныхъ точекъ

$$d = m'^2 - 20(p'-1)$$

и число точекъ возврата

$$r' = 9m(n-1)\{3\tau-5m\}.$$

Для кривыхъ S' и Σ' мы можемъ доказывать аналогичныя свойства.

Каждой двойной точкѣ кривой S' соотвѣтствуетъ кривая U_x, имѣющая со всѣми безконечно-близкими кривыми $U_{x'}$ двѣ неизмѣнныя общія касательныя. И если S' имѣетъ точку возврата, двѣ эти общія касательныя сливаются, и кривая U_x, принадлежащая такой точкѣ S', имѣетъ общую касательную со всѣми безконечно-близкими кривыми.

Но такихъ точекъ вообще не существуетъ: $r''=0$. Такимъ образомъ для кривой S' знаемъ слѣдующія Плюккеровы числа

$$m''=3(m-1)n^2; \qquad r''=0$$
$$\varrho''=\frac{9}{2}n(m-1)\{\tau-2m\}+1,$$

такъ что

$$2(p''-1)=9n(m-1)\{\tau-2n\};$$

отсюда найдемъ далѣе классъ

$$n''=3n(m-1)\{3\tau-4n\}.$$

число двойныхъ касательныхъ

$$d''=\frac{9}{2}n(m-1)[\tau-3n+n^3(m-1)]$$
$$\varrho''=9n(m-1)\{3\tau-5n\}$$
$$\delta''=3n(m-1)\{3n(m-1)(3\tau-4n)^2-30(\tau-2n)\}$$
$$=n''^2-20(p''-1).$$

Для кривой Σ' подобнымъ образомъ находимъ:

классъ $n_1''=3n(m-1)^2$

порядокъ $m_1''=3n(m-1)\tau=3n(m-1)[mn+(m-1)(n-1)]$

число возвратныхъ касательныхъ $r''_1=12n^2(m-1)(m-2)$

число касательныхъ двойныхъ:

$$d_1''=2n^2(m-1)(m-2)[3m^2-3m-11].$$

Переходимъ къ свойствамъ кривыхъ сопряженнаго коннекса по отношенію къ парамъ кривыхъ тангенціально- и точечно-особенныхъ элементовъ.

Кривыя U_y, принадлежащія въ сопряженномъ коннексѣ различнымъ точкамъ прямой u, огибаютъ кривую X_u, принадлежащую въ данномъ коннексѣ этой прямой. Если прямая u есть касательная къ Σ, т. е. двойная касательная нѣкоторой кривой U_x, то безконечно-близкимъ къ такой прямой прямымъ u' принадлежатъ кривыя $X_{u'}$, проходящія черезъ точку x,— которая соотвѣтствуетъ въ парѣ тангенціально-особенныхъ элементовъ прямой u, и слѣдовательно, лежитъ на кривой S. Въ этой точкѣ кривыя $X_{u'}$ касаются съ кривыми V_y, и такъ какъ эти кривыя должны касаться и S въ той же точкѣ, то всѣ онѣ касаются въ этой точкѣ между собою.

Отсюда: XIX. *Если возьмемъ произвольно точку y, то ей принадлежитъ въ сопряженномъ коннексѣ кривая V_y, которая касается кривой S въ $3m^2(n-1)$ точкахъ, соотвѣтствующихъ $3m^2(n-1)$ касательнымъ кривой Σ, проходящимъ черезъ точку y.*

Двойственно кривыя Y_v, соотвѣтствующія различнымъ прямымъ v пучка, имѣющаго точку x своимъ центромъ, огибаютъ кривую U_x, принадлежащую въ коннексѣ этой точкѣ. Если точка x принадлежитъ кривой S' пары кривыхъ точечно-особенныхъ элементовъ, т. е. является двойною точкою на одной изъ кривыхъ X_u, то безконечно-близкимъ къ такой точкѣ точкамъ x' принадлежатъ въ коннексѣ кривыя $U_{x'}$, касательныя къ прямой u,—дополняющей x до элемента пары кривыхъ точечно-особенныхъ элементовъ и слѣдовательно касающейся кривой Σ'. Эту прямую имѣютъ касательною кривыя $U_{x'}$ и кривыя Y_v, соотвѣтствующія прямымъ пучка съ центромъ въ x, и такъ какъ эти кривыя должны имѣть съ Σ' туже общую касательную, то всѣ эти кривыя касаются между собою и касаются Σ', и u ихъ общая касательная.

