Sur la recherche des solutions particulières de l'équation de Laplace.

Par A. Friedmann.

Soit

$$\triangle V = O$$

l'équation de Laplace; transformons cette équation en coordonnées curvilignes orthogonales $\varrho, \varrho_1, \varrho_2$.

Lamé et puis M. Darboux et M. Wangerin [1]) ont indiqué les transformations pour lesquelles le potentiel V a la forme particulière:

$$V = f(\varrho) f_1(\varrho_1) f_2(\varrho_2),$$

ou même

$$V = \lambda(\varrho, \varrho_1, \varrho_2) f(\varrho) f_1(\varrho_1) f_2(\varrho_2),$$

où $f(\varrho)$, $f_1(\varrho_1)$, $f_2(\varrho_2)$ satisfont aux équations différentielles ordinaires du second ordre, $\lambda(\varrho, \varrho_1, \varrho_2)$ étant une fonction ne contenant aucune constante arbitraire.

Ainsi il est naturel de généraliser les recherches classiques mentionnées plus haut et de poser, comme le fait M. Stekloff [2]), le problème suivant:

---

[1]) *Lamé*. Leçons sur les coordonnées curvilignes. Paris, 1859.

Darboux. Leçons sur les systèmes orthog. et les coord. curvilignes. Paris, 1898. Voir aussi les mém. de M. Darboux dans Ann. Ec. Norm. Sup. 1866, 1878.

Wangerin. Monatsber. d. Berl. Akad. 1878, p. 152.

Haentzschel. Studien über die Reduction der Potentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen. Berlin, 1893.

[2]) *В. А. Стекловъ*. Общіе методы рѣшенія основныхъ задачъ математической физики. Харьковъ. 1901, с. 242.

Trouver toutes les transformations orthogonales x, y, z en $\varrho, \varrho_1, \varrho_2$ telles que l'équation

(A) $$\triangle V = 0$$

admette les solutions de la forme

(B) $$V = f(\varrho)\, V_1(\varrho_1, \varrho_2).$$

On sait que dans la théorie de l'équation de Laplace les fonctions dites fondamentales jouent le rôle prépondérant. Ainsi la recherche des méthodes pour construire ces fonctions est un problème important. Si l'equation (A) admet les solutions du type (B), parmi ces solutions on peut trouver parfois des fonctions fondamentales pour la surface $\varrho = \text{const}$ et même un système complet de ces fonctions.

En réalité, pour les surfaces du second ordre on peut mettre le potentiel V sous la forme (B) et on peut trouver par cette méthode les fonctions fondamentales pour les surfaces mentionnées. Citons, par exemple, les fonctions sphériques, les fonctions de Bessel et celles de Lamé.

Notre travail sera consacré à la résolution du problème général, mentionné plus haut, c'est-à-dire à la recherche des cas pour lesquels le potentiel V a la forme (B).

§ 1.

1. Transformons l'équation de Laplace

(1) $$\triangle V = 0$$

en coordonnées orthogonales $\varrho, \varrho_1, \varrho_2$.

Introduisons avec Lamé les fonctions H, H_1, H_2, dites les *coefficients de Lamé*, de la manière suivante:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = H^2 d\varrho^2 + H_1^2 d\varrho_1^2 + H_2^2 d\varrho_2^2.$$

L'équation (1) transformée en $\varrho, \varrho_1, \varrho_2$ sera, comme on sait,

(2) $$\frac{\partial \alpha \dfrac{\partial V}{\partial \varrho}}{\partial \varrho} + \frac{\partial \alpha_1 \dfrac{\partial V}{\partial \varrho_1}}{\partial \varrho_1} + \frac{\partial \alpha_2 \dfrac{\partial V}{\partial \varrho_2}}{\partial \varrho_2} = 0,$$

où

(3) $$\alpha = \frac{H_1 H_2}{H}, \quad \alpha_1 = \frac{H H_2}{H_1}, \quad \alpha_2 = \frac{H H_1}{H_2}.$$

