Приложенiе полярныхъ операцiй къ интегрированiю обыкновенныхъ дифференцiальныхъ уравненiй въ конечномъ видѣ.

М. Лагутинскаго.

§ 1. Свойства полярныхъ операцiй.

Чисто геометрическiя соображенiя побудили геометровъ ввести понятiе поляры и слѣдовательно полярной операцiи. Изученiе линейнаго преобразованiя выяснило важность этой операцiи для многихъ вопросовъ алгебры и въ недавно появившемся курсѣ [1]) итальянскаго ученаго A. Capelli уже находятся элементарныя свѣдѣнiя объ этой операцiи. Къ сожалѣнiю этихъ свѣдѣнiй слишкомъ мало, и я изложу въ этомъ параграфѣ свойства этой операцiи, которыя оказываются необходимыми въ дальнѣйшихъ изысканiяхъ.

Назовемъ операцiю

$$\sum_{i=1}^{p} y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

полярной операцiей перваго порядка и условимся обозначать ее символомъ $A^{(1)}$, такъ что

$$A^{(1)} f(x) = \sum_{i=1}^{p} y_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Въ этомъ равенствѣ я подразумѣваю подъ функцiей $f(x)$ нѣкоторую функцiю перемѣнныхъ x_i и y_i $(i=1, 2, \ldots, p)$.

Можно подвергнуть функцiю $f(x)$ операцiи $A^{(1)}$ послѣдовательно k разъ.

Условимся обозначать такую сложную операцiю символомъ $A^{(k)}$ и назовемъ ее полярной операцiей k-го порядка.

---

[1]) *A. Capelli.* Istituzioni di Analisi algebrica. Napoli. 1909.

Такъ напримѣръ,

$$A^{(3)}f(x) = A^{(1)}\{A^{(1)}[A^{(1)}f(x)]\}.$$

Изъ только что сдѣланнаго опредѣленія слѣдуетъ, что выполнивъ полярную операцію перваго порядка надъ результатомъ полярной операціи k-го порядка, получимъ результатъ полярной операціи $k+1$-го порядка.

Согласно принятому нами обозначенію такое свойство можетъ быть выражено такой формулой

$$A^{(1)}\{A^{(k)}f(x)\} = A^{(k+1)}f(x) \tag{1}$$

Ради упрощенія формулъ вводимъ также тождественную полярную операцію $A^{(0)}$, удовлетворяющую условію

$$A^{(0)}f(x) = f(x).$$

Можно свести полярную операцію какого угодно порядка къ дифференцированію по одной перемѣнной.

Для этого я предложу два способа.

1-й способъ. Произведемъ въ функціи $f(x)$ линейную замѣну перемѣнныхъ:

$$x_i = y_i z + \sum_{j=2}^{p} a_{ij} z_j \tag{2}$$
$$i = 1, 2, \ldots, p.$$

Тогда функція $f(x)$ станетъ сложной функціей перемѣнныхъ $z, z_2, z_3, \ldots, z_p$ черезъ посредство линейныхъ функцій x_i этихъ перемѣнныхъ. Беремъ отъ нея производную по z. Результатъ по общему свойству производныхъ сложныхъ функцій напишется такъ:

$$\sum_{i=1}^{p} y_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}.$$

Если мы теперь вернемся къ прежнимъ перемѣннымъ, то получимъ результатъ операціи $A^{(1)}$ надъ функціей $f(x)$.

Итакъ для выполненія полярной операціи перваго порядка надъ функціей $f(x)$ можно сначала произвести въ ней замѣну перемѣнныхъ съ помощью формулъ (2), взять отъ результата первую производную по z и затѣмъ произвести обратную замѣну перемѣнныхъ.

Можно распространить этотъ способъ на полученіе полярной операціи k-го порядка отъ функціи $f(x)$, а именно для этого достаточно произвести въ ней замѣну перемѣнныхъ по формуламъ (2), взять затѣмъ k-ю производную по z и наконецъ вернуться къ прежнимъ перемѣннымъ.

Мы выяснимъ общую пріемлемость такого пріема, если, принявъ его справедливымъ для указателя k, докажемъ пріемлемость его и для указателя $k+1$.

Обозначимъ черезъ $f_k(x)$ результатъ полярной операціи k-го порядка надъ функціей $f(x)$, и слѣдовательно сможемъ написать:

$$A^{(k)} f(x) = f_k(x).$$

Отсюда согласно равенству (1) выводимъ

$$A^{(k+1)} f(x) = A^{(1)} f_k(x)$$

Выполняемъ затѣмъ въ функціяхъ $f(x)$ и $f_k(x)$ замѣну перемѣнныхъ по формуламъ (2) и обозначимъ выполненіе этой замѣны прибавкой къ функціи индекса $^{(1)}$. Тогда на основаніи нашего предположенія относительно выполненія полярной операціи k-го порядка, функція $f_k^{(1)}(x)$ будетъ производной k-го порядка отъ функціи $f^{(1)}(x)$ по перемѣнной z, такъ что можно написать

$$\frac{\partial^k f^{(1)}(x)}{\partial z^k} = f_k^{(1)}(x).$$

Беремъ первую производную отъ обѣихъ частей этого равенства по перемѣнной z и получаемъ

$$\frac{\partial^{k+1} f^{(1)}(x)}{\partial z^{k+1}} = \frac{\partial f_k^{(1)}(x)}{\partial z}$$

Если мы въ этомъ равенствѣ вернемся къ прежнимъ перемѣннымъ x_i, то его правая часть обратится въ $A^{(1)} f_k(x)$, или на основаніи равенства (3) сдѣлается равной $A^{(k+1)} f(x)$, т. е. результату полярной операціи $k+1$-го порядка надъ функціей $f(x)$. Обративъ вниманіе на способъ полученія лѣвой части, убѣждаемся въ томъ, что полярная операція $k+1$-го порядка можетъ быть получена помощью линейнаго преобразованія, дифференцированія $k+1$-го порядка по одной перемѣнной и линейнаго преобразованія, обратнаго предыдущему, точно также, какъ и полярная операція k-го порядка.

Предыдущее позволяетъ такимъ образомъ перенести новое опредѣленіе полярной операціи съ выясненнаго перваго порядка на второй, со второго на третій и т. д., т. е. доказывается общность новаго опредѣленія полярныхъ операцій.

2-й способъ. Второй способъ не отличается существенно отъ перваго, только вмѣсто замѣны перемѣнныхъ x_i по формуламъ (2), онѣ замѣняются въ функціи $f(x)$ выраженіями $x_i + ty_i$, затѣмъ берется k-я производная по t, послѣ чего вмѣсто выраженій $x_i + ty_i$ ставятся просто перемѣнныя x_i.

Разсужденія, доказывающія законность такого пріема, настолько аналогичны употребленнымъ для обоснованія предыдущаго способа, что было бы утомительнымъ повтореніемъ приводить ихъ здѣсь.

Вмѣсто второй замѣны $x_i + ty_i$ на x_i, можно, очевидно, ничего не мѣняя по существу, полагать $t = 0$. Тогда второй способъ вычисленія полярныхъ операцій можно формулировать слѣдующимъ образомъ:

Для полученія результата полярной операціи k-го порядка надъ функціей $f(x)$ надо замѣнить въ ней перемѣнныя x_i на выраженія $x_i + ty_i$, взять k-ю производную по t и затѣмъ положить эту перемѣнную равной нулю.

Помощью этихъ двухъ новыхъ опредѣленій можно распространить нѣкоторыя свойства производныхъ и на полярныя операціи.

Возьмемъ произведеніе двухъ функцій $f(x)$ и $\varphi(x)$ и найдемъ результатъ полярной операціи k-го порядка надъ этимъ произведеніемъ.

Можно получить его, примѣняя, какъ первый, такъ и второй способъ.

Слѣдуя напримѣръ первому способу замѣняемъ въ этомъ произведеніи перемѣнныя x_i ихъ выраженіями по формуламъ (2), отмѣтивъ это прибавкой черты надъ x, и затѣмъ беремъ производную k-го порядка по перемѣнной z. На основаніи теоремы Лейбница имѣемъ:

$$\frac{\partial^k \{ f(\bar{x})\, \varphi(\bar{x}) \}}{\partial z^k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{\partial^j f(\bar{x})}{\partial z^j} \, \frac{\partial^{(k-j)} \varphi(\bar{x})}{\partial z^{k-j}}$$

гдѣ обозначенія

$$\frac{\partial^{(0)} f(\bar{x})}{\partial z^0} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^{(0)} \varphi(\bar{x})}{\partial z^0}$$

равносильны самимъ функціямъ $f(\bar{x})$ и $\varphi(\bar{x})$.

Переходимъ теперь къ прежнимъ перемѣннымъ. Тогда лѣвая часть обратится въ $A^{(k)}\{ f(x)\, \varphi(x) \}$, а каждый изъ множителей

$$\frac{\partial^{(j)} f(\bar{x})}{\partial z^j} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^{(k-j)} \varphi(\bar{x})}{\partial z^{k-j}}$$

второй части соотвѣтственно въ $A^{(j)} f(x)$ и $A^{(k-j)} \varphi(x)$, и мы будемъ имѣть такую формулу

$$A^{(k)}\{ f(x)\, \varphi(x) \} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^{(j)} f(x)\, A^{(k-j)} \varphi(x). \tag{I}$$

Предположимъ теперь функцію $f(x)$ независящей отъ перемѣнныхъ y_i и обозначимъ производную отъ $f(x)$ по перемѣнной x_i черезъ $f_i(x)$, такъ что

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_i(x).$$

Обозначая какъ и прежде чертой надъ x замѣну перемѣнныхъ по формуламъ (2), беремъ производную отъ функціи $f(\bar{x})$ по перемѣнной y_i. Согласно только что введенному обозначенію получаемъ:

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial y_i} = z f_i(\bar{x}).$$

Производная j-го порядка отъ обѣихъ частей этого равенства по перемѣнной z дастъ такой результатъ:

$$\frac{\partial^{(j+1)} f(\bar{x})}{\partial z^j \partial y_i} = z\,\frac{\partial^j f_i(\bar{x})}{\partial z^j} + j\,\frac{\partial^{(j-1)} f_i(\bar{x})}{\partial z^{j-1}} \tag{3}$$

По опредѣленію, перейдя въ производной $\frac{\partial^j f(\bar{x})}{\partial z^j}$ къ прежнимъ перемѣннымъ, получимъ $A^{(j)} f(x)$ и слѣдовательно имѣемъ

$$\frac{\partial^j f(\bar{x})}{\partial z^j} = A^{(j)} f(\bar{x}), \tag{4}$$

гдѣ черта надъ x обозначаетъ, что въ выраженіи $A^{(j)} f(x)$ перемѣнныя x_i замѣнены ихъ выраженіями (2).

Беремъ теперь производную по перемѣнной y_i отъ обѣихъ частей. Вторая часть зависитъ отъ перемѣнной y_i явно и черезъ посредство перемѣнной x_i; въ силу этого она будетъ состоять изъ двухъ слагаемыхъ, пишемъ поэтому

$$\frac{\partial^{(j+1)} f(\bar{x})}{\partial z^j \partial y_i} = \frac{\partial A^{(j)} f(\bar{x})}{\partial y_i} + z\,\frac{\partial A^{(j)} f(\bar{x})}{\partial \bar{x}_i}$$

Второй членъ второй части можно написать въ другомъ видѣ.

Прежде всего замѣчаемъ, что операціи $A^{(1)}$ и $\frac{\partial}{\partial x_1}$ можно производить надъ функціей въ какомъ угодно порядкѣ. Отсюда просто выводится свойство операцій $A^{(j)}$ и $\frac{\partial}{\partial x_i}$, по которому результатъ не зависитъ отъ измѣненія порядка ихъ примѣненія. Поэтому имѣемъ

$$\frac{\partial A^{(j)} f(\bar{x})}{\partial \bar{x}_i} = A^{(j)} f_i(\bar{x}),$$

или если мы воспользуемся формулой (4), въ которой мы примемъ вмѣсто функціи $f(x)$ функцію $f_i(x)$,

$$\frac{\partial A^{(j)} f(\overline{x})}{\partial \overline{x}_i} = \frac{\partial^j f_i(\overline{x})}{\partial z^j}$$

и слѣдовательно мы можемъ нашей производной дать такой видъ:

$$\frac{\partial^{(j+1)} f(\overline{x})}{\partial z^j \partial y_i} = \frac{\partial A^{(j)} f(\overline{x})}{\partial y_i} + z \frac{\partial^{(j)} f_i(\overline{x})}{\partial z^j}$$

Сравнивая полученный результатъ съ находящимся въ формулѣ (3) видимъ, что правыя части, состоя каждая изъ двухъ слагаемыхъ, имѣютъ по одинаковому слагаемому, слѣдовательно, другія два слагаемыхъ также равны, и получаемъ:

$$j \frac{\partial^{(j-1)} f_i(\overline{x})}{\partial z^{j-1}} = \frac{\partial A^{(j)} f(\overline{x})}{\partial y_i}$$

Возвращаясь въ этой формулѣ къ прежнимъ перемѣннымъ, получаемъ такое равенство:

$$A^{(j-1)} f_i(x) = \frac{1}{j} \frac{\partial A^{(j)} f(x)}{\partial y_i}$$

Но очевидно

$$f_i(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial A^{(1)} f(x)}{\partial y_i},$$

и мы можемъ написать такую окончательную формулу:

$$A^{(j-1)} \frac{\partial A^{(1)} f(x)}{\partial y_i} = \frac{1}{j} \frac{\partial A^{(j)} f(x)}{\partial y_i} \tag{II}$$

Можно доказать эту формулу и при помощи второго способа опредѣленія полярной операціи.

Но мы не будемъ останавливаться на этомъ доказательствѣ и выведемъ еще одну теорему относительно полярныхъ операцій.

Предположимъ независящую отъ перемѣнныхъ y_i функцію $f(x)$ однороднымъ полиномомъ въ перемѣнныхъ x_i порядка n.

Подставимъ въ нее вмѣсто перемѣнныхъ x_i выраженія $x_i + t y_i$ и $t\left(y_i + \frac{1}{t} x_i\right)$, тогда на основаніи свойства однородности будемъ имѣть:

$$f(x + ty) = t^n f\left(y + \frac{1}{t} x\right).$$

Разложимъ лѣвую часть этого равенства по степенямъ перемѣнной t. По формулѣ Маклореня коэффиціентъ при j-ой степени перемѣнной t будетъ равенъ производной j-го порядка отъ функціи $f(x + ty)$ по перемѣнной t для ея значенія равнаго нулю, раздѣленной на число $j!$, т. е. согласно предыдущему равенъ $\frac{A^{(j)} f(x)}{j!}$ и мы можемъ написать

$$f(x+ty) = \sum_{j=0}^{n} \frac{t^j}{j!} A^{(j)} f(x).$$

Введемъ новую полярную операцію, въ которой роль перемѣнныхъ x_i и y_i взаимно измѣнена,

$$B^{(1)} \equiv \sum_{i=1}^{p} x_i \frac{\partial}{\partial y_i}$$

и также полярныя операціи j-го порядка $B^{(j)}$, состоящія изъ j—кратнаго повторенія операціи $B^{(1)}$.

Благодаря введенію такой операціи разложеніе функціи $f\left(y+\frac{1}{t}x\right)$ по отрицательнымъ степенямъ перемѣнной t будетъ по аналогіи съ предыдущимъ такого вида:

$$f\left(y+\frac{1}{t}x\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!\, t^j} B^{(j)} f(y),$$

и слѣдовательно будемъ имѣть такое тождество, справедливое при какихъ угодно значеніяхъ перемѣнной t:

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{t^j}{j!} A^{(j)} f(x) = t^n \left\{ \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!\, t^j} B^{(j)} f(y) \right\}.$$

Сравнивая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ перемѣнной t въ обѣихъ частяхъ этого тождества, придемъ къ такимъ формуламъ:

$$(n-j)!\ A^{(j)} f(x) = j!\ B^{(n-j)} f(y), \tag{III}$$

устанавливающимъ соотношеніе между взаимными операціями $A^{(j)}$ и $B^{(k)}$.

Въ частномъ случаѣ при $j=n$ получаемъ

$$A^{(n)} f(x) = n!\ f(y)$$

т. е. результатъ полярной операціи n-го порядка надъ однороднымъ полиномомъ n-го же порядка равенъ результату замѣны въ немъ перемѣнныхъ x_i на перемѣнныя y_i, умноженному на произведеніе $n!$.

§ 2. Объ одномъ свойствѣ системы обыкновенныхъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій.

Система:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \frac{dx_3}{X_3} = \ldots = \frac{dx_p}{X_p}\,, \tag{1}$$

гдѣ

$$X_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, x_j$$

$$i = 1, 2, \ldots, p,$$

будетъ обладать частнымъ алгебраическимъ интеграломъ, если имѣетъ мѣсто тождество:

$$Xf = Kf\,, \tag{2}$$

гдѣ X обозначаетъ операцію

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

f однородный полиномъ n-ой степени въ перемѣнныхъ x_i, а K нѣкоторая постоянная.

Займемся изученіемъ вида этой постоянной.

Начнемъ со случая $n=1$. Какъ извѣстно тогда K будетъ равно одному изъ корней характеристическаго уравненія. Выведемъ это, такъ какъ матеріалъ необходимый для вывода, пригодится намъ для послѣдующихъ разсужденій.

Положивъ, что

$$f \equiv \sum_{i=1}^{p} l_i\, x_i\,,$$

подставляемъ выраженіе для функціи f въ уравненіе (2) и находимъ:

$$\sum_{i=1}^{p} X_i l_i = K \sum_{j=1}^{p} l_j x_j.$$

Подставляя сюда значенія функцій X_i, приходимъ къ такому результату:

$$\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p} a_{ij} l_i\, x_j = K \sum_{j=1}^{p} l_j x_j.$$

Полученное равенство должно быть тождествомъ при какихъ угодно значеніяхъ перемѣнныхъ x_j, а потому мы имѣемъ слѣдующія p уравненій для опредѣленія коэффиціентовъ l_i

$$\sum_{i=1}^{p} a_{ij}\, l_i = K l_j$$
$$j = 1, 2, \ldots, p.$$

Эти уравненія однородны относительно искомыхъ коэффиціентовъ и число ихъ равно числу уравненій, а потому они всегда будутъ имѣть рѣшеніе, если ихъ дискриминантъ равенъ нулю. Въ данномъ случаѣ этотъ дискриминантъ можетъ быть представленъ въ видѣ слѣдующаго опредѣлителя p-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-K & a_{21} & a_{31} & \ldots & a_{p1} \\ a_{12} & a_{22}-K & a_{32} & \ldots & a_{p2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-K & \ldots & a_{p3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1p} & a_{2p} & a_{3p} & \ldots & a_{pp}-K \end{vmatrix} \equiv \Delta(K).$$

Итакъ въ случаѣ $n = 1$ постоянная K можетъ быть только однимъ изъ корней уравненія

$$\Delta(K) = 0,$$

извѣстнаго подъ именемъ характеристическаго. Обозначимъ черезъ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_q$ $q \overline{<} p$ его корни и сможемъ тогда формулировать слѣдующую теорему.

Если система (1) обладаетъ частнымъ алгебраическимъ интеграломъ степени n, то соотвѣтствующая ему постоянная K равна суммѣ произведеній корней характеристическаго уравненія на неотрицательныя цѣлыя числа, а сумма этихъ послѣднихъ равна n.

Обозначимъ эти числа черезъ $k_1, k_2, \ldots, k_q$ и по только что высказанной теоремѣ будемъ имѣть два равенства:

$$K = \sum_{i=1}^{q} k_i\, \lambda_i$$
$$n = \sum_{i=1}^{q} k_i. \qquad (3)$$

Предыдущую теорему можно формулировать также иначе.

Если уравненіе (2) имѣетъ интеграломъ полиномъ n-ой степени, то K имѣетъ видъ, указанный формулами (3).

Разница между этой формулировкой и предыдущей заключается въ томъ, что въ первомъ случаѣ p не можетъ быть меньше двухъ, тогда какъ во второмъ p можетъ равняться и единицѣ.

Мы начнемъ провѣрку этой теоремы именно съ этого простѣйшаго случая. Уравненіе (2) принимаетъ тогда такой простой видъ:

$$a_{11} x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} = Kf.$$

Въ этомъ случаѣ можно положить f равнымъ x_1^n. Выполнивъ подстановку, получимъ такое равенство:

$$a_{11} n x_1^n = K x_1^n.$$

Отсюда $K = n a_{11}$.

Но характеристическое уравненіе сведется въ данномъ случаѣ къ такому:

$$a_{11} - K = 0\,,$$

и слѣдовательно въ случаѣ $p = 1$ наша теорема справедлива.

Чтобы провѣрить ея общность, предположимъ ея справедливость для числа перемѣнныхъ $p = r - 1$ и убѣдимся въ ея справедливости для $p = r$.

Находимъ частный линейный интегралъ, соотвѣтствующій одному изъ корней характеристическаго уравненія, напр. корню λ_1 и пусть мы получимъ его въ видѣ линейной функціи

$$\sum_{i=1}^{r} l_i\, x_i\ .$$

Одинъ изъ коэффиціентовъ l_i долженъ быть отличенъ отъ нуля, и его можно принять равнымъ единицѣ. Кромѣ того, нумерація перемѣнныхъ зависитъ въ данномъ случаѣ вполнѣ отъ нашего произвола и потому мы можемъ предположить, что отличенъ отъ нуля именно коэффиціентъ l_1. Такъ какъ умноженіе этой функціи на постоянную не измѣнитъ свойства ея быть частнымъ интеграломъ, то можно принять $l_1 = 1$ и написать ее въ видѣ

$$x_1 + \sum_{i=2}^{r} l_i\, x_i\ .$$

Въ качествѣ частнаго интеграла она удовлетворитъ условію

$$X\left\{x_1 + \sum_{i=2}^{r} l_i\, x_i\right\} = \lambda_1 \left\{x_1 + \sum_{i=2}^{p} l_i x_i\right\}, \tag{4}$$

которое эквивалентно r слѣдующимъ:

$$a_{11}+\sum_{i=2}^{r} a_{i1}\, l_i=\lambda_1$$
$$a_{1j}+\sum_{i=2}^{r} a_{ij} l_i=\lambda_1\, l_j \tag{5}$$
$$j=2,\ 3,\ldots,\ r$$

Произведемъ въ уравненіи (2) такую замѣну перемѣнныхъ:

$$x_1=y_1-\sum_{i=2}^{r} l_i\, y_i \tag{6}$$
$$x_j=y_j \qquad j=2,\ 3,\ldots,\ r$$

Сначала находимъ обратныя формулы для выраженія перемѣнныхъ y_i въ функціи перемѣнныхъ x_i:

$$y_1=x_1+\sum_{i=2}^{r} l_i\, x_i \tag{7}$$
$$y_j=x_j \qquad j=2,\ 3,\ldots,\ r$$

Если мы подставимъ въ разсматриваемый нами интегралъ уравненія (2) $f(x)$ вмѣсто перемѣнныхъ x_i ихъ выраженія (6) черезъ перемѣнныя y_i, то получимъ новую функцію $\varphi(y)$, и равенство:

$$f(x)=\varphi(y) \tag{8}$$

будетъ справедливо на основаніи формулъ (6). Оно обратится въ тождество, если въ полиномъ $\varphi(y)$ внесемъ вмѣсто перемѣнныхъ y_i ихъ выраженія (7) черезъ перемѣнныя x_i.

Подвергая обѣ части полученнаго такимъ образомъ тождества операціи X, получаемъ равенство:

$$Xf(x)=\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_i}\, Xy_i.$$

Но, принимая во вниманіе уравненіе (2), даемъ сначала ему такой видъ:

$$\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_i}\, Xy_i=Kf(x),$$

или по равенству (8) слѣдующій:

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y_i} X y_i = K\varphi(y), \tag{9}$$

Для окончанія преобразованія остается замѣнить въ функціяхъ Xy_i перемѣнныя x_i перемѣнными y_i при помощи формулъ (6).

Прежде всего

$$Xy_1 = X\left(x_1 + \sum_{i=2}^{r} l_i\, x_i\right)$$

Но, принимая во вниманіе условіе (5), имѣемъ:

$$Xy_1 = \lambda_1\left(x_1 + \sum_{i=2}^{r} l_i\, x_i\right) = \lambda_1 y_1.$$

Затѣмъ получаемъ:

$$Xx_i = X_i \qquad i=2,3,\ldots,r$$

Подставляя въ выраженіе

$$X_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} x_j$$

значенія перемѣнныхъ x_i по формуламъ (6), находимъ:

$$X_i = a_{i1}\, y_1 + \sum_{j=2}^{r} (a_{ij} - l_j\, a_{i1})\, y_j$$

$$i=2,3,\ldots,r.$$

Обозначивъ для краткости буквой y_i сумму

$$\sum_{j=2}^{r} (a_{ij} - l_j a_{i1})\, y_j ,$$

можемъ написать уравненіе (2), преобразованное къ новымъ перемѣннымъ y_i въ такомъ видѣ:

$$\lambda_1 y_1 \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y_1} + \sum_{i=2}^{r} (a_{i1}\, y_1 + Y_i) \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y_i} = K\varphi(y) \tag{10}$$

Входящій въ это равенство полиномъ $\varphi(y)$ можетъ дѣлиться на нѣкоторую степень k_1' перемѣнной y_1; другими словами можно положить $\varphi(y)$ тождественно равнымъ $y_1^{k_1'}\varphi_1(y)$. Полиномъ $\varphi_1(y)$ степени $n - k_1'$ уже не будетъ дѣлиться на y_1. Выраженіе $y_1^{k_1'}\varphi_1(y)$ для полинома $\varphi(y)$ будетъ самымъ общимъ, если допустимъ, что цѣлое число k_1' можетъ быть и нулемъ.

Подставляя это новое выраженіе для полинома $\varphi(y)$ въ уравненіе (8), получимъ такое уравненіе для полинома $\varphi_1(y)$.

$$\lambda_1 y_1 \frac{\partial\varphi_1(y)}{\partial y_1} + \sum_{i=2}^{r} (a_{i1} y_1 + Y_i) \frac{\partial\varphi_1(y)}{\partial y_i} = (K - k_1{}'\lambda)\,\varphi_1(y) \qquad (11)$$

Такъ какъ полиномъ $\varphi_1(y)$, не дѣлясь на y_1, не обращается въ нуль при $y_1 = 0$, то онъ можетъ быть представленъ въ видѣ суммы $\varphi_2(y) + y_1\varphi_3(y)$, гдѣ полиномъ $\varphi_2(y)$ не зависитъ совсѣмъ отъ перемѣнной y_1.

Замѣтивъ это, даемъ въ равенствѣ (11) перемѣнной y_1 значеніе равное нулю. Тогда производная $\frac{\partial\varphi_1(y)}{\partial y_i}$ равная $\frac{\partial\varphi_2(y)}{\partial y_i} + y_1 \frac{\partial\varphi_3(y)}{\partial y_i}$ обратится въ $\frac{\partial\varphi_2(y)}{\partial y_i}$, и вмѣсто него мы будемъ имѣть слѣдующее:

$$\sum_{i=2}^{r} Y_i \frac{\partial\varphi_2(y)}{\partial y_i} = (K - k_1{}'\lambda_1)\,\varphi_2(y). \qquad (12)$$

Полученное равенство можно истолковать въ томъ смыслѣ, что нѣкоторый полиномъ $\varphi_2(y)$ степени $n - k_1{}'$ удовлетворяетъ дифференціальному уравненію типа уравненія (2), но съ $r-1$ независимыми перемѣнными. По предположенію можно выразить постоянную $K - k_1{}'\lambda_1$ черезъ корни соотвѣтствующаго характеристическаго уравненія.

Это новое характеристическое уравненіе получается изъ уравненія $\Delta(k) = 0$ очень просто дѣленіемъ на входящій въ лѣвую часть множитель $\lambda_1 - k$.

Чтобы доказать это, множимъ каждый j-ый столбецъ опредѣлителя $\Delta(k)$ на l_j и складываемъ съ первымъ столбцемъ, тогда первый элементъ перваго столбца представитъ такую сумму

$$a_{11} + \sum_{i=2}^{r} a_{i1} l_i - K,$$

каждый-же j-ый элементъ перваго столбца представится въ видѣ такого выраженія:

$$a_{1j} + \sum_{i=2}^{r} a_{ij} l_i - K l_j\,.$$

Сравнивая полученныя суммы съ лѣвыми частями условій (5), найдемъ, что первый элементъ перваго столбца обратится въ $\lambda_1 - K$, а каждый j-ый въ $l_j(\lambda_1 - K)$. Умножая первую строку послѣдовательно на l_j

и вычитая изъ j-ой строки, сдѣлаемъ всѣ элементы перваго столбца за исключеніемъ перваго элемента нулями и получимъ въ результатѣ нашъ опредѣлитель $\Delta(K)$ въ видѣ произведенія $\lambda_1 - K$ на опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} a_{22} - l_2 a_{21} - K & a_{32} - l_2 a_{31} & \dots & a_{p2} - l_2 a_{p1} \\ a_{23} - l_3 a_{21} & a_{33} - l_3 a_{31} - K & \dots & a_{p3} - l_3 a_{p1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2p} - l_p a_{21} & a_{3p} - l_p a_{31} & \dots & a_{pp} - l_p a_{p1} - K \end{vmatrix}$$

гдѣ $p = r$.

Если обратимъ вниманіе на значенія функціи Y_i, то убѣдимся, что полученный опредѣлитель, приравненный нулю, даетъ характеристическое уравненіе для уравненія (12). Отсюда слѣдуетъ, что корни его будутъ тѣ-же, что и уравненія $\Delta(K) = 0$, т. е. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ съ тѣмъ различіемъ, что краткость корня λ_1 будетъ въ новомъ характеристическомъ уравненіи на единицу меньше.

Теперь на основаніи нашего предположенія примѣняемъ формулу (3) и получаемъ:

$$K - k_1' \lambda_1 = k_1'' \lambda_1 + \sum_2^r k_i \lambda_i ,$$

$$n - k_1' = k_1'' + \sum_2^r k_i .$$

Положивъ $k_1' + k_1'' = k_1$, получимъ окончательно:

$$K = \sum_{i=1}^r k_i \lambda_i$$

$$n = \sum_{i=1}^r k_i .$$

Эти равенства подтверждаютъ сдѣланныя нами утвержденія и справедливость формулированной нами теоремы.

§ 3. Объ аналогичномъ свойствѣ обыкновенныхъ алгебраическихъ нелинейныхъ дифференціальныхъ уравненій.

На сей разъ предположимъ въ системѣ

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\frac{dx_3}{X_3}=\ldots=\frac{dx_p}{X_p} \tag{1}$$

однородные полиномы X_i всѣ одного и того же измѣренія равнаго m. Тогда въ уравненіи

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i}=Kf \tag{2}$$

полиномъ K будетъ $m-1$-го измѣренія.

Какъ и въ разсмотрѣнномъ нами случаѣ постоянной K, можно этотъ полиномъ опредѣлить въ функціи корней нѣкоторыхъ алгебраическихъ уравненій и цѣлыхъ чиселъ.

Эти уравненія уже извѣстны въ наукѣ и примѣнялись въ цѣляхъ интегрированія.

Первыя получаются, если приравнять нулю всѣ опредѣлители матриссы:

$$\left|\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_p \\ X_1 & X_2 & X_3 & \ldots & X_p \end{matrix}\right| \tag{3}$$

Система значеній, удовлетворяющихъ этимъ уравненіямъ, опредѣляетъ то, что называютъ особенной (критической) точкой системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій (1).

Обозначимъ одну изъ такихъ системъ черезъ a_{ji} $i=1,2,\ldots,p$ и результатъ подстановки $x_i=a_{ji}$ $i=1,2,3,\ldots,p$ въ полиномъ X_l черезъ A_{jl}. Такъ какъ величины A_{jl} $l=1,2,\ldots,p$ будутъ въ силу равенства нулю всѣхъ опредѣлителей матриссы (3) пропорціональны величинамъ a_{jl} $l=1,2,\ldots,p$, то будетъ существовать такая величина λ_j, для которой справедливы слѣдующія p равенствъ:

$$A_{jl}=\lambda_j a_{jl} \qquad l=1,2,\ldots,p. \tag{4}$$

Изученіе этихъ точекъ составляетъ предметъ многочисленныхъ работъ. Но такъ какъ ими мнѣ не придется пользоваться, и кромѣ того онѣ слишкомъ общеизвѣстны, то я не буду останавливаться на нихъ подробнѣе. Гораздо важнѣе для меня слѣдующая линейная система:

$$\frac{dy_1}{(A^{(1)}X_1)_j}=\frac{dy_2}{(A^{(1)}X_2)_j}=\ldots=\frac{dy_p}{(A^{(1)}X_p)_j} \tag{5}$$

гдѣ $A^{(1)}$ обозначаетъ полярную операцію, свойства которой мы разсматривали въ первомъ параграфѣ, а скобки, въ которыя заключенъ результатъ операціи $A^{(1)}$ надъ полиномомъ X_l, означаютъ, что въ этомъ результатѣ произведена подстановка $x_i = a_{ji}$ $i = 1, 2, \ldots, p$.

Почти всѣ изслѣдованія, касающіяся проведенія интегральной кривой черезъ особенную точку, пользуются системой (3), но подъ другой формой.

Если же изученіе системы (1) связать съ соотвѣтствующимъ коннексомъ $(m, 1)$ въ пространствѣ $p-1$ измѣреній, то система (5) поведетъ къ коннексу (1,1), который будетъ касательнымъ въ данной особенной точкѣ для перваго.

Д. М. Синцовъ, введя понятіе касательнаго коннекса, (Теорія коннексовъ въ пространствѣ. Казань. 1895 г. стр. 152 и слѣдующія, и Къ вопросу объ особенныхъ элементахъ коннекса. Изв. Казан. Физико-Матем. Общ. (2) т. XI n⁰ 4. 1901 г.) впервые далъ уравненіе замѣняющее данное вблизи особенной точки съ извѣстнымъ приближеніемъ. Это позволило ему получить геометрически тѣ результаты, которые были другимъ путемъ получены французскимъ ученымъ H. Poincaré.

Я приведу здѣсь два свойства системъ (1) и (5), полученныя Д. М. Синцовымъ, которыми мнѣ придется воспользоваться.

Первое состоитъ въ томъ, что точка a_{ji}, $i = 1, 2, \ldots, p$ будетъ особенной и для системы (5).

Въ самомъ дѣлѣ, для доказательства этого свойства достаточно выяснить, что подстановка $y_i = a_{ji}$ $i = 1, 2, \ldots, p$ обратитъ въ нуль каждый изъ опредѣлителей матриссы:

$$\left| \begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & \ldots & y_p \\ (A^{(1)}X_1)_j & (A^{(1)}X_2)_j & (A^{(1)}X_3)_j & \ldots & (A^{(1)}X_p)_j \end{array} \right|$$

Выполнимъ эту подстановку.

Прежде всего можемъ написать:

$$(A^{(1)}X_l)_j = \sum_{i=1}^{p} y_i \left(\frac{\partial X_l}{\partial x_i}\right)_j$$

Наша подстановка обратитъ это выраженіе въ слѣдующую сумму:

$$\sum_{i=1}^{p} a_{ji} \left(\frac{\partial X_l}{\partial x_i}\right)_j,$$

которую можно разсматривать, какъ результатъ подстановки $x_i = a_{ji}$ $i = 1, 2, \ldots, p$ въ сумму

$$\sum_{i=1}^{p} x_i \frac{\partial X_l}{\partial x_i},$$

равную по теоремѣ Ейлера для однородныхъ функцій полиному mX_l, и слѣдовательно результатъ подстановки $x_i = a_{ji}$ $i = 1, 2, \ldots, p$ въ этотъ полиномъ и $y_i = a_{ji}$ $i = 1, 2, \ldots, p$ въ линейную функцію $(A^{(1)}X_l)_j$ будетъ равенъ mA_{jl}. Въ силу этого разсматриваемая матрисса по подстановкѣ приметъ такой видъ

$$\left| \begin{matrix} a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \ldots & a_{jp} \\ mA_{j1} & mA_{j2} & mA_{j3} & \ldots & mA_{jp} \end{matrix} \right|,$$

который показываетъ, что каждый изъ ея опредѣлителей будетъ нулемъ на основаніи равенствъ (4).

Другое свойство заключается въ томъ, что одинъ изъ корней характеристическаго уравненія системы (5) будетъ равенъ $m\lambda_j$.

Въ самомъ дѣлѣ, это характеристическое уравненіе напишется въ такомъ видѣ:

$$\left| \begin{matrix} \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\right)_j - \lambda & \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2}\right)_j & \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_3}\right)_j & \ldots & \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_p}\right)_j \\ \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right)_j & \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right)_j - \lambda & \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_3}\right)_j & \ldots & \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_p}\right)_j \\ \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_1}\right)_j & \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_2}\right)_j & \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_3}\right)_j - \lambda & \ldots & \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_p}\right)_j \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_1}\right)_j & \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_2}\right)_j & \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_3}\right)_j & \ldots & \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_p}\right)_j - \lambda \end{matrix} \right| = 0.$$

Замѣтимъ сначала, что одна изъ величинъ a_{ji} $i = 1, 2, \ldots, p$ отлична отъ нуля, и, такъ какъ выборъ нумераціи зависитъ отъ насъ, то положимъ, что a_{j1} не равно нулю. Множимъ въ этомъ предположеніи первый столбецъ только-что написаннаго опредѣлителя на a_{j1} и складываемъ съ его элементами элементы всѣхъ остальныхъ столбцовъ, умноживъ предварительно всѣ элементы i-го столбца на a_{ji}. Тогда всѣ элементы въ первомъ столбцѣ выразятся такой суммой:

$$\sum_{i=1}^{p} a_{ji} \left(\frac{\partial X_l}{\partial x_i}\right)_j - \lambda a_{jl}.$$

Но мы только что видѣли, что

$$\sum_{i+1}^{p} a_{ji}\left(\frac{\partial X_l}{\partial x_i}\right)_j$$

равняется mA_{jl}, или вслѣдствіе равенства (4) $m\lambda_j a_{jl}$. Такимъ образомъ каждый элементъ перваго столбца и l-ой строки напишется въ видѣ $a_{jl}(m\lambda_j - \lambda)$ и слѣдовательно каждый элементъ перваго столбца, а потому и лѣвая часть разсматриваемаго нами характеристическаго уравненія будетъ имѣть множителемъ $m\lambda_j - \lambda$. Отсюда слѣдуетъ, что одинъ изъ корней его будетъ равенъ $m\lambda_j$.

Остальные $p-1$ корней обозначимъ черезъ λ_{ji} $i=2, 3, \ldots, p$.

Теперь мы имѣемъ весь необходимый матеріалъ для формулировки основной теоремы этого параграфа.

Она содержитъ въ себѣ слѣдующее утвержденіе:

Результатъ подстановки $x_i = a_{ji}$ $(i=1, 2, \ldots, p)$ въ полиномъ K равенъ суммѣ величинъ λ_j и λ_{ji} $i=2, 3, \ldots, p$, умноженныхъ соотвѣтственно на нѣкоторыя цѣлыя неотрицательныя числа.

Для доказательства преобразуемъ тождество

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = Kf, \tag{6}$$

въ которомъ f полиномъ n-ой степени, и тождество

$$\sum_{i=1}^{p} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = nf, \tag{7}$$

получаемое на основаніи теоремы Ейлера, въ новыя помощью примѣненія полярной операціи $A^{(k)}$.