Отсюда: XIX. *Если возьмемъ произвольно прямую v, то ей принадлежитъ въ сопряженномъ коннексѣ кривая Y_v, которая имѣетъ съ кривою Σ' $3n^2(m-1)$ общихъ касательныхъ, соотвѣтствующихъ $3n^2(m-1)$ точкамъ кривой S', лежащимъ на прямой v.*

§ 4.

Въ статьѣ A. Cayley: Recherches sur l'élimination et sur la théorie des courbes (Crelle's Journal B. 30 p. 30—45. 1847 [1]), которую цитируетъ K. Stephanos, приводится рядъ любопытныхъ для нашихъ цѣлей результатовъ.

Прежде всего заслуживаетъ быть отмѣченнымъ дѣлаемое Cayley различіе между полнымъ и приведеннымъ результантомъ: если результантъ разлагается на множители, то нѣкоторые могутъ быть излишними при рѣшеніи нѣкотораго вопроса и при этомъ могутъ быть отброшены. Напротивъ съ другой точки зрѣнія именно отброшенные въ первомъ случаѣ множители и даютъ *приведенный* результантъ.

---

[1]) Статья эта перепечатана въ его Collected mathematical Papers Vol I. c. 337—351, но безъ исправленія довольно многочисленныхъ опечатокъ:

Crelle's J. B. 34	Coll. math pap.	Напечатано	Должно быть
стр. 36 с. 17 св.	343 стр. 5 св.	D	∂
„ — „ 18 „	343 „ 6 „	$\alpha(M\partial_x - N\partial_y) + ..$	$\alpha(M\partial_z - N\partial_y) + ..$
„ 37 „ 8 „	343 „ 7 сн.	n^2-n-6	n^2-5n+6
„ — „ 9 „	343 „ 7 сн.	n^2-5n-6	n^2-n-6
„ — „ 11 „ и 13 сн.	343 „ 5 сн. и 344 с. 8 св.	$n^3-2n^2-10n+12$	$n^3-n^2-10n+12$

Въ частности, Cayley указываетъ, что поляра поляры кривой $f=0$ имѣетъ своимъ полнымъ выраженіемъ

$$FFf=(Kf).(Pf)^2(Qf)^3.f,$$

гдѣ $Kf=0$ условіе существованія кратной точки, $Pf=0$—уравненіе системы двойныхъ касательныхъ, $Qf=0$ — уравненіе системы касательныхъ въ точкахъ перегиба.

Примѣняя этотъ результатъ къ теоріи коннексовъ, замѣтимъ, что при составленіи формы $R_u f=0$, выражающей связь между x и y и взаимной f въ отношеніи u, мы брали уравненія

$$\sum U f'_u=0 \quad \sum U' f'_u=0 \quad (uUU')=0;$$

относительно u результантъ при этомъ получался степени $n-1$ относительно коэффиціентовъ 1-го и 2-го уравненія и степени $(n-1)^2$ относительно коэффиціентовъ 3-го, т. е. относительно x степени $2m(n-1)$ и степени

$$(n-1)^2+n-1=n(n-1)$$

относительно U и U', слѣдовательно той же степени относительно $(UU')_i=y_i$.

Но если бы мы взяли уравненія

$$f=0, \quad \sum U f'_u=0, \quad \sum U' f'_u=0,$$

то результантъ относительно u получился бы степени $(n-1)^2$ относительно коэффиціентовъ 1-го, и степеней $n(n-1)$ относительно коэффиціентовъ 2-го и 3-го т. е. относительно x_i степени

$$m(n-1)^2+2mn(n-1)=3m(n-1)^2+2m(n-1);$$

лишнимъ множителемъ здѣсь является результатъ исключенія u изъ уравненій

$$f'_{x_i}=0 \ (i=1,2,3)$$

какъ это и было сдѣлано мною въ свое время (Къ вопросу объ особенныхъ элементахъ коннекса I. Извѣст. Казан. Физ.-Мат. Общ. (2) т. XI. 1902).