Si cette équation admet la solution de la forme:

$$V = f(\varrho)\, V_1(\varrho_1, \varrho_2), \tag{4}$$

il est évident, que $f(\varrho)$ satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre. Moyennant la transformation qui n'altère ni l'orthogonalité, ni la forme (4), on peut mettre cette équation sous la forme:

$$f'' = \psi(\varrho) f. \tag{5}$$

Nous considérons d'abord le cas où $\psi(\varrho)$ diffère de zéro. Le cas contraire sera examiné plus loin. Nous allons introduire cette condition restrictive dans notre problème général: supposons, avec M. Dall'Acqua [1]), que *chacune des quantités*

$$\frac{f'}{f}, \quad \frac{\partial \lg V_1}{\partial \varrho_1}, \quad \frac{\partial \lg V_1}{\partial \varrho_2},$$

contienne une constante arbitraire, ne dépendant pas des constantes de deux autres.

A l'aide de cette condition et de la formule (5) nous aurons:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \varrho} = 0, \tag{6}$$

et la fonction V_1 satisfera à une ou à plusieurs équations de la forme

$$\frac{\partial \alpha_1 \dfrac{\partial V_1}{\partial \varrho_1}}{\partial \varrho_1} + \frac{\partial \alpha_2 \dfrac{\partial V_1}{\partial \varrho_1}}{\partial \varrho_2} + \alpha \psi(\varrho) V_1 = 0. \tag{7}$$

Nous avons deux cas à distinguer:

1) V_1 satisfait *seulement* à une équation de la forme (7) où il faut considérer ϱ comme une constante; toutes les autres équations possibles de la forme (7) sont linéairement dépendantes de cette équation;

2) V_1 satisfait *au moins* à deux équations de la forme (7) linéairement indépendantes entre elles.

Faisons quelques conventions. Nous allons désigner pas les lettres latines majuscules A, B, C, G, F les fonctions de ϱ_1 et ϱ_2, par les lettres latines minuscules a, b, c les fonctions d'une seule ϱ, par la lettre grecque γ la fonction de ϱ et ϱ_1.

---

[1]) *Dall'Acqua.* Rendiconti della R. Accad. dei Lincei. 1908, p. 296.

Passons maintenant à la démonstration des quelques théorèmes importants pour notre but.

Théorème 1. *Si l'équation (2) admet la solution*

$$V = f(\varrho) V_1(\varrho_1, \varrho_2),$$

telle que f et V_1 satisfassent aux conditions de M. Dall'Acqua (p. 246) les coefficients de Lamé sont de la forme:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} H = Aa^2, \\ H_1 = Ba, \\ H_2 = Ca; \end{cases}$$

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} H = Ab^2(a+F)(a+G), \\ H_1 = Bb(a+F), \\ H_2 = Cb(a+G); \end{cases}$$

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} H = Ab^2a(a+F\gamma), \\ H_1 = Bb(a+F\gamma), \\ H_2 = Cba. \end{cases}$$

Considérons le premier cas où V_1 satisfait seulement à une équation du second ordre. Supposons que cette équation soit

$$\text{(8)} \qquad \varepsilon \frac{\partial^2 V_1}{\partial \varrho_1^2} + \eta \frac{\partial^2 V_1}{\partial \varrho_2^2} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varrho_1} \frac{\partial V_1}{\partial \varrho_1} + \frac{\partial \eta}{\partial \varrho_2} \frac{\partial V_1}{\partial \varrho_2} + \omega V_1 = 0$$

où $\varepsilon = (\alpha_1)_{\varrho = \text{const.}}$, $\eta = (\alpha)_{\varrho = \text{const.}}$. Les formules (6) et (7) conduisent aux relations

$$\alpha_1 = \lambda \varepsilon, \ \alpha_2 = \lambda \eta, \ \frac{\partial \alpha_1}{\partial \varrho_1} = \lambda \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varrho_1}, \ \frac{\partial \alpha_2}{\partial \varrho_2} = \lambda \frac{\partial \eta}{\partial \varrho_2}, \ \alpha \psi(\varrho) = \lambda \omega,$$

λ étant une fonction de ϱ, ϱ_1, ϱ_2,
d'ou

$$\varepsilon \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_1} = 0, \quad \eta \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_2} = 0,$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_1} = 0, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_2} = 0.$$

On en conclut que (voir la formule (6)):

$$\alpha = \alpha(\varrho_1, \varrho_2), \ \alpha_1 = \lambda(\varrho) \varepsilon(\varrho_1, \varrho_2), \ \alpha_2 = \lambda(\varrho) \eta(\varrho_1, \varrho_2),$$

d'où les formules (I) découlent immédiatement.