Пользуясь тождествами

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial A^{(1)} f}{\partial y_i}$$

$$i=1, 2, \ldots, p,$$

измѣняемъ наши тождества въ слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial A^{(1)} f}{\partial y_i} &= Kf \\ \sum_{i=1}^{p} x_i \frac{\partial A^{(1)} f}{\partial y_i} &= nf. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Затѣмъ подвергаемъ обѣ части обоихъ тождествъ операціи $A^{(k)}$ и слѣдовательно можемъ написать:

$$\sum_{i=1}^{p} A^{(k)}\left\{X_i \frac{\partial A^{(1)} f}{\partial y_i}\right\} = A^{(k)}\{Kf\}$$

$$\sum_{i=1}^{p} A^{(k)}\left\{x_i \frac{\partial A^{(1)} f}{\partial y_i}\right\} = nA^{(k)} f.$$

Пользуясь формулой (I) для произведенія двухъ функцій, даемъ имъ такой видъ:

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{g=0}^{k}\binom{k}{g} A^{(g)} X_i A^{(k-g)} \frac{\partial A^{(1)} f}{\partial y_i} = \sum_{g=0}^{k}\binom{k}{g} A^{(g)} K A^{(k-g)} f \qquad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{g=0}^{k}\binom{k}{g} A^{(g)} x_i A^{(k-g)} \frac{\partial A^{(1)} f}{\partial y_i} = nA^{(k)} f.$$

Второе значительно упрощается, если примемъ во вниманіе, что

$$A^{(g)} x_i = 0 \text{ при } g > 1$$

и

$$A^{(1)} x_i = y_i \, .$$

Въ виду этого получаемъ:

$$\sum_{i=1}^{p} x_i A^{(k)} \frac{\partial A^{(1)} f}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{p} k y_i A^{(k-1)} \frac{\partial A^{(1)} f}{\partial y_i} = nA^{(k)} f.$$

Затѣмъ на основаніи формулы (II) можно замѣнить въ тождествѣ (9) $A^{(k-g)} \dfrac{\partial A^{(1)} f}{\partial y_i}$ черезъ $\dfrac{1}{k-g+1} \dfrac{\partial A^{(k-g+1)} f}{\partial y_i}$ и слѣдовательно получить

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{g=0}^{k}\binom{k}{g} \frac{1}{k-g+1} A^{(g)} X_i \frac{\partial A^{(k-g+1)} f}{\partial y_i} = \sum_{j=0}^{k} A^{(g)} K A^{(k-g)} f \qquad (10)$$

и

$$\sum_{i=1}^{p} x_i \frac{1}{k+1} \frac{\partial A^{(k+1)} f}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{p} y_i \frac{\partial A^{(k)} f}{\partial y_i} = nA^{(k)} f.$$

Но надо имѣть въ виду, что функція $A^{(k)}$ есть однородный полиномъ k-го измѣренія относительно перемѣнныхъ $y_i (i = 1, 2, \ldots, p)$ и что слѣдовательно вторая сумма въ послѣднемъ равенствѣ равна по теоремѣ Ейлера $kA^{(k)}f$, найдемъ окончательно

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{x_i}{k+1} \frac{\partial A^{(k+1)}f}{\partial y_i} = (n-k)\, A^{(k)}f. \qquad (11)$$

Условимся, какъ и раньше, обозначать скобками со значкомъ j результатъ подстановки $x_i = a_{ji}$ $i = 1, 2, \ldots, p$ въ какую либо функцію; такъ наприм. $(U)_j$ будетъ результатомъ этой подстановки въ функцію U.

Предположимъ сначала, что величина $(f)_j$ отлична отъ нуля и тогда послѣ подстановки тождества (8) обратятся въ слѣдующія:

$$\sum_{i=1}^{p} A_{ji} \left(\frac{\partial A^{(1)}f}{\partial y_i}\right)_j = (K)_j\, (f)_j$$

и

$$\sum_{i=1}^{p} a_{ji} \left(\frac{\partial A^{(1)}f}{\partial y_i}\right)_j = n\, (f)_j\, .$$

Умножая обѣ части второго равенства на λ_j и вычитая результатъ изъ обѣихъ частей перваго, получаемъ

$$\sum_{i=1}^{p} \left(A_{ji} - \lambda_j\, a_{ji}\right) \left(\frac{\partial A^{(1)}f}{\partial y_i}\right)_j = \{(K)_j - n\lambda_j\}\, (f)_j\, .$$

Но въ силу равенствъ (4) лѣвая часть обращается въ нуль, а второй множитель правой части $(f)_j$ по предположенію не нуль, поэтому равенъ нулю первый множитель $(K)_j - n\lambda_j$, или

$$(K)_j = \lambda_j n\, . \qquad (12)$$

Затѣмъ предполагаемъ, что при той же подстановкѣ обращается въ нуль не только самъ полиномъ f, но и всѣ его производныя до порядка $k_j - 1$-го включительно. Тогда будутъ равны нулю и выраженія $(A^{(g)}f)_j$ при $g < k_j$, такъ какъ коэффиціенты полинома въ перемѣнныхъ y_i $i = 1, 2, \ldots, p$ $A^{(g)}f$ будутъ производныя отъ f порядка g.

Замѣтивъ это, примемъ въ тождествахъ (10) и (11) $k = k_j$ и выполнимъ въ нихъ нашу подстановку. Такъ какъ послѣ подстановки сумма $\sum\limits_{g=0}^{k}$ въ лѣвой части тождества (10) будетъ заключать только два отличныхъ отъ нуля члена, то мы пишемъ:

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{A_{ji}}{k_j+1} \frac{\partial\, (A^{(k_j+1)}f)_j}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{p} (A^{(1)}X_i)_j \frac{\partial\, (A^{(k_j)}f)_j}{\partial y_i} = (K)_j\, (A^{(k_j)}f)_j$$

и

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{a_{ji}}{k_j+1} \frac{\partial (A^{(k_j+1)}f)_j}{\partial y_i} = (n-k_j)(A^{(k_j)}f)_j$$

Умножаемъ обѣ части второго равенства изъ только что полученныхъ на λ_j и вычитаемъ изъ перваго; тогда въ виду равенствъ (4) въ лѣвой части вновь полученнаго равенства исчезнутъ $\frac{\partial (A^{(k+1)}f)_j}{\partial y_i}$, и мы получаемъ:

$$\sum_{i=1}^{p} (A^{(1)}X_i)_j \frac{\partial (A^{(k_j)}f)_j}{\partial y_i} = \{(K)_j - (n-k_j)\lambda_j\}(A^{(k_j)}f)_j \tag{13}$$

Полученное тождество показываетъ, что уравненіе

$$\sum_{i=1}^{p} (A^{(1)}X_i)_j \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} = K\varphi \tag{14}$$

имѣетъ интеграломъ однородный полиномъ степени k_j. Прилагая къ этому случаю формулы (3) предыдущаго параграфа и замѣчая, что корни характеристическаго уравненія согласно принятымъ обозначеніямъ будутъ $m\lambda_j$ и λ_{ji} $i=2, 3, \ldots, q$ $q \leq p$, пишемъ:

$$(K)_j - (n-k_j)\lambda_j = k_{j1} m\lambda_j + \sum_{i=2}^{q} k_{ji}\lambda_{ji}$$

$$k_j = \sum_{i=1}^{q} k_{ji}$$

Или

$$(K)_j = (n-k_j)\lambda_j + k_{j1} m\lambda_j + \sum_{i=2}^{q} k_{ji}\lambda_{ji} \tag{15}$$

Полученное равенство заключаетъ въ себѣ равенство (12) въ видѣ частнаго случая, стоитъ только принять k_j равнымъ нулю, такъ какъ тогда и каждое изъ чиселъ k_{ji} также будетъ равно нулю, иначе сумма неотрицательныхъ чиселъ не могла бы равняться нулю.

Равенство (15) вполнѣ рѣшаетъ вопросъ о результатѣ подстановки въ полиномъ K $x_i = a_{ji}$ $i=1, 2, \ldots, p$.

§ 4. Опредѣленіе полиномовъ K.

Особенныя точки, какъ мы видѣли въ предыдущемъ параграфѣ, обращаютъ въ нуль всѣ опредѣлители матриссы:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \dots x_p \\ X_1 & X_2 & X_3 \dots X_p \end{vmatrix}$$

т. е. удовлетворяютъ такому ряду уравненій:

$$x_j X_i - x_i X_j = 0\,, \tag{1}$$

гдѣ значки j и i принимаютъ значеніе всѣхъ цѣлыхъ чиселъ не меньшихъ единицы и не большихъ p.

Въ общемъ случаѣ всѣ особенныя точки различны.

Покажемъ это.

Какъ извѣстно изъ алгебры, для того, чтобы данное рѣшеніе было кратнымъ, необходимо и достаточно условіе обращать въ нуль всѣ Якобіевскіе опредѣлители любой группы $p-1$ изъ уравненій (1) по любымъ $p-1$ перемѣннымъ.

Всегда можно замѣнить равенство нулю опредѣлителя совмѣстимостью ряда линейныхъ уравненій.

Мы получимъ такія уравненія для даннаго случая, подвергнувъ лѣвыя части уравненій (1) операціи $A^{(1)}$ и поставивъ условіе, чтобы среди этихъ линейныхъ относительно перемѣнныхъ y_i уравненій было бы не болѣе $p-2$ независимыхъ.

Эти уравненія будутъ вида:

$$y_j X_i - y_i X_j + x_j A^{(1)} X_i - x_i A^{(1)} X_j = 0\,, \tag{2}$$

гдѣ значки j и i имѣютъ то же значеніе, что и въ уравненіяхъ (1).

Замѣчая, что одну изъ перемѣнныхъ напримѣръ x_1 можно считать отличной отъ нуля, добавимъ къ уравненіямъ (1) еще уравненіе $X_1 - \lambda x_1 = 0$ съ новой перемѣнной λ, которая для каждой особенной точки будетъ имѣть одно опредѣленное значеніе.

Тогда система уравненій (1) совмѣстно съ добавленнымъ приметъ болѣе простой видъ:

$$X_i - \lambda x_i = 0 \qquad {\scriptstyle i=1,\,2,\dots,p} \tag{3}$$

Внося отсюда значеніе X_i въ уравненія (2), даемъ имъ такой видъ:

$$x_j\,(A^{(1)} X_i - \lambda y_i) - x_i\,(A^{(1)} X_j - \lambda y_j) = 0\,.$$

Вводимъ новую перемѣнную μ и присоединяемъ къ этимъ уравненіямъ новое:

$$A^{(1)}X_1 - \lambda y_1 - \mu x_1 = 0\,, \tag{4}$$

которое связываетъ перемѣнную μ линейно съ перемѣнными y_i.

Тогда система (2) совмѣстно съ добавленнымъ уравненіемъ (4) обратится въ p такихъ уравненій:

$$A^{(1)}X_i - \lambda y_i - \mu x_i = 0$$
$$i = 1, 2, \ldots, p.$$

Мы къ системѣ, въ которой было не болѣе $p-2$ линейно независимыхъ, прибавили еще одно съ перемѣнной, которая не входила въ прежнія уравненія, а потому среди полученной не можетъ быть больше $p-1$ линейно независимыхъ, и во всякомъ случаѣ опредѣлители матриссы

$$\left|\begin{array}{cccccc}
\frac{\partial X_1}{\partial x_1} - \lambda & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} & \ldots & \frac{\partial X_1}{\partial x_p} & x_1 \\
\frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} - \lambda & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} & \ldots & \frac{\partial X_2}{\partial x_p} & x_2 \\
\frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} - \lambda & \ldots & \frac{\partial X_3}{\partial x_p} & x_3 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & & . \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & & . \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & & . \\
\frac{\partial X_p}{\partial x_1} & \frac{\partial X_p}{\partial x_2} & \frac{\partial X_p}{\partial x_3} & \ldots & \frac{\partial X_p}{\partial x_p} - \lambda & x_p
\end{array}\right| \tag{5}$$

всѣ равны нулю.

Нетрудно убѣдиться въ томъ, что полученныя условія не будутъ въ общемъ случаѣ слѣдствіемъ уравненій (3). Приравняемъ, наприм., опредѣлитель, составленный изъ p послѣднихъ столбцовъ матриссы (5), нулю. Положивъ $X_i = c_i x_1^m + X_i'$, гдѣ c_i въ общемъ случаѣ совершенно произвольныя постоянныя, увидимъ, что полученное уравненіе не зависитъ ни отъ одной постоянной c_i. Если бы оно было слѣдствіемъ уравненій (3), то оно было бы результатомъ исключенія постоянныхъ c_i изъ этихъ уравненій, но это невозможно, такъ какъ опредѣлитель Якоби этихъ уравненій по постояннымъ c_i равенъ x_1^{pm}.

Извѣстно, что если число N особенныхъ точекъ конечно (и всѣ онѣ различны), то оно равно $\dfrac{m^p-1}{m-1}$ [1]).

[1]) См. напр., Д. М. Синцовъ. Теорія коннексовъ въ пространствѣ, стр. 253.

Условимся понимать подъ выраженіемъ «точка обращаетъ въ нуль данный полиномъ» свойство даннаго полинома обращаться въ нуль по подстановкѣ въ него значеній перемѣнныхъ, опредѣляющихъ точку, и формулируемъ такую теорему:

Всѣ особенныя точки не могутъ обращать въ нуль одного и того же полинома m—1-ой степени.

Ради ясности изложенія доказательства мнѣ придется прибѣгнуть къ геометрической терминологіи.

Если данная система алгебраическихъ уравненій такова, что мы можемъ задать k перемѣннымъ произвольныя значенія, то она будетъ опредѣлять точечное многообразіе k—1-го измѣренія. Если по добавленіи k произвольныхъ линейныхъ уравненій число рѣшеній будетъ равно n, то многообразіе будетъ n-го порядка. Оно можетъ разлагаться на нѣсколько многообразій низшаго порядка.

Такое разложеніе можетъ быть достигнуто добавленіемъ ограничивающихъ уравненій. Само собою разумѣется, можно предполагать эти уравненія независящими ни отъ какихъ новыхъ, (т. е. входившихъ въ прежнія уравненія) постоянныхъ.

Для поясненія приведемъ примѣръ:

Если къ двумъ уравненіямъ

$$x_1(x_1+a_1x_3)+x_2(x_2+a_1x_3)=0$$

$$x_1(x_2+a_2x_4)+x_2(x_1+a_2x_4)=0,$$

представляющимъ совокупность прямой и кривой 3-го порядка, прибавимъ уравненіе

$$x_1-x_2=0,$$

то выдѣлимъ прямую.

Добавленіе же уравненія

$$(x_1+a_1x_3)(x_1+a_2x_4)-(x_2+a_1x_3)(x_2+a_2x_4)=0$$

выдѣлитъ кривую третьяго порядка.

Предположимъ въ дальнѣйшемъ $p>2$.

Пусть L неприводимый полиномъ n—го порядка и пусть въ выраженіи $\sum_{j=1}^{p} b_{1j}x_j$ постоянныя b_{1j} выбраны такимъ образомъ, что уравненіе

$$L=0 \tag{6}$$

не есть слѣдствіе уравненія

$$\sum_{j=1}^{p} b_{1j}x_j=0, \tag{7}$$

и слѣдовательно число точекъ, обращающихъ въ нуль уравненіе (6) и необращающихъ въ нуль уравненія (7), безконечно велико.

Затѣмъ всегда можно составить матриссу изъ постоянныхъ b_{ij}

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} & \dots & \dots & b_{M1} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} & \dots & \dots & b_{M2} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} & \dots & \dots & b_{M3} \\ . & . & . & \dots & \dots & . \\ . & . & . & \dots & \dots & . \\ . & . & . & \dots & \dots & . \\ b_{1p} & b_{2p} & b_{3p} & \dots & \dots & b_{Mp} \end{vmatrix} \qquad (8)$$

имѣющую сколь угодно большое число M столбцовъ, каждый опредѣлитель которой отличенъ отъ нуля.

Обозначимъ черезъ y_i выраженіе $\sum_{j=1}^{p} b_{ij}\, x_j$ и черезъ Y_i полиномъ $\sum_{j=1}^{p} b_{ij}\, X_j$ и покажемъ, что можно всегда выбрать опредѣлитель $y_1 Y_i - y_i Y_1$ такимъ образомъ, что уравненіе

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_i \\ Y_1 & Y_i \end{vmatrix} = 0 \qquad (9)$$

и уравненіе (6) опредѣлятъ многообразіе p—3-го измѣренія.

Допустимъ, что это невѣрно и что слѣдовательно уравненіе (9) для всѣхъ значеній i отъ 2 до p включительно есть слѣдствіе уравненія (6), Возьмемъ какую-нибудь точку, обращающую въ нуль полиномъ L и необращающую въ нуль выраженіе y_1. Можно тогда опредѣлить λ такимъ образомъ, чтобы уравненіе

$$Y_1 - \lambda y_1 = 0$$

удовлетворялось для этой точки. Но тогда въ силу уравненій (9) будутъ удовлетворяться для этой точки и уравненія

$$Y_i - \lambda y_i = 0$$
$$i = 2, 3, \dots, p.$$

Но эти новыя p уравненій можно написать въ видѣ

$$\sum_{j=1}^{p} b_{ij}\,(X_j - \lambda x_j) = 0.$$
$$i = 1, 2, 3, \dots, p$$

Опредѣлитель, составленный изъ постоянныхъ b_{ij}, по предположенію отличенъ отъ нуля, а потому эти уравненія эквивалентны такимъ:

$$X_j - \lambda x_j = 0 \qquad j = 1, 2, 3, \dots, p.$$

А это указывало бы, что любая точка, обращающая въ нуль полиномъ L и не обращающая въ нуль выраженіе y_1, была бы особенной точкой, и слѣдовательно ихъ было бы противъ предположенія безконечное число.

На основаніи выше изложеннаго мы можемъ предположить, что напримѣръ, уравненіе

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ Y_1 & Y_2 \end{vmatrix} = 0\,,$$

совмѣстно съ уравненіемъ (6) опредѣляютъ многообразіе $p-3$-го измѣренія.

Предположимъ намъ удалось убѣдиться въ томъ, что приравнивая нулю всѣ опредѣлители матриссы

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_k \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & \dots & Y_k \end{vmatrix} \tag{10}$$

получимъ систему уравненій, которая совмѣстно съ уравненіемъ (6) опредѣляетъ точечное многообразіе U $p-k-1$-го измѣренія, и покажемъ, что можно выбрать указатель $i > k$ такимъ, что всѣ уравненія, полученныя приравниваніемъ нулю всѣхъ опредѣлителей матриссы

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_k & y_i \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & \dots & Y_k & Y_i \end{vmatrix} \tag{11}$$

совмѣстно съ уравненіемъ (6) опредѣлятъ точечное многообразіе $p-k-2$-го измѣренія.

Допустимъ, что это невѣрно и новыя уравненія опредѣляютъ точечное многообразіе V_i $p-k-1$-го измѣренія. Такъ какъ послѣднее получено путемъ прибавленія новыхъ уравненій къ прежнимъ, опредѣляющимъ многообразіе U, то оно можетъ либо быть имъ самимъ, либо въ томъ случаѣ, когда многообразіе U разлагается, составлять хотя бы часть его.

Предположимъ для общности, что многообразіе U разлагается на l частей U_1, $U_2, \dots, U_j$, . , U_l. Подставляя вмѣсто указателя i значенія $k+1$, $k+2, \dots, M$, получимъ $M-k$ уравненій, обращающихся въ нуль для точекъ одного изъ многообразій U_1, $U_2, \dots, U_j, ., U_l$. Легко показать, что только $p-k-1$ изъ нихъ могутъ обращаться въ нуль для всѣхъ точекъ одного и того же многообразія, напр., U_j. Допустимъ противное, и пусть первая $p-k$ изъ нихъ даютъ такія системы, которыя обращаются въ нуль для любой точки многообразія U_j. Тогда опредѣляемъ множитель λ такимъ образомъ, что для какой-нибудь произвольно взятой точки, принадлежащей многообразію U_j, будетъ обращаться въ нуль уравненіе

$$Y_g - \lambda y_g = 0.$$

Тогда изъ имѣющихся $p-k$ системъ будетъ слѣдовать, что для той же точки будутъ обращаться въ нуль уравненія

$$Y_i - \lambda y_i = 0 \qquad i=1, 2, \ldots, p$$

которыя можно написать въ видѣ

$$\sum_{j=1}^{p} b_{ij}(X_j - \lambda x_j) = 0,$$

и которыя подобно предыдущему эквивалентны системѣ уравненій

$$X_j - \lambda x_j = 0 \qquad j=1, 2, \ldots, p$$

Эти послѣднія показываютъ, что всѣ точки многообразія U_j особенныя и что слѣдовательно особенныхъ точекъ противъ предположенія безчисленное множество. Поэтому, если мы положимъ M равнымъ $k+l(p-k-1)+1$, то между $l(p-k-1)+1$ системами будетъ по крайней мѣрѣ одна, не обращающаяся въ нуль для всѣхъ точекъ хотя бы одного изъ многообразій $U_1\ U_2\ U_3 \ldots U_l$.

Итакъ будетъ существовать по крайней мѣрѣ одна система, полученная приравниваніемъ нулю всѣхъ опредѣлителей матриссы вида

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \ldots & y_{k+1} \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & \ldots & Y_{k+1} \end{vmatrix}$$

и уравненія (6) и опредѣляющая многообразіе $p-k-2$-го измѣренія.

Въ предыдущемъ мы провѣрили теорему для $k=2$ и указали соображенія, которыя устанавливаютъ справедливость предложенія для случая $k+1$, коль скоро оно справедливо для k. Слѣдовательно оно справедливо для k какого угодно.

Положивъ $k=p-1$, получимъ въ частности, что система, образованная приравниваніемъ нулю всѣхъ опредѣлителей матриссы

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_{p-1} \\ Y_1 & Y_2 & \ldots & Y_{p-1} \end{vmatrix} \qquad (12)$$

и уравненія (6), опредѣлитъ многообразіе нулевого измѣренія, т. е. конечное число точекъ.

Число этихъ точекъ опредѣлить нетрудно. Въ самомъ дѣлѣ, приравнивая нулю всѣ опредѣлители матриссы (12), получимъ уравненіе кривой порядка $\frac{m^{p-1}-1}{m-1}$ и слѣдовательно по общему принципу алгебры число точекъ этой кривой, обращающихъ въ нуль полиномъ L равно $\frac{m^{p-1}-1}{m-1}n$.

Мы предполагали полиномъ L неприводимымъ. Предположимъ теперь, что онъ представляетъ произведеніе неприводимыхъ полиномовъ $L_1, L_2, \ldots, L_l$ соотвѣтственно степеней $n_1, n_2, \ldots, n_l$, сумма которыхъ $n_1+n_2+\ldots+n_l$ равна n. Тогда, разсуждая въ отдѣльности для каждаго полинома L_g, получимъ для него $\frac{m^{p-1}-1}{m-1}n_g$ точекъ. Значитъ всего точекъ будетъ $\sum_{g=1}^{l}\frac{m^{p-1}-1}{m-1}n_g=\frac{m^{p-1}-1}{m-1}n$, тоже самое число, что и для неприводимаго полинома.

Отсюда легко получить верхній предѣлъ числа особенныхъ точекъ обращающихъ въ нуль данный полиномъ n-го порядка.

Въ самомъ дѣлѣ, съ одной стороны какъ бы мы ни выбирали постоянныя b_{ij}, особенныя точки удовлетворяютъ всѣмъ уравненіямъ, полученнымъ приравниваніемъ нулю всѣхъ опредѣлителей матриссы (12), а съ другой стороны при надлежащемъ выборѣ этихъ постоянныхъ число точекъ, обращающихъ въ нуль полиномъ L и всѣ опредѣлители матриссы (12), будетъ равно $\frac{m^{p-1}-1}{m-1}n$. Среди этихъ точекъ находятся слѣдовательно всѣ особенныя точки, обращающія въ нуль полиномъ L, и потому ихъ не можетъ быть больше $\frac{m^{p-1}-1}{m-1}n$.

Въ частномъ случаѣ $n=m-1$, получаемъ $m^{p-1}-1$.

Такъ какъ число особенныхъ точекъ, когда онѣ различны равно $\frac{m^p-1}{m-1}$, то остается по крайней мѣрѣ $\frac{m_p-1}{m-1}-m^{p-1}+1=\frac{m^{p-1}-1}{m-1}+1$.

Другими словами какъ бы мы ни выбирали коэффиціенты полинома $m-1$-ой степени, всегда останется по крайней мѣрѣ $\frac{m^{p-1}-1}{m-1}+1$ особеннныхъ точекъ, не обращающихъ его въ нуль, и слѣдовательно всегда можно выбрать среди N особенныхъ точекъ такую группу $P=\binom{m+p-2}{p-1}$ точекъ, которыя не обращаютъ въ нуль одновременно одного и того же полинома $m-1$-ой степени.

Пусть всѣ особенныя точки a_{ji} $i=1, 2, \ldots, p$ со значкомъ j, принимающимъ всѣ значенія отъ 1 до P включительно, составляютъ такую группу. Мы можемъ воспользоваться ей на основаніи основной теоремы предыдущаго параграфа для опредѣленія полинома K.

Мы знаемъ, что результатъ подстановки въ этотъ полиномъ $x_i = a_{ij}$ $i = 1, 2, \ldots, p$ равенъ $(K)_j$ линейному выраженію, данному въ предыдущемъ параграфѣ формулой (15).

Возьмемъ полиномъ L m—1-го порядка съ неопредѣленными коэффиціентами и обозначимъ черезъ L_j результатъ подстановки $x_i = a_{ij}$ $i = 1, 2, \ldots, p$ въ полиномъ L.

Пишемъ равенство:

$$L_j = (K)_j$$

Если въ лѣвую часть этого равенства подставимъ вмѣсто неопредѣленныхъ коэффиціентовъ коэффиціенты полинома K, то получимъ тождество; слѣдовательно это равенство можно разсматривать, какъ уравненіе для коэффиціентовъ полинома K.

Давая указателю j всѣ значенія, начиная отъ 1 до P включительно, получимъ число уравненій равное числу искомыхъ коэффиціентовъ. Эти уравненія разрѣшимы. Въ самомъ дѣлѣ если бы этого не было, то уравненія

$$L_j = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, P$$

были бы совмѣстимы, и выбранная группа точекъ обращала бы въ нуль одинъ и тотъ же полиномъ m—1-го порядка, что противорѣчитъ нашему предположенію.

Итакъ, рѣшая наши уравненія, получимъ искомые коэффиціенты полинома K и слѣдовательно получимъ выраженіе для этого полинома.

Это выраженіе будетъ зависѣть отъ степени частнаго интеграла и отъ цѣлыхъ чиселъ k_j и k_{ji}, характеризующихъ частный интегралъ въ данной особенной точкѣ, опредѣляемой постоянными a_{ji}.

Этотъ методъ опредѣленія полинома K межетъ быть примѣненъ всякій разъ, когда среди особенныхъ точекъ, находятся ли онѣ въ конечномъ, или безконечномъ числѣ, есть группа P точекъ, не обращающихъ въ нуль одного и того же полинома m—1-го порядка.

Тотъ же случай, когда такой группы нѣтъ, рѣшается переходомъ къ предѣлу, того-же характера, какъ и переходъ къ предѣлу, примѣненный Д'Аламберомъ для опредѣленія интеграловъ линейныхъ уравненій въ случаѣ кратныхъ корней.

Но конечно выясненію всѣхъ могущихъ встрѣтиться при этомъ обстоятельствъ должно быть посвящено особое изслѣдованіе.

§ 5. Опредѣленіе частныхъ алгебраическихъ интеграловъ даннаго порядка.

Предложенный въ предыдущемъ способъ опредѣленія полиномовъ K позволяетъ упростить рѣшеніе слѣдующей задачи: опредѣлить всѣ частные алгебраическіе интегралы даннаго порядка n.

Для этого, какъ извѣстно, надо въ уравненіи

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = Kf, \tag{1}$$

опредѣлить полиномъ f порядка n, причемъ данными являютси только полиномы m-го порядка X_i, а полиномъ K долженъ быть выбранъ соотвѣтственнымъ образомъ.

Покажемъ на основаніи вышесказаннаго, что число возможныхъ значеній полиномовъ K при данномъ n конечно.

Беремъ группу особенныхъ точекъ, необращающихъ въ нуль одного и того же полинома m—1-ой степени. Результатъ подстановки въ полиномъ K какой нибудь особенной точки дастъ по § 3 такой результатъ

$$(K)_j = (n - k_j)\,\lambda_j + k_{j1} m\lambda_j + \sum_{i=1}^{q} k_{ji}\,\lambda_{ji} \tag{2}$$

при условіи

$$k_j = \sum_{i=1}^{q} k_{ji}\,.$$

Коэффиціенты полинома K опредѣлятся тогда по § 4 уравненіями

$$L_j = (K)_j$$
$$j = 1, 2, 3, \ldots, P,$$

гдѣ L_j результатъ подстановки одной изъ особенныхъ точекъ выбранной нами группы въ полиномъ m—1-го порядка съ неопредѣленными коэффиціентоми.

Можно непосредственно опредѣлить полиномъ K, стоитъ только прибавить къ вышенаписаннымъ уравненіямъ такое

$$L = K\,,$$

и произвести изъ полученныхъ $P+1$ линейныхъ уравненій исключеніе P неопредѣленныхъ коэффиціентовъ полинома L.

Можно написать результатъ этого исключенія въ такомъ видѣ:

$$K \equiv \sum_{j=1}^{P} (K)_j M_j , \tag{3}$$

гдѣ M_j будутъ полиномы m—1-го порядка, зависящіе только отъ значеній, опредѣляющихъ особенныя точки и слѣдовательно неизмѣняющіеся для всѣхъ полиномовъ K. Аналитически они опредѣляются тѣмъ свойствомъ, что они обращаются въ нуль для P—1 особенныхъ точекъ выбранной нами группы и въ единицу для оставшейся точки.

Чтобы получить всѣ полиномы K, отвѣчающіе случаю частныхъ алгебраическихъ интеграловъ данной степени n, достаточно дать числамъ $k_j\, k_{ij}$ всѣ возможныя для нихъ значенія; но такъ какъ они не могутъ быть отрицательными и каждое изъ нихъ меньше $n+1$, то число возможныхъ значеній полинома K конечно.

Предположимъ, что мы составили всѣ полиномы K для случая $n=1$. Для этого очевидно надо только положить для каждаго указателя j одно изъ чиселъ $n-k_j$, k_{ji} $(i=1, 2, \ldots, q)$ равнымъ единицѣ, а остальныя нулями.

Пусть $K^{(g)}$ $(g=1, 2, \ldots, R)$ эти полиномы, гдѣ R ихъ число.

Введемъ слѣдующія новыя обозначенія: положимъ,

$$\lambda_j = \mu_{j1} = \mu_{j2} = \ldots = \mu_{j,\, n-k_j}$$

$$m\lambda_j = \mu_{j,\, n-k_j+1} = \mu_{j,\, n-k_j+2} = \ldots = \mu_{j,\, n-k_j+k_{j1}}$$

и затѣмъ

$$\lambda_{ij} = \mu_{jg}$$

гдѣ g принимаетъ всѣ значенія

$$\text{отъ } n - \sum_{h=i}^{q} k_{jh} + 1 \quad \text{до} \quad n - \sum_{h=i+1}^{q} k_{jh}$$

Тогда результатъ подстановки $(K)_j$ напишется въ такомъ простомъ видѣ:

$$(K)_j = \sum_{g=1}^{n} \mu_{jg} . \tag{4}$$

Внося это выраженіе въ формулу (3), получимъ:

$$K = \sum_{j=1}^{P} \sum_{g=1}^{n} \mu_{jg} M_g \tag{5}$$

Мѣняя порядокъ этой двойной суммы мы получимъ:

$$K = \sum_{g=1}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{P} \mu_{jg} M_j \right\}.$$

Но сумма, заключенная въ скобки, представляетъ собой ничто иное, какъ одинъ изъ полиномовъ $K^{(g)}$ $(g=1,\ 2,\ldots,R)$ и слѣдовательно полиномъ K ничто иное какъ сумма, составленная изъ полиномовъ $K^{(g)}$. Нѣкоторые изъ полиномовъ могутъ не входить вовсе, другіе могутъ войти по нѣскольку разъ, и мы приходимъ къ новой формулѣ, опредѣляющей полиномъ K:

$$K = \sum_{g=1}^{R} v_g K^{(g)}, \tag{6}$$

гдѣ v_g неотрицательныя цѣлыя числа, удовлетворяющія условію:

$$\sum_{g=1}^{R} v_g = n.$$

Такимъ образомъ, опредѣливъ всѣ R полиномовъ для случая $n=1$, мы легко составимъ полиномы K для какой угодно степени n.

Необходимо замѣтить, что разложеніе не будетъ единственнымъ. Мы получимъ всѣ различныя разложенія, мѣняя предварительно всѣми возможными способами порядокъ суммы (4).

Опредѣливъ полиномъ K, переходимъ къ изслѣдованію частныхъ алгебраическихъ интеграловъ, отвѣчающихъ этому полиному. Подставимъ это значеніе полинома K, обозначивъ его черезъ K_1, въ уравненіе (1) и получимъ:

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - K_1 f = 0. \tag{7}$$

Подставляемъ въ лѣвую часть этого равенства вмѣсто неизвѣстнаго намъ полинома f полиномъ n-ой степени съ произвольными коэффиціентами B_i, получимъ полиномъ $n+m-1$-го порядка. Коэффиціенты его N_i числомъ $\binom{n+m+p-2}{p-1}$ будутъ линейными и однородными функціями постоянныхъ B_i. Если мы внесемъ въ эти выраженія N_i вмѣсто постоянныхъ B_i значенія коэффиціентовъ частнаго интеграла f, опредѣляемаго уравненіемъ (7), то они обратятся тождественно въ нуль. Поэтому, положивъ

$$N_i = 0,$$

будемъ имѣть $\binom{m+n+p-2}{p-1}$ уравненій для опредѣленія коэффиціентовъ частныхъ алгебраическихъ интеграловъ n-го порядка, удовлетворяющихъ уравненію (1).

Число полученныхъ уравненій будетъ больше числа $\binom{n+p-1}{p-1}$ неизвѣстныхъ. Надо поэтому различать три случая:

1. Эти уравненія несовмѣстимы. Тогда не будетъ существовать частнаго интеграла, соотвѣтствующаго найденному значенію K_1 полинома K.

2. Число линейно независимыхъ между ними на единицу меньше числа неизвѣстныхъ B_i. Тогда эти уравненія даютъ для нихъ одно опредѣленное рѣшеніе, и ему будетъ отвѣчать вполнѣ опредѣленный частный алгебраическій интегралъ.

3. Число независимыхъ между ними меньше на число $r>1$. Тогда число рѣшеній, удовлетворяющихъ этимъ уравненіямъ будетъ безконечно большое. Но во всякомъ случаѣ среди нихъ можетъ существовать группа r линейно независимыхъ между собой рѣшеній. Всѣ остальныя выразятся черезъ нихъ и черезъ r совершенно произвольныхъ величинъ; при этомъ послѣднія войдутъ въ рѣшеніе линейно и однородно.

Положимъ, что мы нашли эту группу. Тогда эти r рѣшеній дадутъ r линейно независимыхъ частныхъ интеграловъ. Обозначимъ ихъ черезъ f_j $(j=1, 2, \ldots, r)$ и будемъ имѣть r тождествъ:

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = K_1 f_j, \qquad j=1, 2, \ldots, r, \tag{8}$$

Возьмемъ r совершенно произвольныхъ постоянныхъ C_j $(j= =1, 2, \ldots, r)$, помножимъ тождество (8) на C_j и просуммируемъ обѣ части отъ 1 до r. Получимъ:

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial \sum\limits_{j=1}^{r} C_j f_j}{\partial x_i} = K_1 \sum_{j=1}^{r} C_j f_j$$

Это тождество показываетъ, что и полиномъ $\sum\limits_{j=1}^{r} C_j f_j$ также частный интегралъ разсматриваемой системы.

Этотъ случай замѣчателенъ тѣмъ, что можно получить отсюда $r-1$ интеграловъ уравненія

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, положивъ въ немъ $z=\frac{f_j}{f_i}\,(j=2,\,3\,,\ldots,r)$, убѣждаемся на основаніи тождествъ (8) при помощи непосредственнаго вычисленія, что результатъ этой подстановки будетъ нуль. Конечно число функціонально независимыхъ между ними можетъ быть и меньше $r-1$.

Такимъ образомъ задача опредѣленія частныхъ алгебраическихъ интеграловъ порядка n, разъ извѣстны полиномы K для случая $n=1$, сводится къ линейной.

§ 6. Выдѣленіе частныхъ алгебраическихь интеграловъ, заключающихся въ данномъ полиномѣ.

Въ дальнѣйшемъ мы увидимъ, что могутъ встрѣтиться такіе полиномы, которые заключаютъ въ себѣ частный алгебраическій интегралъ въ видѣ множителя.

Пусть данный полиномъ $F(x)$ представляетъ собой произведеніе двухъ полиномовъ $\Phi(x)$ и $f(x)$, изъ которыхъ второй есть частный алгебраическій интегралъ, удовлетворяющій тождеству:

$$\sum_{i=1}^{p} X_i\,\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}=Kf(x)\,. \tag{1}$$

Обозначимъ для краткости черезъ X операцію

$$\sum_{i=1}^{p} X_i\frac{\partial}{\partial x_i}\,,$$

такъ что

$$Xf(x)\equiv\sum_{i=1}^{p} X_i\,\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\,,$$

и подвергнемъ ей обѣ части тождества

$$F(x)=\Phi(x)\;f(x)\,.$$

Въ результатѣ получаемъ:

$$XF(x)=f(x)\;X\Phi(x)+\Phi(x)\;Xf(x)\,,$$

или, принимая во вниманіе тождество (1), пишемъ:

$$XF(x)=f(x)X\Phi(x)+f(x)\Phi(x)K\,.$$

Это послѣднее тождество показываетъ, что, если полиномъ $F(x)$ имѣетъ въ видѣ множителя частный алгебраическій интегралъ $f(x)$, то и общій наибольшій дѣлитель полиномовъ $F(x)$ и $XF(x)$ также заключаетъ полиномъ $f(x)$ въ видѣ множителя.

Отсюда выводимъ такое правило для выдѣленія частнаго алгебраическаго интеграла изъ полинома $F(x)$:

Подвергаемъ его операціи X. Полученный въ результатѣ полиномъ $XF(x)$ можетъ дѣлиться нацѣло на полиномъ $F(x)$, и слѣдовательно можно положить для этого случая

$$XF(x) = K_1 F(x).$$

Изъ полученнаго тождества слѣдуетъ, что полиномъ $F(x)$—частный алгебраическій интегралъ.

Если же полиномъ $XF(x)$ не дѣлится нацѣло на полиномъ $F(x)$, то ищемъ ихъ общій наибольшій дѣлитель. Когда онъ приводится къ постоянной, заключаемъ, что полиномъ $F(x)$ не заключаетъ частнаго алгебраическаго интеграла въ видѣ множителя. Когда же это будетъ полиномъ $F_1(x)$, то искомый частный алгебраическій интегралъ будетъ заключаться въ этомъ полиномѣ. Примѣняя къ нему тотъ же самый пріемъ, мы либо убѣдимся, что полиномъ $F_1(x)$—частный алгебраическій интегралъ, либо получимъ новый полиномъ $F_2(x)$ степени низшей, чѣмъ степень полинома $F_1(x)$. Продолжая такимъ образомъ, мы либо получимъ частный алгебраическій интегралъ $F_k(x)$, либо убѣдимся, что среди множителей полинома $F(x)$ нѣтъ частнаго алгебраическаго интеграла.

Полученный такимъ образомъ частный алгебраическій интегралъ можетъ быть разложенъ на множители, и легко убѣдиться, что каждый множитель будетъ въ свою очередь частнымъ алгебраическимъ интеграломъ.

Предположимъ, что частный алгебраическій интегралъ $f(x)$, удовлетворяющій тождеству (1), которое мы можемъ представить въ видѣ

$$X \log f = K, \tag{2}$$

состоитъ изъ нѣсколькихъ множителей.

Раскладываемъ полиномъ $f(x)$ на неприводимые множители и слѣдовательно представимъ его въ такомъ видѣ:

$$\prod_{j=1}^{s} f_j^{\alpha_j}.$$

Отсюда

$$\log f = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j \log f_j.$$

Внося полученный результатъ въ тождество (2), даемъ ему такой видъ:

$$\sum_{j=1}^{s} \alpha_j X \log f_j = \sum_{j=1}^{s} \frac{\alpha_j X f_j}{f_j} = K.$$

Такъ какъ всѣ полиномы f_j неприводимы и различны между собою, то это тождество невозможно безъ того, чтобы каждый полиномъ Xf_j не дѣлился на соотвѣтствующій полиномъ f_j. Обозначивъ частное отъ дѣленія этихъ полиномовъ черезъ K_j, пишемъ рядъ тождествъ:

$$Xf_j = K_j f_j$$
$$j=1,2,\ldots,s.$$

гдѣ K_j— полиномы m—1-го порядка.

Эти тождества и доказываютъ наше утвержденіе [1]).

Аналогичный способъ выдѣленія частныхъ алгебраическихъ интеграловъ примѣнимъ и къ болѣе общему случаю.

Предположимъ, что полиномъ $F(x)$, заключающій частные алгебраическіе интегралы, зависитъ линейно отъ постоянныхъ, значеніе которыхъ a priori неизвѣстно; т. е. требуется найти всѣ частные алгебраическіе интегралы, заключающіеся въ выраженіи:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{s} B_i C_i, \qquad (3)$$

гдѣ B_i данные полиномы одного и того-же порядка, а C_i нѣкоторыя постоянныя.