Не останавливаясь на этомъ дольше, укажемъ только, что когда для $R_u f$ ищемъ форму, взаимную въ отношеніи 2-го ряда прежнихъ перемѣнныхъ x, или наоборотъ для $R_x f$ ищемъ форму, взаимную въ отношеніи u, то результантъ, кромѣ $F(y;v)$ — лѣвой части уравненія сопряженнаго коннекса, долженъ содержать еще добавочные множители. Но сначала необходимо остановиться на результатахъ, приводимыхъ K. Stephanos'омъ въ n⁰ 7 его статьи.

Прежде всего если составить тангенціальное уравненіе $U_2 = 0$ двойныхъ точекъ кривыхъ U_x, то оно будетъ степени

$$\frac{1}{2} n (n-2)(n^2-9)$$

относительно тангенціальныхъ координатъ u, ибо таково по Cayley и Plücker'y число двойныхъ точекъ кривой класса n; по Cayley же оно степени $2n(n-2)(n-3)$ относительно коэффиціентовъ уравненія кривой U_x, т. е. степени $2mn(n-2)(n-3)$ относительно x.

Уравненіе $U_2 = 0$ получается исключеніемъ u_i изъ уравненій

$$f(x;\ u) = 0 \quad \sum U f'_u = 0 \quad \text{и} \quad \Pi f = 0;$$

послѣднее изображаетъ ту кривую, которая вырѣзаетъ на U_x ея двойныя точки.

Если припомнимъ, что по теоремѣ X каждой двойной точкѣ y кривой U_x соотвѣтствуетъ кривая V_y, имѣющая x двойною точкою, то предполагая, что въ $U_2 = 0$ перемѣннымъ u_i дадимъ опредѣленныя значенія U_i, получимъ лишь тѣ двойныя точки y, которыя лежатъ на опредѣленной прямой U. Слѣдовательно, уравненіе $U_2 = 0$ изобразитъ теперь въ перемѣнныхъ x геометрическое мѣсто двойныхъ точекъ кривыхъ V_y, принадлежащихъ точкамъ прямой U.

Тангенціальное уравненіе $U_3 = 0$ точекъ возврата кривыхъ U_x будетъ (Cayley l. c.) степени $3n(n-2)$ относительно U и той же степени относительно коэффиціентовъ, т. е. степени $3mn(n-2)$ относительно x.

Оно получается исключеніемъ u изъ уравненій

$$f = 0, \quad Hf \equiv \left| f''_{u_i u_k} \right| = 0, \quad \sum U f'_u = 0$$

степеней n, $3(n-2)$ и $n-1$ относительно u_i; 0, 0 и 1 относительно U_i и степеней m, $3m$ и m относительно x_i по выдѣленіи изъ результанта множителя $(Kf)^2$, выражающаго условіе двойныхъ касательныхъ, при которомъ также выполняются всѣ эти уравненія и который будетъ степени $6m(n-1)^2$ относительно x.

Но если припомнимъ теорему XI, то замѣтимъ, что фигурирующія въ этомъ уравненіи x_i суть координаты точки возврата кривой V_y, соотвѣтствующей y, точкѣ возврата кривой U_x, и слѣдовательно, если примемъ U_i данными, а x_i перемѣнными, то $U_3 = 0$ выразить геометрическое мѣсто точекъ возврата кривыхъ V_y, соотвѣтствующихъ въ сопряженномъ коннексѣ точкамъ y прямой U.

Тѣже разсужденія примѣнимы и къ кривымъ V_y. Тангенціальное уравненіе точекъ возврата кривыхъ V_y — означимъ его $\boldsymbol{V}_3 = 0$,— если въ немъ разсматривать перемѣнными y, а v_i данными, представляетъ геометрическое мѣсто точекъ возврата тѣхъ кривыхъ U_x, которыя принадлежатъ точкамъ x прямой v. Порядокъ этой кривой есть число лежащихъ на нѣкоторой прямой точекъ y, которыя суть точки возврата кривыхъ U_x, принадлежащихъ точкамъ x прямой v.