Dans le deuxième cas on peut écrire les équations suivantes, auxquelles, d'après l'hypothèse faite, satisfait V_1:

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial \varrho_1^2} = \nu_1 \frac{\partial V_1}{\partial \varrho_1} + \nu_2 \frac{\partial V_1}{\partial \varrho_2} + \nu_3 V_1,$$

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial \varrho_2^2} = \mu_1 \frac{\partial V_1}{\partial \varrho_1} + \mu_2 \frac{\partial V_1}{\partial \varrho_2} + \mu_3 V_1.$$

Moyennant les conditions de M. Dall'Acqua on peut écrire, eu égard aux formules (6) et (7),

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \varrho} = 0,$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \alpha_1}{\partial \varrho_1} + \nu_1 \alpha_1 + \mu_1 \alpha_2 = 0, \\ (9) \qquad &\frac{\partial \alpha_2}{\partial \varrho_2} + \nu_2 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2 = 0, \\ &\psi(\varrho)\alpha + \nu_3 \alpha_1 + \mu_3 \alpha_2 = 0, \end{aligned}$$

Choisissant convenablement les fonctions $s_1(\varrho_1, \varrho_2)$ et $s_2(\varrho_1, \varrho_2)$ nous pouvons réduire les trois dernières des équations (9) à cette forme plus simple:

$$\alpha_1 = s_1(\varrho_1, \varrho_2) t_1, \quad \alpha_2 = s_2(\varrho_1, \varrho_2) t_2,$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial t_1}{\partial \varrho_1} + \bar{\mu}_1 t_2 = 0, \\ (10) \qquad &\frac{\partial t_2}{\partial \varrho_2} + \bar{\nu}_2 t_1 = 0, \\ &\psi(\varrho)\alpha + \bar{\nu}_3 t_1 + \bar{\mu}_3 t_2 = 0. \end{aligned}$$

Il est évident que $\bar{\nu}_3$ et $\bar{\mu}_3$ ne peuvent pas être égales à zéro simultanément. Ainsi il faut distinguer deux cas:

1) $\bar{\nu}_3$ ou $\bar{\mu}_3$ est égal à zéro,

2) $\bar{\nu}_3$ et $\bar{\mu}_3$ sont différents de zéro.

Dans le premier cas il suffit de supposer $\bar{\mu}_3 = 0$, $\bar{\nu}_3 \neq 0$, le cas contraire se déduise de celui-ci par la permutation des lettres ϱ_1 et ϱ_2. Dans ce cas nous aurons:

$$t_1 = -\psi(\varrho) \frac{\alpha}{\bar{\nu}_3}.$$

Si $\bar{\mu}_1 = 0$, $\bar{\nu}_2 = 0$,

$$\frac{\partial t_1}{\partial \varrho_1} = 0, \quad \frac{\partial t_2}{\partial \varrho_2} = 0, \quad t_1 = \psi(\varrho)\lambda_1(\varrho_2), \quad t_2 = \lambda_2(\varrho, \varrho_1),$$

si $\mu_1 = 0$, $\nu_2 \neq 0$,

$$\frac{\partial t_1}{\partial \varrho_1} = 0, \quad t_1 = \psi(\varrho)\lambda_1(\varrho_2), \quad t_2 = \psi(\varrho)\lambda_2(\varrho_2) + \lambda_3(\varrho, \varrho_1).$$

Un calcul simple prouve que ces deux suites de formules correspondent aux formules (III).

Si $\mu_1 \neq 0$, on aura:

$$t_2 = -\frac{\partial t_1}{\partial \varrho_1}\frac{1}{\mu_1}, \quad t_1 = \psi(\varrho)\lambda_1(\varrho_1, \varrho_2), \quad t_2 = \psi(\varrho)\lambda_2(\varrho_1, \varrho_2).$$

Ces équations conduisent aux formules (I).