Прежде всего находимъ общаго наибольшаго дѣлителя полиномовъ B_i; обозначимъ его черезъ B и положимъ:

$$B_i \equiv BB_{1i}$$
$$i=1,2,\ldots,s,$$

Тогда $F(x)$ можно представить въ видѣ произведенія:

$$F(x) \equiv B\left\{\sum_{i=1}^{s} B_{1i} C_i\right\}.$$

Частные алгебраическіе интегралы могутъ содержаться, какъ въ первомъ, такъ и во второмъ множителяхъ. Какъ поступить съ первымъ множителемъ, мы уже знаемъ, а второй одинаковъ съ полиномомъ (3), съ тою разницею, что въ немъ полиномы B_{1i} не имѣютъ общаго дѣлителя. Такимъ образомъ задача сводится къ тому случаю, когда полиномы B_i не имѣютъ общаго множителя. Предположимъ это и подвергнемъ обѣ части равенства (3) операціи X; получаемъ въ результатѣ:

$$XF(x) = \sum_{i=1}^{s} C_i XB_i.$$

---

[1]) Моя работа: Частные алгебраическіе интегралы. Стр. 90.

Разсмотримъ отдѣльно два случая:

1. Имѣютъ мѣсто тождественно слѣдующія соотношенія

$$\frac{XB_1}{B_1} = \frac{XB_2}{B_2} = \ldots = \frac{XB_s}{B_s}, \tag{4}$$

выражающія обстоятельство, что отношеніе полинома $XF(x)$ къ полиному $F(x)$ не будетъ зависѣть отъ постоянныхъ C_i, каковы бы они ни были.

Найдемъ общаго наибольшаго дѣлителя полиномовъ XB_1 и B_1 и обозначимъ результатъ дѣленія этихъ полиномовъ на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя соотвѣтственно черезъ E_2 и E_1. Тогда получимъ такія равенства:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{XB_i}{B_i}$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots, s.$$

или

$$E_1 XB_i = E_2 B_i$$

Такъ какъ E_1 и E_2 первые между собою, полученныя равенства показываютъ, что полиномъ E_1 — общій дѣлитель полиномовъ B_i; но такъ какъ они по предположенію не имѣютъ его, то можно принять E_1 за единицу, и мы получимъ

$$XB_i = E_2 B_i$$

$$i = 1, 2, \ldots, s.$$

Множимъ каждое равенство на C_i и суммируемъ по значку i отъ единицы до s включительно. Результатъ напишется въ такомъ видѣ:

$$\sum_{i=1}^{s} C_i XB_i = E_2 \sum_{i=1}^{s} C_i B_i$$

или

$$X \left\{ \sum_{i=1}^{s} C_i B_i \right\} = E_2 \sum_{i=1}^{s} C_i B_i$$

или наконецъ

$$XF(x) = E_2 F(x)$$

т. е. полиномъ $F(x)$ будетъ частнымъ алгебраическимъ интеграломъ, каково бы ни было значеніе постоянныхъ C_i.

2. Соотношенія (4) не имѣютъ мѣста, по крайней мѣрѣ полностью. Тогда полиномъ

$$\Phi(x) \equiv F(x) XB_s - B_s XF(x) \equiv \left\{ \sum_{i=1}^{s-1} C_i B_i \right\} XB_s - B_s \sum_{i=1}^{s-1} C_i XB_i,$$

будетъ проще, чѣмъ самъ полиномъ $F(x)$, такъ какъ заключаетъ по крайней мѣрѣ одной неизвѣстной постоянной меньше. Съ другой стороны онъ заключаетъ въ себѣ всѣ частные алгебраическіе интегралы, которые заключаетъ полиномъ $F(x)$, и можно воспользоваться имъ для ихъ опредѣленія вмѣсто полинома $F(x)$, конечно, если онъ не обращается тождественно въ нуль.

Это обстоятельство не можетъ случиться при произвольныхъ значеніяхъ постоянныхъ C_i. Въ самомъ дѣлѣ, приравняемъ нулю всѣ коэффиціенты полинома $\Phi(x)$; получимъ рядъ линейныхъ уравненій, связывающихъ постоянныя C_i. Изслѣдуя ихъ, мы либо убѣдимся, что такихъ значеній не существуетъ вовсе, либо выразимъ ихъ всѣ въ видѣ линейныхъ и однородныхъ функцій новыхъ постоянныхъ $C_{1i}(i=1, 2, \ldots, s)$ гдѣ $s_1 < s-1$. Хотя мы въ этомъ случаѣ не можемъ воспользоваться полиномомъ $\Phi(x)$ непосредственно, зато, внося полученныя выраженія для постоянныхъ $C_i (i=1, 2, \ldots, s-1)$ въ полиномъ $F(x)$, уменьшимъ въ немъ число неизвѣстныхъ постоянныхъ. Слѣдовательно, повторяя этотъ пріемъ, мы либо рѣшимъ вопросъ, либо придемъ къ случаю, когда неизвѣстная постоянная будетъ одна и войдетъ въ полиномъ въ видѣ множителя. Она не будетъ имѣть значенія; отбрасываемъ ее и приходимъ къ разсмотрѣнному нами случаю выдѣленія частныхъ алгебраическихъ интеграловъ изъ даннаго полинома.

Какъ мы видѣли, при этомъ пріемѣ могутъ получаться частные алгебраическіе интегралы, зависящіе отъ нѣсколькихъ произвольныхъ постоянныхъ. Можетъ случиться, что такой интегралъ разлагается на произведеніе нѣсколькихъ множителей. Каждый множитель будетъ также зависѣть линейно отъ произвольныхъ постоянныхъ. Въ случаѣ неприводимости его при произвольныхъ значеніяхъ постоянныхъ могутъ существовать такія соотношенія, что онъ дѣлается приводимымъ, и мы можемъ получить изъ него частные алгебраическіе интегралы низшаго порядка.

Только что изложенный процессъ полученія частныхъ алгебраическихъ интеграловъ найдетъ себѣ примѣненіе въ вопросѣ полученія частныхъ алгебраическихъ интеграловъ даннаго порядка n.

Напишемъ въ какомъ нибудь порядкѣ всѣ одночлены измѣренія n, составленные изъ перемѣнныхъ x_i. Обозначимъ ихъ послѣдовательно черезъ B_{1i} $(i=1, 2, \ldots, s)$, гдѣ s будетъ равно $\binom{p+n-1}{p-1}$, и составимъ полиномъ

$$F(x) \equiv \sum_{i=1}^{s} C_i B_{1i}, \tag{5}$$

гдѣ C_i произвольныя постоянныя. Это будетъ, очевидно, общій полиномъ n-го порядка и при частныхъ значеніяхъ постоянныхъ C_i можетъ представить какой угодно полиномъ n-го порядка, въ частности любой изъ частныхъ алгебраическихъ интеграловъ порядка n изучаемой нами системы.

Слѣдовательно мы можемъ примѣнить къ этому полиному $F(x)$ только что изложенный процессъ и получимъ всѣ частные алгебраическіе интегралы порядка n.

Обратимъ вниманіе на слѣдующее свойство частныхъ алгебраическихъ интеграловъ, вытекающее изъ только что изложеннаго. Всѣ они получаются разложеніемъ на множители частныхъ же алгебраическихъ интеграловъ, коэффиціенты которыхъ раціональны относительно коэффиціентовъ полиномовъ X_i. Это слѣдуетъ изъ того обстоятельства, что всѣ операціи для ихъ полученія носятъ раціональный характеръ. Соотвѣтствующій имъ полиномъ K будетъ также раціональнымъ относительно тѣхъ-же коэффиціентовъ.

Этимъ обстоятельствомъ можно воспользоваться для полученія этихъ полиномовъ K.

Полиномы $K^{(g)}$, о которыхъ говорилось въ предыдущемъ параграфѣ, зависятъ вообще отъ ирраціональности, происходящей отъ опредѣленія особенныхъ точекъ и величинъ λ_{ij}. Опредѣливъ всѣ цѣлыя неотрицательныя числа v_g, для которыхъ суммма $\sum_{g=1}^{R} v_g K^{(g)}$ представитъ собой полиномъ, всѣ коэффиціенты котораго раціональны въ коэффиціентахъ полиномовъ X_i, мы получимъ рядъ полиномовъ m—1-го порядка, среди которыхъ будутъ находиться всѣ искомые полиномы K. При этомъ важно то обстоятельство, что порядокъ соотвѣтствующаго частнаго интеграла дается суммой $\sum_{g=1}^{R} v_g$.

Изложенный нами пріемъ важенъ еще въ другомъ отношеніи. Онъ приводитъ къ ряду полиномовъ, обладающихъ свойствомъ заключать въ себѣ въ видѣ множителя частные алгебраическіе интегралы.

Слѣдовательно эти полиномы даютъ всѣ элементы интеграла системы, если она имѣетъ интегралъ типа G. Darboux, и даже самый интегралъ, если онъ алгебраическій.

Отсюда видна важность изученія подобныхъ полиномовъ и несомнѣнна ихъ связь съ интегрированіемъ системы въ общемъ случаѣ.

Дадимъ примѣръ полученія такихъ полиномовъ.

Обозначимъ результатъ операціи X надъ полиномомъ B_{1i} черезъ B_{2i}, результатъ той-же операціи надъ полиномомъ B_{2i} черезъ B_{3i} и вообще XB_{ki} черезъ $B_{k+1,\, i}$.

Даемъ въ полиномѣ $F(x)$ постояннымъ C_i значенія коэффиціентовъ частнаго алгебраическаго интеграла $f(x)$ порядка n и пишемъ тождество:

$$\sum_{i=1}^{s} C_i B_{1i} = f(x). \tag{6}$$

На основаніи предыдущаго мы знаемъ, что и любой полиномъ $\sum_{i=1}^{s} C_i B_{ki}$ будетъ дѣлиться на него, каково бы ни было цѣлое число k, такъ какъ каждый получается изъ предыдущаго, какъ результатъ выполненной надъ нимъ операціи X. Обозначая частное отъ дѣленія полинома $\sum_{i=1}^{s} C_i B_{ki}$ на полиномъ $f(x)$ черезъ U_k, получаемъ рядъ тождествъ:

$$\sum_{i=1}^{s} C_i B_{ki} = U_k f. \tag{7}$$

Даемъ въ этихъ тождествахъ индексу k $s-1$ значеній: $2, 3, \ldots, s$.

По крайней мѣрѣ одинъ изъ коэффиціентовъ C_i отличенъ отъ нуля. Можно предположить безъ вреда для общности, что коэффиціентъ C_1 отличенъ отъ нуля.

Исключаемъ изъ s линейныхъ тождествъ (6) и (7) $s-1$ величинъ C_i $(i = 2, 3, \ldots, s)$. Результатъ напишется такъ:

$$C_1 \Phi_n(x) = V_k f,$$

гдѣ полиномъ $\Phi_n(x)$ есть ничто иное, какъ опредѣлитель

$$\sum \pm B_{11} B_{22} B_{33} \ldots . B_{ss}.$$

Во всѣхъ случаяхъ, когда онъ неравенъ нулю, въ этомъ полиномѣ заключается произведеніе всѣхъ частныхъ алгебраическихъ интеграловъ порядка n.

Замѣтимъ между прочимъ, что этотъ полиномъ обращается тождественно въ нуль, если существуетъ частный алгебраическій интегралъ порядка n, зависящій отъ произвольной постоянной, т. е. исчезновеніе этого полинома есть одно изъ условій существованія интеграла n-го порядка для системы

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0.$$

Такіе полиномы $\Phi_n(x)$ принадлежатъ къ типу точечныхъ коваріантовъ коннекса

$$\sum_{i=1}^{p} X_i u_i = 0. \tag{8}$$

Такъ какъ извѣстно, что и въ этомъ случаѣ всѣ эти полиномы, какъ бы ни было велико число n, выражаются раціонально черезъ конечное число наиболѣе простыхъ точечныхъ коваріантовъ коннекса (8), то изученіе подобныхъ полиномовъ пріобрѣтаетъ большой интересъ въ видахъ конечнаго, въ частности алгебраическаго интегрированія.

Съ этими полиномами связаны также разныя проективныя свойства интегральныхъ кривыхъ.

Приведу примѣръ:

Положимъ $p = 3$ и опредѣлимъ полиномъ $\Phi_1(x)$. Нетрудно видѣть, что его можно представить въ видѣ опредѣлителя

$$\Phi_1(x) \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ XX_1 & XX_2 & XX_3 \end{vmatrix}$$

гдѣ X обозначаетъ операцію

$$\sum_{i=1}^{3} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Обозначимъ теперь черезъ $\varphi(x)$ однородный интегралъ нулевого измѣренія уравненія:

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial z}{\partial x_3} = 0.$$

Тогда уравненіе

$$\Phi_1(x) = 0$$

представитъ собой геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ перегиба семейства кривыхъ

$$\varphi(x) = C,$$

гдѣ C произвольная постоянная.

§ 7. Опредѣленіе линейныхъ частныхъ интеграловъ.

Предположимъ въ тождествѣ

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = Kf(x) \tag{1}$$

полиномъ $f(x)$ линейнымъ.

Замѣтивъ, что тогда его вторыя производныя тождественно равны нулю, подвергаемъ обѣ части этого тождества операціи $A^{(1)}$ и получаемъ такое:

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} A^{(1)} X_i = fA^{(1)} K + KA^{(1)} f \tag{2}$$

Такъ какъ оно должно имѣть мѣсто при какихъ угодно значеніяхъ перемѣнныхъ y_i, то оно эквивалентно p слѣдующимъ тождествамъ:

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} - K \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = f(x) \frac{\partial K}{\partial x_j}. \quad j=1,2,\ldots,p \tag{3}$$

Кромѣ того, теорема объ однородныхъ функціяхъ Ейлера даетъ тождество:

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} x_i = f_i. \tag{4}$$

Обозначимъ первый опредѣлитель матриссы:

$$\left| \begin{array}{cccccc} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} - K, & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} & \ldots & \frac{\partial X_1}{\partial x_p} & x_1 \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} - K, & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} & \ldots & \frac{\partial X_2}{\partial x_p} & x_2 \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} - K & \ldots & \frac{\partial X_3}{\partial x_p} & x_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ \frac{\partial X_p}{\partial x_1} & \frac{\partial X_p}{\partial x_2} & \frac{\partial X_p}{\partial x_3} & \ldots & \frac{\partial X_p}{\partial x_p} - K, & x_p \end{array} \right| \tag{5}$$

черезъ Δ, а опредѣлители, полученные выбрасываніемъ i-го столбца изъ p первыхъ, черезъ Δ_i.

Замѣтивъ, что можемъ предположить производную $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1}$ безъ вреда для общности отличной отъ нуля, исключаемъ изъ тождествъ (3) остальныя производныя $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ $(i=2, 3, \ldots, p)$ и получаемъ тождество типа

$$\varDelta \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = Uf, \tag{6}$$

гдѣ U нѣкоторый полиномъ.

Это тождество показываетъ, что $\varDelta$ дѣлится на полиномъ $f(x)$.

Замѣнивъ q-е тождество изъ числа тождествъ (3) посредствомъ тождества (4) и произведя тоже исключеніе, получимъ тождество типа:

$$\varDelta_q \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = U_q f(x), \quad q=1, 2, \ldots, p. \tag{7}$$

которое показываетъ, что и остальные опредѣлители матриссы (5) дѣлятся на полиномъ $f(x)$.

Итакъ, если въ матриссѣ (5) полиномъ K будетъ извѣстенъ и не обратитъ въ нуль всѣхъ ея опредѣлителей, то соотвѣтствующій частный линейный интегралъ найдется, какъ множитель одного изъ нихъ.

Развернемъ опредѣлитель $\varDelta$ по степенямъ полинома K. Получаемъ:

$$\varDelta \equiv K^p + \sum_{i=1}^{p} V_i K^{p-i}.$$

Развертывая $\varDelta_q$, находимъ:

$$\varDelta_q \equiv x_q K^{p-1} + \sum_{i=1}^{p-1} V_{qi} K^{p-1-i}, \tag{8}$$

гдѣ V_i и V_{qi} полиномы $(m-1)\,i+1$-го порядка относительно перемѣнныхъ x_i.

Полиномъ $\varDelta$ можетъ оказаться приводимымъ при какомъ угодно значеніи полинома K.

Тогда полиномъ $f(x)$ раздѣлитъ одинъ изъ этихъ множителей.

Разсмотримъ сначала случай, когда полиномъ $f(x)$ дѣлитъ линейный множитель, т. е. множитель вида $K-S$, гдѣ S вполнѣ опредѣленный полиномъ m—1-го порядка.

Представимъ полиномы $\varDelta_q$ въ такомъ видѣ:

$$(K-S)\left[\frac{K^{p-1}-S^{p-1}}{K-S}\, x_q + \sum_{i=1}^{p-2} V_{qi} \frac{K^{p-1-i}-S^{p-1-i}}{K-S}\right] +$$
$$+ x_q S^{p-1} + \sum_{i=1}^{p-1} V_{qi} S^{p-i-1}.$$

Мы видимъ, что первая сумма, имѣя множителемъ полиномъ $K-S$, дѣлится на полиномъ $f(x)$ и слѣдовательно вторая сумма, представляющая результатъ подстановки $K=S$ въ полиномы Δ_q, также дѣлится на полиномъ $f(x)$ и въ томъ случаѣ, когда по крайней мѣрѣ одинъ изъ результатовъ такой подстановки не обращается въ нуль. Тогда изъ этого вполнѣ опредѣленнаго полинома выдѣляемъ полиномъ $f(x)$ по способу, предложенному въ предыдущемъ параграфѣ.

Если же всѣ полиномы

$$x_q S^{p-1} + \sum_{i=1}^{p-1} V_{qi} S^{p-i-1}$$

тождественно равны нулю, т. е. если полиномъ S будетъ такого свойства, что послѣ подстановки его вмѣсто полинома K въ матриссу (5) обращаются въ нуль всѣ ея опредѣлители, необходимо прибѣгнуть къ другому способу.

Тотъ же случай можно изслѣдовать слѣдующимъ образомъ:

Положимъ, что $K-S=Pf(x)$, и подставляемъ вмѣсто полинома K въ уравненіяхъ (3) $S+Pf(x)$. Въ результатѣ получаемъ:

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} - S\,\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = \left(P+\frac{\partial K}{\partial x_j}\right) f$$

$$j=1,\,2,\ldots,\,p.$$

Эти тождества показываютъ, что полиномъ $f(x)$ есть частный линейный интегралъ любого изъ уравненій:

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_i} - S\,\frac{\partial z}{\partial x_j} = 0 \tag{9}$$

Такъ какъ степени новыхъ коэффиціентовъ на единицу меньше, чѣмъ прежнихъ коэффиціентовъ X_i, то наша задача приведена къ болѣе простой, къ которой можно примѣнить вновь любой изъ пріемовъ для опредѣленія частныхъ линейныхъ интеграловъ.

Разсмотримъ теперь неприводимый множитель полинома Δ, нелинейный относительно полинома K.

Пусть это будетъ

$$\Phi(x) \equiv K^l + \sum_{i=1}^{l} E_i K^{l-i}.$$

Предполагаемъ теперь, что онъ дѣлится на полиномъ $f(x)$.

Будемъ разсматривать въ полиномахъ $\Phi(x)$ и Δ_q $(q=1, 2, \ldots, p)$ полиномъ K, какъ простую перемѣнную и въ этомъ предположеніи дѣлимъ всѣ полиномы Δ_q на полиномъ $\Phi(x)$ и предположимъ сначала, что по крайней мѣрѣ одинъ изъ полиномовъ Δ_q, напр. Δ_1, не дѣлится безъ остатка на полиномъ $\Phi(x)$. Тогда результанта двухъ уравненій

$$\left.\begin{aligned}\Phi(x)&=0\\ \Delta_1&=0\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

относительно перемѣнной K будетъ отлична отъ нуля, и мы можемъ показать, что она будетъ дѣлиться на полиномъ $f(x)$.

Множимъ полиномъ $\Phi(x)$ на $I, K, K^2, \ldots, K^{p-2}$, а полиномъ Δ_1 на $I, K, K^2, \ldots, K^{l-1}$ и получаемъ $p+l-1$ полиномовъ, дѣлящихся на полиномъ $f(x)$, и слѣдовательно можемъ написать рядъ такихъ равенствъ:

$$\Phi(x)K^j=fM_j$$
$$j=0, 1, 2, \ldots p-2.$$

$$\Delta_1 K^g=fM_{p-1+g}$$
$$g=0, 1, 2, \ldots, l-1.$$

Можно разсматривать полученныя равенства, какъ линейныя уравненія относительно степеней K^i $(i=0, 1, 2, \ldots, p+l-2)$ полинома K. Вторыя части ихъ дѣлятся всѣ на полиномъ $f(x)$, поэтому долженъ дѣлиться на него и опредѣлитель этихъ уравненій, а послѣдній— ничто иное, какъ результанта уравненій (10), представленная въ видѣ опредѣлителя по діалитической методѣ Сильвестра.

Заключенные въ этой результантѣ въ видѣ множителей частные интегралы могутъ быть выдѣлены по способу предыдущаго параграфа.

Въ томъ же случаѣ, когда полиномъ Δ_1 дѣлится безъ остатка на полиномъ $\Phi(x)$, каковъ бы ни былъ полиномъ K, эта результанта будетъ нулемъ, и тогда надо прибѣгнуть къ другому способу.

И въ этомъ случаѣ неприводимаго множителя $\Phi(x)$ можно преобразовать уравненія (3) такъ, что коэффиціенты при частныхъ производныхъ $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ будутъ зависѣть только отъ полиномовъ $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$ и также извѣстныхъ намъ полиномовъ E_i; но эти коэффиціенты будутъ уже порядка $l(m-1)$-го. Ими также можно воспользоваться для полученія частнаго интеграла $f(x)$, но въ виду сравнительной сложности я не буду на этомъ останавливаться.

Наконецъ замѣтимъ, что если полиномъ Δ будетъ неприводимъ при какомъ угодно значеніи полинома K, то результанта уравненія

$$\Delta=0$$

и любого изъ уравненій

$$\Delta_q = 0 \qquad\qquad q = 1, 2, \dots, p$$

относительно полинома K будетъ отлична отъ нуля и слѣдовательно будетъ заключать въ себѣ всѣ частные линейные интегралы изучаемой системы.

Перейдемъ къ случаю, когда существуетъ безконечное число частныхъ линейныхъ интеграловъ. Это будетъ всякій разъ, какъ мы видѣли, если одному и тому же полиному K соотвѣтствуютъ два частныхъ линейныхъ интеграла.

Предположимъ поэтому, что линейный полиномъ $f_1(x)$ удовлетворяетъ, какъ и полиномъ $f(x)$, тождеству

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_i} = K f_1 .$$

Сверхъ того имѣемъ также:

$$\sum_{i=1}^{p} x_i \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_i} = f,$$

и

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_i} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} - K \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_j} = f_1(x) \frac{\partial K}{\partial x_j}$$

$$j = 1, 2, \dots, p.$$

Изъ совокупности этихъ уравненій, какъ и для полинома $f(x)$, получаемъ такія тождества:

$$\Delta \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} = U f_1(x)$$

и

$$\Delta_q \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} = U_q f_1(x)$$

$$q = 1, 2, \dots, p.$$

Исключая изъ полученныхъ равенствъ и равенствъ (6) и (7) полиномы U и U_q, находимъ такія:

$$\Delta \left[f_1(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} - f(x) \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} \right] = 0$$

и

$$\Delta_q \left[f_1(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} - f(x) \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} \right] = 0.$$

Но имѣя въ виду, что полиномы $f(x)$ и $f_1(x)$ только тогда могутъ быть линейно зависимы, когда они представляютъ собой одинъ и тотъ же частный линейный интегралъ, убѣждаемся, что второй множитель не равенъ нулю, а потому имѣемъ:

$$\Delta = 0$$

$$\Delta_q = 0 \qquad q=1, 2, \ldots, p.$$

Отсюда слѣдуетъ, что если полиному K соотвѣтствуетъ болѣе одного частнаго линейнаго интеграла, онъ—общій корень $p+1$ уравненій, получаемыхъ приравниваніемъ нулю всѣхъ опредѣлителей матриссы (5).

Это предложеніе даетъ возможность найти полиномъ K. Соотвѣтствующіе ему частные линейные интегралы могутъ быть найдены по пріемамъ 5-го параграфа.

Тождество (2) можно использовать еще другимъ способомъ. Замѣняемъ сначала производныя $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ на основаніи равенства:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial A^{(1)} f(x)}{\partial y_i}$$

и получаемъ равенство:

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial A^{(1)} f(x)}{\partial y_i} A^{(1)} X_i = f(x)\, A^{(1)} K + K A^{(1)} f(x).$$

Давая затѣмъ въ немъ перемѣннымъ x_i $(i=1, 2, \ldots, p)$ значенія, обращающія въ нуль полиномъ $f(x)$, и замѣчая, что по формулѣ (III) перваго параграфа $A^{(1)} f(x) = f(y)$, приходимъ къ такому равенству:

$$\sum_{i=1}^{p} (A^{(1)} X_i) \frac{\partial f(y)}{\partial x_i} = (K)\, f(y), \tag{11}$$

гдѣ скобки, въ которыхъ поставлены полиномы $A^{(1)} X_i$ и K, обозначаютъ, что для перемѣнныхъ x_i взяты такія значенія, которыя обращаютъ въ нуль полиномъ $f(x)$, другими словами, эти перемѣнныя связаны соотношеніемъ

$$f(x) = 0.$$

Можно разсматривать это равенство, какъ уравненіе, опредѣляющее линейный полиномъ $f(y)$, другими словами, полиномъ $f(y)$ будетъ частнымъ интеграломъ системы:

$$\frac{dy_1}{(A^{(1)} X_1)} = \frac{dy_2}{(A^{(1)} X_2)} = \ldots = \frac{dy_p}{(A^{(1)} X_p)} \tag{12}$$

Задача опредѣленія частныхъ линейныхъ интеграловъ для этой системы уже рѣшена, и значитъ достаточно только знать одну изъ точекъ искомаго интеграла, чтобы получить его при помощи уравненія (11).

Остановимся сначала на нѣкоторыхъ деталяхъ рѣшенія.

По теоремѣ Эйлера имѣемъ:

$$\sum_{i=1}^{p} y_i \frac{\partial f}{\partial y_i} = f(y). \tag{13}$$

Вносимъ это разложеніе полинома $f(y)$ въ тождество (11) и, замѣчая, что оно справедливо при какихъ угодно значеніяхъ перемѣнныхъ y_i, находимъ:

$$\sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right) \frac{\partial f(y)}{\partial y_i} - (K) \frac{\partial f(y)}{\partial y_j} = 0. \tag{14}$$

Кромѣ того, такъ какъ подстановка $y_i = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ обращаетъ полиномъ $f(y)$ въ нуль, имѣемъ

$$\sum_{i=1}^{p} x_i \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0. \tag{15}$$

Только что полученное уравненіе (15) и уравненія (14) линейны и однородны относительно производныхъ $\dfrac{\partial f(y)}{\partial y_i}$, а потому всѣ опредѣлители матриссы

$$\left|\begin{array}{cccccc}
\left(\dfrac{\partial X_1}{\partial x_1} - K\right) & \left(\dfrac{\partial X_1}{\partial x_2}\right) & \left(\dfrac{\partial X_1}{\partial x_3}\right) & \ldots & \left(\dfrac{\partial X_1}{\partial x_p}\right) & x_1 \\
\left(\dfrac{\partial X_2}{\partial x_1}\right) & \left(\dfrac{\partial X_2}{\partial x_2} - K\right) & \left(\dfrac{\partial X_2}{\partial x_3}\right) & \ldots & \left(\dfrac{\partial X_2}{\partial x_p}\right) & x_2 \\
\left(\dfrac{\partial X_3}{\partial x_1}\right) & \left(\dfrac{\partial X_3}{\partial x_2}\right) & \left(\dfrac{\partial X_3}{\partial x_3} - K\right) & \ldots & \left(\dfrac{\partial X_3}{\partial x_p}\right) & x_3 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\
\left(\dfrac{\partial X_p}{\partial x_1}\right) & \left(\dfrac{\partial X_p}{\partial x_2}\right) & \left(\dfrac{\partial X_p}{\partial x_3}\right) & \ldots & \left(\dfrac{\partial X_p}{\partial x_p} - K\right) & x_p
\end{array}\right| \tag{16}$$

равны нулю.

Сравнивая эту матриссу съ матриссой (5), мы видимъ, что перемѣнныя x_i имѣютъ въ ней спеціальныя значенія, а именно тѣ, которыя обращаютъ въ нуль частный линейный интегралъ.

Это свойство опредѣлителей только что написанной матриссы обращаться въ нуль для всѣхъ точекъ частнаго линейнаго интеграла— эквивалентно, очевидно, полученному уже нами свойству опредѣлителей матриссы (5) дѣлиться на частный линейный интегралъ $f(x)$.

Если выбранная точка такова, что по крайней мѣрѣ одинъ изъ первыхъ миноровъ матриссы (16) не равенъ нулю, то $p-1$ изъ уравненій (14) и (15) будутъ независимы и дадутъ опредѣленныя значенія для коэффиціентовъ частнаго линейнаго интеграла. Мы можемъ представить его въ видѣ опредѣлителя; для этого поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Беремъ такой изъ опредѣлителей матриссы (16), который заключаетъ въ себѣ необращающійся въ нуль миноръ, и всѣ элементы того столбца, который не заключаетъ элементовъ необращающагося въ нуль минора, замѣнимъ черезъ $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_p$.

Если же взятая нами точка x_i такова, что всѣ миноры до k-го порядка матриссы (16) обращаются въ нуль, то въ соотвѣтствующее выраженіе частнаго линейнаго интеграла войдетъ извѣстное число произвольныхъ постоянныхъ.

Перейдемъ теперь къ опредѣленію точекъ, обращающихъ въ нуль частный линейный интегралъ.

Легко убѣдиться, что существуютъ особенныя точки, которыя обращаютъ въ нуль частный алгебраическій интегралъ $f(x)$ любой степени [1]).

Какъ мы видѣли въ § 4, особенныя точки опредѣляются уравненіями:

$$X_i = \lambda x_i \qquad i=1, 2, \ldots, p \tag{17}$$

Множимъ обѣ части написанныхъ уравненій на $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ и суммируемъ по индексу i отъ 1 до p включительно. Въ результатѣ получаемъ:

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \lambda \sum_{i=1}^{p} x_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i},$$

или, принимая во вниманіе, что $f(x)$ частный алгебраическій интегралъ:

$$Kf(x) = n\lambda f(x).$$

Изъ послѣдняго равенства слѣдуетъ. что всѣ особенныя точки, не обращающія въ нуль полинома $f(x)$, удовлетворяютъ условію

$$K = n\lambda,$$

[1]) Ср. Д. М. Синцовъ. Теорія коннексовъ въ пространствѣ, стр. 253.

и слѣдовательно такимъ уравненіямъ:

$$nX_i = Kx_i$$
$$i=1,\ 2, \dots, p.$$

Если всѣ особенныя точки различны, то число особенныхъ точекъ, удовлетворяющихъ только что написаннымъ уравненіямъ не можетъ быть больше m^{p-1} и слѣдовательно общее число особенныхъ точекъ, обращающихъ въ нуль данный частный алгебраическій интегралъ, не можетъ быть меньше $\dfrac{m^{p-1}-1}{m-1}$.

Въ случаѣ совпаденія особенныхъ точекъ и также безконечнаго числа ихъ, доказательство будетъ много сложнѣе и мы не будемъ останавливаться на выводѣ его для общаго случая. Что же касается случая $n=1$, то благодаря отсутствію кратныхъ точекъ у линейнаго полинома, доказательство упрощается.

Прежде всего мы можемъ предположить, что производная $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1}$ не равна нулю.

Уравненія:

$$f(x)=0$$
$$X_i = \lambda x_i \qquad i=2,\ 3, \dots, p.$$

допустятъ по крайней мѣрѣ одно рѣшеніе $x_i = a_i$ $(i=1,\ 2, \dots, p)$. Покажемъ, что это рѣшеніе даетъ особенную точку. Обозначимъ результатъ подстановки $x_i = a_i$ $(i=1\,,\ 2\,, \dots, p)$ въ полиномы K, $f(x)$, X_i соотвѣтственно черезъ $K(a)$, $f(a)$, и A_i.

Прежде всего имѣемъ:

$$A_i = \lambda a_i \qquad i=2,\ 3, \dots, p. \tag{18}$$

Умножая эти равенства на $\dfrac{\partial f(a)}{\partial a_i}$ и суммируя по индексу i отъ 2 до p включительно, находимъ:

$$\sum_{i=2}^{p} A_i \frac{\partial f(a)}{\partial a_i} = \lambda \sum_{i=2}^{p} a_i \frac{\partial f(a)}{\partial a_i} \tag{19}$$

Но съ другой стороны

$$\sum_{i=1}^{p} A_i \frac{\partial f(a)}{\partial a_i} = K(a)\, f(a) = 0,$$

и

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \frac{\partial f(a)}{\partial a_i} = f(a) = 0.$$

Отсюда

$$\sum_{i=2}^{p} A_i \frac{\partial f(a)}{\partial y_i} = - A_1 \frac{\partial f(a)}{\partial a_1}$$

$$\sum_{i=2}^{p} a_i \frac{\partial f(a)}{\partial a_i} = - a_1 \frac{\partial f(a)}{\partial a_1} .$$

Внеся полученныя выраженія суммъ въ равенство (19), получаемъ равенство:

$$- A_1 \frac{\partial f(a)}{\partial a_1} = - \lambda a_1 \frac{\partial f(a)}{\partial a_1} ,$$

или, такъ какъ величина $\frac{\partial f(a)}{\partial a_1}$ равная $\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}$ — не нуль, то

$$A_1 = \lambda a_1 ,$$

которое совмѣстно съ равенствами (18) показываетъ, что точка a_i $(i = 1 , 2 , \ldots , p)$ особенная.

Итакъ мы убѣдились, что по крайней мѣрѣ одна изъ особенныхъ точекъ системы обратитъ въ нуль данный частный линейный интегралъ. Отсюда слѣдуетъ, что, если мы будемъ подставлять значенія, опредѣляющія особенныя точки, въ только что полученныя выраженія, мы обязательно найдемъ среди нихъ и искомый частный линейный интегралъ. Слѣдовательно получимъ рядъ линейныхъ выраженій, среди которыхъ находятся всѣ частные линейные интегралы. Конечно нѣкоторыя изъ этихъ выраженій, а можетъ быть и всѣ могутъ не быть частными интегралами. Провѣрка этого обстоятельства, а также дальнѣйшее изслѣдованіе линейныхъ выраженій, заключающихъ произвольныя постоянныя, не представляютъ новыхъ трудностей, и на этомъ мы не будемъ останавливаться.

Этотъ способъ замѣчателенъ тѣмъ, что онъ представляетъ собой прямое обобщеніе примѣняемаго теперь способа опредѣленія частныхъ линейныхъ интеграловъ для случая $m = 1$.

Затѣмъ онъ даетъ возможность судить объ ирраціональности, отъ которой могутъ зависѣть коэффиціенты частнаго линейнаго интеграла, и указываетъ на связь между корнями характеристическихъ уравненій, дающихъ величины λ_{ij} для каждой особенной точки, а также позволяетъ изучать a priori тѣ группы, которыя могутъ составлять частные линейные интегралы.

§ 8. Система съ линейными интегралами. Общія заключенія.

Допустимъ, что уравненіе:

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0\,, \tag{1}$$

обладаетъ частнымъ алгебраическимъ интеграломъ, удовлетворяющимъ тождеству:

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = Kf. \tag{2}$$

Общее линейное преобразованіе однородныхъ перемѣнныхъ можетъ быть разбито на рядъ преобразованій слѣдующаго типа [1]):

$$\begin{gathered} y_j = x_j \\ {\scriptstyle j=1,\,2,\ldots,\,p-1,} \\ y_p = x_p + \sum_{i=1}^{p-1} l_i x_i. \end{gathered} \tag{3}$$

Поэтому для доказательства нѣкоторыхъ инваріантныхъ свойствъ достаточно пользоваться только имъ: доказанное будетъ справедливо и для самаго общаго преобразованія.

Разрѣшая взятыя нами формулы относительно перемѣнныхъ x_i, получимъ слѣдующія обратныя формулы преобразованія:

$$\begin{gathered} x_j = y_j \\ {\scriptstyle j=1,\,2,\ldots,\,p-1,} \\ x_p = y_p - \sum_{i=1}^{p-1} l_i y_i. \end{gathered} \tag{4}$$

Преобразуемъ оба уравненія (1) и (2) къ новымъ перемѣннымъ.

Ради этого произведемъ въ полиномѣ f и функціи z замѣну перемѣнныхъ x_i на новыя y_i помощью формулъ (4) и обозначимъ это скобками, такъ что символы (f) и (z) представятъ собой результаты этой замѣны. Можно символы (f) и (z) разсматривать, какъ неявныя функціи перемѣнныхъ x_i черезъ посредство формулъ (3), тогда онѣ станутъ равными $f(x)$ и z.

Обозначивъ, какъ прежде, черезъ X операцію

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

[1]) Ср. мою работу. Частные алгебраическіе интегралы, стр. 1—6.

подвергаемъ ей полиномъ f и функцію (z) въ этомъ предположеніи; тогда получаемъ:

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial (z)}{\partial y_i} X y_i = 0$$

и

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial (f)}{\partial y_i} X y_i = K f.$$

y_i, какъ функціи перемѣнныхъ x_i, даются формулами (3); поэтому $X y_i$ результаты операціи X будутъ слѣдующіе:

$$X y_i = X_i$$
$$i = 1, 2, \ldots, p-1$$
$$X y_p = \sum_{i=1}^{p-1} X_i l_i + X_p \tag{5}$$

Произведемъ во вторыхъ частяхъ этихъ формулъ замѣну перемѣнныхъ x_i на перемѣнныя y_i помощью формулъ (4) и обозначимъ ее снова скобками, такъ что

$$X y_i = Y_i = (X_i)$$
$$i = 1, 2, \ldots, p-1$$
$$X y_p = Y_p = \sum_{i=1}^{p-1} (X_i) l_i + (X_p)$$

и получимъ наши уравненія (1) и (2) окончательно преобразованными въ такой формѣ:

$$\sum_{i=1}^{p} Y_i \frac{\partial (z)}{\partial y_i} = 0 \tag{6}$$

и

$$\sum_{i=1}^{p} Y_i \frac{\partial (f)}{\partial y_i} = (K)(f).$$

Сравнивая эти два равенства между собою и съ первоначальными (1) и (2), убѣждаемся въ томъ, что линейное преобразованіе преобразуетъ частный алгебраическій интегралъ уравненія (1) въ частный же алгебраическій интегралъ преобразованнаго уравненія (6).

Прибавимъ теперь къ выбранному нами линейному преобразованію условіе, что сумма $\sum_{i=1}^{p-1} l_i x_i + x_p$ будетъ частнымъ алгебраическимъ интеграломъ уравненія (1), т. е. будетъ удовлетворять тождеству:

$$X\left(\sum_{i=1}^{p-1} l_i x_i + x_p\right) = K_1\left(\sum_{i=1}^{p} l_i x_i + x_p\right).$$

Принимая во вниманіе формулу (5) и послѣднюю изъ формулъ (3), пишемъ.

$$X y_p = \sum_{i=1}^{p-1} X_i l_i + X_p = K_1 y_p .$$

Отсюда окончательно получаемъ

$$Y_p = \sum_{i=1}^{p-1} (X_i) l_i + (X_p) = (K_1) y_p .$$

Полученная формула показываетъ, что, если уравненіе (1) имѣетъ частный линейный интегралъ, то его всегда можно преобразовать помощью линейнаго преобразованія, такъ что коэффиціентъ при производной по одной изъ перемѣнныхъ будетъ дѣлиться на эту перемѣнную.

Можно воспользоваться этимъ обстоятельствомъ для упрощенія полученія частныхъ алгебраическихъ интеграловъ.

Въ самомъ дѣлѣ, предполагаемъ, что наша система такова и уже приведена къ виду, при которомъ коэффиціентъ $X_p = x_p X_p^{(2)}$.

Прежде всего группа особенныхъ точекъ становится приводимой.

При нашемъ новомъ предположеніи напишемъ полиномы X_i въ такомъ видѣ:

$$X_i = X_i^{(1)} + x_p X_i^{(2)}$$
$$i = 1, 2, \ldots, p-1$$
$$X_p = x_p X_p^{(2)},$$

гдѣ $X_i^{(1)}$ полиномы однихъ перемѣнныхъ x_i $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$.

Уравненія, опредѣляющія особенныя точки будутъ слѣдующія:

$$\begin{gathered} X_i^{(1)} + x_p X_i^{(2)} = \lambda x_i \\ i = 1, 2, \ldots, p-1 \\ x_p X_p^{(2)} = \lambda x_p . \end{gathered} \tag{7}$$

Послѣднее произведеніе можно представить въ такомъ видѣ:

$$x_p (X_p^{(2)} - \lambda) = 0 .$$

Отсюда слѣдуетъ, что особенныя точки разбиваются на двѣ группы: для одной

$$x_p = 0\,,$$

для другой

$$\lambda = X_p^{(2)}\,;$$

и слѣдовательно одна группа дается уравненіями

$$\begin{gathered} X_i^{(1)} = \lambda x_i \\ {\scriptstyle i=1,\,2,\,\ldots,\,p-1,} \\ x_p = 0\,, \end{gathered} \tag{8}$$

а другая уравненіями

$$\begin{gathered} X_i^{(1)} + x_p X_i^{(2)} = X_p^{(2)} x_i \\ {\scriptstyle i=1,\,2,\ldots,\,p-1} \end{gathered}$$

Мы примѣняли особенныя точки для полученія полинома K. Представляемъ его въ видѣ $K^{(1)} + x_p\, K_2$, гдѣ $K^{(1)}$ полиномъ однихъ перемѣнныхъ x_i ($i = 1\,,\ 2\,,\ \ldots\,, p-1$). Покажемъ, что для опредѣленія полинома $K^{(1)}$ достаточно первой группы особенныхъ точекъ.