Порядокъ $\boldsymbol{U}_3 = 0$ есть число лежащихъ на нѣкоторой прямой точекъ x, которыя суть точки возврата кривыхъ V_y, принадлежащихъ точкамъ y прямой u. Оба числа поэтому въ силу теоремы XI тожественны и равны $3mn(n-3)$.

Также и порядокъ кривой $\boldsymbol{Y}_2 = 0$, уравненіе которой въ перемѣнныхъ v_i есть тангенціальное уравненіе двойныхъ точекъ V_y и при перемѣнныхъ y_i— геометрическое мѣсто двойныхъ точекъ y кривыхъ U_x, принадлежащихъ точкамъ x прямой v, равенъ порядку

$$2mn(n-2)(n-3) \quad \text{кривой} \quad \boldsymbol{U}_2 = 0.$$

Для взаимныхъ кривыхъ можно высказать аналогичныя теоремы:

Точечное уравненіе $\boldsymbol{X}_2 = 0$ двойныхъ касательныхъ кривыхъ X_u (то, что Cayley означаетъ $Pf = 0$) степени $2m(m-2)(m-3)$ относитнльно коэффиціентовъ въ уравненіи X_u, т. е. степени $2mn(m-2)(m-3)$ относительно u_i; относительно X_i оно степени

$$\frac{1}{2}m(m-2)(m^2-9).$$

Если X_i разсматривать данными, а u перемѣнными, оно представитъ, въ силу теоремы XII, огибающую двойныхъ касательныхъ u кривыхъ Y_v, принадлежащихъ прямымъ v, проходящимъ черезъ точку X.

И далѣе: точечное уравненіе $\boldsymbol{Y}_2 = 0$ двойныхъ касательныхъ кривыхъ Y_v степени $2n^2(m-2)(m-3)$ представляетъ также огибающую двойныхъ касательныхъ v кривыхъ X_u, соотвѣтствующихъ прямымъ u, проходящимъ черезъ точку y. Эта огибающая будетъ также класса

$$2mn(m-2)(m-3).$$

Точечное уравненіе $\boldsymbol{X}_3 = 0$ возвратныхъ касательныхъ кривыхъ X_u степени $3m(m-2)$ относительно коэффиціентовъ при x въ $f = 0$, слѣдовательно, степени $3mn(m-2)$ относительно u и степени $3m(m-2)$ относительно X_i; оно представляетъ огибающую возвратныхъ касательныхъ (или геометрическое мѣсто точекъ перегиба) кривыхъ Y_v, принадлежащихъ прямымъ v, проходящимъ черезъ точку X. Классъ этой кривой равенъ $3nm(m-2)$.

Аналогичное можно сказать и относительно возвратныхъ касательныхъ кривыхъ Y_v: точечное ихъ уравненіе степени $3n^2(m-2)$ представляетъ, если въ немъ разсматривать перемѣнными v, а y—данными, кривую,—огибающую возвратныхъ касательныхъ кривыхъ X_u, принадлежащихъ прямымъ, проходящимъ черезъ точку Y. Она одного класса съ предыдущею кривою,—т. е. класса $3nm(m-2)$

Выведенная зависимость между двойными точками кривыхъ U_x и кривыхъ V_y, а также между двойными касательными кривыхъ X_u и Y_v позволяетъ утверждать, что ни одна изъ кривыхъ V_y, соотвѣтствующихъ точкамъ y произвольной прямой u, не представляетъ новой касательной двойной или возвратной, и ни одна изъ кривыхъ Y_v, соотвѣтствующихъ прямымъ v изъ пучка, имѣющаго центромъ точку x_i, не представляетъ новой точки двойной или возврата (K. Stephanos l. c. n^0 9).

Послѣ всѣхъ этихъ результатовъ мы можемъ обратиться къ опредѣленію состава формы взаимной $\varphi = R_u f$ въ отношеніи x, и формы взаимной $\psi = R_x f$ въ отношеніи u.