Considérons à présent le cas où $\overline{\mu}_3$ et $\overline{\nu}_3$ sont différents de zéro A l'aide de la troisième des équations (10) on peut écrire:

$$\frac{\partial t_1}{\partial \varrho_1} + \omega_1 t_1 + \overline{\omega}_1 \psi(\varrho) = 0,$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial \varrho_2} + \omega_2 t_2 + \overline{\omega}_2 \psi(\varrho) = 0.$$

Il est facile de voir que

$$t_1 = n_1(\varrho_1, \varrho_2)\psi(\varrho) + \overline{n}_1(\varrho_1, \varrho_2)\vartheta_1(\varrho, \varrho_2),$$

$$t_2 = n_2(\varrho_1, \varrho_2)\psi(\varrho) + \overline{n}_2(\varrho_1, \varrho_2)\vartheta_2(\varrho, \varrho_1).$$

Substituons ces expressions dans la 3-me des équations (10), divisons les résultats par $\psi(\varrho)$ (différent de zéro) et différentions par rapport à ϱ. Nous aurons

$$\overline{\nu}_3 \overline{n}_1 \frac{\partial\left(\frac{\vartheta_1}{\psi}\right)}{\partial \varrho} + \overline{\mu}_3 \overline{n}_2 \frac{\partial\left(\frac{\vartheta_2}{\psi}\right)}{\partial \varrho} = 0.$$

Supposons d'abord que $\overline{n}_1$ et $\overline{n}_2$ soient différentes de zéro; on peut écrire:

$$\vartheta_1(\varrho, \varrho_2) = \psi(\varrho)\left(\zeta_1(\varrho_2)\,\vartheta(\varrho) + \tau_1(\varrho_2)\right),$$

$$\vartheta_2(\varrho, \varrho_1) = \psi(\varrho)\left(\zeta_2(\varrho_1)\,\vartheta(\varrho) + \tau_2(\varrho_1)\right),$$

d'où résultent immédiatement les formules (II) du théorème I.

La démonstration de ce théorème dans le cas où l'une des quantités $\overline{n}_1$ et $\overline{n}_2$ est égal à zéro ne présente aucune difficulté [1].

---

[1]) Les formes pour H, H_1, H_2 du théor. 1 se trouvent sans doute dans les formes données par M. Dall'Acqua (l. c.).

Théorème 2. *Les fonctions f et V_1 satisfont aux équations suivantes:*
Pour les formules (I):

$$(\mathrm{I}_1)\qquad \begin{cases} f'' = Ka^2 f \\ \dfrac{\partial p_1 \dfrac{\partial V_1}{\partial \varrho_1}}{\partial \varrho_1} + \dfrac{\partial p_2 \dfrac{\partial V_1}{\partial \varrho_2}}{\partial \varrho_2} + KpV_1 = 0 \end{cases}$$

où K est une constante arbitraire,

$$p = \frac{BC}{A}, \quad p_1 = \frac{AC}{B}, \quad p_2 = \frac{AB}{C}.$$

Pour les formules (II):

$$(\mathrm{II}_1)\qquad \begin{cases} f'' = b(K_1 a + K_2) f, \\ \dfrac{\partial p_1 \dfrac{\partial V_1}{\partial \varrho_1}}{\partial \varrho_1} + \dfrac{\partial p_2 \dfrac{\partial V_1}{\partial \varrho_2}}{\partial \varrho_2} + K_1 p V_1 = 0, \\ \dfrac{\partial p_1 G \dfrac{\partial V_1}{\partial \varrho_1}}{\partial \varrho_1} + \dfrac{\partial p_2 F \dfrac{\partial V_2}{\partial \varrho_2}}{\partial \varrho_2} + K_2 p V_1 = 0. \end{cases}$$

Pour les formules (III):

$$(\mathrm{III}_1)\qquad \begin{cases} f'' = Kaf, \\ \dfrac{\partial p_1 \dfrac{\partial V_1}{\partial \varrho_1}}{\partial \varrho_1} + \dfrac{\partial p_1 \dfrac{\partial V_1}{\partial \varrho_2}}{\partial \varrho_2} + KpV_1 = 0, \\ \dfrac{\partial p_2 F \dfrac{\partial V_1}{\partial \varrho_2}}{\partial \varrho_2} = 0, \end{cases}$$

où K, K_1, K_2 sont des constantes arbitraires,

$$p = \sqrt{\frac{BC}{A}}, \quad p_1 = \sqrt{\frac{AC}{B}}, \quad p_2 = \sqrt{\frac{AB}{C}}.$$