Представляемъ частный алгебраическій интегралъ въ видѣ $f^{(1)} + x_p f_2$, гдѣ полиномъ $f^{(1)}$ не зависитъ отъ перемѣнной x_p. Тогда условіе, что этотъ полиномъ—частный интегралъ, напишется въ такомъ видѣ:

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{p-1} X_i^{(1)}\, \frac{\partial\,(f^{(1)} + x_p f_2)}{\partial x_i} + x_p \sum_{i=1}^{p} X_i^{(2)}\, \frac{\partial\,(f^{(1)} + x_p f_2)}{\partial x_i} = \\ = (K^{(1)} + x_p K_2)\,(f^{(1)} + x_p f_2) \end{gathered} \tag{9}$$

Полагая въ этомъ тождествѣ перемѣнную x_p равной нулю, получаемъ тождество:

$$\sum_{i=1}^{p-1} X_i^{(1)}\, \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_i} = K^{(1)} f^{(1)}, \tag{10}$$

которое опредѣляетъ, какъ полиномъ $K^{(1)}$, такъ и полиномъ $f^{(1)}$.

Но полиномъ $K^{(1)}$, можно опредѣлить при помощи особенныхъ точекъ, опредѣляемыхъ уравненіями:

$$\begin{gathered} X_i^{(1)} = \lambda x_i \\ {\scriptstyle i=1,\,2,\ldots,\,p-1.} \end{gathered}$$

Если прибавимъ къ нимъ уравненіе $x_p = 0$, то получимъ какъ разъ уравненія (8), чѣмъ и доказывается наше утвержденіе.

Если задана степень частнаго алгебраическаго интеграла n, то можно ограничиться опредѣленіемъ одного полинома $K^{(1)}$.

Прежде чѣмъ показать это, замѣнимъ уравненіе

$$\sum_{i=1}^{p-1} X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} + x_p X_p^{(2)} \frac{\partial z}{\partial x_p} = 0 \tag{11}$$

инымъ, которое тѣмъ не менѣе имѣетъ всѣ тѣ же частные алгебраическіе интегралы.

Беремъ сначала уравненіе самымъ общимъ. Частный алгебраическій интегралъ f порядка n удовлетворяетъ двумъ тождествамъ:

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = Kf$$

$$\sum_{i=1}^{p} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = nf.$$

Они эквивалентны двумъ слѣдующимъ:

$$\sum_{i=1}^{p} (X_i - x_i L) \frac{\partial f}{\partial x_i} = (K - nL) f$$

$$\sum_{i=1}^{p} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = nf,$$

гдѣ L обозначаетъ данный, но совершенно произвольный полиномъ m—1-го порядка.

Эти два тождества доказываютъ, что оба уравненія

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0$$

и

$$\sum_{i=1}^{p} (X_i - x_i L) \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0$$

имѣютъ одни и тѣ же частные алгебраическіе интегралы.

Очевидно, что особенныя точки будутъ тѣ же для обѣихъ уравненій. Измѣняются только величины λ_j и λ_{ij}, а въ зависимости отъ нихъ и полиномъ K.

Можно воспользоваться введеніемъ полинома L такимъ образомъ, чтобы дать полиномамъ X_i наиболѣе удобный для насъ видъ. Можно напр. опредѣлить его такимъ образомъ, чтобы сумма $\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial X_i}{\partial x_i}$ была бы равна нулю.

Что же касается разсматриваемаго нами уравненія (11), то можно принять $L = X_p^{(2)}$ и уравненіе приведется къ виду

$$\sum_{i=1}^{p-1} X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0\,,$$

въ которомъ перемѣнная x_p входитъ уже въ видѣ простого параметра. Полагая $x_i = x_p\, y_i$ $(i = 1\,,\ 2\,, \ldots\,, p-1)$, мы приведемъ это уравненіе къ раціональному линейному уравненію въ частныхъ производныхъ безъ правой части съ $p-1$ неоднородными перемѣнными.

Такимъ образомъ приходимъ къ заключенію, что опредѣленіе частныхъ алгебраическихъ интеграловъ для уравненія въ p однородныхъ неизвѣстныхъ съ линейнымъ частнымъ интеграломъ эквивалентно задачѣ опредѣленія частныхъ алгебраическихъ интеграловъ съ $p-1$ неоднородными перемѣнными и обратно.

Точно также можно показать безъ особаго труда, что если уравненіе

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0\,,$$

имѣетъ k линейныхъ частныхъ интеграловъ, то оно приводится къ формѣ:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i X_i^{(1)} \frac{\partial z}{\partial x_i} + \sum_{i=k+1}^{p} X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0\,.$$

Кромѣ того, когда ϱ независимыхъ частныхъ линейныхъ интеграловъ отвѣчаютъ одному и тому же полиному K, этому уравненію можно дать видъ

$$\sum_{i=1}^{p-\varrho} X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0\,,$$

гдѣ перемѣнныя x_i $(i = p - \varrho + 1,\ p - \varrho + 2, \ldots, p)$ будутъ играть роль параметровъ.

Во всѣхъ этихъ случаяхъ опредѣленіе частнаго интеграла даннаго порядка n значительно упрощается тѣмъ обстоятельствомъ, что рѣшеніе линейныхъ уравненій сводится къ послѣдовательному рѣшенію такихъ же уравненій, но съ меньшимъ числомъ перемѣнныхъ.

Для примѣра разберемъ въ общихъ чертахъ самый простой случай.

Положимъ:

$$X_i = \sum_{g=0}^{m} X_i^{(g)} x_p^g \tag{12}$$

$$i = 1, 2, \ldots, p-1.$$

$$X_p = 0.$$

Очевидно, что для такого уравненія всякій частный алгебраическій интегралъ порядка $n_1 < n$, приведетъ къ частному алгебраическому интегралу $x_p^{n-n_1} f$ n-го порядка. Конечно достаточно ограничиться разысканіемъ тѣхъ, которые при $x_p = 0$ обращаются тождественно въ отличный отъ нуля полиномъ $f^{(0)}$, опредѣляемый, какъ мы раньше видѣли, уравненіемъ:

$$\sum_{i=1}^{p-1} X_i^{(0)} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_i} = K^{(0)} f^{(0)}. \tag{13}$$

По способу, изложенному въ 1—4 параграфахъ, мы сможемъ опредѣлить полиномъ $K^{(0)}$.

Беремъ одно изъ полученныхъ для него значеній и опредѣляемъ полиномъ $f^{(0)}$ по способу пятаго параграфа.

Мы предположимъ, что при выбранномъ значеніи полинома $K^{(0)}$ не существуетъ полинома $f^{(0)}$ порядка меньше n, удовлетворяющаго тождеству (12), и существуетъ только одинъ полиномъ $f^{(0)}$ порядка n.

Не трудно убѣдиться, что при этомъ условіи (я не стану останавливаться на доказательствѣ) существуетъ только конечное число полиномовъ K и f, удовлетворяющихъ тождеству:

$$\sum_{i=1}^{p-1} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = Kf,$$

гдѣ полиномы X_i имѣютъ значенія, данныя равенствами (12), а полиномъ K при $x_p = 0$ обращается въ полиномъ $K^{(0)}$.

Мы можемъ предположить искомые полиномы f и K въ такомъ видѣ:

$$K = \sum_{g=0}^{m-1} K^{(g)} x_p^g$$

$$f = \sum_{h=0}^{n} f^{(h)} x_p^h$$

Тогда тождество, которому они удовлетворяютъ, напишется такъ:

$$\sum_{i=1}^{p-1}\left\{\sum_{g=0}^{m} X_i^{(g)} x_p^g\right\}\left\{\sum_{h=0}^{n} \frac{\partial f^{(h)}}{\partial x_i} x_p^h\right\} = \sum_{h=0}^{m-1} K^{(g)} x_p^g \sum_{h=0}^{n} f^{(h)} x_p^h.$$

Это тождество распадается на $m+n$ отдѣльныхъ, такъ какъ всѣ коэффиціенты при степеняхъ перемѣнной x_p должны равняться нулю по отдѣльности.

Можно написать ихъ всѣ въ такомъ видѣ:

$$\sum_{i=1}^{p-1}\sum_{g=0}^{r} X_i^{(g)} \frac{\partial f^{(r-g)}}{\partial x_i} = \sum_{g=0}^{r} K^{(g)} f^{(r-g)}, \tag{14}$$

гдѣ r должно принимать всѣ значенія отъ 0 до $m+n-1$ включительно, и при $g>m$ полиномы $X^{(g)}$ должны равняться нулю, точно также при $g>m-1$ полиномы $K^{(g)}$ равны нулю и наконецъ полиномы $f^{(h)}$ при $h>n$.

Первое изъ полученныхъ равенствъ (14) совпадаетъ съ уравненіемъ (12) и даетъ намъ по 5-му параграфу рядъ линейныхъ уравненій для опредѣленія коэффиціентовъ полинома $f^{(0)}$.

Второе напишется такъ:

$$\sum_{i=1}^{p-1} X_i^{(0)} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{p-1} X_i^{(1)} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_i} = K^{(0)} f^{(1)} + K^{(1)} f^{(0)}$$

и дастъ меньшее число зависимостей между искомыми коэффиціентами, чѣмъ равенство (13). Эти зависимости будутъ линейны относительно коэффиціентовъ полиномовъ $f^{(1)}$ и $K^{(1)}$. Въ ихъ выраженія черезъ данныя задачи могутъ войти линейно и произвольныя постоянныя $C_j^{(1)}$.

Третье изъ равенствъ (14) напишется въ такомъ видѣ:

$$\sum_{i=1}^{p-1} X_i^{(0)} \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{p-1} X_i^{(1)} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{p-1} X_i^{(2)} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_i} = K^{(0)} f^{(2)} + K^{(1)} f^{(1)} + K^{(2)} f^{(0)}$$

Оно даетъ еще меньше соотношеній. Они будутъ линейными относительно коэффиціентовъ полиномовъ $f^{(2)}$ и $K^{(2)}$, а произвольныя постоянныя $C_j^{(1)}$, которыя могутъ заключаться въ выраженіи коэффиціентовъ полиномовъ $f^{(1)}$ и $K^{(1)}$, войдутъ уже въ такомъ случаѣ во второй степени. Рѣшеніе дастъ, говоря вообще, нѣсколько соотношеній между постоянными $C_j^{(1)}$, получаемыхъ путемъ исключенія всѣхъ неизвѣстныхъ коэффиціентовъ полиномовъ $f^{(2)}$ и $K^{(2)}$ и выразитъ послѣдніе черезъ прежнія постоянныя $C_j^{(1)}$, и можетъ случиться, новыя $C_j^{(2)}$, которыя войдутъ линейно.

Продолжая такъ, выразимъ всѣ коэффиціенты полиномовъ K и f черезъ новыя неизвѣстныя постоянныя $C_j^{(1)}$, $C_j^{(2)}$, $C_j^{(3)}$ и т. д. и получимъ рядъ условій для ихъ опредѣленія. Въ виду принятыхъ нами предположеній полученныя условія могутъ быть либо несовмѣстны, либо дадутъ конечное число значеній для постоянныхъ $C_j^{(g)}$.

Опредѣленіе этихъ постоянныхъ потребуетъ рѣшенія уравненій высшихъ степеней, но въ данномъ случаѣ вопросъ облегчается тѣмъ, что корни этихъ уравненій выражаются раціонально черезъ значенія, опредѣляющія особенныя точки и черезъ величины λ_j и λ_{ij}.

Можно также не рѣшать этихъ уравненій, а примѣнить для окончательнаго опредѣленія полинома f пріемъ, указанный въ § 6.

Возможны и другія упрощенія.

Перейдемъ теперь къ общимъ заключеніямъ.

Въ тождество

$$Xf = Kf$$

входятъ при порядкѣ полинома f равномъ n неизвѣстные коэффиціенты полиномовъ f и K въ числѣ равномъ $\binom{n+p-1}{p-1} + \binom{m+p-1}{p-1}$, образуя произведенія по два.

Если бы мы составили уравненіе для опредѣленія какого-нибудь изъ коэффиціентовъ полинома K, то могли бы получить въ зависимости отъ числа n степень этого уравненія сколь угодно большой.

Теорія предварительнаго опредѣленія полинома K, изложенная въ первыхъ четырехъ параграфахъ и части пятаго, показываетъ, что такія уравненія приводимы, если мы къ области раціональности коэффиціентовъ полиномовъ X_i прибавимъ ирраціональности, которыя вводятся при опредѣленіи особенныхъ точекъ, т. е. при рѣшеніи уравненій

$$X_i = \lambda x_i$$
$$i = 1, 2, \ldots, p.$$

и при вычисленіи корней характеристическихъ уравненій, составленныхъ для линейныхъ касательныхъ коннексовъ въ особенныхъ точкахъ.

Сверхъ того дано выраженіе этихъ полиномовъ. Эти выраженія показываютъ, что число возможныхъ гипотезъ для полиномовъ K, отвѣчающихъ частнымъ алгебраическимъ интеграламъ порядка n *конечно* и кромѣ того опредѣленіе полиномовъ K можно считать законченнымъ, разъ они опредѣлены для случая $n = 1$.

При этихъ условіяхъ задача опредѣлить всѣ частные алгебраическіе интегралы даннаго порядка n сводится къ рѣшенію ряда линейныхъ алгебраическихъ уравненій. При этомъ оказывается между прочимъ, что одному полиному K можетъ отвѣчать безконечное число частныхъ алгебраическихъ интеграловъ n-го порядка. Этотъ интересный случай связанъ непосредственно съ алгебраическими интегралами разсматриваемой системы.

Въ параграфѣ шестомъ я даю другой методъ для опредѣленія частныхъ алгебраическихъ интеграловъ даннаго порядка. Онъ приводитъ къ опредѣленію такихъ полиномовъ $\Phi_n(x)$, которые содержатъ искомыя интегралы въ видѣ множителей.

Изъ этого полинома можетъ быть выдѣленъ множитель, который самъ будетъ частнымъ интеграломъ.

Такъ какъ обѣ эти операціи, какъ составленіе полинома $\Phi_n(x)$, такъ и выдѣленіе изъ него множителя, частнаго интеграла,—раціональны, заключаемъ, что, если разсматриваемая нами система обладаетъ частнымъ алгебраическимъ интеграломъ, то она обладаетъ и такимъ, коэффиціенты котораго выражаются *раціонально* черезъ коэффиціенты полиномовъ X_i. Слѣдовательно и соотвѣтствующій ему полиномъ K также раціоналенъ относительно тѣхъ-же коэффиціентовъ. Такое свойство, между прочимъ, можетъ быть полезно, когда ищутся всѣ частные алгебраическіе интегралы, которыми обладаетъ система.

Въ настоящемъ параграфѣ показано, что существованіе линейнаго частнаго интеграла упрощаетъ задачу опредѣленія частнаго алгебраическаго интеграла даннаго порядка, поэтому въ предыдущемъ параграфѣ я даю два спеціальныхъ метода для опредѣленія линейныхъ частныхъ интеграловъ.

§ 9. Объ условіяхъ существованія алгебраическаго интеграла.

Займемся въ этомъ параграфѣ изученіемъ условій, при которыхъ система:

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\frac{dx_3}{X_3}=\ldots=\frac{dx_p}{X_p} \qquad (1)$$

или уравненіе

$$\sum_{i=1}^{p} X_i\frac{\partial z}{\partial x_i}=0\,, \qquad (2)$$

гдѣ функціи X_i— однородные полиномы m-го порядка въ перемѣнныхъ x_i $(i=1\,,\,2\,,\ldots,p)$, обладаютъ интеграломъ въ видѣ частнаго двухъ однородныхъ же полиномовъ n-го порядка.

Условившись обозначать операцію

$$\sum_{i=1}^{p} X_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

черезъ X, числитель интеграла черезъ f_1, а знаменатель черезъ f_2, можемъ написать условіе, что дробь $\frac{f_1}{f_2}$ — интегралъ системы (1) или уравненія (2) въ такомъ видѣ:

$$X\frac{f_1}{f_2} = \frac{f_2 X f_1 - f_1 X f_2}{f_2^2} = 0 .$$

Отсюда

$$\frac{Xf_1}{f_1} = \frac{Xf_2}{f_2} \tag{3}$$

Но мы всегда можемъ предположить дробь $\frac{f_1}{f_2}$ приведенной къ простѣйшему виду и слѣдовательно полиномы f_1 и f_2 не имѣющими общаго дѣлителя; тогда тождество (3) возможно только при условіи, что обѣ дроби равны одному и тому же полиному, который мы обозначимъ черезъ K_1, и слѣдовательно получимъ два такихъ тождества:

$$\begin{aligned} Xf_1 &= K_1 f_1 \\ Xf_2 &= K_1 f_2 . \end{aligned} \tag{4}$$

Они показываютъ, что оба полинома f_1 и f_2 ничто иное, какъ два частныхъ алгебраическихъ интеграла одного и того же порядка, отвѣчающіе одному и тому-же полиному K.

Мы уже видѣли въ параграфѣ пятомъ, что и обратно два частныхъ алгебраическихъ интеграла такого типа приводятъ къ алгебраическому интегралу уравненія (2).

Замѣтивъ это, найдемъ условіе, чтобы существовалъ такой интегралъ, принимая порядокъ n полиномовъ f_1 и f_2 за данное число.

Напишемъ въ рядъ всѣ одночлены, составленные изъ перемѣнныхъ $x_i\,(i = 1, 2, \ldots, p)$ измѣренія n и обозначимъ ихъ послѣдовательно черезъ B_{1i} $(i = 1, 2, \ldots, s)$, гдѣ цѣлое число s представляетъ собой число всѣхъ такихъ одночленовъ, равное, какъ извѣстно, $\binom{p+n-1}{p-1}$.

Обозначимъ результатъ операціи X надъ одночленомъ B_{1i} черезъ B_{2i} и вообще результатъ операціи X надъ полиномомъ B_{ji} черезъ $B_{j+1,i}$.

При помощи операціи X изъ s одночленовъ B_{1i} $(i = 1, 2, \ldots, s)$ получимъ новый рядъ полиномовъ B_{2i}, изъ этого ряда тѣмъ же пріемомъ получимъ рядъ полиномовъ B_{3i}. Продолжая такимъ образомъ, получимъ s рядовъ полиномовъ.

Составимъ изъ нихъ такой опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \dots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \dots & B_{2s} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & \dots & B_{3s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{s1} & B_{s2} & B_{s3} & \dots & B_{ss} \end{vmatrix}$$

Обозначимъ этотъ полиномъ черезъ $\Phi_{np}(x)$. Эти полиномы будутъ играть главную роль въ послѣдующемъ.

Давая въ суммѣ $\sum\limits_{i=1}^{s} C_i B_i$ постояннымъ C_i опредѣленныя числовыя значенія, мы можемъ сдѣлать ее равной любому полиному n-го порядка.

Въ виду этого можемъ положить:

$$\sum_{i=1}^{s} C_i^{(1)} B_{1i} = f_1$$

и

$$\sum_{i=1}^{s} C_i^{(2)} B_{1i} = f_2$$

Умножая второе равенство на f_1 и вычитая результатъ изъ перваго, помноженнаго на f_2, получаемъ такое:

$$\sum_{i=1}^{s} (C_i^{(1)} f_2 - C_i^{(2)} f_1)\, B_{1i} = 0. \tag{5}$$

Подвергаемъ эту сумму операціи X и получаемъ въ результатѣ:

$$\sum_{i=1}^{s} (C_i^{(1)} Xf_2 - C_i^{(2)} Xf_1)\, B_{1i} + \sum_{i=1}^{s} (C_i^{(1)} f_2 - C_i^{(2)} f_1)\, XB_{1i} = 0.$$

На основаніи равенствъ (4) полиномы Xf_1, Xf_2 замѣняются произведеніями Kf_1, Kf_2, а полиномъ XB_{1i} выбраннымъ для него обозначеніемъ B_{2i}, и мы можемъ написать:

$$K \sum_{i=1}^{s} (C_i^{(1)} Xf_2 - C_i^{(2)} f_1)\, B_{1i} + \sum_{i=1}^{s} (C_i^{(1)} f_2 - C_i^{(2)} f_1)\, B_{2i} = 0,$$

или въ силу равенства (5) просто:

$$\sum_{i=1}^{s}(C_i^{(1)}f_2 - C_i^{(2)}f_1)\,B_{2i} = 0.$$

Можно доказать, что и вообще

$$\sum_{i=1}^{s}(C_i^{(1)}f_2 - C_i^{(2)}f_1)\,B_{ji} = 0 \tag{6}$$

при j какомъ угодно цѣломъ.

Такъ какъ такое условіе, какъ мы уже убѣдились, имѣетъ мѣсто для $j = 1, 2$, то мы докажемъ общность нашего утвержденія, когда, исходя изъ справедливости его для индекса j, сумѣемъ доказать его существованіе и для индекса $j+1$.

Въ самомъ дѣлѣ, подвергнемъ равенство (6) операціи X и найдемъ сначала:

$$\sum_{i=1}^{s}(C_i^{(1)}Xf_2 - C_i^{(2)}Xf_1)\,B_{ji} + \sum_{i=1}^{s}(C_i^{(1)}f_2 - C_i^{(2)}f_1)\,XB_{ji} = 0.$$

Принимая снова во вниманіе равенства (4) и выбранное обозначеніе для полинома XB_{ji}, получаемъ:

$$K\sum_{i=1}^{s}(C_i^{(1)}f_2 - C_i^{(2)}f_1)\,B_{ji} + \sum_{i=1}^{s}(C_i^{(1)}f_2 - C_i^{(2)}f_1)\,B_{j+1,i} = 0,$$

или въ виду уравненія (6), находимъ окончательно:

$$\sum_{i=1}^{s}(C_i^{(1)}f_2 - C_i^{(2)}f_1)\,B_{j+1,i} = 0.$$

Итакъ можно давать въ равенствѣ (6) индексу j какое угодно цѣлое значеніе. Возьмемъ первыя s такихъ равенствъ:

$$\sum_{i=1}^{s}(C_i^{(1)}f_2 - C_i^{(2)}f_1)\,B_{ji} = 0\,.$$

$$j = 1, 2, 3, \ldots, s.$$

Можно ихъ разсматривать, какъ рядъ линейныхъ однородныхъ уравненій относительно выраженій $C_i^{(1)}f_2 - C_i^{(2)}f_1$. Но такъ какъ по крайней мѣрѣ одно изъ послѣднихъ отлично отъ нуля (иначе полиномъ f_2 представлялъ бы тотъ же самый частный интегралъ, что и полиномъ f_1)

опредѣлитель, составленный изъ коэффиціентовъ B_{ji}, долженъ равняться нулю. Этотъ опредѣлитель—ничто иное, какъ разсмотрѣнный выше полиномъ $\Phi_{np}(x)$ и онъ по только что доказанному долженъ обращаться въ нуль, если система (1) или уравненіе (2) имѣютъ интегралъ въ видѣ частнаго двухъ полиномовъ n-го порядка.

Какъ слѣдствіе только что приведенныхъ разсужденій, получаемъ мы такую теорему:

Для того, чтобы система (1) или уравненіе (2) имѣли интегралъ въ видѣ частнаго двухъ однородныхъ полиномовъ одного и того же порядка необходимо, чтобы одинъ изъ безконечнаго ряда полиномовъ $\Phi_{np}(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots, \infty)$ *обращался бы въ нуль.*

Необходимость такого условія слѣдуетъ изъ предыдущаго, но можно доказать, что оно *достаточное.*

Это будетъ слѣдовать изъ справедливости обратной теоремы.

Если одинъ изъ безконечнаго ряда полиномовъ $\Phi_{np}(x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots, \infty)$ *обращается тождественно въ нуль, то система (1) или уравненіе (2) имѣютъ интегралъ въ видѣ частнаго двухъ полиномовъ одного и того же порядка.*

Возьмемъ рядъ, состоящій изъ r функцій Q_{1i} $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Предположимъ эти функціи линейно независимыми, т. е. такими, что между ними не существуетъ линейной зависимости вида:

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i Q_{1i} = 0, \tag{7}$$

гдѣ α_i постоянная.

Условимся обозначать результатъ операціи X надъ функціей Q_{1i} XQ_{1i} черезъ Q_{2i} и вообще результатъ операціи XQ_{ji} черезъ $Q_{j+1,i}$ и разсмотримъ опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & \ldots & Q_{1r} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & \ldots & Q_{2r} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & \ldots & Q_{3r} \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ Q_{r1} & Q_{r2} & Q_{r3} & \ldots & Q_{rr} \end{vmatrix} \tag{8}$$

Этотъ опредѣлитель составленъ при помощи ряда функцій Q_{1i}, которыя образуютъ первую строку. Подвергая каждый элементъ ея операціи X, получаемъ всѣ элементы второй строки, и вообще всякій элементъ этого опредѣлителя получается помощью операціи X, произведенной надъ элементомъ, находящимся въ томъ же столбцѣ, но въ предыдущей строкѣ.

Благодаря такому образованію получается очень просто результатъ операціи надъ этимъ опредѣлителемъ, который назовемъ Δ.

Мы получимъ этотъ результатъ, если выполнимъ въ немъ операцію X надъ всѣми элементами одной строки, оставляя всѣ остальныя строки безъ измѣненія и возьмемъ сумму r полученныхъ такимъ образомъ опредѣлителей, соотвѣтствующихъ измѣненію каждой строки.

Что же касается даннаго опредѣлителя Δ, то $r-1$ изъ такихъ опредѣлителей обратятся въ нуль, такъ какъ, произведя операцію X надъ элементами одной изъ первыхъ r—1 строкъ, придемъ къ опредѣлителю, имѣющему двѣ одинаковыя строки. Останется только тотъ опредѣлитель, въ которомъ первыя r—1 строкъ оставлены безъ измѣненія, а надъ элементами послѣдней строки выполнена операція X.

Такимъ образомъ получаемъ:

$$X\Delta = \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & \ldots & Q_{1r} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & \ldots & Q_{2r} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & \ldots & Q_{3r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Q_{r-1,1} & Q_{r-1,2} & Q_{r-1,3} & \ldots & Q_{r-1,r} \\ Q_{r+1,1} & Q_{r+1,2} & Q_{r+1,3} & \ldots & Q_{r+1,r} \end{vmatrix}$$

Условимся обозначать первые миноры опредѣлителя Δ черезъ Δ_{hj}, гдѣ индексъ h обозначаетъ выброшенную строку, а индексъ j выброшенный столбецъ.

Легко видѣть, что каждый миноръ Δ_{rj} составленъ по такому же закону, какъ и самъ Δ. Результатъ операціи X надъ нимъ будетъ аналогиченъ операціи $X\Delta$, и легко видѣть, что полученный опредѣлитель будетъ ничто иное, какъ миноръ $\Delta_{r-1,j}$, взятый съ обратнымъ знакомъ.

Итакъ получаемъ:

$$X\Delta_{r,j} = -\Delta_{r-1,j}. \tag{9}$$

Предположимъ теперь

$$\Delta = 0$$

и покажемъ, что при этомъ условіи можно всегда получить по крайней мѣрѣ одинъ интегралъ уравненія (2), или системы (1).

Предположимъ сначала, что ни миноръ Δ_{rg}, ни миноръ Δ_{ri} не равны нулю, ни наконецъ ихъ отношеніе $\dfrac{\Delta_{ri}}{\Delta_{rg}}$ не равно постоянной.

Покажемъ, что въ такомъ случаѣ это послѣднее отношеніе—интегралъ системы (1) или уравненія (2).

Въ самомъ дѣлѣ,

$$X\,\frac{\Delta_{ri}}{\Delta_{rg}}=\frac{\Delta_{rg}X\Delta_{ri}-\Delta_{ri}X\Delta_{rg}}{\Delta_{rg}^2}$$

Принимая во вниманіе формулу (9), мы находимъ:

$$X\,\frac{\Delta_{ri}}{\Delta_{rg}}=\frac{-\Delta_{rg}\Delta_{r-1,i}+\Delta_{ri}\Delta_{r-1,g}}{\Delta_{rg}^2}$$

Но въ числителѣ второй части находится миноръ опредѣлителя взаимнаго съ опредѣлителемъ, обращающимся въ нуль, и слѣдовательно вторая часть вмѣстѣ съ этимъ миноромъ будетъ нулемъ, а потому дробь $\frac{\Delta_{ri}}{\Delta_{rg}}$ будетъ искомымъ интеграломъ.

Итакъ въ этомъ случаѣ мы найдемъ интегралъ.

Разсмотримъ теперь исключенные нами случаи.

Если наприм. Δ_{ri} равенъ нулю, то онъ обладаетъ такими же особенностями, что и опредѣлитель Δ, но порядокъ его на единицу меньше.

Такимъ образомъ въ этомъ случаѣ задача упростилась.

То же самое будетъ и въ томъ случаѣ, когда

$$\frac{\Delta_{ri}}{\Delta_{rg}}=\alpha\,,$$

гдѣ α обозначаетъ величину постоянную.

Можно представить это равенство сначала въ видѣ

$$\Delta_{ri}-\alpha\Delta_{rg}=0\,,$$

а потомъ въ видѣ такого опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix}
Q_{11} & \dots & Q_{1,i-1} & Q_{1,i+1} & \dots & Q_{1,g-1} & Q_{1,g+1} & \dots & Q_{1,r} & Q_{1i}-\alpha(-1)^{g-i} & Q_{1g}\\
Q_{21} & \dots & Q_{2,i-1} & Q_{2,i+1} & \dots & Q_{2,g-1} & Q_{2,g+1} & \dots & Q_{2,r} & Q_{2i}-\alpha(-1)^{g-i} & Q_{2g}\\
Q_{31} & \dots & Q_{3,i-1} & Q_{3,i+1} & \dots & Q_{3,g-1} & Q_{3,g+1} & \dots & Q_{3,r} & Q_{3i}-\alpha(-1)^{g-i} & Q_{3g}\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
Q_{r-1,1} & \dots & Q_{r-1,i-1} & Q_{r-1,i+1} & \dots & Q_{r-1,g-1} & Q_{r-1,g+1} & \dots & Q_{r-1,r} & Q_{r-1,i}-\alpha(-1)^{g-i} & Q_{r-1,g}
\end{vmatrix}$$

Полученный опредѣлитель обладаетъ тѣми же характерными свойствами, что и опредѣлитель Δ. Во первыхъ между функціями первой строки не можетъ быть линейнаго соотношенія съ постоянными коэффиціентами, такъ какъ такое соотношеніе было бы вида (7). Во вторыхъ, такъ какъ результатъ операціи X надъ элементомъ послѣдней строки $Q_{hi}-\alpha(-1)^{g-i}Q_{hg}$ равенъ очевидно $Q_{h+1,i}-\alpha(-1)^{g-i}Q_{h+1,g}$ и слѣдовательно послѣдній столбецъ полученъ изъ перваго элемента такимъ же путемъ, какъ и остальные столбцы разсматриваемаго и всѣ столбцы опредѣлителя $\varDelta$.

Такимъ образомъ въ обоихъ этихъ случаяхъ мы, не получая интеграла, получаемъ опредѣлитель, составленный по тому же закону и точно также равный нулю, но порядка на единицу меньшаго.

Примѣняя тотъ же пріемъ, мы либо получимъ интегралъ системы (1) и уравненія (2), либо придемъ къ опредѣлителю, обладающему тѣми же свойствами.

Такой процессъ не можетъ продолжаться безконечно, и мы въ самомъ неблагопріятномъ случаѣ придемъ, не получая интеграла, къ опредѣлителю второго порядка вида:

$$\begin{vmatrix} Q_{11}' & Q_{12}' \\ Q_{21}' & Q_{22}' \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

Прежде всего въ немъ ни одна изъ функцій Q_{11}', Q_{12}' не можетъ быть равна нулю, такъ какъ это, либо какія нибудь двѣ изъ ряда функцій Q_{1i} $(i=1, 2, \ldots, r)$, либо какія нибудь линейныя комбинаціи ихъ съ постоянными коэффиціентами. Поэтому же частное $\frac{Q_{11}'}{Q_{12}'}$ не можетъ быть постоянной, иначе между функціями Q_{1i} существовало бы соотношеніе вида (7).

Подвергнувъ же дробь $\frac{Q_{11}'}{Q_{12}'}$ операціи X, убѣждаемся, что этотъ результатъ въ силу равенства (10) тождественно равенъ нулю и слѣдовательно она—искомый интегралъ.

Итакъ, если опредѣлитель типа (8) равенъ нулю, то всегда можно получить раціонально при помощи функцій, его составляющихъ, интегралъ системы (1) или уравненія (2).

Положимъ теперь, что полиномъ $\varPhi_{np}(x)$ равенъ нулю.

Полиномъ $\varPhi_{np}(x)$ составляется изъ одночленовъ B_{1i} точно такъ же, какъ и опредѣлитель $\varDelta$ изъ функцій Q_{1i}; затѣмъ, очевидно, что между одночленами B_{1i} не можетъ быть линейнаго соотношенія съ постоянными коэффиціентами.

Въ виду всего этого мы должны придти къ заключенію, что можно найти изъ условія

$$\varPhi_{np}(x) = 0$$

по крайней мѣрѣ одинъ интегралъ системы (1) или уравненія (2). Такъ какъ послѣдній составляется раціонально изъ полиномовъ B_{ji}, то онъ будетъ частнымъ двухъ полиномовъ; а такъ какъ всѣ B_{ji} $(i=1, 2, \ldots, s)$ при любомъ значеніи индекса j одного и того же порядка, то эти два полинома будутъ также одного и того же порядка.

Итакъ равенство нулю одного изъ безконечнаго ряда полиномовъ $\Phi_{np}(x)$ представляетъ собой необходимое и достаточное условіе, чтобы уравненіе (2) или система (1) имѣли бы интегралъ въ видѣ частнаго двухъ однородныхъ полиномовъ одной и той же степени, т. е. въ видѣ однородной раціональной функціи нулевого измѣренія.

§ 10. О свойствахъ полиномовъ $\Phi_{np}(x)$.

Найденныя въ предыдущемъ параграфѣ необходимыя и достаточныя условія для существованія алгебраическаго интеграла уравненія

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0. \qquad (1)$$

вида $\frac{f_1}{f_2}$ имѣютъ главнымъ образомъ теоретическій интересъ.

Условимся для краткости называть порядокъ n полиномовъ f_1 и f_2 порядкомъ интеграла.

Можно практически использовать полученный результатъ въ двухъ направленіяхъ: или найдя высшій предѣлъ для порядка интеграла какимъ либо другимъ пріемомъ, или замѣнивъ найденныя условія эквивалентными имъ, но выраженными въ конечномъ числѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы знаемъ верхній предѣлъ N для порядка n, достаточно вычислить полиномы $\Phi_{np}(x)$ для всѣхъ значеній числа n меньшихъ даннаго предѣла N.

Если ни одинъ изъ полученныхъ такимъ образомъ полиномовъ $\Phi_{pn}(x)$ не окажется равнымъ тождественно нулю, то алгебраическаго интеграла не существуетъ.

Въ обратномъ случаѣ интегралъ будетъ существовать, и онъ можетъ быть найденъ при помощи раціональныхъ дѣйствій по элементамъ B_{ij} составляющихъ этотъ полиномъ.

H. Poincaré въ своихъ изысканіяхъ [1]) объ опредѣленіи алгебраическихъ интеграловъ занимается какъ разъ этимъ вопросомъ, ограничиваясь случаемъ $p = 3$.

Прежде всего необходимо замѣтить, что невозможно безъ особаго предположенія относительно природы полиномовъ f_1 и f_2 найти верхній предѣлъ порядка n.

---

[1]) Rendiconti del circolo matematico di Palermo. 1891. стр. 14.

Въ самомъ дѣлѣ, произвольная функція интеграла будетъ также интеграломъ уравненія (1), и если мы возьмемъ за такую функцію раціональную дробь

$$\frac{\sum_{i=1}^{l} M_i z^i}{\sum_{i=1}^{l} P_i z^i}.$$

Подставляя вмѣсто z отношеніе $\frac{f_1}{f_2}$, получаемъ частное двухъ полиномовъ nl-го порядка. Слѣдовательно, если существуетъ интегралъ n-го порядка, то существуетъ и интегралъ nl-го порядка, гдѣ l можетъ быть какимъ угодно цѣлымъ положительнымъ числомъ. Отсюда слѣдуетъ такое свойство полиномовъ $\Phi_{np}(x)$.

Если существуетъ интегралъ n-го порядка, обращается въ нуль не только полиномъ $\Phi_{np}(x)$, но и всѣ полиномы $\Phi_{nl,p}(x)$, при l произвольномъ цѣломъ положительномъ числѣ.

Съ другой стороны важно опредѣлить по данному интегралу

$$\frac{F_1(x)}{F_2(x)}$$

не существуетъ ли интеграла болѣе низкаго порядка, чѣмъ данный.

Рѣшеніе можетъ быть основано на слѣдующей леммѣ, доказанной H. Poincaré [1]).

Если полиномъ $F_1(x) + CF_2(x)$ трехъ однородныхъ перемѣнныхъ приводимъ при всѣхъ значеніяхъ постоянной C, а полиномы $F_1(x)$ и $F_2(x)$ простые между собою, то существуетъ два такихъ полинома v_1 и v_2 одного и того же порядка, черезъ которые полиномы $F_1(x)$ и $F_2(x)$ выражаются въ видѣ цѣлой однородной функціи отъ нихъ.

Другими словами полиномъ $F_1(x) + CF_2(x)$ будетъ представлять собой произведеніе множителей вида $v_1 + \alpha v_2$ и слѣдовательно частное $\frac{F_1}{F_2}$ будетъ раціональной функціей дроби $\frac{v_1}{v_2}$.

H. Poincaré доказалъ эту лемму только для числа перемѣнныхъ $p = 3$, но въ данномъ имъ доказательствѣ число перемѣнныхъ не играетъ никакой роли, а потому оно справедливо для какого угодно значенія числа p.

Исходя изъ этой леммы можно утверждать, что если изъ двухъ полиномовъ $F_1(x)$ и $F_2(x)$ по крайней мѣрѣ одинъ неприводимъ, то интегралъ $\frac{F_1(x)}{F_2(x)}$ не будетъ раціональной функціей интеграла меньшаго порядка $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, такъ какъ въ противномъ случаѣ оба полинома $F_1(x)$ и $F_2(x)$ были бы произведеніемъ множителей типа $f_1(x) + \alpha_i f_2(x)$.

[1]) Rendiconti del Circolo Matematico del Palermo. 1891 г., стр. 183.

Итакъ можно придти къ такому заключенію, что долженъ существовать высшій предѣлъ порядка интеграла типа $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, если по крайней мѣрѣ одинъ изъ полиномовъ $f_1(x) + Cf_2(x)$ при нѣкоторомъ значеніи постоянной C будетъ неприводимымъ.

Благодаря методу изученія пути интегральной кривой вблизи особенной точки, ведущему начало отъ Briot и Bouquet, оказывается возможнымъ установить для случая $p = 3$ характеръ кратныхъ точекъ семейства кривыхъ

$$f_1(x) + Cf_2(x) = 0\,,$$

и благодаря этому судить о родѣ (genre) этихъ кривыхъ, который находится въ извѣстной зависимости отъ порядка кривой и ея кратныхъ точекъ.

Кромѣ того только извѣстныя (points dicritiques) особенныя точки могутъ служить точками пересѣченія двухъ кривыхъ

$$f_1(x) = 0$$
$$f_2(x) = 0\,.$$

Число этихъ точекъ, принимая во вниманіе кратность точекъ пересѣченія, должно быть n^2 [1]).

Отсюда французскій ученый въ только что цитированной работѣ выводитъ рядъ равенствъ и неравенствъ, которыя въ нѣкоторыхъ случаяхъ достигаютъ цѣли—указать высшій предѣлъ порядка n.

Если принять во вниманіе, что трудности этого пути для рѣшенія этого вопроса остановили даже H. Poincaré, что распространеніе этихъ пріемовъ на большее число перемѣнныхъ, какъ мнѣ кажется, находится на границѣ возможнаго, то предложенный мною въ этой работѣ путь изученія полиномовъ $\Phi_{np}(x)$ долженъ представлять интересъ уже потому, что онъ общій для какого угодно числа перемѣнныхъ.