Первая получается исключеніемъ σ и x_i изъ уравненій:

$$\sigma . v_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, \; v_x = 0.$$

Эту систему мы замѣняемъ уравненіями

$$1) \; v_1\varphi'_{x_2} - v_2\varphi'_{x_1} = 0 \quad 2) \; v_1\varphi'_{x_3} - v_3\varphi'_{x_1} = 0 \quad 3) \; v_x = 0$$

и должны отбросить лишніе множители,—удовлетворяющіе 1), 2), 3), но неудовлетворяющіе первой системѣ:

$$3) \; v_x = 0, \quad 4) \; v_1 = 0, \quad 5) \; \varphi'_{x_1} = 0.$$

Уравненіе 1), 2), 3) относительно x_i степеней $2m(n-1)-1$, $2m(n-1)-1$ и 1, относительно y_i — степеней $n(n-1)$, $n(n-1)$ и 0, относительно v_i — степеней 1, 1 и 1. Уравненія 3), 4) и 5) — относительно x_i степени 1,0 и $2m(n-1)-1$, относительно y_i — степеней 0,0 и $n(n-1)$, относительно v_i — степеней 1,1 и 0.

Поэтому искомый результантъ относительно v_i будетъ степени $2m(n-1)[2m(n-1)-1]$, относительно y_i степени $2n(n-1)[2m(n-1)-1]$, но въ этотъ результантъ войдутъ еще множители дважды $\boldsymbol{V}_2$ и трижды $\boldsymbol{V}_3$, т. е.

$$R_x y \equiv R_x(R_u f \equiv F(y;\, v) . \boldsymbol{V}_2{}^2 . \boldsymbol{V}_3{}^3.$$

Дѣйствительно, отнимая ихъ, найдемъ степени

$$R_x R_u f : \; \boldsymbol{V}_2{}^2 \boldsymbol{V}_3{}^3$$

относительно v_i:

$$2m(n-1)(2m(n-1)-1)-4m^2(n-2)(n-3)$$
$$-9m^2(n-2)=m[mn+2(m-1)(n-1)],$$

а относительно y_i:

$$2n(n-1)[2m(n-1)-1]-4mn(n-2)(n-3)-9mn(n-2)=$$
$$=n[mn+2(m-1)(n-1)].$$

Подобнымъ образомъ форма, взаимная $\psi = R_x f$ относительно u:

$$R_u\psi \equiv R_u . R_x f = F . \mathbf{Y}_2^2 \mathbf{Y}_3^3$$

гдѣ F означаетъ снова лѣвую часть уравненія сопряженнаго коннекса, $\mathbf{Y}_2=0$ и $\mathbf{Y}_3=0$ выше уже упомянутыя точечныя уравненія касательныхъ двойныхъ и возвратныхъ кривыхъ Y_v.

Дѣйствительно уравненіе $\psi=0$, какъ мы видѣли степени $m(m-1)$ относительно v_i и степени $2n(m-1)$ относительно u_i; чтобы получить $R_n\psi=0$, исключаемъ ϱ и u_i изъ уравненій

$$\varrho \cdot y_i = \frac{\partial\psi}{\partial u_i}, \quad u_y = 0$$

причемъ эту систему можемъ замѣнить такою:

$$1)\ \ y_1\frac{\partial\psi}{\partial u_2} - y_2\frac{\partial\psi}{\partial u_1}=0 \quad 2)\ \ y_1\frac{\partial\psi}{\partial u_3} - y_3\frac{\partial\psi}{\partial u_1}=0 \quad 3)\ \ u_y=0,$$

эти уравненія степеней 1, 1 и 1 относительно y_i, степеней $m(m-1)$, $m(m-1)$ и 0 относительно v_i и степеней $2n(m-1)-1$, $2n(m-1)-1$ и 1 относительно u_i. Слѣдовательно результантъ этой системы степени

$$2n(m-1)-1+2n(m-1)-1+(2n(m-1)-1)^2$$

относительно y_i и степени

$$2[2m-1)-1]m(m-1)$$

относительно v_i. Но въ этотъ результантъ вошли множители лишніе, не удовлетворяющіе 1-й системѣ, а именно результатъ исключенія u_i изъ уравненій

$$y_1=0, \frac{\partial\psi}{\partial u_i}=0, \quad u_y=0$$

степеней 1, 0, 1 относительно y_i, степеней 0, $2n(m-1)-1$ и 1 относительно u_i и степеней 0, $m(m-1)$ и 0 относительно v_i, этотъ результантъ—степени $2n(m-1)-1$ относительно y_i и степени 0 относительно v_i.