Я уже оговорилъ вначалѣ, что желательно замѣнить найденныя мной условія эквивалентными, но въ конечномъ числѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, приравнивая нулю всѣ коэффиціенты полинома $\Phi_{np}(x)$, получимъ большее число условій, чѣмъ число заключающихся въ нихъ коэффиціентовъ уравненія (1). Можно выбрать изъ нихъ не-

---

[1]) Можно получить тѣ же результаты болѣе простымъ путемъ при помощи послѣдовательнаго опредѣленія поляръ полинома $f_1(x) + Cf_2(x)$. Для этой цѣли можно воспользоваться уравненіями (10) и (11) параграфа 3-го. Въ самомъ дѣлѣ, входящіе въ нихъ полиномы $A^{(k)}f$ по подстановкѣ $x_i = a_{ji}$ представятъ собой такія поляры, какъ это слѣдуетъ изъ формулы (III) перваго параграфа. Возможно, что при этомъ получатся дальнѣйшія упрощенія и обобщенія. Къ болѣе обстоятельному изслѣдованію въ этой области я надѣюсь вернуться позже.

зависимыя, которыя будутъ въ числѣ не большемъ числа этихъ коэффиціентовъ. Всѣ остальныя будутъ либо слѣдствіемъ выбранныхъ независимыхъ, либо играть ограничивающую роль, т. е. будутъ исключать лишнія рѣшенія. Такимъ образомъ существованіе такихъ условій выясняется a priori.

Задача эта принадлежитъ, какъ мнѣ кажется, къ числу трудныхъ, но непреоборимыхъ.

Дальнѣйшія изслѣдованія я думаю обосновать на слѣдующихъ любопытныхъ свойствахъ полиномовъ $\Phi_{np}(x)$.

1) Когда полиномы X_i имѣютъ общій множитель ϱ, то онъ войдетъ въ полиномъ $\Phi_{np}(x)$ въ степени $\frac{(s-1)(s-2)}{1.2}$, гдѣ $s=\binom{n+p-1}{p-1}$.

2) Если полиномы X_i замѣнимъ полиномами $X_i - Lx_i$, гдѣ L совершенно произвольный полиномъ m—1-го порядка, то полиномы $\Phi_{np}(x)$ не измѣняются отъ подобной замѣны.

3) Каждая особенная точка уравненія (1) будетъ кратной для полинома $\Phi_{np}(x)$ и порядокъ ея кратности будетъ не ниже $s-1$.

4) Если вмѣсто уравненія (1) будемъ разсматривать коннексъ

$$\sum_{i=1}^{p} X_i u_i = 0$$

по отношенію къ линейному преобразованію, то полиномы $\Phi_{np}(x)$ будутъ его точечными коваріантами.

Это послѣднее свойство я считаю особенно важнымъ для дальнѣйшаго изслѣдованія полученныхъ условій и я дамъ въ концѣ текущаго параграфа его доказательство.

D. Hilbert въ своей работѣ: über Theorie der algebraischen Formen [1]) доказалъ, что число всѣхъ инваріантныхъ образованій конечно. Это надо понимать въ томъ смыслѣ, что напр. всѣ коваріанты будутъ цѣлыми, раціональными, съ цѣлыми коэффиціентами функціями конечнаго числа коваріантовъ и инваріантовъ.

Въ виду справедливости такой теоремы можно указать путь къ рѣшенію задачи и отдать ясный отчетъ въ трудности этого пути.

Предположимъ, что намъ нужно провѣрить существованіе алгебраическаго интеграла и опредѣлить порядокъ послѣдняго для уравненія

$$\sum X_i^{(1)} \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0, \tag{2}$$

въ которомъ полиномы $X_i^{(1)}$ полиномы m-го порядка съ коэффиціентами, зависящими отъ произвольныхъ постоянныхъ $C_1, C_2, \ldots, C_\varrho$ и ирра-

---

[1]) Mathematische Annalen. B. 36, s. 473.

ціональныхъ чиселъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\sigma$. Между послѣдними можетъ существовать извѣстное число независимыхъ между собою цѣлыхъ раціональныхъ соотношеній съ цѣлыми коэффиціентами. Эти соотношенія мы можемъ написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\Theta_i\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\sigma) = 0 \qquad (3)$$
$$i = 1, 2, \ldots, \tau.$$

Вычисляемъ сначала основные коваріанты и инваріанты для уравненія (1). Пусть это будутъ функціи $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_t$. Тогда на основаніи теоремы D. Hilbert'a можемъ найти выраженіе полиномовъ $\Phi_{np}(x)$ черезъ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_t$ и слѣдовательно написать

$$\Phi_{np}(x) = \Psi_{np}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_t).$$

гдѣ можно, умноживъ полиномъ $\Phi_{np}(x)$ на нѣкоторое число, сдѣлать въ полиномахъ $\Psi_{np}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_t)$ относительно $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_t$ коэффиціенты цѣлыми.

Если теперь дадимъ въ полиномахъ φ_i коэффиціентамъ уравненія (1) значенія коэффиціентовъ уравненія (2), то получимъ частныя значенія этихъ коваріантовъ для даннаго случая. Обозначимъ такую замѣну постановкой черты надъ функціями φ_i и потому

$$\Psi_{np}(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \ldots, \overline{\varphi}_t)$$

будетъ значеніемъ полинома $\Phi_{np}(x)$ для новаго уравненія (2). Въ томъ случаѣ, когда наше уравненіе имѣетъ алгебраическій интегралъ порядка n, этотъ полиномъ долженъ обратиться въ нуль. Ясно, что условіе

$$\Psi_{np}(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \ldots, \overline{\varphi}_t) = 0 \qquad (4)$$

будетъ справедливо при какихъ угодно значеніяхъ перемѣнныхъ x_i и постоянныхъ $C_1, C_2, \ldots, C_\rho$ въ силу соотношеній (3).

Условіе (4) показываетъ, что уравненіе (2) не можетъ обладать алгебраическимъ интеграломъ, если между основными коваріантами нѣтъ тождественнаго соотношенія съ цѣлыми коэффиціентами. Можно составить такія соотношенія слѣдующимъ образомъ. Пишемъ рядъ равенствъ:

$$\overline{\varphi}_i = \varphi_i$$
$$i = 1, 2, \ldots, t$$

Если изъ этихъ равенствъ нельзя исключить всѣхъ величинъ x_i, C_i, и α_i, то между коваріантами не будетъ и алгебраическаго интеграла. Положимъ, что такія соотношенія получатся: можемъ написать ихъ въ такомъ видѣ:

$$\omega_i(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \ldots, \overline{\varphi}_t) = 0 \qquad (5)$$
$$i = 1, 2, \ldots, \eta.$$

Обращаемъ вниманіе, что полученіе послѣднихъ соотношеній— задача конечнаго характера и всегда можетъ быть выполнена.

Условіе (4) должно быть слѣдствіемъ только что полученныхъ условій. Между ними могутъ быть не всѣ независимы; выбираемъ поэтому среди нихъ группу независимыхъ и рѣшаемъ относительно соотвѣтствующаго числа коваріантовъ $\overline{\varphi}_i$ и вносимъ полученныя значенія въ условіе (4). Въ полученномъ результатѣ можно считать остальные полиномы φ_i совершенно произвольными величинами. Приведя полученное условіе къ раціональному виду, придемъ къ полиному относительно оставшихся коваріантовъ φ_i съ цѣлыми коэффиціентами. Эти коэффиціенты должны зависѣть отъ порядка n интеграла. Приравнивая ихъ нулю, получимъ уравненія для опредѣленія этого порядка.

Такимъ образомъ эти разсужденія выясняютъ возможность полученія уравненій для опредѣленія порядка n при помощи однихъ раціональныхъ дѣйствій.

Какъ ни обща изложенная схема, какъ ни важны опущенныя, необходимыя для строгости изложенія детали, все-таки она указываетъ на возможность рѣшенія задачи въ самомъ общемъ случаѣ при заданныхъ значеніяхъ коэффиціентовъ уравненія (1), каковы бы ни были числа m и p.

Кромѣ того, полезно указать, что она можетъ быть примѣнена безъ труда въ простѣйшихъ случаяхъ наприм. 1) $p=2$, $m=2, 3, \ldots$; 2) $p=3$, $m=2$.

Въ этихъ случаяхъ она можетъ быть и провѣрена. Въ самомъ дѣлѣ, первый случай содержитъ въ себѣ обыкновенныя однородныя дифференціальныя уравненія 1-го порядка, интеграція которыхъ общеизвѣстна. Что же касается второго случая, то онъ изслѣдованъ французскимъ ученымъ G. Darboux [1]), который далъ рядъ интереснѣйшихъ примѣровъ алгебраическихъ интеграловъ.

Полученный при этомъ фактическій матеріалъ можетъ выяснить извѣстную закономѣрность и нѣкоторыя особенности, которыя послужатъ для упрощенія дальнѣйшихъ изслѣдованій.

Выяснивъ важное значеніе свойства полиномовъ $\Phi_{np}(x)$ быть коваріантами коннекса

$$\sum_{i=1}^{p} X_i u_i = 0 , \tag{6}$$

попытаемся доказать его, воспользовавшись для этого символическимъ обозначеніемъ Аронгольда, т. е. предположимъ нашъ коннексъ написаннымъ въ такой формѣ:

$$a_x^m a_u = 0 . \tag{7}$$

[1]) Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques. 1878.

Замѣтимъ прежде всего, что символы α_1 $\alpha_2, \ldots, \alpha_p$ преобразуются линейнымъ преобразованіемъ, какъ перемѣнныя $u_1, u_2, \ldots, u_p$ символы же $a_1, a_2, \ldots, a_p$, какъ перемѣнныя $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Операція X будетъ изображена при этомъ черезъ

$$\alpha_x^m \sum_{i=1}^{p} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

т. е. представитъ собой произведеніе символическаго множителя на полярную операцію

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Подобныхъ символовъ намъ придется взять столько, каковъ порядокъ полинома $\Phi_{np}(x)$ въ коэффиціентахъ уравненія (1). Замѣчая, что элементы опредѣлителя, представляющаго $\Phi_{np}(x)$ въ k-ой строкѣ однородны относительно ихъ измѣренія $k-1$, и слѣдовательно весь полиномъ будетъ однороднымъ относительно ихъ измѣренія $t = \binom{s}{2}$.

Вводимъ слѣдовательно t символовъ $\alpha_x^{(g)^m}$ $\alpha_u^{(g)}$ $(g = 1, 2, \ldots, t)$. Операцію же

$$\sum_{i=1}^{p} a_i^{(g)} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

обозначимъ черезъ A_g. Точно также операцію

$$\sum_{i=1}^{p} a_i^{(g)} \frac{\partial}{\partial x_i^{(k)}}$$

обозначимъ черезъ A_{gk}.

Условившись въ обозначеніяхъ, переходимъ къ вычисленію полиномовъ B_{ki}.

Прежде всего имѣемъ:

$$B_{2i} = \alpha_x^{(1)^m} A_1 B_{1i}$$
$$i = 1, 2, \ldots, p.$$

или, обозначивъ инваріантный множитель $\alpha_x^{(1)^m}$ черезъ Q_1,

$$B_{2i} = Q_1 \{A_1 B_{1i}\}.$$

Для полученія B_{2i} замѣняемъ въ полученномъ равенствѣ въ символахъ α и a индексъ 1 на 2 и подвергаемъ обѣ части его операціи $X \equiv \alpha^{(3)^m} A_3$ и получаемъ:

$$B_{3i} = \alpha_x^{(3)^m} (A_3 Q_2)(A_2 B_{1i}) + \alpha_x^{(3)^m} Q_2 \{A_3 A_2 B_{1i}\} = Q_3 A_2 B_{1i} + Q_4 \{A_3 A_2 B_{1i}\},$$

гдѣ Q_3 и Q_4 обозначаютъ произведенія инваріантныхъ символовъ типа

$$\alpha_x^{(g)} \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^{(g)} a_i^{(g)},$$

а вторые множители представляютъ собой полярныя образованія отъ одночленовъ B_{1i}.

По такому закону составляются всѣ полиномы B_{ki}.

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что

$$B_{ki} = \sum_g Q_g B_{1i}^{(g)}, \tag{8}$$

гдѣ Q_g представляетъ собой сумму произведеній символическихъ множителей типа

$$\alpha_x^{(g)} \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^{(g)} a_i^{(g)},$$

а $B_{1i}^{(g)}$ результатъ ряда полярныхъ операцій типа A_h, произведенныхъ надъ одночленомъ B_{1i}.

Для полученія $B_{k+1,i}$ мѣняемъ сначала всѣ индексы у символовъ α и a въ равенствѣ (8) на слѣдующіе по порядку и производимъ операцію X. Если въ дѣло вошли всѣ символы съ индексами до числа l, то представляемъ операцію X черезъ $\alpha_x^{(l)^m} A_l$.

Тогда

$$B_{k+1,i} = \sum_g \left[\alpha_x^{(l)^m} (A_l Q_l) B_{1i}^{(g)} + \alpha_x^{(l)^m} Q_g \{A_l B_{1i}^{(g)}\} \right].$$

Такъ какъ $A_l Q_l$ вводитъ новые символы только типа

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i^{(g)} a_i^{(l)},$$

то мы убѣждаемся, что изъ каждаго слагаемаго полинома B_{ki} указаннаго характера получается въ полиномѣ $B_{k+1,i}$ два слагаемыхъ того же типа.

Такимъ образомъ мы можемъ послѣдовательно разложить всѣ полиномы B_{ki} $(k = 1, 2, \ldots, s)$ на сумму слагаемыхъ означеннаго типа.

Внеся эти разложенія въ опредѣлитель, представляющій полиномъ $\Phi_{np}(x)$, можемъ разложить и его на сумму полиномовъ, которые состоятъ изъ суммы произведеній инваріантныхъ множителей типа $a_x^{(g)}$ и $\sum a_i^{(g)} a_i^{(h)}$ на опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \dots & B_{1s} \\ B_{21}^{(g_2)} & B_{22}^{(g_2)} & B_{23}^{(g_2)} & \dots & B_{2s}^{(g_2)} \\ B_{31}^{(g_3)} & B_{32}^{(g_3)} & B_{33}^{(g_3)} & \dots & B_{3s}^{(g_3)} \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ B_{s1}^{(g_s)} & B_{s2}^{(g_s)} & B_{s3}^{(g_s)} & \dots & B_{ss}^{(g_s)} \end{vmatrix} \tag{9}$$

Остается доказать инваріантность этого множителя. Тогда и все произведеніе будетъ коваріантомъ, а такъ какъ полиномъ $\Phi_{np}(x)$ представляетъ сумму ихъ, то онъ и самъ принадлежитъ къ числу коваріантныхъ образованій.

Обозначимъ черезъ $\overline{B_{ki}}$ результатъ подстановки $x_i = x_i^{(k)} (i=1, 2, \dots, p)$ въ одночленъ B_{1i} и составляемъ опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} \overline{B_{11}} & \overline{B_{12}} & \overline{B_{13}} & \dots & \overline{B_{1s}} \\ \overline{B_{21}} & \overline{B_{22}} & \overline{B_{23}} & \dots & \overline{B_{2s}} \\ \overline{B_{31}} & \overline{B_{32}} & \overline{B_{33}} & \dots & \overline{B_{3s}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{B_{s1}} & \overline{B_{s2}} & \overline{B_{s3}} & \dots & \overline{B_{ss}} \end{vmatrix} \tag{10}$$

Исчезновеніе его показываетъ, что точки $x_i^{(k)}$ $(k = 1, 2, \dots, s)$ обращаютъ въ нуль одинъ и тотъ же полиномъ n-го порядка. Отсюда слѣдуетъ инваріантный характеръ этого опредѣлителя.

Пользуясь свойствомъ, что полярная операція, замѣняющая въ инваріантномъ образованіи одни элементы другими, но преобразуемыми тѣмъ же линейнымъ преобразованіемъ, можемъ доказать, что и опредѣлитель (9) обладаетъ инваріантными свойствами. Для этого достаточно указать рядъ полярныхъ операцій, превращающихъ опредѣлитель (10) въ опредѣлитель (9) до постояннаго множителя включительно.

Пусть выраженія $B_{ki}^{(g_k)}$ получены изъ одночленовъ B_{ki} помощью ряда полярныхъ операцій $A_{h_1}, A_{h_2}, A_{h_3}, \dots, A_{h_k}$. Подвергая опредѣлитель (10) ряду операцій $A_{h_1 k}, A_{h_2 k}, A_{h_3 k}, \dots, A_{h_k k}$. Онѣ измѣнятъ въ немъ лишь элементы k-ой строки, и послѣдніе станутъ отличаться отъ элементовъ k-ой строки опредѣлителя (9) лишь тѣмъ, что перемѣнныя $x_i^{(k)}$ замѣщены перемѣнными x_i.

Пусть степень этихъ полиномовъ относительно перемѣнныхъ $x_i^{(k)}$ равна l. Подвергая опредѣлитель (10) кромѣ указанныхъ выше полярныхъ операцій еще l разъ операціи

$$\sum_{i=1}^{p} x_i \frac{\partial}{\partial x_i^{(k)}},$$

превратимъ всѣ элементы k-ой строки опредѣлителя (10) на основаніи теоремы (III) параграфа перваго въ элементы k-ой строки опредѣлителя (9), умноженные на l!

Поступая такъ со всѣми строками опредѣлителя (10), мы превратимъ его въ опредѣлитель (9), умноженный на нѣкоторое число. Значитъ и опредѣлитель (9) обладаетъ инваріантными свойствами. А это, какъ мы уже видѣли, доказываетъ, что полиномъ $\Phi_{np}(x)$ принадлежитъ къ коваріантнымъ образованіямъ.

§ 11. О приведеніи одного эллиптическаго интеграла.

Дѣло идетъ объ эллиптическомъ интегралѣ

$$\int \frac{x+A}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}\,dx.$$

Требуется узнать условія, при которыхъ онъ можетъ быть выраженъ при помощи алгебраическихъ и логариѳмическихъ символовъ. Эта задача впервые была поставлена Абелемъ [1]). Имъ-же дано первое рѣшеніе, а именно онъ установилъ самъ по себѣ интересный фактъ возможности при нѣкоторыхъ частныхъ значеніяхъ постоянныхъ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ разложить корень $\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}$ въ періодическую дробь и прямой связи такого разложенія съ приведеніемъ разсматриваемаго эллиптическаго интеграла.

П. Л. Чебышевъ [2]) обратилъ вниманіе на то обстоятельство, что пріемъ разложенія въ непрерывную дробь можетъ дать практическіе результаты лишь тогда, когда мы знаемъ предѣлъ числа членовъ періода. Ему удалось рѣшить этотъ послѣдній вопросъ, предположивъ величины $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ раціональными числами.

Развивая идеи П. Л. Чебышева, Е. Золотаревъ [2]) далъ способы рѣшить эту задачу и въ томъ случаѣ, когда эти числа алгебраическія и, наконецъ, когда эти числа болѣе общаго характера.

---

[1]) Abel. Oeuvres complètes 1881. T. I, стр. 104. T. II, стр. 87 и др.

[2]) П. Л. Чебышевъ. Сочиненія, С.-Петербургъ. 1899. Е. Золотаревъ. Теорія цѣлыхъ комплексныхъ чиселъ С.-Петербургъ 1874. Прекрасное и вполнѣ строгое изложеніе этого вопроса дано И. Пташицкимъ въ книгѣ «Объ интегрированіи въ конечномъ видѣ эллиптическихъ дифференціаловъ. С.-Петербургъ. 1888.

Такимъ образомъ единая по существу задача разбилась на три, смотря по природѣ величинъ α, β, γ, δ. Требуется ли это ея сущностью? Думаю, что нѣтъ. Въ виду этого я даю новое изложеніе нѣкоторымъ сторонамъ этого вопроса, надѣясь что оно послужитъ къ дальнѣйшему усовершенствованію этого рѣшенія. Кстати мнѣ будетъ возможно указать на тѣсную связь этого вопроса съ разсмотрѣнными ранѣе и на нѣкоторыя аналогіи съ тѣми общими вопросами, которые были предметомъ предыдущихъ изслѣдованій.

За исходный пунктъ я возьму теорему Абеля, по которой разсматриваемый неопредѣленный интегралъ въ томъ случаѣ, когда онъ выражается въ конечномъ видѣ, можетъ быть приведенъ къ виду:

$$B \log \frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}} + C,$$

гдѣ p и q обозначаютъ полиномы относительно перемѣнной x, а R полиномъ $x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$.

Замѣтимъ, что линейнымъ преобразованіемъ независимой перемѣнной можно упростить нашъ интегралъ. Слѣдуя примѣру П. Л. Чебышева, сдѣлаемъ коэффиціентъ при x^3 въ полиномѣ R равнымъ нулю. Можно также сдѣлать одинъ изъ остальныхъ коэффиціентовъ равнымъ единицѣ, но особенной выгоды отъ этого не будетъ.

Итакъ положимъ:

$$R \equiv x^4 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \tag{1}$$

$$y \equiv \sqrt{R}$$

и станемъ изслѣдовать условія существованія равенства

$$\int \frac{x+A}{y}\, dx = B \log \frac{p+qy}{p-qy} + C, \tag{2}$$

гдѣ C—произвольная постоянная, введенная интегрированіемъ.

Прежде всего мы видимъ, что можно предположить полиномы p и q неимѣющими общаго множителя.

Кромѣ того, можно всегда привести его къ такому виду, при которомъ p и R не имѣютъ общаго множителя.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ $p = R_1 p_1$ и $R = R_1 R_2$, гдѣ R_1 общій множитель полиномовъ p и R, а p_1 и R_2 соотвѣтствующія частныя отъ дѣленія полиномовъ p и R на общаго множителя.

Можно написать равенство (2) въ такомъ видѣ:

$$\int \frac{x+A}{y}\, dx = \frac{B}{2} \log \frac{(p+qy)^2}{(p-qy)^2} + C;$$

но $$(p+qy)^2 = R_1\{p_1{}^2 R_1 + R_2 q^2\} + 2R_1 p_1 q y$$

и $$(p-qy)^2 = R_1\{p_1{}^2 R_1 + R_2 q^2\} - 2R_1 p_1 q y.$$

Полиномы $p_1{}^2R_1+R_2q^2$ и $2p_1q$ не могутъ имѣть общихъ множителей, иначе и полиномы p и q ихъ имѣли бы. Обозначивъ ихъ черезъ p_2 и q_2, можемъ написать равенство:

$$\int\frac{x+A}{y}\,dx=\frac{B}{2}\log\frac{p_2+q_2y}{p_2-q_2y}+C,$$

которое уже удовлетворитъ требуемому условію.

Итакъ мы предполагаемъ, что ни одинъ изъ корней полинома p въ равенствѣ (2) не обращаетъ въ нуль ни полинома q, ни полинома R, а слѣдовательно полиномы p и p^2-q^2R не могутъ имѣть общаго корня.

Обозначимъ черезъ φ отношеніе $\dfrac{p}{q}$ и перепишемъ равенство (2) въ такомъ видѣ:

$$\int\frac{x+A}{y}\,dx=B\log\frac{\varphi+y}{\varphi-y}+C,$$

Беремъ производную отъ обѣихъ частей полученнаго равенства и находимъ въ результатѣ:

$$\frac{x+A}{y}=B\,\frac{2\varphi y'-2y\varphi'}{\varphi^2-y^2}.$$

Но, замѣчая изъ равенства (1), что

$$y^2=R$$
$$2yy'=R',$$

получаемъ:

$$x+A=B\,\frac{\varphi R'-2R\varphi'}{\varphi^2-R}. \tag{3}$$

Такъ какъ $\varphi=\dfrac{p}{q}$, то можно дать полученному равенству такой видъ:

$$\frac{(x+A)q}{p}=\frac{B}{\varphi}\,\frac{\varphi R'-2R\varphi'}{\varphi^2-R}=\frac{B}{\varphi}\,\frac{\varphi R'-2\varphi^2\varphi'+2\varphi^2\varphi'-2\varphi'R}{\varphi^2-R}=$$
$$=2B\frac{\varphi'}{\varphi}-B\,\frac{2\varphi\varphi'-R'}{\varphi^2-R}.$$

Умножая крайнія части этихъ равенствъ на dx и интегрируя, получимъ:

$$\int\frac{(x+A)q}{p}\,dx=2B\log\varphi-B\log(\varphi^2-R)+C.$$

или, въ силу равенства $\varphi = \frac{p}{q}$,

$$\int \frac{(x+A)q}{p}\,dx = 2B\log p - B\log(p^2 - Rq^2) + C. \tag{4}$$

Это равенство показываетъ, что интегралъ отъ раціональной функціи выражается черезъ одни логариѳмы; слѣдовательно знаменатель раціональной функціи не имѣетъ кратныхъ корней и степень ея знаменателя больше степени ея числителя.

Кромѣ того, этотъ интегралъ можетъ имѣть полюсами только нули знаменателя p. Поэтому полиномъ $p^2 - Rq^2$ не можетъ имѣть корней и слѣдовательно представляетъ собой постоянную. Въ самомъ дѣлѣ, пусть величина b будетъ корнемъ полинома $p^2 - Rq^2$; такъ какъ этотъ полиномъ и полиномъ p не имѣютъ на основаніи сдѣланныхъ предположеній общихъ корней, то результатъ подстановки $x=b$ въ равенство (4) обратитъ въ безконечность только одинъ членъ $\log(p^2 - Rq^2)$; а это очевидно не возможно безъ нарушенія равенства.

Слѣдовательно можно положить

$$p^2 - Rq^2 = L, \tag{5}$$

гдѣ L постоянная.

Итакъ мы нашли, что если интегралъ, стоящій въ лѣвой части равенства (2), приводимъ, то полиномъ R такого характера, что для него возможно тождество (5). Покажемъ, что это условіе необходимое и достаточное.

Предположимъ слѣдовательно существованіе тождества (5).

Обозначимъ черезъ n степень полинома p. Тогда, какъ показываетъ равенство (5), q должно быть полиномомъ степени $n-2$.

Можно принять коэффиціенты при x^n въ полиномѣ p и при x^{n-2} въ полиномѣ q равными единицѣ. Тогда, если a будетъ коэффиціентомъ при x^{n-1} въ полиномѣ p, то благодаря отсутствію члена съ x^3 въ полиномѣ R, и коэффиціентъ при x^{n-3} въ полиномѣ q также будетъ равенъ a.

Беремъ производную отъ обѣихъ частей тождества (5) и получаемъ такой результатъ:

$$2pp' - R'q^2 - 2Rqq' = 0, \tag{6}$$

изъ котораго видно, что полиномъ q дѣлитъ произведеніе полиномовъ pp'. Но полиномы p и q не имѣютъ общихъ множителей, слѣдовательно полиномъ p' дѣлится на полиномъ q нацѣло. Частнымъ отъ этого дѣленія будетъ линейная функція, такъ какъ порядокъ полинома p' будетъ на единицу больше порядка полинома q. Это частное легко опредѣлить, такъ какъ первые два старшихъ члена полиномовъ p и q намъ извѣстны, и оно равно $nx - a$. Итакъ имѣемъ

$$p' = n\left(x - \frac{a}{n}\right) q \tag{7}$$

Подставляя значеніе полинома (1) въ равенство (6), получаемъ:

$$2n\left(x - \frac{a}{n}\right)p = R'q + 2Rq'. \tag{8}$$

Изъ тождества (5) получаемъ такое равенство:

$$\frac{1}{y} = \frac{q}{\sqrt{p^2 - L}}.$$

Умножая обѣ части этого равенства на $\left(x - \frac{a}{n}\right)dx$ и принимая во вниманіе равенство (7), получаемъ:

$$\frac{\left(x - \frac{a}{n}\right) dx}{y} = \frac{p'dx}{n\sqrt{p^2 - L}}.$$

Интегрируя обѣ части, приходимъ къ равенству:

$$\int \frac{\left(x - \frac{a}{n}\right) dx}{y} = \frac{1}{n}\log\left(p + \sqrt{p^2 - L}\right) + C,$$

которое и доказываетъ наше утвержденіе.

Можно, пользуясь тождествомъ (5) видоизмѣнить лѣвую часть полученнаго равенства и привести ее къ виду лѣвой части равенства (2), а именно:

$$\int \frac{\left(x - \frac{a}{n}\right) dx}{y} = \frac{1}{2n}\log\frac{p + qy}{p - qy} + C.$$

Изъ предыдущаго дѣлаемъ такое заключеніе:

Эллиптическій интегралъ типа

$$\int \frac{(x + A)\, dx}{\sqrt{R}}$$

приводится къ алгебраико-логариѳмическому выраженію, если для полинома R возможно тождество (5).

Тогда постоянная B станетъ равной $\frac{1}{2n}$, гдѣ n степень полинома p, и постоянная A равняется $-\frac{a}{n}$, гдѣ a коэффиціентъ при членѣ x^{n-1} въ полиномѣ p при условіи, что коэффиціентъ при членѣ x^n равенъ единицѣ.

Съ помощью любого изъ равенствъ (5), (7) или (8) убѣдимся, что и коэффиціентъ при степени x^{n-3} полинома q также равняется a.

Полагаемъ полиномъ q въ видѣ ряда:

$$q \equiv x^{n-2} + ax^{n-3} + \sum_{i=2}^{n-2} a_i x^{n-i-2} .$$

Подставляя это значеніе полинома q въ равенство (7), находимъ такое выраженіе для полинома p:

$$p \equiv x^n + ax^{n-1} + \frac{na_2 - a^2}{n-2} x^{n-2} + \sum_{i=3}^{n-2} \frac{na_i - aa_{i-1}}{n-i} x^{n-i} - aa_{n-2} x + a_n ,$$

гдѣ a_n постоянный членъ полинома p.

Эти полиномы должны удовлетворять кромѣ того тождественно условію (8).

Подставивъ ихъ выраженія въ это равенство и собравъ всѣ члены въ одну часть, получимъ полиномъ n—1-го порядка. Коэффиціенты этого полинома линейны относительно коэффиціентовъ $a_j (j=2, 3, 4, \ldots, n-2, n)$.

Обозначимъ черезъ P_{n-i+1} тотъ коэффиціентъ, который находится при степени x^i. Чтобы удовлетворить условію (8), надо, если возможно, выбрать для $n-1$ величинъ такія значенія, при которыхъ всѣ эти коэффиціенты P_{n-i+1} обратятся въ нуль. Поэтому, приравнивая ихъ нулю, получимъ уравненія для опредѣленія величинъ $a, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-3}, a_{n-2}, a_n$ черезъ данныя величины задачи β, γ, δ.

Полученныя уравненія:

$$P_j = 0 \qquad (9)$$

$$j = 2, 3, \ldots, n+1,$$

обладаютъ нѣкоторыми особенностями. О линейности ихъ относительно величинъ a_i уже извѣстно.

Примемъ затѣмъ вѣсъ величинъ a, β, γ, δ соотвѣтственно равнымъ 1, 2, 3, 4, и величинъ a_j равнымъ указателю j. Тогда вѣсъ любого коэффиціента P_i будетъ равенъ показателю i. Отсюда слѣдуетъ, что въ коэффиціентъ P_i не можетъ войти величина a_j, коль скоро $j > i$. Что же касается величины a_i, то она можетъ войти въ P_i умноженной только на постоянный множитель.

Нетрудно опредѣлить его по условію (8). Послѣ простыхъ вычисленій мы получимъ:

$$P_i = 2 . i \frac{2n-i}{n-i} a_i + Q_i ,$$

$$i = 2, 3, \ldots, n-2,$$

гдѣ Q_i обозначаетъ выраженіе, въ которое входятъ только тѣ a_j, у которыхъ указатель $j < i$.

Приравнивая эти коэффиціенты нулю, получимъ рядъ уравненій:

$$2 . i \frac{2n-i}{n-i} a_i + Q_i = 0 \qquad (10)$$

$$i = 2, 3, \ldots, n-2.$$

Такъ какъ

$$Q_2 = -2 \frac{2n-2}{n-2} a^2 - (2n-2) \beta ,$$

то первое изъ уравненій (10) сразу даетъ значеніе для a_2 черезъ a и β. Но ясно, что эти уравненія дадутъ выраженія для любой величины a_k, ($k = 2, 3, \ldots, n-2$). Въ самомъ дѣлѣ, опредѣлитель этихъ уравненій въ виду того, что всѣ его элементы по одну сторону діагонали равны нулю, приводится къ произведенію всѣхъ ея элементовъ, т. е. къ числу

$$2^{n-3} . 2 . 3 . 4 . 5 \ldots (n-2) \frac{(2n-2)(2n-3) \ldots \{n-(n-3)\}}{(n-2)(n-3) \ldots \{n-(n-2)\}}$$

отличному отъ нуля, и потому они разрѣшимы, и a_k ($k = 2, 3, \ldots, n-2$) выразятся въ видѣ полиномовъ относительно величинъ a, β, γ и δ соотвѣтствующаго вѣса k.

Коэффиціентъ P_{n-1} будетъ линейной функціей величинъ $a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}$. Если мы подставимъ въ уравненіе

$$P_{n-1} = 0 ,$$

найденныя для нихъ выраженія, получимъ соотношеніе между величинами a, β, γ, δ. Вѣсъ этого соотношенія будетъ равенъ $n-1$ и его можно написать въ видѣ:

$$\Psi_1 (a, \beta, \gamma, \delta) = 0. \qquad (11)$$

Величина a_n войдетъ линейно въ два остальные коэффиціента P_n и P_{n+1}. Легко убѣдиться въ справедливости равенствъ:

$$P_n = 2na_n + Q_n$$

$$P_{n+1} = -2aa_n + Q_{n+1} ,$$

гдѣ выраженія Q_n и Q_{n+1} будутъ содержать величины $a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}$ линейно. Приравнявъ ихъ нулю, найдемъ безъ труда два условія:

$$a_n = -\frac{1}{2n} Q_n$$

$$aQ_n + nQ_{n+1} = 0.$$

Внося въ эти равенства выраженія величинъ $a_i (i=2, 3, \ldots, n-2)$ черезъ a, β, γ, δ, получимъ такое-же выраженіе для a_n и еще одно соотношеніе между величинами a, β, γ, δ, которое мы обозначимъ черезъ:

$$\Psi_2(a, \beta, \gamma, \delta) = 0; \tag{12}$$

вѣсъ его равенъ $n+1$.

Итакъ мы напишемъ:

$$a_i = Q_i(a, \beta, \gamma, \delta) \tag{13}$$

$$i=2, 3, \ldots, n-3, n-2, n,$$

гдѣ Q_i полиномы относительно величинъ a, β, γ, δ вѣса i. Мы слѣдовательно замѣнили условіе (8) двумя условіями (11) и (12) и формулами (13). Два условія (11) и (12) заключаютъ неизвѣстную величину a. Исключая ее изъ нихъ, получимъ *одно* между данными величинами β, γ, δ. Напишемъ его въ видѣ

$$\Theta_n(\beta, \gamma, \delta) = 0. \tag{14}$$

Такъ какъ вѣса равенствъ (11) и (12) равны соотвѣтственно числамъ $n-1$ и $n+1$, то вѣсъ полученнаго не можетъ быть больше числа n^2-1.

Полученное условіе будетъ достаточнымъ, чтобы существовало тождество (5). Въ самомъ дѣлѣ, при его выполненіи мы найдемъ по крайней мѣрѣ одно значеніе для величины a, которое удовлетворяло бы обоимъ условіямъ (11) и (12). Затѣмъ, вставивъ это значеніе въ формулы (13), найдемъ безъ затрудненія полиномы p и q по значеніямъ величинъ a_i.

Найденные такимъ образомъ полиномы p и q удовлетворятъ уравненіямъ (7) и (8). Легко показать, что можно опредѣлить въ равенствѣ (5) постоянную L такимъ образомъ, что эти полиномы будутъ удовлетворять и ему.

Множимъ равенство (8) на q и въ полученномъ равенствѣ замѣняемъ произведеніе $n(x-\frac{a}{n})q$ черезъ p' согласно условію (7). Получаемъ какъ разъ равенство (6), изъ котораго слѣдуетъ, что производная отъ выраженія p^2-Rq^2 по перемѣнной x равна нулю, и слѣдовательно наши полиномы таковы, что это выраженіе представляетъ собой постоянную. Для ея опредѣленія достаточно, напр., подстановки $x=0$, и получимъ $L=a_n^2-\delta a_{n-2}^2$.

Такимъ образомъ условіе (14) будетъ достаточнымъ, чтобы существовало тождество (5) и чтобы слѣдовательно разсматриваемый нами интегралъ выражался въ конечномъ видѣ.

Замѣтимъ теперь, что нельзя найти болѣе одного значенія для величины a изъ условій (11) и (12), если полиномъ R не имѣетъ кратнаго корня. Въ самомъ дѣлѣ, пусть b_1 и b_2 будутъ два значенія для величины a. Тогда оба интеграла

$$\int \frac{x-\frac{b_1}{n}}{y}\,dx$$

$$\int \frac{x-\frac{b_2}{n}}{y}\,dx$$

будутъ приводимы, а слѣдовательно и ихъ разность; но интегралъ

$$\int \frac{dx}{y}$$

можетъ быть приводимымъ лишь при существованіи кратнаго корня y полинома R.

Если же уравненія (11) и (12), разсматриваемыя, какъ уравненія для величины a, имѣютъ одно рѣшеніе, то по извѣстному свойству алгебраическихъ уравненій общій корень выражается раціонально черезъ ихъ коэффиціенты и въ данномъ случаѣ при ихъ посредствѣ также и черезъ величины β, γ, δ. Другими словами, если разсматриваемый нами интегралъ выражается въ конечномъ видѣ, то величина a выражается раціонально черезъ данныя β, γ, δ, въ видѣ частнаго двухъ полиномовъ, въ которомъ вѣсъ числителя будетъ на единицу больше вѣса знаменателя.

Если числитель и знаменатель обратятся въ нуль, то для a не будетъ опредѣленнаго значенія, и полиномъ R долженъ при этомъ имѣть кратный корень. Это замѣчаніе можетъ служить провѣркой правильности опредѣленія величины a черезъ данныя величины β, γ, δ.

Въ предыдущемъ мы изложили алгебраическій пріемъ для вычисленія постоянной $\Theta_n(\beta, \gamma, \delta)$ по данному цѣлому числу n и даннымъ постояннымъ β, γ, δ. Равенство такой постоянной нулю обозначаетъ, какъ мы видѣли, достаточное условіе, чтобы изучаемый нами интегралъ былъ приводимымъ.

Такъ какъ съ другой стороны очевидно, что для того, чтобы разсматриваемый нами интегралъ былъ приводимымъ, необходимо, чтобы по крайней мѣрѣ одна изъ этихъ постоянныхъ обращалась бы въ нуль, то приходимъ къ такой теоремѣ:

Для того, чтобы интегралъ

$$\int \frac{x+A}{y}\, dx$$

при надлежащемъ выборѣ постоянной A *былъ бы приводимъ, необходимо и достаточно равенство нулю одного изъ выраженій* $\Theta_n(\beta, \gamma, \delta)$ $(n = 2, 3, \ldots, \infty)$.

Сравнивая эту теорему съ основной теоремой параграфа 9-го касательно алгебраическаго интегрированія, мы видимъ, что формулировка обѣихъ теоремъ совершенно аналогична; только въ данномъ случаѣ приравнивается нулю одна постоянная, а тамъ рядъ ихъ, представляющихъ собой коэффиціенты одного полинома $\Phi_{np}(x)$.

Разсматриваемый нами случай даетъ поэтому основаніе предполагать, что расчитывать на упрощеніе данныхъ мною необходимыхъ и достаточныхъ условій для существованія алгебраическаго интеграла *по существу* весьма трудно, и можно только надѣяться на ихъ болѣе простое выраженіе и на изслѣдованія условій, при которыхъ обращаются въ нуль постоянныя типа $\Theta_n(\beta, \gamma, \delta)$ и коэффиціентовъ полиномовъ $\Phi_{np}(x)$.

Выводъ необходимаго и достаточнаго условія для приводимости разсматриваемаго интеграла былъ полученъ мною сначала приложеніемъ общей теоріи для разысканія частнаго алгебраическаго интеграла порядка n. Въ самомъ дѣлѣ, равенство (3) представляетъ собой ничто иное, какъ алгебраическое уравненіе (типа обобщеннаго уравненія Рикати), обладающее частнымъ алгебраическимъ интеграломъ

$$q\varphi - p = 0$$

Я преобразовалъ уравненіе (3) къ однороднымъ перемѣннымъ и опредѣлялъ соотвѣтствующее значеніе полинома K, а отсюда и самый частный интегралъ, принимая во вниманіе, что онъ линейный относительно перемѣнной φ.

Я позволилъ себѣ замѣнить здѣсь этотъ выводъ только—что изложеннымъ, такъ какъ тѣ-же результаты, но полученные другимъ путемъ больше могутъ поддержать значеніе выдвинутой теоріи, чѣмъ перевычисленіе примѣра.

Замѣчу, что возможно дальнѣйшее изслѣдованіе выраженія $\Theta_n(\beta, \gamma, \delta)$.

Въ самомъ дѣлѣ, взявъ въ равенствѣ

$$\int \frac{x+A}{y}\,dx = \frac{1}{2n}\log\frac{p+qy}{p-qy} + C$$

вмѣсто неопредѣленнаго интеграла исчезающій, мы получимъ тождество, въ правой части котораго постоянная C пріобрѣтаетъ опредѣленное значеніе.

Само собой разумѣется, что въ этомъ тождествѣ $A = -\frac{a}{n}$ и постоянныя a, β, γ, δ связаны условіями (11) и (12). Двѣ изъ этихъ величинъ можно считать совершенно произвольными, остальныя двѣ можно разсматривать, какъ ихъ функціи. Предположимъ поэтому напр., что помощью условія (14) δ выражено въ видѣ функціи величинъ β и γ. (Предположеніе, что въ это условіе не входитъ величина δ, надо разсматривать особо). Тогда и величина a, и слѣдовательно и A, и всѣ коэффиціенты полиномовъ p и q выразятся въ функціи величинъ β и γ.

Если возьмемъ производную отъ обѣихъ частей полученнаго тождества послѣдовательно по β и γ, разсматривая ихъ, какъ независимыя перемѣнныя, получимъ два новыхъ:

$$\int_b^x \frac{2\frac{\partial A}{\partial \beta}R - (x+A)\left(x^2 + \frac{\partial \delta}{\partial \beta}\right)}{2Ry}\,dx = S$$

и

$$\int_b^x \frac{2\frac{\partial A}{\partial \gamma}R - (x+A)\left(x + \frac{\partial \delta}{\partial \gamma}\right)}{2Ry}\,dx = S_1,$$

гдѣ вторыя части представляютъ алгебраическія функціи x. Это показываетъ, что интегралы, находящіеся въ лѣвой части, приводятся къ алгебраическимъ функціямъ. Для этого необходимо и достаточно, чтобы между

$$\frac{\partial A}{\partial \beta},\ A,\ \frac{\partial \delta}{\partial \beta},\ \beta,\ \gamma,\ \delta$$

въ первомъ случаѣ существовало два простыхъ алгебраическихъ соотношенія. Точно также подобныя соотношенія должны существовать и во второмъ случаѣ между

$$\frac{\partial A}{\partial \gamma},\ \frac{\partial \delta}{\partial \gamma},\ A,\ \beta,\ \gamma,\ \delta.$$

Полученныя условія можно разсматривать какъ дифференціальныя уравненія, опредѣляющія A и δ въ функціи величинъ β и γ.

Обратимъ вниманіе на то, что эти уравненія не зависятъ отъ числа n, и слѣдовательно оно можетъ войти только при посредствѣ постоянныхъ интеграціи. Поэтому же условія (11) и (12) дадутъ рядъ частныхъ интеграловъ этихъ уравненій, что конечно облегчитъ интегрированіе. А разъ дано будетъ общее выраженіе δ въ функціи величинъ β и γ, весь вопросъ сведется къ изслѣдованію числовыхъ функцій, которыя представляютъ собой постоянныя интеграціи.

Съ приведеніемъ разсматриваемаго интеграла связаны и другія важныя задачи.

Представимъ тождество (5) въ такомъ видѣ:

$$(p+\sqrt{L})(p-\sqrt{L})=Rq^2$$

и предположимъ, что не существуетъ такого тождества съ порядкомъ полинома p меньшимъ n.

Два полинома $p+\sqrt{L}$ и $p-\sqrt{L}$ не имѣютъ общихъ множителей: поэтому можно написать:

$$\begin{aligned} p+\sqrt{L} &= R_1 q_1^2 \\ p-\sqrt{L} &= R_2 q_2^2, \end{aligned} \tag{15}$$

гдѣ $R_1 R_2 = R$, а $q_1 q_2 = q$.

Ни одинъ изъ множителей R_1 и R_2 не можетъ приводиться къ постоянной. Пусть, напр., R_1 постоянная, можно принять ее равной единицѣ, и получимъ:

$$2\sqrt{L}=q_1^2-Rq_2^2,$$

тождество, которое по предположенію не можетъ существовать.

Слѣдовательно по условіямъ (15) полиномы $p+\sqrt{L}$ и R будутъ имѣть общаго множителя степени меньше 4. Полиномъ R оказывается приводимымъ [1]), если къ области раціональности его коэффиціентовъ β, γ, δ прибавить квадратный радикалъ $\sqrt{a_n^2-\delta a_{n-2}^2}$.

Здѣсь не достаетъ обратнаго изслѣдованія, которое отвѣтило бы на вопросъ, влечетъ ли за собой приводимость полинома R при помощи извлеченія квадратнаго корня существованіе тождества (5).

Съ вопросомъ о подобной приводимости можетъ быть связана задача о возможности построить точки пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій помощью циркуля и линейки. Сюда же относится особенно важное для практики *приближенное* построеніе ихъ помощью циркуля и линейки.

Сюда же относится любопытный вопросъ о приближенномъ вычисленіи эллиптическихъ интеграловъ съ помощью логариѳмовъ.

---

[1]) И. Пташицкій. Объ интегрированіи въ конечномъ видѣ эллиптическихъ дифференціаловъ, стр. 62.

§ 12. О системѣ, всѣ особенныя точки которой опредѣляются раціонально.

Дѣло идетъ о системѣ:

$$\frac{dx_1}{x_1 X_1} = \frac{dx_2}{x_2 X_2} = \frac{dx_3}{x_3 X_3} = \ldots = \frac{dx_p}{x_p X_p} \tag{1}$$

въ которой функціи X_j линейныя, однородныя выраженія въ перемѣнныхъ x_i $(i=1, 2, 3, \ldots, p)$ и независящія отъ перемѣнной x_j.

Можно слѣдовательно положить:

$$X_j = \sum_{i=1}^{p} b_{ji}\, x_i$$

$$j=1, 2, 3, \ldots, p$$

при добавочномъ условіи

$$b_{ii} = 0$$

$$i=1, 2, 3, \ldots, p.$$

Такимъ образомъ эти уравненія будутъ зависѣть отъ $p(p-1)$ параметровъ.

Особенныя точки системы опредѣляются слѣдующими уравненіями:

$$x_j X_j = \lambda x_j,$$

$$j=1, 2, \ldots, p.$$

которымъ можно дать слѣдующій видъ:

$$x_j (X_j - \lambda) = 0 \tag{2}$$

$$j=1, 2, \ldots, p.$$

Такъ какъ для существованія равенства (2) достаточно, чтобы только одинъ изъ множителей каждаго равенства обращался въ нуль, то эта алгебраическая система уравненій распадается на 2^p линейныхъ системъ, которыя получимъ, приравнявъ нулю въ $k(k=1, 2, \ldots, p)$ изъ этихъ равенствъ первые множители, а въ остальныхъ вторые множители.

Изъ этихъ системъ только одна

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_p = 0$$

не даетъ особенной точки. Слѣдовательно въ томъ случаѣ когда всѣ особенныя точки различны, ихъ будетъ $2^p - 1$, такъ какъ каждая система линейныхъ уравненій опредѣлитъ только одну особенную точку.

Вопросъ о совпаденіи этихъ точекъ можетъ быть рѣшенъ при помощи матриссы (5) параграфа 4.

Во всякомъ случаѣ p точекъ $B_j(j=1, 2, \ldots, p)$, опредѣляемыхъ значеніями

$$\begin{gathered} x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_{j-1} = 0 \\ x_j = 1 \\ x_{j+1} = x_{j+2} = \ldots = x_p = 0 \\ j = 1, 2, \ldots, p. \end{gathered} \tag{3}$$

будутъ существовать для любой дифференціальной системы разсматриваемаго типа, и можно выбрать эту группу точекъ для опредѣленія полинома K.

Если обозначимъ, какъ и прежде, операцію

$$\sum_{i=1}^{p} x_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

черезъ X, то тождество, опредѣляющее частный алгебраическій интегралъ, напишется такъ:

$$Xf = Kf. \tag{4}$$

Полиномы X_i— второй степени, поэтому полиномъ K будетъ линейнымъ и будетъ заключать только p неизвѣстныхъ коэффиціентовъ. Слѣдовательно по теоріи, изложенной въ первыхъ четырехъ параграфахъ, достаточно взять группу p различныхъ особенныхъ точекъ.
Только что разсмотрѣнныя точки B_j не могутъ всѣ обращать въ нуль одну и ту-же линейную функцію. Беремъ ихъ поэтому для опредѣленія этого полинома.

Положимъ сначала

$$K = \sum_{i=1}^{p} b_i x_i.$$

Результатъ непосредственной подстановки въ этотъ полиномъ вмѣсто перемѣнныхъ x_i значеній, опредѣляющихъ точку B_j, будетъ равенъ b_j, т. е. коэффиціенту при перемѣнной x_j. Съ другой стороны, по параграфу 3-му, этотъ результатъ выразится черезъ величины λ_j, λ_{ji} и цѣлыя числа по формулѣ:

$$(K)_j = (n - k_j)\lambda_j + k_{j1} m \lambda_j + \sum_{i=2}^{q} k_{ji} \lambda_{ji}. \tag{5}$$

Найдемъ сначала λ_j.

Подстановка значеній перемѣнныхъ, опредѣляющихъ особенную точку B_j, въ уравненія (2) обратитъ ихъ всѣ въ нуль кромѣ одного, которое приметъ видъ:

$$\lambda = 0 .$$

Отсюда заключаемъ, что λ_j равно нулю для любого значенія индекса j.

Для опредѣленія же величинъ λ_{ji} надо составить характеристическое уравненіе для касательнаго коннекса въ особенной точкѣ B_j.

Сначала напишемъ его въ общемъ видѣ:

$$\begin{vmatrix} X_1-\lambda & b_{12}x_1 & \ldots & b_{1j}x_1 & \ldots & b_{1p}x_1 \\ b_{21}x_2 & X_2-\lambda & \ldots & b_{2j}x_2 & \ldots & b_{2p}x_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{j1}x_j & b_{j2}x_j & \ldots & X_j-\lambda & \ldots & b_{jp}x_j \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{p1}x_p & b_{p2}x_p & \ldots & b_{pj}x_p & \ldots & X_p-\lambda \end{vmatrix} = 0 . \tag{6}$$

Подстановка же, о которой мы только что говорили, превратитъ его въ виду значенія полиномовъ X_j въ такое:

$$(b_{1j}-\lambda)(b_{2j}-\lambda)(b_{3j}-\lambda)\ldots(b_{jj}-\lambda)\ldots(b_{p-1,j}-\lambda)(b_{pj}-\lambda) = 0 , \tag{7}$$

при этомъ не надо забывать, что b_{jj} величина равная нулю и введена лишь ради упрощенія формулъ. Полученное уравненіе показываетъ, что искомыя величины λ_{ji} — коэффиціенты въ полиномахъ X_i при перемѣнной x_j. Такъ какъ λ_j равно нулю, то первые два члена въ формулѣ (5) будутъ въ данномъ случаѣ равны нулю, а остальную часть мы получимъ, умноживъ корни уравненія (7) на цѣлыя и неотрицательныя числа и сложивъ результаты. Такимъ образомъ получаемъ:

$$(K)_j = \sum_{i=1}^{p} k_{ji}\, b_{ij} ,$$

гдѣ k_{ji} обозначаютъ цѣлыя неотрицательныя числа, а числа k_{jj} всегда равны нулю. Вмѣсто этой формулы можемъ написать:

$$b_j = \sum_{i=1}^{p} k_{ji}\, b_{ij} .$$

Умноживъ эту формулу на x_j и суммируя отъ 1 до p включительно обѣ части полученнаго равенства, найдемъ такое выраженіе для полинома K:

$$K = \sum_{i=}^{p} b_j x_j = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{p} k_{ji}\, b_{ij}\, x_j. \tag{8}$$

Напомнимъ, что согласно параграфу (3) неотрицательныя числа k_{ji} удовлетворяютъ нѣкоторымъ условіямъ, которыя въ данномъ случаѣ можно выразить слѣдующими неравенствами:

$$\sum_{i=1}^{p} k_{ji} \leq k_j$$

$$j = 1, 2, 3, \ldots, p.$$

и

$$k_j \leq n$$

$$j = 1, 2, 3, \ldots, p,$$

гдѣ n—порядокъ частнаго алгебраическаго интеграла, для котораго опредѣляется полиномъ K.

Такимъ образомъ, взятая нами система (1) обладаетъ тѣмъ замѣчательнымъ свойствомъ, что полиномы K, отвѣчающіе частнымъ интеграламъ этой системы, составляются линейно изъ коэффиціентовъ этой системы.

Такъ какъ изъ разсужденій параграфа 5-го слѣдуетъ, что коэффиціенты частнаго алгебраическаго интеграла выражаются раціонально черезъ коэффиціенты системы и ирраціональности λ и λ_{ji}, то въ данномъ случаѣ всѣ коэффиціенты любого частнаго интеграла выражаются раціонально черезъ коэффиціенты системы (1).

Эта система обладаетъ p очевидными частными линейными интегралами x_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$. Соотвѣтствующими имъ полиномами K будутъ функціи X_j $(j = 1, 2, 3, \ldots, p)$, которыя заключаются, какъ и слѣдовало ожидать, въ формулѣ (8).

Кромѣ того она имѣетъ упомянутый въ параграфѣ 8-мъ видъ, даваемый системѣ для упрощенія вычисленія частныхъ алгебраическихъ интеграловъ n-го порядка. Въ данномъ случаѣ каждый изъ знаменателей, на которые въ системѣ (1) дѣлятся дифференціалы, имѣетъ множителемъ соотвѣтствующую перемѣнную, и слѣдовательно по изложеннымъ въ параграфѣ 8-мъ пріемамъ можно, не зная всего частнаго интеграла, вычислять ту его часть, которая зависитъ отъ любой данной группы перемѣнныхъ, т. е. можно разыскивать ту часть частнаго интеграла, которая останется, если положить въ ней всѣ остальныя перемѣнныя равными нулю. Можно начать съ опредѣленія частнаго интеграла только для системы двухъ перемѣнныхъ и увеличивать число перемѣнныхъ последовательно, пока не дойдемъ до полнаго числа перемѣнныхъ.

Прежде чѣмъ примѣнить сдѣланныя замѣчанія, остановимся на слѣдующей задачѣ.

Дано уравненіе
$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = Kf + U, \tag{9}$$

гдѣ X_i, K и U обозначаютъ собой данные полиномы соотвѣтственно m-го, m—1-го и $n+m$—1-го порядка. Требуется найти полиномъ f n-го порядка, удовлетворяющій этому уравненію.

Общее теоретическое рѣшеніе этого вопроса очень просто: стоитъ только подставить въ это уравненіе вмѣсто полинома f самый общій полиномъ f n-го порядка съ неопредѣленными коэффиціентами. Произведя указанныя дѣйствія и собравъ всѣ члены въ одну часть, получимъ полиномъ; приравнивая коэффиціенты его нулю, получимъ рядъ линейныхъ уравненій для опредѣленія искомыхъ коэффиціентовъ полинома f. Число такихъ уравненій будетъ вообще больше, чѣмъ перемѣнныхъ, и слѣдовательно данныя въ задачѣ должны удовлетворять нѣкоторымъ условіямъ.

Употребимъ слѣдующій пріемъ, чтобы выяснить характеръ и число этихъ условій.

Обозначимъ черезъ B_{1i} $(i=1, 2, 3, \ldots, s)$, какъ мы это дѣлали въ параграфѣ 9-мъ, одночлены n-го измѣренія, и слѣдовательно полиномъ f можетъ быть представленъ суммой:

$$f = \sum_{j=1}^{s} C_j B_{1j},$$

гдѣ C_j будутъ обозначать коэффиціенты полинома f.

Подставляя это выраженіе для полинома f въ уравненіе (9) и полагая для краткости

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial B_{1j}}{\partial x_i} - KB_{1j} = E_j, \tag{10}$$

находимъ равенство:

$$\sum_{j=1}^{s} C_j E_j = U. \tag{11}$$

Оно показываетъ, что полиномъ U представляетъ собой линейную комбинацію полиномовъ E_j, полученныхъ изъ одночленовъ B_{1j} помощью операціи, выраженной равенствомъ (10).

Предположимъ сначала, что между этими полиномами нѣтъ линейной зависимости съ постоянными коэффиціентами. Тогда мы видимъ, что полиномъ U порядка $n+m-1$ представляетъ собой линейную комбинацію $s=\binom{p+n-1}{p-1}$ полиномовъ и слѣдовательно можно взять только s коэффиціентовъ его совершенно произвольными; другими словами, между коэффиціентами полинома U должно существовать $\binom{p+m+n-2}{p-1}-\binom{p+n-1}{p-1}$ зависимостей. Очевидно эти зависимости будутъ имѣть линейный характеръ.

Но можетъ случиться, что не всѣ полиномы E_j линейно независимы. Пусть существуетъ между ними q линейныхъ зависимостей. Тогда можно выразить q изъ полиномовъ E_j черезъ всѣ остальные. Внеся эти выраженія въ равенство (11), убѣдимся, что полиномъ U выражается въ видѣ линейной функціи $s-q$ полиномовъ линейно независимыхъ. Слѣдовательно его коэффиціенты для возможности рѣшенія должны быть подчинены $\binom{m+n+p-2}{p-1}+q-\binom{n+p-1}{p-1}$ условіямъ.

Это можно формулировать иначе. Разсмотримъ для этого, къ чему ведетъ существованіе линейнаго соотношенія между полиномами E_j.

Пусть

$$\sum_{j=1}^{s} C_j^{(1)} E_j = 0. \tag{12}$$

одно изъ этихъ соотношеній. Обозначимъ черезъ f_1 полиномъ:

$$\sum_{j=1}^{s} C_j^{(1)} B_{1j}.$$

Множимъ обѣ части равенства (10) на $C_j^{(1)}$ и суммируемъ по j отъ 1 до s включительно. Легко видѣть, что результатъ можно написать въ виду соотношенія (12) въ такой формѣ:

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial f_1}{\partial x_i} = K f_1.$$

Полученное равенство показываетъ, что полиномъ f_1 — частный алгебраическій интегралъ n-го порядка для уравненія

$$\sum X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0, \tag{13}$$

съ даннымъ полиномомъ K.

Значитъ существованіе q условій типа (12) показываетъ, что уравненіе (13) при данномъ полиномѣ K имѣетъ q линейно независимыхъ частныхъ алгебраическихъ интеграловъ порядка n.

Замѣтимъ кромѣ того, что, имѣя полиномъ f_0 рѣшеніемъ уравненія (9), а полиномъ f_1 частнымъ алгебраическимъ интеграломъ указаннаго типа, можемъ составить болѣе общее рѣшеніе уравненія, положивъ $f = f_0 + Cf_1$, гдѣ C совершенно произвольная постоянная.

Этимъ убѣждаемся окончательно, что для возможности рѣшенія вопроса коэффиціенты полинома U должны быть подчинены $\binom{m+n+p-2}{p-1} + q - \binom{n+p-1}{p-1}$ линейнымъ условіямъ, при чемъ q обозначаетъ число частныхъ алгебраическихъ интеграловъ съ даннымъ полиномомъ K, и тогда рѣшеніе будетъ зависѣть линейно отъ q произвольныхъ постоянныхъ.

Особенно интересный результатъ получается для случая $m=1$.

Въ этомъ случаѣ K будетъ постоянной величиной, и всякій разъ, когда она не будетъ имѣть вида, указаннаго формулой (3) параграфа 2-го, наша задача будетъ имѣть *одно опредѣленное рѣшеніе*.

Вернемся теперь къ примѣненію способовъ параграфа 8-го къ интересующей насъ системѣ (1).

Мы не будемъ приводить систему къ виду, при которомъ полиномъ X_p равенъ нулю, и слѣдовательно не можемъ непосредственно воспользоваться формулами (14) параграфа 8; мы имъ дадимъ, разыскивая ихъ непосредственно изъ равенства (4), болѣе удобную для насъ форму.

Сначала разбиваемъ операцію X на сумму слѣдующихъ трехъ:

$$X_p^{(1)} \equiv \sum_{i=1}^{p-1} x_i (X_i - b_{ip} x_p) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$x_p X_p^{(2)} \equiv x_p \sum_{i=1}^{p-1} b_{ip}\, x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

и

$$x_p X_p \frac{\partial}{\partial x_p}.$$

Будемъ, какъ прежде, различать два случая: когда особенная точка B_j не обращаетъ въ нуль полинома f, и когда она представляетъ его k-кратную точку.

Въ первомъ случаѣ надо положить полиномъ f въ видѣ ряда

$$\sum_{i=1}^{p} f_i\, x^i,$$

гдѣ f_i обозначаетъ однородный полиномъ $n-i$-го порядка въ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$, а постоянная f_n не равна нулю. Результатъ подстановки значеній, опредѣляющихъ особенную точку B_p, въ полиномъ K равенъ $n\lambda_p$, т. е. нулю, такъ какъ всѣ λ_j равны нулю. Коэффиціентъ b_p будетъ нулемъ, и слѣдовательно K будетъ линейной функціей однихъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{p-1}$.

Подставляемъ взятыя нами выраженія въ равенство (4). Оно приметъ слѣдующій видъ:

$$\left\{X_p^{(1)} + x_p X_p^{(2)} + x_p X_p \frac{\partial}{\partial x_p}\right\} \sum_{i=0}^{n} f_i x_p^i = K \sum_{i=0}^{n} f_i x_p^i .$$

Это равенство должно быть справедливо при всѣхъ значеніяхъ перемѣнной x_p и слѣдовательно приводится къ $n+1$ равенствамъ:

$$\begin{aligned} X_p^{(1)} f_0 &= K f_0 \\ X_p^{(1)} f_g &= (K - gX_g) f_g - X_p^{(2)} f_{g-1} \\ & \quad g = 1, 2, \ldots, n-1 \\ 0 &= (K - nX_p) f_n - X_p^{(2)} f_{n-1} \end{aligned} \tag{15}$$

Въ полученныя равенства входятъ двѣ дифференціальныя операціи $X_p^{(1)}$ и $X_p^{(2)}$. Первая изъ нихъ отличается совершенно такимъ же характеромъ, какъ и операція X, только зависитъ отъ числа коэффиціентовъ на единицу меньшаго. Порядокъ же ихъ относительно перемѣнныхъ x_i соотвѣтственно равняется 2 и 1.

Можно разсматривать полученный рядъ равенствъ относительно какъ первой, такъ и второй операціи, какъ рядъ послѣдовательныхъ уравненій типа (9).

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что намъ удалось опредѣлить по первому изъ уравненій (15) полиномы K и f_0. Тогда, подставивъ полученное значеніе этихъ полиномовъ въ слѣдующее уравненіе, получимъ равенство.

$$X_p^{(1)} f_1 = (K - X_p) f_1 - X_p^{(2)} f_0 .$$

Въ немъ будетъ оставаться неизвѣстнымъ лишь полиномъ f_1. Слѣдовательно это уравненіе—типа уравненія (9) относительно операціи $X_p^{(1)}$. Опредѣляемъ отсюда полиномъ f_1 и находимъ условія, которымъ долженъ быть подчиненъ полиномъ $X_p^{(2)} f_0$. Подставляемъ полученное значеніе для полинома f_1 въ слѣдующее равенство:

$$X_p^{(1)} f_2 = (K - 2X_p) f_2 - X_p^{(2)} f_1 .$$

Въ немъ опять остается неизвѣстной только одна функція f_2. Это уравненіе также типа (9). Получаемъ изъ него тѣмъ-же порядкомъ полиномъ f_2 и условія, которымъ подчинены коэффиценты полинома $X_p^{(2)} f_1$.

Продолжая такимъ образомъ, найдемъ весь намъ нужный рядъ полиномовъ f_i и рядъ условій, которымъ подчинены полиномы $X_p^{(1)} f_i \, (i=1, 2, \ldots, n-1)$. Въ эти условія будутъ входить цѣлыя неотрицательныя числа, при помощи которыхъ былъ опредѣленъ полиномъ K, коэффиціенты системы (1) и линейно произвольныя постоянныя, входящія при интегрированіи уравненій типа (9).

Предпочтительнѣе однако въ виду большей простоты обратный путь, а именно, разсматривать всѣ уравненія (15) за исключеніемъ перваго, какъ уравненія типа (9), но относительно операціи $X_p^{(2)}$.

Опредѣляемъ сначала по формулѣ (8) полиномъ K. О постоянной f_n мы знаемъ, что она отлична отъ нуля. Можно дать ей безъ вреда для общности значеніе равное единицѣ, и тогда послѣднее уравненіе изъ числа уравненій (15) напишется такъ:

$$X_p^{(2)} f_{n-1} = -nX_p + K.$$

Въ немъ неизвѣстенъ только линейный полиномъ f_{n-1}. Сравнивая его съ уравненіемъ (9), мы видимъ, что оно принадлежитъ къ его типу, но относительно операціи $X_p^{(2)}$. Отсюда мы можемъ опредѣлить полиномъ f_{n-1} и получить въ извѣстныхъ случаяхъ соотношенія между коэффиціентами полинома $nX_p - K$.

Разсмотримъ затѣмъ общій случай. Напишемъ одно изъ уравненій (15) въ слѣдующемъ видѣ:

$$X_p^{(2)} f_{g-1} = (-gX_p + K) f_g - X_p^{(1)} f_g. \tag{16}$$

Если намъ извѣстенъ полиномъ f_g, мы, подставивъ его въ это уравненіе, будемъ имѣть въ немъ неизвѣстнымъ только одинъ полиномъ f_{g-1}. Это уравненіе войдетъ тогда въ типъ уравненій (9) относительно операціи $X_p^{(2)}$. Мы уже видѣли, что возможно опредѣлить полиномъ f_{n-1}. Положивъ въ уравненіи (16) $g=n-1$, мы опредѣлимъ полиномъ f_{n-2}. Принявъ же $g=n-2$, найдемъ полиномъ f_{n-3}. Продолжая такимъ образомъ, получимъ наконецъ и полиномъ f_0.

Такимъ образомъ всѣ уравненія (15) безъ перваго даютъ возможность опредѣлить всѣ полиномы f_i при помощи операціи $X_p^{(2)}$.

При выполненіи этого опредѣленія въ эти полиномы можетъ войти извѣстное число произвольныхъ постоянныхъ, и мы получимъ столько же соотношеній между ними, неотрицательными числами, послужившими для опредѣленія полинома K, и коэффиціентами системы (1). Надо замѣтить что произвольныя постоянныя, вошедшія въ полиномъ f_0 при интеграціи послѣдняго уравненія

$$X_p^{(2)} f_0 = (-X_p + K) f_1 - X_p^{(1)} f_1$$

не войдутъ въ эти соотношенія.

Теперь остается только подставить полиномъ f_0 въ первое изъ уравненій (15)

$$X_p^{(1)} f_0 = K f_0 .$$

Оно дастъ намъ остальныя условія, которыя окончательно разрѣшатъ вопросъ.

Къ этому нужно добавить, что интегрировать уравненіе

$$X_p^{(2)} \varphi = U$$

очень просто.

Пусть $B_{1i}\,(i=1,\ 2, \ldots, s_1)$ тѣ изъ одночленовъ n-го измѣренія, которые не зависятъ отъ перемѣнной x_p.

Положимъ

$$U = \sum_{i=1}^{s_1} C_i\, B_{1i} \tag{17}$$

Рѣшимъ сначала рядъ уравненій:

$$X_p^{(2)} \varphi_i = B_{1i}$$
$$i = 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ s_1.$$

Станемъ рѣшать эти уравненія общимъ путемъ, который указанъ для уравненій типа (9). Беремъ одночленъ B_{1i} и опредѣляемъ при помощи операціи $X_p^{(2)}$ соотвѣтствующій полиномъ E_i . Представляемъ его въ слѣдующемъ видѣ:

$$B_{1i} \equiv \prod_{g=1}^{p-1} x_g^{k_{ig}},$$

гдѣ k_{ig} — цѣлыя неотрицательныя числа, удовлетворяющія условію:

$$\sum_{g=1}^{p-1} k_{ig} = n .$$

Беремъ отъ него производную по перемѣнной x_j, получаемъ въ результатѣ:

$$\frac{\partial B_{1i}}{\partial x_j} = \frac{k_{ij}}{x_j} \prod_{g=1}^{p-1} x_g^{k_{ig}} = \frac{k_{ij}}{x_j} B_{1i} .$$

Множимъ обѣ части этого равенства на $b_{jp} x_j$ и суммируемъ отъ 1 до p—1 включительно; въ результатѣ получаемъ равенство:

$$\sum_{j=1}^{p-1} b_{jp}\, x_j \frac{\partial B_{1i}}{\partial x_j} = B_{1i} \sum_{j=1}^{p-1} k_{ij}\, b_{jp} ,$$

или

$$X_p^{(2)} B_{1i} = B_{1i}\, l_i\,,$$

гдѣ мы положимъ

$$l_i = \sum_{j=1}^{p-1} k_{ij}\, b_{jp}\,.$$

Итакъ результатъ операціи $X_p^{(2)}$ надъ одночленомъ B_{1i} равенъ этому же одночлену, умноженному на постоянную l_i. Предположимъ сначала, что ни одно изъ выраженій l_i не равно нулю. Тогда можно написать:

$$X_p^{(2)} \frac{B_{1i}}{l_i} = B_{1i}\,.$$

Множимъ обѣ части этого равенства на C_i, суммируемъ отъ 1 до s_1 включительно и находимъ въ результатѣ:

$$X_p^{(2)} \sum_{i=1}^{s_1} C_i \frac{B_{1i}}{l_i} = \sum_{i=1}^{s_1} C_i\, B_{1i} \qquad (18)$$

Эта формула опредѣляетъ вполнѣ полиномъ φ по данному U, когда ни одно изъ выраженій l_i не равно нулю.

Если же l_i равно нулю, то

$$X_p^{(2)} B_{1i} = 0\,;$$

т. е. одночленъ B_{1i} будетъ интеграломъ дифференціальнаго уравненія въ частныхъ производныхъ

$$X_p^{(2)}\, z = 0\,, \qquad (19)$$

Очевидно, что, если въ полиномѣ U коэффиціентъ при такомъ одночленѣ не равенъ нулю, то нельзя опредѣлить соотвѣтствующаго полинома φ. Итакъ для возможности задачи необходимо и достаточно, чтобы полиномъ U не имѣлъ такихъ одночленовъ, которые были бы интегралами уравненія (19). Рѣшеніе же получится по формулѣ (18), надо только добавить къ нему всѣ одночлены, которые будутъ интегралами уравненія (19), съ совершенно произвольными коэффиціентами.

Если напр. всѣ величины b_{ip} одного знака, то послѣдовательное опредѣленіе полиномовъ f_j будетъ всегда давать опредѣленный результатъ, не заключающій произвольной постоянной.

Переходимъ теперь ко второму случаю, когда точка B_p представляетъ собой k-кратную точку полинома f. Въ этомъ случаѣ его можно написать въ видѣ такой суммы

$$f \equiv \sum_{i=1}^{n-k} f_i x_p^i,$$

гдѣ f_i обозначаютъ однородные полиномы однихъ перемѣнныхъ x_i $(i=1, 2, \ldots, p-1)$ порядка $n-k$.

На этотъ разъ коэффиціентъ при x_p въ полиномѣ K можетъ быть отличенъ отъ нуля, и мы должны написать $K_0 + b_p x_p$, подразумѣвая, что полиномъ K_0 не зависитъ отъ перемѣнной x_p.

Представляемъ операцію X, какъ и прежде, въ видѣ суммы трехъ и получаемъ вмѣсто равенства (4) слѣдующее

$$\left\{X_p^{(1)} + x_p X_p^{(2)} + x_p X_p \frac{\partial}{\partial x_p}\right\} \sum_{i=0}^{n-k} f_i x_p^i = (K_0 + b_p x_p) \sum_{i=0}^{n-k} f_i x_p^i.$$

Это равенство должно быть справедливо при всѣхъ значеніяхъ перемѣнной x_p, и потому имѣемъ такой рядъ равенствъ:

$$X_p^{(1)} f_0 = K_0 f_0$$

$$X_p^{(1)} f_g = (K_0 - g X_p) f_g - X_p^{(2)} f_{g-1} + b_p f_{g-1} \qquad (20)$$

$$g = 1, 2, \ldots, n-k$$

$$X_p^{(2)} f_{n-k} = b_p f_{n-k}$$

Полученныя уравненія аналогичны уравненіямъ (15). Они—типа уравненій (9) для обѣихъ операцій $X_p^{(1)}$ и $X_p^{(2)}$. Если мы начнемъ съ перваго уравненія, то наши вычисленія будутъ совершенно аналогичны прежнимъ.

Но при примѣненіи второго пріема необходимо дополненіе въ видѣ интегрированія послѣдняго уравненія.

Выпишемъ его здѣсь отдѣльно:

$$X_p^{(2)} f_{n-k} = b_p f_{n-k}.$$

Оно показываетъ, что полиномъ f_{n-k} k-го порядка—частный алгебраическій интегралъ уравненія (19).

Для рѣшенія этого вопроса мы воспользуемся теоріей полиномовъ, заключающихъ въ видѣ множителя частные алгебраическіе интегралы, изложенной въ параграфѣ 6-мъ.

Обозначимъ черезъ G_j $(j = 1, 2, \ldots, s_2)$ одночлены k-го измѣренія, составленные изъ перемѣнныхъ x_i $(i=1, 2, \ldots, p-1)$, гдѣ $s_2 = \binom{p+k-2}{p-2}$.

Мы только что видѣли, что результатъ операціи $X_p^{(2)}$ надъ одночленомъ равенъ ему же, но умноженному на постоянный множитель, составленный при помощи показателей перемѣнныхъ въ этомъ одночленѣ и величинъ b_{ip}. Обозначимъ такую постоянную, соотвѣтстствующую одночлену G_{1j} черезъ l_j и слѣдовательно пишемъ:

$$X_p^{(2)} G_j = l_j G_j \tag{21}$$

Примѣняя операцію $X_p^{(2)}$ еще разъ, получимъ $l_j G_{1j}$ и вообще послѣ r-кратнаго примѣненія операціи $X_p^{(2)}$ надъ одночленомъ G_j получимъ $l_j^r G_j$.

Принявъ все это во вниманіе, мы можемъ написать полиномъ, заключающій всѣ частные алгебраическіе интегралы k-го порядка въ видѣ опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix} G_1 & G_2 & G_3 & \ldots & G_{s_2} \\ l_1 G_1 & l_2 G_2 & l_3 G_3 & \ldots & l_{s_2} G_{s_2} \\ l_1^2 G_1 & l_2^2 G_2 & l_3^2 G_3 & \ldots & l_{s_2}^2 G_{s_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_1^{s_2-1} G_1 & l_2^{s_2-1} G_2 & l_3^{s_2-1} G_3 & \ldots & l_{s_2}^{s_2-1} G_{s_2} \end{vmatrix}$$

Полученный опредѣлитель равенъ произведенію всѣхъ одночленовъ G_j на опредѣлитель Вандермонда, составленный изъ величинъ l_j $(j = 1\,,\ 2\,, \ldots, s_2)$. Поэтому всякій разъ, когда между этими величинами нѣтъ двухъ равныхъ, этотъ полиномъ не можетъ заключать иныхъ множителей, кромѣ произведенія этихъ перемѣнныхъ. Итакъ, если между l_j нѣтъ равныхъ, то частнымъ алгебраическимъ интеграломъ k-го порядка можетъ быть только одночленъ и притомъ любой G_j. Соотвѣтствующимъ значеніемъ для постоянной b_p будетъ l_j. Если же между постоянными l_j есть по нѣскольку равныхъ, то прежде всего убѣждаемся по параграфу 9-му, что существуетъ алгебраическій интегралъ въ видѣ частнаго (въ данномъ случаѣ) двухъ одночленовъ. Простой анализъ выясняетъ, что при равенствѣ ϱ постоянныхъ l_j, отвѣчающихъ ϱ одночленамъ, уравненіе

$$X_p^{(2)} f_{n-k} = l_j f_{n-k}$$

будетъ имѣть интеграломъ сумму этихъ одночленовъ, умноженныхъ на произвольные множители.

Мы остановились нѣсколько дольше, чѣмъ слѣдуетъ, на интегрированіи послѣдняго изъ уравненій (20), чтобы дать примѣръ на непосредственное примѣненіе теоріи полиномовъ $\Phi_{np}(x)$.

Дальнѣйшее опредѣленіе полиномовъ $f_{n-k-1}\,,\ f_{n-k-2}\,, \ldots, f_0$ производится, какъ и въ первомъ случаѣ.

Въ томъ и другомъ случаѣ полиномы f_n, $f_{n-1}, \ldots, f_0$ — ничто иное, какъ поляры различныхъ порядковъ отъ полинома f, если мы возьмемъ за полюсъ особенную точку B_p.

Подобный способъ опредѣленія послѣдовательныхъ поляръ представляетъ собой способъ общаго характера, какъ я уже указывалъ въ подстрочномъ примѣчаніи параграфа 10-го. Отсюда, правда, нѣсколько сложнымъ путемъ можно вывести нѣсколько слѣдствій, которыя по меньшей мѣрѣ любопытны.

Такъ, мы видѣли въ параграфѣ 9-мъ, что для существованія алгебраическаго интеграла порядка n, необходимо существованіе частнаго алгебраическаго интеграла порядка n, заключающаго линейно произвольную постоянную.

Съ другой стороны, при вычисленіи полинома f по уравненіямъ (15) или (20) произвольная постоянная можетъ войти въ рѣшеніе только въ силу особенностей уравненія:

$$X_p^{(2)} z = 0.$$

Поэтому приходимъ къ такой теоремѣ:

Система (1) не можетъ имѣть алгебраическаго интеграла порядка n безъ того, чтобы каждое изъ уравненій

$$\sum_{i=1}^{p} b_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0,$$

$$j = 1, 2, 3, \ldots, p,$$

имѣло либо интегралъ въ видѣ одночлена измѣренія не большаго n, либо частный алгебраическій интегралъ порядка n, зависящій линейно отъ произвольной постоянной.

Эта теорема отличается впрочемъ общимъ характеромъ и можетъ быть распространена и на остальныя уравненія касательныхъ коннексовъ въ остальныхъ особенныхъ точкахъ системы (1).

Эта же теорема годится для касательныхъ линейныхъ коннексовъ въ особенныхъ точкахъ любой системы. Но я не буду останавливаться на доказательствѣ, такъ какъ для этого потребовались бы предварительныя изслѣдованія случая кратныхъ корней характеристическаго уравненія касательнаго коннекса и вліянія ихъ на интегрированіе уравненій типа (9).

Какъ ни элементарны указанные пріемы, но при надлежащемъ примѣненіи они могутъ дать любопытные результаты.

Остановимся нѣсколько подробнѣе на слѣдующемъ примѣрѣ:

Требуется найти всѣ частные алгебраическіе интегралы для системы (1) при $p = 3$, не обращающіеся въ нуль для особенныхъ точекъ B_1, B_2, B_3.

Положимъ степень такого полинома равной n. Обозначимъ коэффиціенты при степеняхъ x_i^n соотвѣтственно черезъ l_i.

Вычисляемъ сначала полиномъ K. Мы знаемъ, что по параграфу 3-му подстановка въ этотъ полиномъ значеній, опредѣляющихъ особенную точку B_j, дастъ $n\lambda_j$; но величина λ_j, какъ мы видѣли раньше, равна нулю, и слѣдовательно въ этомъ случаѣ и самъ полиномъ K равенъ нулю.

Поэтому искомый полиномъ f тождественно удовлетворяетъ условію:

$$\sum_{i=1}^{3} x_i X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \tag{22}$$

Положивъ въ немъ одну изъ перемѣнныхъ напримѣръ x_3 равной нулю, придемъ къ такому уравненію:

$$x_1 x_2 \left(b_{12} \frac{\partial f}{\partial x_1} + b_{21} \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = 0.$$

Отсюда мы видимъ, что

$$f_0 = l\,(b_{12}x_2 - b_{21}x_1)^n,$$

гдѣ f_0 обозначаетъ результатъ подстановки $x_3 = 0$.

Коэффиціенты $l\,(-b_{21})^n$ и lb_{12}^n представятъ поэтому ничто иное, какъ коэффиціенты l_1 и l_2, и слѣдовательно получаемъ:

$$\frac{(-b_{21})^n}{l_1} = \frac{b_{12}^n}{l_2}.$$

Полагая въ уравненіи (22) послѣдовательно x_1 и x_2 равными нулю, получимъ еще два такихъ равенства:

$$\frac{b_{32}^n}{l_2} = \frac{(-b_{23})^n}{l_3}, \quad \frac{b_{13}^n}{l_3} = \frac{(-b_{31})^n}{l_2}.$$

Исключая изъ трехъ равенствъ l_1, l_2 и l_3, найдемъ

$$(-b_{21}b_{13}b_{32})^n = (b_{12}b_{23}b_{31})^n$$

или

$$b_{21}b_{13}b_{32} = \alpha b_{12}b_{23}b_{31}, \tag{23}$$

гдѣ α удовлетворяетъ уравненію:

$$\alpha^n = (-1)^n.$$

Напишемъ второе изъ уравненій (15) для этого случая:

$$x_1 x_2 \left(b_{12}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + b_{21}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) = -(b_{31}x_1 + b_{32}x_2) f_1 + \\ ln\, u^{n-1}(b_{12}b_{23}x_2 - b_{21}b_{13}x_1), \tag{24}$$

гдѣ положено для краткости $u \equiv b_{12}x_2 - b_{21}x_1$.