Такимъ образомъ $R_u\psi = 0$ оказывается степени

$$2n(m-1)\{2n(m-1)-1\}$$

относительно y_i и степени

$$2m(m-1)\{2n(m-1)-1\}$$

относительно v_i.

Выключая отсюда $\boldsymbol{Y}_2^2$— множитель степени $4n^2(m-2)(m-3)$ относительно y и $4mn(m-2)(m-3)$ относительно v, и $Y_3{}^3$ — степени $9n^2(m-2)$ относительно y_i и $9nm(m-2)$ относительно v_i, получимъ остаточный результантъ степени $n[mn+2(m-1)(n-1)]$ относительно y_i и степени $m[mn+2(m-1)(m-1]$ относительно v_i.

Если же мы станемъ искать формы, взаимныя R_uf и R_xf въ отношенiи второго ряда входящихъ въ нихъ перемѣнныхъ, то придемъ къ такимъ результатамъ. Для полученiя формы, взаимной $\varphi = R_uf$ въ отношенiи y, исключаемъ y_i изъ уравненiй

$$\sigma . u_i = \frac{\partial\varphi}{\partial y_i} \quad u_y = 0$$

или

$$u_1\frac{\partial\varphi}{\partial y_2} - u_2\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} = 0\,, \quad u_1\frac{\partial\varphi}{\partial y_3} - u_3\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} = 0\,, \quad u_y = 0;$$

отсюда надо отбросить результатъ исключенiя y_i изъ уравненiй

$$u_1 = 0\,, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y_1} = 0\,, \quad u_{\bar{y}} = 0.$$

Первыя три уравненiя степеней $2m(n-1)$, $2m(n-1)$ и 0 относительно x_i, $n(n-1)-1$, $n(n-1)-1$ и 1 относительно y_i и степеней $1, 1$ и 1 относительно u_i; вторыя три—степеней 0, $2m(n-1)$ и 0 относительно x_i, степеней 0, $n(n-1)-1$ и 1 относительно y_i и степеней $1, 0, 1$ относительно u_i. Поэтому результантъ степени

$$4m(n-1)[n(n-1)-1]$$

относительно x_i и степени

$$(n(n-1)-1) + (n(n-1)-1)^2 = n(n-1)(n(n-1)-1).$$

относительно u_i.

Согласно вышеуказанной теоремѣ Cayley должно быть

$$R_y R_u f = S . \boldsymbol{U}_2{}^2 . \boldsymbol{U}_3{}^2 . f,$$

и нетрудно провѣрить, что степени лѣвой и правой части одинаковы какъ въ отношенiи x_i, такъ и въ отношенiи u_i,— дѣйствительно

$$4m(n-1)[n(n-1)-1] \equiv 3m(n-1)^2 + \\ + 2.2mn(n-2)(n-3) + 3.3mn(n-2) + m$$

и

$$n(n-1)[n(n-1)-1] \equiv 0 + \\ + 2.\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9) + 3.3n(n-2) + n.$$

Для того чтобы получить форму, взаимную $\psi = R_x f$ въ отношенiи v, исключаемъ v_i изъ уравненiй

$$\varrho x_i = \frac{\partial\psi}{\partial v_i}, \quad v_x = 0$$

или изъ системы

$$x_1\frac{\partial\psi}{\partial v_2} - x_2\frac{\partial\psi}{\partial v_1} = 0, \quad x_1\frac{\partial\psi}{\partial v_3} - x_3\frac{\partial\psi}{\partial v_1} = 0, \quad v_x = 0.$$