Это уравненіе согласно теоріи уравненій типа (9) должно дать одно условіе между постоянными b_{ji}.

Предположимъ сначала, что $f_1 = au^{n-1}$. Тогда уравненіе (24) по подстановкѣ этого значенія для полинома f_1 приведется къ такому

$$u^{n-1}\{-a(b_{31}x_1 + b_{32}x_2) + ln(b_{12}b_{23}x_2 - b_{21}b_{13}x_1)\} = 0.$$

Это равенство заключаетъ единственную постоянную, которую мы можемъ выбрать подходящимъ образомъ. Слѣдовательно между постоянными b_{ji} въ данномъ случаѣ должно имѣть мѣсто соотношеніе:

$$b_{12}b_{23}b_{31} + b_{21}b_{13}b_{32} = 0. \tag{25}$$

Легко убѣдиться при помощи непосредственной подстановки, что линейная функція

$$v \equiv b_{31}b_{21}x_1 - b_{31}b_{12}x_2 - b_{13}b_{21}x_3$$

будетъ частнымъ алгебраическимъ интеграломъ, соотвѣтствующій полиномъ K котораго будетъ равенъ нулю.

Слѣдовательно условіе (25) влечетъ за собой и существованіе частнаго алгебраическаго интеграла искомаго типа, а именно онъ будетъ равняться v^n.

Положимъ теперь

$$f_1 = a x_1^{k_3} u^{n-k_3-1} + u^{n-k_3}\varphi,$$

гдѣ φ нѣкоторый полиномъ k_3—1-го порядка.

По подстановкѣ уравненіе (24) принимаетъ видъ

$$a k_3 b_{12} x_1^{k_3} x_2 u^{n-k_3-1} = -a x_1^{k_3}(b_{31}x_1 + b_{32}x_2) u^{n-k_3-1} + u^{n-k_3}\varphi,$$

гдѣ φ нѣкоторый полиномъ k_3-го порядка.

Полученное равенство показываетъ, что линейная функція $b_{31}x_1 + (b_{32} + k_3 b_{12})x_2$ дѣлится на u. Отсюда получаемъ условіе:

$$k_3 b_{12} b_{21} + b_{32}b_{21} + b_{31}b_{12} = 0. \tag{26}$$

Предполагая, что условіе (25) не имѣетъ мѣста, находимъ еще два аналогичныхъ:

$$\begin{aligned} k_2 b_{13} b_{31} + b_{13} b_{21} + b_{31} b_{23} = 0 \\ k_1 b_{23} b_{32} + b_{23} b_{12} + b_{32} b_{13} = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Въ четыре условія (23), (26), (27) каждая пара постоянныхъ $b_{ij} b_{gj}$ входитъ однородно, поэтому можно исключить ихъ изъ этихъ четырехъ условій, и получимъ соотношеніе между величиной α и цѣлыми положительными числами k_i такого вида:

$$\alpha^2 - (k_1 + k_2 + k_3 - k_1 k_2 k_3)\, \alpha + 1 = 0. \tag{28}$$

Случай $\alpha = -1$ можно исключить, такъ какъ при этомъ условіе (23) совпадаетъ съ условіемъ (25).

Остается только одно дѣйствительное значеніе для α равное 1. Тогда уравненіе (28) дастъ слѣдующее въ цѣлыхъ числахъ большихъ нуля:

$$k_1 k_2 k_3 - k_1 - k_2 - k_3 + 2 = 0.$$

Безъ труда можемъ убѣдиться, что по крайней мѣрѣ одно изъ чиселъ k_i равно 1. Тогда при всѣхъ b_{ij} отличныхъ отъ нуля будемъ имѣть $k_1 = k_2 = k_3 = 1$.

Въ этомъ случаѣ будетъ существовать частный алгебраическій интегралъ въ видѣ степени частнаго же алгебраическаго интеграла 2-го порядка.

Этотъ интегралъ въ иной формѣ, также какъ и отвѣчающій условію (25) даны G. Darboux въ цитированной выше работѣ.

Кромѣ того условіе (28) показываетъ, что α можетъ имѣть только пять мнимыхъ значеній, опредѣляемыхъ уравненіями:

$$\alpha^2 \pm \alpha + 1 = 0$$

$$\alpha^2 + 1 = 0.$$

Не будемъ останавливаться на дальнѣйшемъ изслѣдованіи системы (1).

Въ заключеніе добавимъ только, что прилагаемый методъ позволяетъ между прочимъ доказать и другія интересныя свойства этихъ уравненій.

Въ видѣ примѣра приведу слѣдующую теорему:

Если въ системѣ (1) ни одинъ изъ коэффиціентовъ b_{ij} не равенъ нулю при индексѣ j не равномъ индексу i, то она не можетъ имѣть частнаго алгебраическаго *неодночленнаго* интеграла степени выше второй безъ того, чтобы для любого индекса j всѣ коэффиціенты b_{ij} $(i = 1, 2, 3, \ldots, p)$ не были бы пропорціональны величинамъ, составленнымъ раціонально изъ цѣлыхъ чиселъ и квадратныхъ корней изъ нихъ.

§ 13. Объ одной системѣ дифференціальныхъ уравненій твердаго тѣла, наполненнаго жидкостью.

Въ Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, 2-e série, t. X, p. 271, et 3-e série t. I, p. 1. В. А. Стекловымъ помѣщены два большихъ мемуара, въ которыхъ онъ занимается между прочимъ разыскиваніемъ алгебраическихъ интеграловъ такой дифференціальной системы:

$$\begin{aligned}
\alpha p' &= (\beta-\gamma)\,qr + K(c-b)\,vw + \frac{2Ma(c-b)}{5}\,[c(a-b)\,rv - b(c-a)\,qw] \\
\beta q' &= (\gamma-\alpha)\,pr + K(a-c)\,uw + \frac{2Mb(a-c)}{5}\,[a(b-c)pw - c(a-b)ru] \qquad (1)\\
\gamma r' &= (\alpha-\beta)\,pq + K(b-a)\,uv + \frac{2Mc(b-a)}{5}\,[b(c-a)qu - a(b-c)pv]\,,
\end{aligned}$$

гдѣ

$$K = \frac{2Mabc}{5}.$$

$$\begin{aligned}
(c+a)(a+b)\,u' &= a(b-c)vw + 2a[(a+c)rv - (a+b)qw] \equiv (c+a)(a+b)\,U \\
(a+b)(b+c)\,v' &= b(c-a)uw + 2b[(b+a)pw - (b+c)ru] \equiv (a+b)(b+c)\,V \quad (2)\\
(b+c)(c+a)\,w' &= c(a-b)vu + 2c[(c+b)qu - (c+a)pv] \equiv (b+c)(c+a)\,W.
\end{aligned}$$

Безъ всякаго вреда для общности послѣдующихъ разсужденій можемъ взять въ первыхъ трехъ уравненіяхъ вмѣсто α, β, γ произведенія αK, βK, γK и получить вмѣсто нихъ слѣдующія:

$$\begin{aligned}
\alpha p' &= (\beta-\gamma)qr + (c-b)vw + (c-b)\left(\frac{a-b}{b}\,rv - \frac{c-a}{c}\,qw\right) \equiv \alpha P \\
\beta q' &= (\gamma-\alpha)rp + (a-c)uw + (a-c)\left(\frac{b-c}{c}\,pw - \frac{a-b}{a}\,ru\right) \equiv \beta Q \qquad (3)\\
\gamma r' &= (\alpha-\beta)pq + (b-a)uv + (b-a)\left(\frac{c-a}{a}\,qu - \frac{b-c}{b}\,pv\right) \equiv \gamma R
\end{aligned}$$

Произведя такую замѣну, мы исключили, конечно, случай, когда одна изъ постоянныхъ a, b, c равна нулю. Но онъ аналитически простъ, и кромѣ того при немъ утрачивается механическое значеніе разсматриваемыхъ дифференціальныхъ уравненій.

Точно также принимаемъ, что каждая изъ величинъ $a+b$, $b+c$, $c+a$ отлична отъ нуля. Сверхъ того предполагаемъ, что не имѣемъ одновременно

$$a=b \quad \alpha=\beta\,,$$

или

$$a=c \quad \alpha=\gamma\,,$$

или $$b = c \quad \beta = \gamma,$$

такъ какъ эти случаи разобраны съ достаточной полнотой Н. Е. Жуковскимъ [1]), и

$$a = b = c,$$

такъ какъ этотъ случай разобранъ В. А. Стекловымъ [2]).

Мы будемъ исключать изъ послѣдующихъ изслѣдованій всѣ подобные случаи.

Интегралы, не зависящіе отъ времени, будутъ удовлетворять слѣдующему уравненію въ частныхъ производныхъ 1-го порядка:

$$P\frac{\partial z}{\partial p} + Q\frac{\partial z}{\partial q} + R\frac{\partial z}{\partial r} + U\frac{\partial z}{\partial u} + V\frac{\partial z}{\partial v} + W\frac{\partial z}{\partial w} = 0 \tag{4}$$

В. А. Стекловъ на страницѣ 4 цитированной уже нами работы въ I томѣ журнала Annales de Toulouse даетъ три слѣдующихъ интеграла 2-го порядка, которые мы напишемъ въ новомъ обозначеніи:

$$\begin{gathered} f \equiv bcu^2 + acv^2 + abw^2 \\ f_2 \equiv \frac{au^2 + bv^2 + cw^2}{2} + \alpha p^2 + \beta q^2 + \gamma r^2 \\ f_3 \equiv \left[\frac{(a+c)(a+b)}{a}u + \alpha p\right]^2 + \left[\frac{(a+b)(b+c)}{b}v + \beta q\right]^2 + \\ + \left[\frac{(b+c)(a+c)}{c}w + \gamma r\right]^2. \end{gathered} \tag{5}$$

Чтобы получить интегралы въ прежнемъ обозначеніи, достаточно замѣнить постоянныя α, β, γ ихъ прежними значеніями.

Затѣмъ на страницѣ 54 того же мемуара В. А. Стекловъ ставитъ вопросъ, не допускаютъ ли дифференціальныя уравненія (2) и (3) четвертаго интеграла 2-го порядка, независящаго отъ времени.

Не давая точнаго отвѣта на этотъ вопросъ, онъ даетъ примѣръ такого интеграла при существованіи извѣстныхъ условій между постоянными задачи.

Приложимъ къ этой задачѣ методъ полярныхъ операцій.

Прежде всего мы замѣчаемъ, что искомый интегралъ можно разсматривать, какъ частный алгебраическій интегралъ съ заранѣе извѣстнымъ полиномомъ K. Въ данномъ случаѣ этотъ полиномъ долженъ быть равенъ нулю.

---

[1]) Труды Физико-Химическаго Общества 1885 г. стр. 81, 145, 231.

[2]) Journal de Toulouse. Série 3-e, T. I, p. 44.

Замѣтивъ это, перейдемъ къ опредѣленію особенныхъ точекъ системы. Для этого достаточно въ уравненіяхъ (2) и (3) замѣстить производныя p', q', ..., w' соотвѣтственно черезъ λp, λq, ..., λw и найти изъ полученныхъ шести однородныхъ уравненій

$$\lambda p = P, \quad \lambda q = Q, \quad \lambda r = R$$
$$\lambda u = U, \quad \lambda v = V, \quad \lambda w = W$$

значенія для перемѣнныхъ λ, p, q, ..., w.

Для нашей цѣли достаточно будетъ ограничиться частными случаями. Попробуемъ напримѣръ дать неизвѣстной величинѣ λ значеніе равное нулю. Тогда непосредственной подстановкой убѣдимся, что полученныя уравненія удовлетворятся, если изъ трехъ паръ перемѣнныхъ

$$p\,,\ u\,; \quad q\,,\ v\,; \quad r\,,\ w$$

въ двухъ возьмемъ перемѣнныя равными нулю, а въ третьей какими-угодно. Такимъ образомъ эта система имѣетъ *безконечное* число особенныхъ точекъ.

Мы воспользуемся изъ нихъ только слѣдующими шестью, данными таблицей:

$$\begin{array}{cccccc} p & q & r & u & v & w \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \tag{6}$$

Замѣтимъ между прочимъ, что этихъ точекъ вполнѣ достаточно, чтобы опредѣлить полиномъ K для какого угодно частнаго алгебраическаго интеграла, такъ какъ въ данномъ случаѣ этотъ полиномъ линейный, а группа этихъ точекъ не можетъ обращать въ нуль одного и того же линейнаго полинома. Для этого вполнѣ достаточно пріемовъ указанныхъ въ первыхъ четырехъ параграфахъ.

Мы воспользуемся этими шестью точками иначе. Въ параграфѣ 3-мъ мы вывели рядъ уравненій, въ которыя входили поляры отъ особенныхъ точекъ по отношенію къ частному алгебраическому интегралу.

Тѣ же самые результаты, которые получены тамъ, можно вывести, подвергая тождество, въ которое входитъ частный алгебраическій интегралъ, взаимной полярной операціи. Мы должны тогда на основаніи выведеннаго въ параграфѣ 1-мъ тождества III получить тѣ же соотношенія, но въ иной по внѣшности формѣ.

Если мы выберемъ для примѣненія полярныхъ операцій одну изъ особенныхъ точекъ, данныхъ таблицей (6), то взаимная полярная операція сведется къ дифференцированію по соотвѣтственной перемѣнной.

Внесемъ согласно этому въ уравненіе (4) искомый интегралъ φ и получимъ тождество:

$$P\frac{\partial\varphi}{\partial p}+Q\frac{\partial\varphi}{\partial q}+R\frac{\partial\varphi}{\partial r}+U\frac{\partial\varphi}{\partial u}+V\frac{\partial\varphi}{\partial v}+W\frac{\partial\varphi}{\partial w}=0 \tag{7}$$

Обозначимъ одну изъ перемѣнныхъ $p, q, \ldots, w$ черезъ s, а черезъ φ_s производную отъ полинома φ по перемѣнной s, и беремъ вторую производную отъ обѣихъ частей тождества (7) по этой перемѣнной.

Замѣчая, что полиномы $P, Q, \ldots, W$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial p}, \frac{\partial\varphi}{\partial q}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial w}$ линейны относительно любой перемѣнной, получимъ въ результатѣ, отбросивъ общій множитель 2, слѣдующее равенство:

$$\frac{\partial P}{\partial s}\frac{\partial\varphi_s}{\partial p}+\frac{\partial Q}{\partial s}\frac{\partial\varphi_s}{\partial q}+\frac{\partial R}{\partial s}\frac{\partial\varphi_s}{\partial r}+\frac{\partial U}{\partial s}\frac{\partial\varphi_s}{\partial u}+\frac{\partial V}{\partial s}\frac{\partial\varphi_s}{\partial v}+\frac{\partial W}{\partial s}\frac{\partial\varphi_s}{\partial w}=0. \tag{8}$$

Полагаемъ сначала въ этомъ тождествѣ $s=u$. Послѣ простыхъ вычисленій получаемъ такое уравненіе въ частныхъ производныхъ для производной φ_u:

$$\begin{gathered}\left(\frac{a-c}{\beta}w-\frac{a-c}{\beta}\frac{a-b}{a}r\right)\frac{\partial\varphi_u}{\partial q}+\left(\frac{b-a}{\gamma}v+\frac{b-a}{\gamma}\frac{c-a}{a}q\right)\frac{\partial\varphi_u}{\partial r}+\\+\left(\frac{b}{a+b}\frac{c-a}{c+b}w-\frac{2b}{a+b}r\right)\frac{\partial\varphi_u}{\partial v}+\left(\frac{c}{b+c}\frac{a-b}{a+c}v+\frac{2c}{a+c}q\right)\frac{\partial\varphi_u}{\partial w}=0.\end{gathered} \tag{9}$$

Предположимъ сначала, что между величинами a, b, c нѣтъ двухъ равныхъ. Тогда наше равенство въ виду того, что производныя отъ полинома φ $\frac{\partial\varphi_u}{\partial q}, \frac{\partial\varphi_u}{\partial r}, \frac{\partial\varphi_u}{\partial v}, \frac{\partial\varphi_u}{\partial w}$ представляютъ собой нѣкоторыя постоянныя, повлечетъ за собой два слѣдующихъ:

$$\left(w-\frac{a-b}{a}r\right)\frac{a-c}{\beta}\frac{\partial\varphi_u}{\partial q}+\left(w-2\frac{b+c}{c-a}r\right)\frac{b}{a+b}\frac{c-a}{c+b}\frac{\partial\varphi_u}{\partial v}=0.$$

и

$$\left(v+\frac{c-a}{a}q\right)\frac{b-a}{\gamma}\frac{\partial\varphi_u}{\partial r}+\left(v+2\frac{b+c}{a-b}q\right)\frac{c}{a+c}\frac{a-b}{b+c}\frac{\partial\varphi_u}{\partial w}=0. \tag{10}$$

Полагая въ тождествѣ (8) $s = v$, получаемъ слѣдовательно равенство, аналогичное (9):

$$\left(\frac{c-b}{a}w + \frac{c-b}{a}\frac{a-b}{b}r\right)\frac{\partial\varphi_v}{\partial p} + \left(\frac{b-a}{\gamma}u - \frac{b-a}{\gamma}\frac{b-c}{b}p\right)\frac{\partial\varphi_v}{\partial r} +$$
$$+ \left(\frac{a}{a+b}\frac{b-c}{a+c}w + 2\frac{a}{a+b}r\right)\frac{\partial\varphi_v}{\partial u} + \left(\frac{c}{b+c}\frac{a-b}{a+c}u - 2\frac{c}{b+c}p\right)\frac{\partial\varphi_v}{\partial w} = 0. \tag{11}$$

Отсюда получаемъ также:

$$\left(w + \frac{a-b}{b}r\right)\frac{c-b}{a}\frac{\partial\varphi_v}{\partial p} + \left(w + 2\frac{a+c}{b-c}r\right)\frac{a}{a+b}\frac{b-c}{a+c}\frac{\partial\varphi_v}{\partial u} = 0. \tag{12}$$

Такъ какъ во всѣхъ полученныхъ тождествахъ перемѣнныя $p, q, \ldots, w$ совершенно произвольны, то можемъ подставить вмѣсто w въ равенствѣ (10) $\frac{a-b}{a}r$, а въ равенствѣ (12) $\frac{b-a}{b}r$, и получимъ:

$$\frac{ab+bc+ac+a^2}{a(c+a)}\frac{b}{a+b}\frac{\partial\varphi_u}{\partial v} = 0$$

и

$$\frac{ab+bc+ac+b^2}{b(a+c)}\frac{a}{b+a}\frac{\partial\varphi_v}{\partial u} = 0.$$

Но $\frac{\partial\varphi_u}{\partial v}$ и $\frac{\partial\varphi_v}{\partial u}$ представляютъ собой разныя обозначенія одной и той же производной $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}$; поэтому видимъ, что она равна нулю, такъ какъ иначе выраженія $ab+ac+bc+a^2$ и $ab+bc+ac+b^2$ обращались бы въ нуль совмѣстно съ ихъ разностью, равной $(a+b)(a-b)$, что невозможно.

Точно такимъ же путемъ доказываемъ, что производная $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial w}$ и $\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial w}$ равны нулю.

Давая имъ эти значенія въ тождествахъ (9) (10) и третьемъ, получаемомъ принятіемъ $s \equiv w$, найдемъ безъ труда, что равны нулю и производныя $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial q}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial r}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial p}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial r}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial w\partial p}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial w\partial q}$.

Итакъ, если между постоянными a, b, c нѣтъ равныхъ, то искомый интегралъ не заключаетъ членовъ uv, uw, vw, uq, ur, vp, vr, wp, wq.

Теперь положимъ, что $a = b$.

Тогда изъ тождества (9) будетъ слѣдовать равенство нулю производныхъ $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial w}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}$ и $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial q}$.

Что же касается тождества (11), то оно дастъ кромѣ того $\frac{\partial^2\varphi}{\partial v \partial w} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial v \partial p} = 0$.

Наконецъ, если примемъ въ тождествѣ (8) $s = w$, сдѣлаемъ въ немъ $a = b$ и производныя $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u \partial w}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial v \partial w}$ нулями, то получаемъ:

$$\left(\frac{c-a}{\alpha} v - \frac{c-a}{\alpha}\frac{c-a}{c} q\right)\frac{\partial \varphi_w}{\partial p} + \left(\frac{a-c}{\beta} u + \frac{a-c}{\beta}\frac{a-c}{c} r\right)\frac{\partial \varphi_w}{\partial q} = 0.$$

Отсюда слѣдуетъ, что и

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial p \partial w} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial q \partial w} = 0.$$

Теперь дадимъ въ тождествѣ (8) s значеніе равное p, получаемъ послѣ простыхъ вычисленій:

$$\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta} r + \frac{a-c}{\beta}\frac{b-c}{c} w\right)\frac{\partial \varphi_p}{\partial q} + \left(\frac{\alpha-\beta}{\gamma} q - \frac{b-a}{\beta}\frac{b-c}{b} v\right)\frac{\partial \varphi_p}{\partial r} + \\ + 2\frac{b}{b+c} w \frac{\partial \varphi_p}{\partial v} - 2\frac{c}{b+c} v \frac{\partial \varphi_p}{\partial w} = 0. \tag{13}$$

Предположимъ сначала, что между величинами a, b и c нѣтъ двухъ равныхъ. Тогда, такъ какъ производныя $\frac{\partial^2\varphi}{\partial p \partial v}$ и $\frac{\partial^2\varphi}{\partial p \partial w}$ равны нулю, находимъ безъ труда изъ тождества (13), что и $\frac{\partial^2\varphi}{\partial p \partial q}$, и $\frac{\partial^2\varphi}{\partial p \partial r} = 0$.

Выпишемъ еще тождество (8) для случая $s = q$:

$$\left(\frac{\beta-\gamma}{\alpha} r - \frac{c-b}{\alpha}\frac{c-a}{c} w\right)\frac{\partial \varphi_q}{\partial p} + \left(\frac{\alpha-\beta}{\gamma} p + \frac{b-a}{\gamma}\frac{c-a}{a} u\right)\frac{\partial \varphi_q}{\partial r} + \\ - 2\frac{a}{a+c} w \frac{\partial \varphi_q}{\partial u} + 2\frac{c}{a+c} u \frac{\partial \varphi_q}{\partial w} = 0. \tag{14}$$

Это равенство дастъ намъ, такъ какъ

$$\frac{\partial \varphi_q}{\partial p} = \frac{\partial \varphi_q}{\partial u} = \frac{\partial \varphi_q}{\partial w} = 0, \text{ еще и } \frac{\partial^2\varphi}{\partial q \partial r} = 0.$$

Теперь предположимъ, что $a = b$. Тождества (13) и (14) примутъ видъ:

$$\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta} r + \frac{a-c}{\beta}\frac{a-c}{c} w\right)\frac{\partial \varphi_p}{\partial q} + \frac{\alpha-\beta}{\gamma} q \frac{\partial \varphi_p}{\partial r} = 0$$

$$\left(\frac{\beta-\gamma}{\alpha} r - \frac{c-a}{\alpha}\frac{c-a}{c} w\right)\frac{\partial \varphi_q}{\partial p} + \frac{\alpha-\beta}{\gamma} p \frac{\partial \varphi_q}{\partial r} = 0.$$

Такъ какъ случай $\alpha = \beta$, $a = b$ нами исключенъ, то мы получимъ изъ этихъ равенствъ:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial r} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial q\partial r} = 0.$$

Принявъ во вниманіе эти равенства и равенство $a = b$, вычисляемъ, во что обратится тождество (8) при $s = r$; получаемъ:

$$v\frac{\partial\varphi_r}{\partial u} - u\frac{\partial\varphi_r}{\partial v} = 0,$$

откуда слѣдуетъ, что и

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial r} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial r} = 0.$$

Просматривая снова рядъ производныхъ, равенство которыхъ нулю мы доказали, мы убѣждаемся, что, будутъ-ли существовать между величинами a, b, c двѣ равныхъ или нѣтъ, въ искомомъ интегралѣ 2-го порядка будутъ отсутствовать члены pq, pr, qr, pv, pw, qu, qw, ru, rv, uv, uw, vw и слѣдовательно искомый интегралъ можетъ быть написанъ въ видѣ:

$$\varphi \equiv \mu_1 p^2 + \mu_2 q^2 + \mu_3 r^2 + \nu_1 pu + \nu_2 qv + \nu_3 rw + \varrho_1 u^2 + \varrho_2 v^2 + \varrho_3 w^2,$$

гдѣ μ_i, ν_i, ϱ_i $(i = 1, 2, 3)$ нѣкоторыя постоянныя.

Дѣйствительно всѣ найденные В. А. Стекловымъ интегралы заключаются въ этой формѣ. Въ дальнѣйшемъ займемся опредѣленіемъ постоянныхъ μ_i, ν_i, ϱ_i для четвертаго алгебраическаго интеграла.

Очевидно, что вмѣсто φ можно разыскивать $\varphi + \sigma_1 f_1 + \sigma_2 f_2 + \sigma_3 f_3$, такъ какъ это выраженіе при σ_1, σ_2, σ_3 постоянныхъ будетъ снова интеграломъ системы. Величины σ_i совершенно произвольны, и можно ими воспользоваться, чтобы уменьшить число постоянныхъ въ интегралѣ φ и, это особенно важно, дать ему такой видъ, при которомъ онъ не можетъ обратиться при частныхъ значеніяхъ входящихъ постоянныхъ въ одинъ изъ интеграловъ f_1, f_2, f_3.

Предполагаемъ сначала, что между величинами a, b, c нѣтъ двухъ равныхъ, а между величинами α, β, γ существуетъ не меньше двухъ неравныхъ.

Затѣмъ полагаемъ въ тождествѣ (7) перемѣнныя u, v, w равными нулю, тогда оно принимаетъ слѣдующій видъ:

$$\frac{\beta-\gamma}{\alpha}qr\frac{\partial\varphi_0}{\partial p} + \frac{\gamma-\alpha}{\beta}rp\frac{\partial\varphi_0}{\partial q} + \frac{\alpha-\beta}{\gamma}pq\frac{\partial\varphi_0}{\partial \gamma} = 0,$$

гдѣ φ_0 представляетъ собой результатъ подстановки въ полиномъ φ $u = v = w = 0$, т. е. будетъ вида:

$$\mu_1 p^2 + \mu_2 q^2 + \mu_3 r^2.$$

Подставляя это значеніе φ_0 въ только что написанное тождество, получаемъ:

$$pqr\left\{\frac{\beta-\gamma}{\alpha}\mu_1 + \frac{\gamma-\alpha}{\beta}\mu_2 + \frac{\alpha-\beta}{\gamma}\mu_3\right\} = 0.$$

Отсюда, такъ какъ между величинами α, β, γ существуетъ по крайней мѣрѣ двѣ неравныхъ, значенія для величинъ μ_1, μ_2, μ_3 могутъ быть выражены черезъ посредство двухъ произвольныхъ величинъ μ_4, μ_5 слѣдующимъ образомъ:

$$\mu_1 = \alpha\mu_4 + \alpha^2\mu_5$$

$$\mu_2 = \beta\mu_4 + \beta^2\mu_5$$

$$\mu_3 = \gamma\mu_4 + \gamma^2\mu_5.$$

Если мы положимъ въ выраженіи $\varphi + \sigma_1 f_1 + \sigma_2 f_2 + \sigma_3 f_3$ $\sigma_2 = -\mu_4$ и $\sigma_3 = -\mu_5$, то дадимъ этому интегралу такой видъ, что въ него не войдутъ члены p^2, q^2, r^2. Ясно, что эта форма четвертаго интеграла уже не будетъ заключать въ себѣ интеграловъ f_2 и f_3.

Такъ какъ всегда можно опредѣлить σ_1 такимъ образомъ, что будемъ имѣть тождественно

$$a\varrho_1 + b\varrho_2 + c\varrho_3 + 3\sigma_1 abc = 0,$$

то получаемъ окончательно слѣдующую форму для четвертаго алгебраическаго интеграла 2-го порядка:

$$\varphi \equiv \nu_1 pu + \nu_2 qv + \nu_3 rw + \varrho_1 u^2 + \varrho_2 v^2 + \varrho_3 w^2,$$

при условіи:

$$a\varrho_1 + b\varrho_2 + c\varrho_3 = 0 \qquad (15)$$

Если мы внесемъ это выраженіе для φ въ лѣвую часть равенства (7), то получимъ полиномъ третьяго порядка съ членами uvw, uvr, uqw, pvw, uqr, pvr, pqw. Коэффиціенты этихъ членовъ должны равняться нулю. Слѣдовательно получимъ для опредѣленія величинъ ν_i, ϱ_i еще 7 уравненій:

$$2\varrho_1 \frac{a}{c+a}\frac{b-c}{b+a} + 2\varrho_2 \frac{b}{a+b}\frac{c-a}{c+b} + 2\varrho_3 \frac{c}{b+c}\frac{a-b}{a+c} +$$
$$+ v_1 \frac{c-b}{\alpha} + v_2 \frac{a-c}{\beta} + v_3 \frac{b-a}{\gamma} = 0. \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned}
&4\varrho_1 \frac{a}{a+b} - 4\varrho_2 \frac{b}{a+b} + v_1 \frac{c-b}{\alpha}\frac{a-b}{b} - v_2 \frac{a-c}{\beta}\frac{a-b}{a} + v_3 \frac{c}{b+c}\frac{a-b}{a+c} = 0\\
&-4\varrho_1 \frac{a}{a+c} + 4\varrho_3 \frac{c}{a+c} - v_1 \frac{c-b}{\alpha}\frac{c-a}{c} + v_2 \frac{b}{a+b}\frac{c-a}{b+c} + v_3 \frac{b-a}{\gamma}\frac{c-a}{a} = 0\\
&4\varrho_2 \frac{b}{b+c} - 4\varrho_3 \frac{c}{b+c} + v_1 \frac{a}{a+c}\frac{b-c}{b+a} + v_2 \frac{a-c}{\beta}\frac{b-c}{c} - v_3 \frac{b-a}{\gamma}\frac{b-c}{b} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned}
&v_1 \frac{\beta-\gamma}{\alpha} - v_2 \frac{2b}{a+b} + v_3 \frac{2c}{a+c} = 0\\
&v_1 \frac{2a}{a+b} + v_2 \frac{\gamma-\alpha}{\beta} - v_3 \frac{2c}{b+c} = 0\\
&-v_1 \frac{2a}{a+c} + v_2 \frac{2b}{b+c} + v_3 \frac{\alpha-\beta}{\gamma} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Уравненія (15), (16), (17) и (18) въ числѣ восьми опредѣляютъ шесть коэффиціентовъ искомаго интеграла, входящихъ въ нихъ однородно. Слѣдовательно между данными задачи должны существовать извѣстныя соотношенія, чтобы имѣлся четвертый алгебраическій интегралъ въ видѣ полинома 2-го порядка.

Перейдемъ теперь къ изслѣдованію полученной системы. Прежде всего нетрудно убѣдиться, что искомый интегралъ φ будетъ заключать по крайней мѣрѣ одинъ изъ членовъ up, vq, wr. Въ самомъ дѣлѣ, если положимъ

$$v_1 = v_2 = v_3 = 0,$$

то уравненія (17) принимаютъ видъ:

$$4\varrho_1 \frac{a}{a+b} - 4\varrho_2 \frac{b}{a+b} = 0; \qquad -4\varrho_1 \frac{a}{a+c} + 4\varrho_3 \frac{c}{a+c} = 0;$$
$$4\varrho_2 \frac{b}{b+c} - 4\varrho_3 \frac{c}{b+c} = 0.$$

Отсюда получаемъ:

$$\varrho_1 a = \varrho_2 b = \varrho_3 c.$$

Сравнивая полученныя равенства съ равенствомъ (15), убѣждаемся, что и

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = 0.$$

Итакъ между коэффиціентами v_1, v_2 и v_3 должны существовать величины, отличныя отъ нуля. Такимъ образомъ получаемъ первое соотношеніе между данными задачи, необходимое для существованія интеграла разсматриваемаго типа, въ такомъ видѣ:

$$\begin{vmatrix} \frac{\beta-\gamma}{\alpha}, & -\frac{2b}{a+b} & \frac{2c}{a+c} \\ \frac{2a}{a+b} & \frac{\gamma-\alpha}{\beta}, & -\frac{2c}{b+c} \\ -\frac{2a}{a+c} & \frac{2b}{b+c} & \frac{\alpha-\beta}{\gamma} \end{vmatrix} = 0. \qquad (19)$$

Это условіе показываетъ, что уравненія (18) совмѣстимы. Покажемъ, что эти уравненія даютъ вполнѣ опредѣленныя значенія для v_1, v_2, v_3, т. е. что между этими тремя уравненіями всегда существуетъ два независимыхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если всѣ они—слѣдствія одного изъ нихъ, то каждый миноръ опредѣлителя (19) обратится въ нуль. Покажемъ, что этого не можетъ быть. Выбрасывая второй столбецъ и третью строку, получимъ

$$J_1 \equiv -\frac{\beta-\gamma}{\alpha}\frac{2c}{b+c} - \frac{2a}{a+b}\frac{2c}{a+c};$$

а выбрасывая вторую строку и третій столбецъ:

$$J_2 \equiv \frac{\beta-\gamma}{\alpha}\frac{2b}{b+c} - \frac{2a}{a+c}\frac{2b}{a+b}.$$

Два полученные минора не могутъ одновременно обращаться въ нуль. Въ самомъ дѣлѣ, тогда равнялось бы нулю и выраженіе $bJ_1 + cJ_2$, но оно равно величинѣ

$$-8\frac{abc}{(a+b)(a+c)},$$

отличной отъ нуля по предположенію.

Итакъ уравненія (18) опредѣлятъ вполнѣ отношенія постоянныхъ v_1, v_2 и v_3. Мы окончимъ ихъ опредѣленіе, если возьмемъ одно изъ нихъ за единицу. Тогда коэффиціенты v_1, v_2, v_3 искомаго интеграла выразятся вполнѣ опредѣленно въ функціи постоянныхъ задачи.

Подставляемъ эти значенія напримѣръ въ первыя два изъ равенствъ (17) и получаемъ:

$$4\varrho_1 \frac{a}{a+b} - 4\varrho_2 \frac{b}{a+b} + C_3 = 0$$

$$-4\varrho_1 \frac{a}{a+c} + 4\varrho_3 \frac{c}{a+c} + C_2 = 0\,,$$

гдѣ C_1 и C_2 будутъ вполнѣ опредѣленными функціями постоянныхъ задачи. Полученныя уравненія совмѣстно съ уравненіемъ (15) дадутъ

$$\varrho_1 = \frac{-C_3(a+b)+C_2(a+c)}{12a}$$

$$\varrho_2 = \frac{2C_3(a+b)+C_2(a+c)}{12b}$$

$$\varrho_3 = \frac{-C_3(a+b)-2C_2(a+c)}{12c}.$$

Такимъ образомъ, если выполнено условіе (19), то коэффиціенты искомаго четвертаго интеграла опредѣляются вполнѣ по даннымъ задачи. Остается только убѣдиться, дѣйствительно-ли полученный полиномъ представляетъ собой интегралъ нашей системы. Мы достигнемъ той-же цѣли, если подставимъ полученныя выраженія въ уравненіе (16) и въ третье изъ уравненій (17).

Такимъ образомъ въ этомъ случаѣ для существованія четвертаго интеграла необходимы три условія.

Мы исключили изъ разсмотрѣнія случай, когда между величинами a, b, c существуютъ равныя. Простыя разсужденія покажутъ, что четвертый интегралъ можетъ быть приведенъ и въ этомъ случаѣ къ той же самой формѣ $v_1up+v_2vq+v_3wr+\varrho_1u^2+\varrho_2v^2+\varrho_3w^2$, а потому окончательное рѣшеніе вопроса будетъ зависить отъ тѣхъ же уравненій (15), (16), (17) и (18).

Положимъ въ этихъ уравненіяхъ наприм. $a=b$. Тогда первое изъ уравненій (17) покажетъ, что $\varrho_1=\varrho_2$. Въ силу этого уравненіе (16) дастъ намъ равенство:

$$v_1\beta = v_2\alpha.$$

Но остальные изъ уравненій (17) показываютъ, что $v_1=v_2$, поэтому получаемъ $\alpha=\beta$. Такимъ образомъ при этомъ предположеніи мы пришли къ исключенному нами случаю $a=b$, $\alpha=\beta$. Разсмотрѣнный только что случай данъ въ другой формѣ В. А. Стекловымъ въ Annales de Toulouse 3-e série t. I, на стр. 54. Въ виду большой сложности формулъ я не буду останавливаться на доказательствѣ тождественности этихъ интеграловъ и перейду къ изученію случая, когда между величинами a, b и c нѣтъ равныхъ, но

$$\alpha = \beta = \gamma. \tag{20}$$

Найденная нами общая форма для интеграла въ видѣ полинома 2-ой степени такова

$$\varphi' \equiv \mu_1'p^2 + \mu_2'q^2 + \mu_3'r^2 + \nu_1'up + \nu_2'vq + \nu_3'wr + \varrho_1'u^2 + \varrho_2'v^2 + \varrho_3'w^2.$$

Въ предыдущемъ случаѣ намъ удалось при помощи интеграловъ f_2 и f_3 сдѣлать коэффиціенты при членахъ p^2, q^2, r^2 равными нулю. Въ этомъ случаѣ этотъ пріемъ перестаетъ быть возможнымъ. Поэтому мы воспользуемся извѣстными намъ тремя интегралами иначе. Беремъ сначала вмѣсто интеграла φ' интегралъ $\varphi'' \equiv \varphi' + \sigma_3 f_3$ и опредѣляемъ σ_3 такимъ образомъ, чтобы

$$\nu_1'a(b+c) + \nu_2'b(a+c) + \nu_3'c(a+b) + 6a(a+b)(a+c)(c+b)\sigma_3 = 0.$$

Тогда нашъ интегралъ приметъ форму:

$$\varphi'' \equiv \mu_1''p^2 + \mu_2''q^2 + \mu_3''r^2 + \nu_1 up + \nu_2 vq + \nu_3 wr + \varrho_1''u^2 + \varrho_2''v^2 + \varrho_3''w^2,$$

при чемъ

$$\nu_1 a(b+c) + \nu_2 b(a+c) + \nu_3 c(a+b) = 0. \tag{21}$$

Затѣмъ беремъ интегралъ $\varphi''' \equiv \varphi'' + \sigma_2 f_2$, выбирая σ_2 такъ, чтобы

$$\mu_1'' + \mu_2'' + \mu_3'' + 3\sigma_2 a = 0.$$

Тогда получаемъ интегралъ въ формѣ:

$$\varphi''' \equiv \mu_1 p^2 + \mu_2 q^2 + \mu_3 r^2 + \nu_1 pu + \nu_2 qv + \nu_3 rw + \varrho_1'''u^2 + \varrho_2'''v^2 + \varrho_3'''w^2,$$

съ дополнительнымъ условіемъ

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0. \tag{22}$$

Добавивъ наконецъ къ этому полиному φ''' $\sigma_1 f_1$ и опредѣливъ σ_1 такимъ образомъ, чтобы

$$a\varrho_1''' + b\varrho_2''' + c\varrho_3''' + 3\sigma_1 abc = 0,$$

приведемъ интегралъ къ формѣ:

$$\varphi \equiv \mu_1 p^2 + \mu_2 q^2 + \mu_3 r^2 + \nu_1 pu + \nu_2 qv + \nu_3 rw + \varrho_1 u^2 + \varrho_2 v^2 + \varrho_3 w^2,$$

гдѣ коэффиціенты μ_i, ν_i, ϱ_i удовлетворяютъ условіямъ (21), (22) и (15).

Полиномъ φ не можетъ представлять собой одного изъ интеграловъ f_1, f_2, f_3, такъ какъ они не удовлетворяютъ по крайней мѣрѣ одному изъ условій (21), (22) и (15).