степеней $2n(m-1)$, $2n(m-1)$ и 0 относительно u_i, степеней $m(m-1)-1$, $m(m-1)-1$ и 1 относительно v_i и степеней 1, 1, 1 относительно x_i, отъ которой должно отбросить лишнюю систему рѣшенiй уравненiй

$$x_i = 0 \quad \frac{\partial\psi}{\partial v_i} = 0, \quad v_x = 0$$

степеней 0, $2n(m-1)$ и 0 относительно u_i, степеней 0, $m(m-1)-1$ и 1 относительно v_i и степеней 1, 1 и 1 относительно x_i, не удовлетворяющую первой въ системѣ. Это доставитъ результантъ степени

$$m(m-1)(m(m-1)-1)$$

относительно x_i и степени

$$4n(m-1)(m(m-1)-1)$$

относительно u_i.

Не трудно провѣрить, что согласно теоремѣ Cayley составъ этого результанта таковъ:

$$R_u R_x f = \Sigma'.\boldsymbol{X}_2^2\,\boldsymbol{X}_3^3.f \text{ [1]}$$

гдѣ Σ', $\boldsymbol{X}_2$, $\boldsymbol{X}_3$ имѣютъ вышеприведенное значенiе.

Дѣйствительно,

$$m(m-1)(m(m-1)-1) \equiv 2.\frac{1}{2}m(m-2)(m^2-9) + 3.3m(m-2) + m$$

$$4n(m-1)(m(m-1)-1) \equiv 3n(m-1)^2 + \\ + 2.2mn(m-2)(m-3) + 3.3mn(m-3) + n.$$

---

[1]) Въ мемуарѣ K. Stephanos'а въ этой формулѣ стоитъ буква, соотвѣтствующая S', но это очевидно описка.

Присматриваясь къ полученнымъ результатамъ и способу ихъ полученія и сопоставляя ихъ съ доказательствами теоремъ I и II, можемъ сказать:

XXI. *Огибающая кривыхъ* V_y, *соотвѣтствующихъ точкамъ* y *прямой* u, *состоитъ изъ кривой* X_u, *соотвѣтствующей этой прямой, и изъ кривой* S.

И далѣе:

XXII. *Огибающая кривыхъ* Y_v, *соотвѣтствующихъ въ сопряженномъ коннексѣ прямымъ* v, *проходящимъ черезъ точку* x, *состоитъ изъ кривой* U_x, *принадлежащей этой точкѣ, и изъ кривой* Σ'.

Въ предыдущемъ разсмотрѣны всѣ результаты, приводимые въ статьѣ K. Stephanos'a. за исключеніемъ послѣдняго ея параграфа (n⁰ 19). Въ этомъ параграфѣ затрагивается въ сущности вопросъ о необходимыхъ особенностяхъ коннекса, сопряженнаго данному коннексу (1) общаго вида.

Дѣйствительно, такъ какъ сопряженный сопряженнаго есть данный коннексъ, то порядокъ н классъ при этомъ переходѣ должны испытывать пониженіе соотвѣтственно на

$$m\{\tau[mn\tau^2+2(m\tau-1)(n\tau-1)]-1\}$$

и

$$n\{\tau[mn\tau^2+2(m\tau-1)(n\tau-1)]-1\},$$

если означить

$$\tau=mn+2(m-1)(n-1).$$

Поэтому коннексъ, сопряженный коннексу (m, n), долженъ имѣть такія особенности, которыя ведутъ за собою пониженіе его порядка и класса.

K. Stephanos приводитъ результатъ, равносильный утвержденію, что сопряженный коннексъ имѣетъ ∞^1 собственно-особенныхъ элементовъ.

Но это я откладываю до отдѣльной статьи, гдѣ остановлюсь также на однозначномъ преобразованіи коннекса, къ которому могутъ быть приложены такія же разсужденія, какими я пользовался въ статьѣ: «Къ вопросу объ особенныхъ элементахъ коннекса, ст. II. Сообщ. Хар. Математ. Общ. (2) X n⁰ 5—6.

Ноябрь 1910.