Подставляя полученный полиномъ въ лѣвую часть равенства (7), получимъ полиномъ 3-го порядка съ членами uvw, uvr, uqw, pvw, uqr, pvr и pqw. Приравнивая нулю коэффиціенты при этихъ членахъ, мы получимъ еще семь условій, которымъ должны удовлетворять коэффиціенты полинома φ, чтобы онъ былъ интеграломъ разсматриваемой системы. Такимъ образомъ получаемъ:

$$\begin{aligned} & 2\varrho_1 \frac{a}{a+c}\frac{b-c}{b+a} + 2\varrho_2 \frac{b}{a+b}\frac{c-a}{c+b} + 2\varrho_3 \frac{c}{b+c}\frac{a-b}{a+c} + \\ & \quad + \nu_1 \frac{c-b}{\alpha} + \nu_2 \frac{a-c}{\alpha} + \nu_3 \frac{b-a}{\alpha} = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

$$\left.\begin{aligned} & 4\varrho_1 \frac{a}{a+b} - 4\varrho_2 \frac{b}{a+b} + 2\mu_3 \frac{b-a}{\alpha} + \nu_1 \frac{c-b}{\alpha}\frac{a-b}{b} - \nu_2 \frac{a-c}{\alpha}\frac{a-b}{a} + \nu_3 \frac{c}{b+c}\frac{a-b}{a+c} = 0 \\ & -4\varrho_1 \frac{a}{a+c} + 4\varrho_3 \frac{c}{a+c} + 2\mu_2 \frac{a-c}{\alpha} - \nu_1 \frac{c-b}{\alpha}\frac{c-a}{c} + \nu_2 \frac{b}{a+b}\frac{c-a}{c+b} + \nu_3 \frac{b-a}{\alpha}\frac{c-a}{a} = 0 \\ & 4\varrho_2 \frac{b}{b+c} - 4\varrho_3 \frac{c}{b+c} + 2\mu_1 \frac{c-b}{\alpha} + \nu_1 \frac{a}{a+c}\frac{b-c}{a+b} + \nu_2 \frac{a-c}{\alpha}\frac{b-c}{c} - \nu_3 \frac{b-a}{\alpha}\frac{b-c}{b} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned} & -2\mu_1 \frac{c-b}{\alpha}\frac{c-a}{c} + 2\mu_2 \frac{a-c}{\alpha}\frac{b-c}{c} - \nu_1 \frac{2a}{a+c} + \nu_2 \frac{2b}{b+c} = 0 \\ & 2\mu_1 \frac{c-b}{\alpha}\frac{a-b}{b} - 2\mu_3 \frac{b-a}{\alpha}\frac{b-c}{b} + \nu_1 \frac{2a}{a+b} - \nu_3 \frac{2c}{b+c} = 0 \\ & -2\mu_2 \frac{a-c}{\alpha}\frac{a-b}{a} + 2\mu_3 \frac{b-a}{\alpha}\frac{c-a}{a} - \nu_2 \frac{2b}{a+b} + \nu_3 \frac{2c}{a+c} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Итакъ мы имѣемъ рядъ уравненій (15), (21), (22), (23), (24) и (25) въ числѣ десяти для опредѣленія девяти величинъ μ_i, ν_i, ϱ_i, входящихъ въ нихъ линейно и однородно. Надо значитъ найти соотношенія между коэффиціентами, которыя обусловливали бы возможность опредѣленія этихъ величинъ.

Переходя къ этому, покажемъ сначала, что коэффиціенты ν_1, ν_2, ν_3 не могутъ обращаться одновременно въ нуль. Въ самомъ дѣлѣ, если мы положимъ въ уравненіяхъ (25) $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$, то получимъ изъ нихъ, что $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$. Тогда уравненіе (22) покажетъ, что и всѣ μ_i также равны нулю. Полагая ν_i, μ_i равными нулю въ уравненіяхъ (24), находимъ, что $a\varrho_1 = b\varrho_2 = c\varrho_3$; а это въ связи съ уравненіемъ (15) даетъ $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = 0$, а слѣдовательно и полиномъ φ равнялся бы нулю.

Точно также не могутъ равняться нулю одновременно всѣ постоянныя μ_i. Въ самомъ дѣлѣ, положивъ въ уравненіяхъ (25) $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$, получимъ изъ нихъ $\nu_1 a(b+c) = \nu_2 b(a+c) = \nu_3 c(a+b)$. Сравнивая это, придемъ къ только что исключенному нами случаю $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$.

Замѣтивъ это, перейдемъ къ изученію нашей системы. Сначала введемъ для сокращенія письма слѣдующія обозначенія:

$$d \equiv a + b + c \quad e \equiv ab + ac + bc \quad f \equiv abc.$$

Умножая послѣдовательно три уравненія (25) на множители $(a-b)c$, $(c-a)b$, $(b-c)a$ и складывая, найдемъ послѣ простыхъ преобразованій:

$$\nu_1 a(b+c)^2(e-ad) + \nu_2 b(a+c)^2(e-bd) + \nu_3 c(a+b)^2(e-cd) = 0. \quad (26)$$

А умножая ихъ послѣдовательно на $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{a+c}$ и $\frac{1}{b+c}$, получимъ такое уравненіе:

$$\mu_1 a(b+c)^2(c-b)(e-ad) + \mu_2 b(a+c)^2(a-c)(e-bd) + \\ + \mu_3 c(a+b)^2(b-a)(e-cd) = 0. \quad (27)$$

Такимъ образомъ мы замѣнили два изъ уравненій (25) уравненіями (26) и (27).

Разсмотримъ сначала случай, когда уравненіе (26) представляетъ слѣдствіе уравненія (21). Для этого необходимо и достаточно соблюденія такихъ условій:

$$(b+c)(e-ad) = (a+c)(e-bd) = (a+b)(e-cd).$$

Отсюда, такъ какъ мы предполагаемъ, что между величинами a, b, c нѣтъ равныхъ, то мы должны получить

$$a + b + c = 0, \quad ab + ac + bc = 0. \quad (28)$$

Но при этомъ условіи обратится въ нуль также и уравненіе (27). Среди трехъ уравненій (25) будетъ два независимыхъ. Девять уравненій: два только что упомянутыхъ и уравненія (15), (21), (22), (23) и (24) будутъ несовмѣстимы, такъ какъ ихъ опредѣлитель не можетъ быть сдѣланъ выборомъ значеній постоянныхъ задачи равнымъ нулю. Слѣдовательно уравненіе (26) не можетъ быть слѣдствіемъ уравненія (21).

Точно также уравненіе (27) не можетъ быть слѣдствіемъ уравненія (22), такъ какъ такое предположеніе ведетъ снова къ условіямъ (28).

Итакъ мы можемъ опредѣлить изъ уравненій (21) и (26) съ одной стороны и изъ уравненій (22) и (27) съ другой стороны отношенія постоянныхъ ν_i и μ_i.

Такимъ образомъ получимъ слѣдующія формулы:

$$\nu_1 = \sigma \frac{e + ad}{a} \frac{b - c}{b + c}, \quad \nu_2 = \sigma \frac{e + bd}{b} \frac{c - a}{c + a}, \quad \nu_3 = \sigma \frac{e + cd}{e} \frac{a - b}{a + b} \qquad (29)$$

Положивъ для краткости:

$$A = \frac{c - a}{a} \frac{b - a}{b + c}, \quad B = \frac{a - b}{b} \frac{c - b}{c + a}, \quad C = \frac{b - c}{c} \frac{a - c}{a + b},$$

найдемъ также, что

$$\mu_1 = \frac{\varrho}{3}(-2A + B + C), \quad \mu_2 = \frac{\varrho}{3}(A - 2B + C), \quad \mu_3 = \frac{\varrho}{3}(A + B - 2C). \qquad (30)$$

Подставивъ найденныя значенія для μ_i, ν_i въ любое изъ уравненій (27), мы убѣдимся, что они удовлетворятъ имъ всѣмъ, если принять

$$\sigma = (b - a)(c - b)(a - c)$$
$$\varrho = 3f\alpha.$$

Такимъ образомъ убѣждаемся, что въ томъ случаѣ, когда отлична отъ нуля по крайней мѣрѣ одна изъ величинъ d и e, уравненія (21) (22) и (27) дадутъ для коэффиціентовъ ν_i, μ_i совершенно опредѣленныя величины.

Подставляя найденныя значенія напр. въ первыя два изъ уравненій (24), мы получимъ такія:

$$\varrho_1 a - \varrho_2 b = C_1$$
$$-\varrho_1 a + \varrho_3 c = B_1,$$

гдѣ C_1 и B_1—вполнѣ опредѣленныя функціи постоянныхъ α, a, b, c, которыя нетрудно вычислить.

Изъ этихъ уравненій совмѣстно съ уравненіемъ (15) получаемъ:

$$\varrho_1 = \frac{C_1 - B_1}{3a}, \quad \varrho_2 = \frac{-2C_1 - B_1}{3b}, \quad \varrho_3 = \frac{C_1 + 2B_1}{3c}.$$

Мы получили коэффиціенты полинома, который можетъ быть интеграломъ системы (2) и (3). Чтобы онъ дѣйствительно былъ интеграломъ, необходимо и достаточно удовлетворить еще двумъ уравненіямъ (23) и послѣднему изъ уравненій (24).

Удобнѣе для окончательнаго опредѣленія этихъ условій замѣнить ихъ двумя другими.

Множимъ лѣвыя части уравненій (24) соотвѣтственно на $a+b$, $a+c$, $b+c$ и складываемъ. Въ результатѣ получаемъ:

$$\frac{2}{\alpha}\begin{vmatrix} \mu_1 & 1 & a^2 \\ \mu_2 & 1 & b^2 \\ \mu_3 & 1 & c^2 \end{vmatrix} + \frac{1}{f\alpha}\begin{vmatrix} \nu_1 a(ad-e) & 1 & a^2 \\ \nu_2 b(bd-e) & 1 & b^2 \\ \nu_3 c(cd-e) & 1 & c^2 \end{vmatrix} + \frac{1}{h}\begin{vmatrix} \nu_1 a(b+c) & a^2 & 1 \\ \nu_2 b(a+c) & b^2 & 1 \\ \nu_3 c(a+b) & c^2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

гдѣ $h \equiv (a+b)(b+c)(c+a) \equiv ed - f$.

Подставляя сюда значенія постоянныхъ ν_i μ_i по формуламъ (29) и (30) послѣ соотвѣтствующихъ преобразованій и упрощеній, получаемъ:

$$(d^2 - e)\,\alpha f = 2e^3 - 2d^3 f. \tag{31}$$

При выполненіи этого условія третье уравненіе изъ (24) станетъ слѣдствіемъ первыхъ двухъ (24) и уравненій (21), (22) и (27).

Затѣмъ умножаемъ уравненіе (23) на 2 и складываемъ съ нимъ лѣвыя части уравненій (24); въ результатѣ получаемъ уравненіе, не зависящее отъ величинъ ϱ_i, слѣдующаго вида:

$$\frac{2}{\alpha}\begin{vmatrix} \mu_1 & 1 & a \\ \mu_2 & 1 & b \\ \mu_3 & 1 & c \end{vmatrix} + \frac{1}{f\alpha}\begin{vmatrix} \nu_1 a^2(b+c) & 1 & a \\ \nu_2 b^2(a+c) & 1 & b \\ \nu_3 c^2(a+b) & 1 & c \end{vmatrix} + \frac{1}{h}\begin{vmatrix} \nu_1 a(b+c) & a & 1 \\ \nu_2 b(a+c) & b & 1 \\ \nu_3 c(a+b) & c & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Пользуясь формулами (29) и (30), мы приводимъ это условіе къ такому виду:

$$\alpha d f = (e^2 d - 2d^2 f - 3ef). \tag{32}$$

Если данныя постоянныя удовлетворяютъ и этому условію, то уравненіе (23) будетъ слѣдствіемъ, и найденный нами полиномъ будетъ интеграломъ разсматриваемой нами системы.

Итакъ разсматриваемая нами система имѣетъ только два вида четвертаго интеграла, представляющаго полиномъ 2-го порядка. Одинъ, требующій существованія трехъ условій между постоянными задачи, данъ въ цитированномъ выше сочиненіи В. А. Стекловымъ, другой предложенъ впервые въ настоящей работѣ и требуетъ для своего существованія выполненія четырехъ условій между данными задачи.

§ 14. О дифференціальныхъ уравненіяхъ движенія твердаго тѣла въ жидкости.

Дана система [1]):

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= x_2 \frac{\partial T}{\partial y_3} - x_3 \frac{\partial T}{\partial y_2} \\
\frac{dx_2}{dt} &= x_3 \frac{\partial T}{\partial y_1} - x_1 \frac{\partial T}{\partial y_3} \\
\frac{dx_3}{dt} &= x_1 \frac{\partial T}{\partial y_2} - x_2 \frac{\partial T}{\partial y_1}
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= x_2 \frac{\partial T}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial T}{\partial x_2} + y_2 \frac{\partial T}{\partial y_3} - y_3 \frac{\partial T}{\partial y_2} \\
\frac{dy_2}{dt} &= x_3 \frac{\partial T}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial T}{\partial x_3} + y_3 \frac{\partial T}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial T}{\partial y_3} \\
\frac{dy_3}{dt} &= x_1 \frac{\partial T}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial T}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial T}{\partial y_2} - y_2 \frac{\partial T}{\partial y_1}
\end{aligned} \tag{2}$$

гдѣ подъ T мы подразумѣваемъ слѣдующій полиномъ 2-го порядка:

$$T \equiv S\,[b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + 2b_{24}(x_1y_2 + y_1x_2) + 2b_{14}x_1y_1 + b_{44}y_1^2].$$

Знакъ S обозначаетъ, что вмѣсто каждаго члена заключеннаго въ прямыя скобки надо взять сумму трехъ, которые получаются вслѣдствіе перемѣны индексовъ у постоянныхъ и перемѣнныхъ помощью круговыхъ подстановокъ (123), (456). Такъ напр.:

$$Sb_{24}(x_1y_2 + y_1x_2) \equiv b_{24}(x_1y_2 + y_1x_2) + b_{35}(x_2y_3 + y_2x_3) + b_{16}(x_3y_1 + y_3x_1).$$

Прежде всего замѣтимъ, что дифференціальныя уравненія (1) и (2) не измѣнятся, если вмѣсто T положить въ нихъ:

$$T + \varrho_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \varrho_2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3), \tag{3}$$

гдѣ ϱ_1 и ϱ_2 произвольно взятыя постоянныя.

Условимся обозначать для краткости полиномы $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ и $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ соотвѣтственно черезъ U и V.

---

[1]) В. А. Стекловъ. О движеніи твердаго тѣла въ жидкости. Харьковъ. 1893, стр. 35, 36, 89, 92—107.

Интегралы системы (1) и (2), независящіе отъ времени, опредѣляются при помощи слѣдующаго дифференціальнаго уравненія въ частныхъ производныхъ 1-го порядка:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x_1} & \frac{\partial T}{\partial y_1} & x_1 \\ \frac{\partial z}{\partial x_2} & \frac{\partial T}{\partial y_2} & x_2 \\ \frac{\partial z}{\partial x_3} & \frac{\partial T}{\partial y_3} & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial y_1} & \frac{\partial T}{\partial x_1} & x_1 \\ \frac{\partial z}{\partial y_2} & \frac{\partial T}{\partial x_2} & x_2 \\ \frac{\partial z}{\partial y_3} & \frac{\partial T}{\partial x_3} & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial y_1} & \frac{\partial T}{\partial y_1} & y_1 \\ \frac{\partial z}{\partial y_2} & \frac{\partial T}{\partial y_2} & y_2 \\ \frac{\partial z}{\partial y_3} & \frac{\partial T}{\partial y_3} & y_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

Это уравненіе допускаетъ интеграломъ кромѣ полиномовъ U и V еще и T. Какъ показали изслѣдованія A. Clebsch'a, В. А. Стеклова и А. М. Ляпунова [1]), при извѣстныхъ условіяхъ относительно коэффиціентовъ полинома T существуетъ и четвертый интегралъ въ видѣ полинома φ второго порядка.

Если мы подставимъ φ вмѣсто z, то получимъ тождество, въ которомъ можно перемѣнить φ на T и T на φ; другими словами, если въ уравненіе (4) вмѣсто полинома T подставимъ полиномъ φ, то онъ будетъ имѣть тѣ же четыре интеграла. Точно также тѣ же четыре интеграла будетъ имѣть и уравненіе, получаемое изъ уравненія (4) подстановкой въ него вмѣсто T полинома $\alpha T + \alpha_1 \varphi$, гдѣ α и α_1 произвольныя постоянныя.

Въ дальнѣйшемъ займемся слѣдующей задачей: опредѣлить два такихъ полинома второго порядка φ и T, которые удовлетворяютъ тождеству:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial T}{\partial y_1} & x_1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial T}{\partial y_2} & x_2 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} & \frac{\partial T}{\partial y_3} & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} & \frac{\partial T}{\partial x_1} & x_1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} & \frac{\partial T}{\partial x_2} & x_2 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} & \frac{\partial T}{\partial x_3} & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} & \frac{\partial T}{\partial y_1} & y_1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} & \frac{\partial T}{\partial y_2} & y_2 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} & \frac{\partial T}{\partial y_3} & y_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

Если мы найдемъ пару такихъ полиномовъ φ и T, то согласно предыдущему и полиномы $\alpha T + \alpha_1\varphi + \alpha_2 U + \alpha_3 V$ и $\beta T + \beta_1 \varphi + \beta_2 U + \beta_3 V$ будутъ представлять такую же пару, каково бы ни было значеніе постоянныхъ α, α_1, α_2, α_3, β, β_1, β_2, β_3. Можно воспользоваться произвольностью шести изъ этихъ постоянныхъ, чтобы найти наиболѣе простыя рѣшенія, которыя тѣмъ не менѣе дали бы самое общее рѣшеніе.

---

[1]) Mathematische Annalen. B. III. s. 238, B. 42, s. 273., Сообщенія Харьковскаго Математическаго Общества, 2-я серія т. III, стр. 263, т. IV, стр. 81.

Рѣшеніе этой задачи начнемъ съ самаго простого случая, когда φ представляетъ собой квадратъ линейнаго полинома: $\psi \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3$.

По подстановкѣ вмѣсто полинома φ ψ^2 въ тождество (5) получимъ для опредѣленія полинома T такое уравненіе:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial T}{\partial x_1} & b_1 & x_1 \\ \frac{\partial T}{\partial x_2} & b_2 & x_2 \\ \frac{\partial T}{\partial x_3} & b_3 & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial T}{\partial y_1} & a_1 & x_1 \\ \frac{\partial T}{\partial y_2} & a_2 & x_2 \\ \frac{\partial T}{\partial y_3} & a_3 & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial T}{\partial y_1} & b_1 & y_1 \\ \frac{\partial T}{\partial y_2} & b_2 & y_2 \\ \frac{\partial T}{\partial y_3} & b_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (6)$$

Это уравненіе допускаетъ два интеграла, зависящихъ только отъ x_i, во первыхъ U, во вторыхъ $\psi_1 \equiv b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$.

Безъ особаго труда можно показать, что дифференціальное уравненіе (6) въ частныхъ производныхъ относительно T не будетъ имѣть другихъ линейныхъ интеграловъ кромѣ ψ и ψ_1, если только хоть одна изъ постоянныхъ b_i отлична отъ нуля.

Въ томъ же случаѣ, когда $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, уравненіе (6) приметъ видъ:

$$(a_2 x_3 - a_3 x_2) \frac{\partial T}{\partial y_1} + (a_3 x_1 - a_1 x_3) \frac{\partial T}{\partial y_2} + (a_1 x_2 - a_2 x_1) \frac{\partial T}{\partial y_3} = 0.$$

Это уравненіе будетъ имѣть четыре линейныхъ интеграла $a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3$, x_1, x_2, x_3, кромѣ того извѣстенъ пятый интегралъ V и общее выраженіе для полинома T будетъ въ этомъ случаѣ слѣдующимъ:

$$\alpha (a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3)^2 + \alpha_1 V + \varphi_1(x),$$

гда $\varphi_1(x)$ произвольный однородный полиномъ перемѣнныхъ x_i второго порядка.

Перейдемъ затѣмъ къ случаю, когда напр. хотя бы постоянная b_1 не равнялась нулю.

Допустимъ сначала, что полиномъ T не имѣетъ членовъ второго измѣренія въ перемѣнныхъ y_i. Тогда этотъ полиномъ будетъ имѣть видъ:

$$y_1 U_1 + y_2 U_2 + y_3 U_3 + \Theta(x),$$

гдѣ $\Theta(x)$ — полиномъ второй степени относительно перемѣнныхъ x_i, а U_i — ихъ линейныя функціи.

Вмѣсто этого значенія полинома T удобнѣе разсматривать такое: $T + \sigma V_1 + \sigma\psi_1\psi$, т. е. вмѣсто полинома U_i въ выраженіи T будетъ стоять $U'_i \equiv U_i + \sigma x_i + \sigma_1 b_i \psi_1$. Этими величинами σ и σ_1 мы можемъ воспользоваться позже для полученія болѣе простого результата.

Обозначимъ для краткости черезъ B операцію

$$B_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + B_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + B_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & b_1 & x_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & b_2 & x_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & b_3 & x_3 \end{vmatrix}$$

Подставляемъ первое значеніе полинома T въ равенство (6) и замѣчаемъ, что оно должно быть тождествомъ при всѣхъ возможныхъ величинахъ перемѣнныхъ y_i. Поэтому, приравнивая нулю коэффиціенты при первыхъ степеняхъ перемѣнныхъ y_i и независящій отъ нихъ членъ, получаемъ:

$$\begin{aligned} BU_1 + b_3 U_2 - b_2 U_3 &= 0 \\ BU_2 + b_1 U_3 - b_3 U_1 &= 0 \\ BU_3 + b_2 U_1 - b_1 U_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (7)$$

$$B\Theta + \begin{vmatrix} U_1 & a_1 & x_1 \\ U_2 & a_2 & x_2 \\ U_3 & a_3 & x_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (8)$$

Умножая три уравненія (7) соотвѣтственно на b_1, b_2, b_3 и складывая, получаемъ:

$$B(b_1 U_1 + b_2 U_2 + b_3 U_3) = 0. \qquad (9)$$

Умножая ихъ же на x_1, x_2, x_3 и складывая результаты, послѣ легкихъ вычисленій убѣждаемся, что имѣемъ

$$B(x_1 U_1 + x_2 U_2 + x_3 U_3) = 0. \qquad (10)$$

Наконецъ, умноживъ ихъ послѣдовательно на B_1, B_2, B_3 и складывая, точно также безъ труда получаемъ:

$$B(B_1 U_1 + B_2 U_2 + B_3 U_3) = 0. \qquad (11)$$

Такъ какъ интегралы уравненія

$$Bz = 0,$$

равны ψ_1 и U, то изъ трехъ уравненій (9), (10) и (11) мы получаемъ:

$$\begin{aligned} b_1 U_1 + b_2 U_2 + b_3 U_3 &= \lambda_1 \psi_1 \\ x_1 U_1 + x_2 U_2 + x_3 U_3 &= \lambda_2 U + \lambda_3 \psi_1^2 \\ B_1 U_1 + B_2 U_2 + B_3 U_3 &= \lambda_4 U + \lambda_5 \psi_1^2. \end{aligned} \tag{12}$$

Полиномы U_1', U_2', U_3' будутъ удовлетворять тѣмъ же уравненіямъ (7), а потому имѣемъ точно также:

$$\begin{aligned} b_1 U_1' + b_2 U_2' + b_3 U_3' &= \lambda_1' \psi_1 \\ x_1 U_1' + x_2 U_2' + x_3 U_3' &= \lambda_2' U + \lambda_3' \psi_1^2 \\ B_1 U_1' + B_2 U_2' + B_3 U_3' &= \lambda_4' U - \lambda \psi_1^2 \end{aligned}$$

Но полиномы U_i' выражаются линейно черезъ U_i, x_i и ψ_1. Подставляя въ только что полученныя равенства эти выраженія, мы найдемъ

$$\begin{aligned} b_1 U_1 + b_2 U_2 + b_3 U_3 &= [\lambda_1' - \sigma - \sigma_1 (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)] \psi_1 \\ x_1 U_1 + x_2 U_2 + x_3 U_3 &= (\lambda_2' - \sigma) U + (\lambda_3' - \sigma_1) \psi_1^2 \\ B_1 U_1 + B_2 U_2 + B_3 U_3 &= \lambda_4' U - \lambda \psi_1^2. \end{aligned}$$

Сравнивая полученныя равенства съ равенствами (12), мы видимъ между прочимъ, что

$$\lambda_2' - \sigma = \lambda_2, \quad \lambda_3' - \sigma_1 = \lambda_3, \quad \lambda_4' = \lambda_4, \quad -\lambda = \lambda_5$$

Отсюда видно, что достаточно дать произвольнымъ до сихъ поръ величинамъ σ и σ_1 значенія $-\lambda_2$ и $-\lambda_3$, чтобы величины λ_2' и λ_3' равнялись нулю.

Опредѣлитель уравненій (13) относительно U_i' равенъ полиному $(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) U - \psi_1^2$, отличному отъ нуля; поэтому они дадутъ опредѣленныя функціи для U_i'. Эти функціи будутъ раціональными дробями, если только постоянная λ_1' не равна нулю, а λ_4' не равна $\lambda (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ раціональныя дроби оказываются сократимыми, и мы получаемъ, что полиномъ U_i' равенъ λB_i, т. е.:

$$U_i' = U_i - \lambda_2 x_i - \lambda_3 b_i \psi_1 = \lambda B_i,$$

откуда будемъ имѣть окончательно:

$$U_i = \lambda B_i + \lambda_2 x_i + \lambda_3 b_i \psi_1$$
$$i = 1, 2, 3.$$

Переходимъ къ опредѣленію полинома Θ', удовлетворяющаго, какъ и полиномъ Θ уравненію типа (8). Подставляя въ него только что найденныя значенія полиномовъ U_i', получаемъ:

$$B\Theta' = -\lambda(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\,U + \lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)\,\varphi_1. \tag{14}$$

Производя операцію B надъ произвольнымъ полиномомъ второго порядка, получаемъ въ результатѣ опять полиномъ 2-го порядка, но такой, у котораго сумма коэффиціентовъ при членахъ x_1^2, x_2^2, x_3^2 равна нулю. Поэтому въ равенствѣ (14) полиномъ, находящійся во второй части, долженъ обладать тѣмъ-же свойствомъ, а потому

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0. \tag{15}$$

Это условіе оказывается достаточнымъ для возможности интеграціи, и мы получаемъ изъ уравненія (14) при постоянной $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$ отличной отъ нуля;

$$\Theta = \lambda\frac{(x_1b_2a_3)}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}\psi_1 + \lambda_4 U + \lambda_5\psi_1^2.$$

Отсюда:

$$\Theta = \lambda\frac{(x_1b_2a_3)}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}\psi_1 + \lambda_3(a_1x_1 + a_3x_2 + a_3x_3)\,\psi_1 + \lambda_4 U + \lambda_5\psi^2{}_1.$$

Складывая выраженія $U_1y_1 + U_2y_2 + U_3y_3$ и Θ, получимъ искомый интегралъ. Въ своей простѣйшей формѣ при $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$ онъ напишется такъ:

$$\psi_2 \equiv (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)(y_1b_2x_3) + (x_1b_2a_3)\,\psi_1.$$

Итакъ при условіи (15) уравненіе (6) будетъ имѣть пять независимыхъ между собою интеграловъ U, V, ψ, ψ_1, ψ_2.

Въ исключенномъ нами случаѣ $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 0$ потребуются въ формулахъ небольшія измѣненія, на которыхъ мы останавливаться не будемъ.

Перейдемъ теперь къ общему случаю, когда искомый интегралъ имѣетъ члены второго измѣренія въ перемѣнныхъ y_i. Положивъ въ уравненіи (6) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, получимъ такое:

$$\frac{\partial T_0}{\partial y_1}(b_2y_3 - b_3y_2) + \frac{\partial T_0}{\partial y_2}(b_3y_1 - b_1y_3) + \frac{\partial T_0}{\partial y_3}(b_1y_2 - b_2y_1) = 0,$$

гдѣ T_0—часть полинома T, зависящая только отъ y_1, y_2, y_3. Поэтому, интегрируя это уравненіе, мы заключаемъ, что

$$T_0 = \alpha(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + \alpha_1(b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3)^2.$$

Вычтя изъ интеграла T $\alpha_1\psi^2$, мы представимъ его въ эквивалентной формѣ:

$$y_1^2+y_2^2+y_3^2+W_1y_1+W_2y_2+W_3y_3+\varphi_1\,,$$

гдѣ W и φ_1—полиномы 1-го и 2-го порядка однихъ перемѣнныхъ x_i.

Нетрудно убѣдиться, что полиномы W_i удовлетворяютъ такимъ уравненіямъ:

$$BW_1+(W_2b_3-W_3b_2)+2(a_2x_3-a_3x_2)=0\,,$$
$$BW_2+(W_3b_1-W_1b_3)+2(a_3x_1-a_1x_3)=0\,,$$
$$BW_3+(W_1b_3-W_2b_1)+2(a_1x_2-a_2x_1)=0\,.$$

Умножая эти уравненія соотвѣтственно на B_1, B_2 и B_3 и складывая, получаемъ:

$$B(B_1W_1+B_2W_2+B_3W_3)+2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\,U-$$
$$-2(a_1x_1+a_3x_2+a_3x_3)\,\psi_1=0\,.$$

Отсюда такъ же, какъ изъ уравненія (14) выводимъ условіе (15).

Но тогда уравненіе (6) имѣетъ пять независимыхъ алгебраическихъ интеграловъ, и слѣдовательно искомый интегралъ будетъ ихъ функціей.

Дѣйствительно, прилагая правило умноженія детерминантовъ, получаемъ:

$$\psi_2{}^2=(\Sigma b_i{}^2)^2\begin{vmatrix}\Sigma y_i{}^2 & \Sigma b_iy_i & V\\ \Sigma b_iy_i & \Sigma b_i{}^2 & \psi\\ V & \psi_1 & U\end{vmatrix}+2\psi\Sigma b_i{}^2\begin{vmatrix}V & \Sigma b_iy_i & \Sigma a_iy_i\\ \psi_1 & \Sigma b_i{}^2 & 0\\ U & \psi_1 & \Sigma a_ix_i\end{vmatrix}+\psi_1{}^2\begin{vmatrix}U & \psi_1 & \Sigma a_ix_i\\ \psi_1 & \Sigma b_i{}^2 & 0\\ \Sigma a_ix_i & 0 & \Sigma a_i{}^2\end{vmatrix},$$

гдѣ всѣ суммы распространены по индексу i отъ 1 до 3 включительно.

Отбрасывая въ этомъ выраженіи соотвѣтствующимъ образомъ интегралы, мы можемъ достичь того, что останется произведеніе выраженія $U\Sigma b_1{}^2-\psi_1{}^2$ на полиномъ:

$$\psi_3\equiv\Sigma y_i{}^2\Sigma b_i{}^2-2\Sigma b_ix_i\Sigma a_iy_i+2\Sigma b_iy_i\Sigma a_ix_i+(\Sigma a_ix_i)^2.$$

Конечно, если постоянная $\Sigma b_i{}^2$ равна нулю, то въ этомъ выраженіи надо произвести соотвѣтствующія измѣненія.

При помощи найденнаго выраженія для ψ_3, легко получить слѣдующее общее выраженіе для полинома T:

$$T\equiv\alpha\psi_3+\alpha_1\psi^2+\alpha_2\psi_2+\alpha_3V+\alpha_4\psi\psi_1+\alpha_5\psi_1{}^2+\alpha_6U.$$

Входящія въ него постоянныя должны быть подчинены кромѣ того условіямъ, при которыхъ этотъ полиномъ будетъ положительнымъ.

По подстановкѣ этого выраженія въ дифференціальныя уравненія (1) и (2), мы получимъ самый общій типъ ихъ, имѣющій четвертый линейный интегралъ. Они не будутъ зависѣть отъ постоянныхъ α_3 и α_6. Положить же ихъ въ выраженіи T равными нулю нельзя, такъ какъ этотъ полиномъ можетъ перестать быть положительнымъ.

Если мы прибавимъ еще тѣ условія, которымъ подчинилъ A. Clebsch видъ полинома T, то придемъ безъ труда къ найденному имъ случаю [1]).

Предположимъ теперь, что полиномъ φ не можетъ быть приведеннымъ къ квадрату линейной функціи. Полагаемъ въ тождествѣ (5) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ и получаемъ:

$$\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y_1}\,\frac{\partial T_0}{\partial y_2}\,y_3\right) = 0\,,$$

гдѣ φ_0 и T_0 члены полиномовъ φ и T, зависящіе только отъ перемѣнныхъ y_i. Отсюда получаемъ тождество:

$$\alpha\varphi_0 + \alpha_1 T_0 + \alpha_2(y_1{}^2 + y_2{}^2 + y_3{}^2) = 0\,.$$

Если мы за T возьмемъ выраженіе, данное для уравненій (1) и (2), то можемъ ограничиться для φ двумя случаями $\alpha_2 + \alpha = 0$, и $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Мы остановимся на первомъ случаѣ и положимъ слѣдовательно:

$$\varphi \equiv y_1{}^2 + y_2{}^2 + y_3{}^2 + 2\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_i y^j + \varphi_1.$$

Предположимъ кромѣ того, что между коэффиціентами b_{44}, b_{55}, b_{66} существуетъ пара неравныхъ. Разсматривая вмѣсто T $T + \sigma\varphi + \sigma_1 V$, а вмѣсто φ $\varphi + \sigma_2 V$, можемъ предположить при надлежащемъ выборѣ σ, σ_1 и σ_2, что

$$b_{44}' + b_{55}' + b_{66}' = 0\,, \tag{16}$$

$$b_{14}' + b_{25}' + b_{36}' = 0\,, \tag{17}$$

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0. \tag{18}$$

Подставивъ въ дифференціальныя уравненія (1) и (2) φ вмѣсто T, получимъ дифференціальныя уравненія, вторыя части которыхъ обращаются въ нуль при $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Слѣдовательно они будутъ имѣть безконечное число особенныхъ точекъ, заключающихся въ формулѣ 0, 0, 0, c_1, c_2, c_3, гдѣ c_1, c_2, c_3 — какія угодно постоянныя.

---

[1]) Mathematische Annalen. B. III. s. 248.

Положимъ:

$$U_j = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}\, x_i\,, \quad V_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\, y_j\,, \quad 2\varphi_{1i} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}\,.$$

Тогда полиномъ T будетъ интеграломъ такого дифференціальнаго уравненія въ частныхъ производныхъ:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial T}{\partial x_1} & y_1 + U_1 & x_1 \\ \frac{\partial T}{\partial x_2} & y_2 + U_2 & x_2 \\ \frac{\partial T}{\partial x_3} & y_3 + U_3 & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial T}{\partial y_1} & V_1 + \varphi_{11} & x_1 \\ \frac{\partial T}{\partial y_2} & V_2 + \varphi_{12} & x_2 \\ \frac{\partial T}{\partial y_3} & V_3 + \varphi_{13} & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial T}{\partial y_1} & U_1 & y_1 \\ \frac{\partial T}{\partial y_2} & U_2 & y_2 \\ \frac{\partial T}{\partial y_3} & U_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0\,. \quad (19)$$

Для полученія интеграла T можно воспользоваться полярными операціями вида

$$c_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + c_3 \frac{\partial}{\partial y_3}\,.$$

Подставивъ вмѣсто T его значеніе, беремъ отъ полученнаго тождества вторую производную по перемѣнной y_1 и получаемъ:

$$x_2 \frac{\partial^2 T}{\partial y_1 \partial x_3} - x_3 \frac{\partial^2 T}{\partial y_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 T}{\partial {y_1}^2}(a_{21} x_3 - a_{31} x_2) = 0\,.$$

Отсюда слѣдуетъ: $b_{16}' = b_{44}' a_{31}$, $b_{24}' = b_{44}' a_{21}$ или $b_{16} = b_{44} a_{31}$, $b_{24} = b_{44} a_{21}$.

Беря вторыя производныя отъ нашего тождества по y_2, y_3, получимъ тѣмъ же путемъ:

$$b_{16} = b_{44} a_{31} = b_{66} a_{13}\,, \quad b_{24} = b_{44} a_{21} = b_{55} a_{12}\,, \quad b_{35} = b_{66} a_{23} = b_{55} a_{32}\,. \quad (20)$$

Подвергнувъ тѣ-же тождества два раза операціи $\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2}$, получимъ въ лѣвой части его выраженіе, составленное изъ суммы трехъ: двухъ, полученныхъ дифференцированіемъ нашего тождества два раза по y_1 и y_2, слѣдовательно равныхъ нулю и третьяго, удвоенной второй частной производной лѣвой части этого тождества по перемѣннымъ y_1 и y_2, которая также должна быть равной нулю; такимъ образомъ имѣемъ:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y_2 \partial x_3} x_2 - \frac{\partial^2 T}{\partial y_2 \partial x_2} x_3 + \frac{\partial^2 T}{\partial y_1 \partial x_1} x_3 - \frac{\partial^2 T}{\partial y_1 \partial x_3} x_1 + \frac{\partial^2 T}{\partial {y_1}^2} (a_{22} x_3 - a_{32} x_2) +$$
$$+ \frac{\partial^2 T}{\partial {y_2}^2} (a_{31} x_1 - a_{11} x_3) + U_3 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial {y_2}^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial {y_1}^2} \right) = 0 .$$

Это тождество распадается на три слѣдующихъ:

$$\left.\begin{aligned} & -b_{16}' + b_{55}' a_{31} + a_{13} (b_{55}' - b_{44}') = 0 , \\ & b_{35}' - b_{44}' a_{32} + a_{23} (b_{55}' - b_{44}') = 0 , \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$$-b_{25}' + b_{14}' + b_{44}' a_{22} - b_{55}' a_{11} + a_{33} (b_{55}' - b_{44}') = 0 . \tag{22}$$

При помощи формулъ (20) условія (21) принимаютъ видъ: $(a_{31} + a_{13})$ $(b_{55} - b_{44}) = 0$, $(a_{23} + a_{32})(b_{55} - b_{44}) = 0$.

Вычисляя вторыя частныя производныя лѣвой части нашего тождества по перемѣннымъ y_2 и y_3, а затѣмъ по перемѣннымъ y_1 и y_3, получаемъ:

$$(a_{31} + a_{13})(b_{66} - b_{55}) = 0 , \quad (a_{12} + a_{21})(b_{66} - b_{55}) = 0 ,$$
$$(a_{12} + a_{21})(b_{44} - b_{66}) = 0 , \quad (a_{23} + a_{32})(b_{44} - b_{66}) = 0 ,$$

$$\left.\begin{aligned} & -b_{36}' + b_{25}' + b_{55}' a_{33} - b_{66}' a_{22} + a_{11} (b_{66}' - b_{55}') = 0 \\ & -b_{14}' + b_{36}' + b_{66}' a_{11} - b_{44}' a_{33} + a_{22} (b_{44}' - b_{66}') = 0 . \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Полученныя равенства совмѣстно съ равенствами (21) приводятъ къ такимъ:

$$a_{31} + a_{13} = 0 , \quad a_{12} + a_{21} = 0 , \quad a_{23} + a_{32} = 0 . \tag{24}$$

Кромѣ того постоянныя $b_{44} + b_{55}$, $b_{44} + b_{66}$, $b_{55} + b_{66}$, какъ величины по предположенію положительныя, не равны нулю. Поэтому, сравнивая условія (24) и (20), получаемъ:

$$a_{13} = a_{31} = a_{12} = a_{21} = a_{23} = a_{32} = b_{16} = b_{24} = b_{35} = 0 .$$

Складывая равенства (22) и (23), получаемъ

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{11} & b_{44}' \\ 1 & a_{22} & b_{55}' \\ 1 & a_{33} & b_{66}' \end{vmatrix} = 0 .$$

Отсюда въ связи съ условіями (16) и (18) получаемъ:

$$a_{11} = \lambda b_{44}', \quad a_{22} = \lambda b_{55}', \quad a_{33} = \lambda b_{66}'.$$

Если положимъ въ этихъ формулахъ $\lambda = 0$, то послѣ соотвѣтствующихъ вычисленій придемъ къ III случаю A. Clebsch'a [1]). Мѣняя роль полиномовъ φ и T, получаемъ его I случай [2]). Принимая же постоянную λ отличной отъ нуля, приходимъ къ формѣ живой силы, данной впервые В. А. Стекловымъ [3]).

Мѣняя роль полиномовъ φ и T, придемъ къ случаю, указанному впервые А. М. Ляпуновымъ [4]).

Что-же касается полинома $T + \lambda\varphi$, то онъ не дастъ ничего новаго, такъ какъ получается изъ T, если замѣнимъ постоянныя b_{44}, b_{55}, b_{66} соотвѣтственно черезъ $b_{44} + \lambda$, $b_{55}' + \lambda$, $b_{66} + \lambda$ и прибавимъ полиномъ $\beta U + \beta_1 V$, гдѣ β и β_1 надлежаще выбранныя постоянныя.

---

1) Mathematische Annalen. B. III, s. 260.

2) Ibidem. s 256.

3) Сообщенія Харьковскаго Математическаго Общества, 2-я серія, т. III, стр. 231.

4) Ibidem. T. IV, стр. 81.