La démonstration du premier cas est très simple.
L'équation principale (2), dans le deuxième cas, peut s'écrire:

$$\frac{f''(\varrho)}{f(\varrho)b(\varrho)} + \frac{a(\varrho)}{pV_1}\left(\frac{\partial p_1 \dfrac{\partial V_1}{\partial \varrho_1}}{\partial \varrho_1} + \frac{\partial p_2 \dfrac{\partial V_1}{\partial \varrho_2}}{\partial \varrho_2}\right) + \frac{1}{pV_1}\left(\frac{\partial p_1 G \dfrac{\partial V_1}{\partial \varrho_1}}{\partial \varrho_1} + \frac{\partial p_2 F \dfrac{\partial V_1}{\partial \varrho_2}}{\partial \varrho_2}\right) = 0,$$

où $a(\varrho)$ est différent de zero; dans le cas contraire les formules (II) coïncident avec les formules (I); pour démontrer le second cas du théorème, il suffit de différentier l'égalité précédente par rapport à ϱ_1 et ϱ_2 séparément, en tenant compte de ce que $a(\varrho)$ est différent de zéro.

Dans le troisième cas on peut écrire:

$$(11)\quad \frac{f''(\varrho}{f(\varrho)a(\varrho)}+\frac{1}{pV_1}\left(\frac{\partial p_1\frac{\partial V_1}{\partial\varrho_1}}{\partial\varrho_1}+\frac{\partial p_1\frac{\partial V_1}{\partial\varrho_2}}{\partial\varrho_2}\right)+\frac{\gamma(\varrho,\varrho_1)}{a(\varrho)}\cdot\frac{1}{pV_1}\cdot\frac{\partial p_2F\frac{\partial V_1}{\partial\varrho_2}}{\partial\varrho_2}=0$$

Il faut remarquer que γ ne peut pas avoir la forme:

$$\vartheta_1(\varrho_1)\,[\vartheta(\varrho)+a(\varrho)\zeta(\varrho_1)],$$

car dans le cas contraire les formules (III) se transforment en les formules (II), après une modification légère des notations.

Différentions l'égalité (11) par rapport à ϱ_2; on trouve en tenant compte de la remarque précédente:

$$\frac{1}{pV_1}\left(\frac{\partial p_1\frac{\partial V_1}{\partial\varrho_1}}{\partial\varrho_1}+\frac{\partial p_2\frac{\partial V_1}{\partial\varrho_2}}{\partial\varrho_2}\right)=\xi_1(\varrho_1),$$

$$\frac{1}{pV_1}\cdot\frac{\partial p_2F\frac{\partial V_1}{\partial\varrho_2}}{\partial\varrho_2}=\xi_1(\varrho_2),$$

$$\frac{f''}{f.a}+\xi_1(\varrho_1)+\frac{\gamma}{a}\,\xi_2(\varrho_2)=0.$$

C'est à dire:

$$\xi_2(\varrho_2)=0,\ \xi_1(\varrho_1)=-K,$$

où K désigne une constante arbitraire.

2. Démontrons maintenant le théorème suivant.

Théorème 3. *Si nous avons dans les formules (II)*

$$G=0,$$

F est indépendant de ϱ_2,

$$p=\lambda_1(\varrho_1)\lambda_2(\varrho_2),$$
$$p_1=\mu_1(\varrho_1)\mu_2(\varrho_2),$$
$$p_2=\nu_1(\varrho_1)\nu_2(\varrho_2),$$

à condition que:

$$\lambda_2(\varrho_2) = \mu_2(\varrho_2)\,;$$

deux cas peuvent se présenter:

1) ou les équations pour $V_1(II_1)$ sont incompatibles;

2) ou elles admettent les solutions de la forme $V_1 = \varphi_1(\varrho_1)\varphi_2(\varrho_2)$, φ_1, φ_2 étant des fonctions dont chacune satisfait à l'équation différentielle ordinaire du second ordre.

Dans le cas du théorème 3 les équations (II_1) peuvent s'écrire:

$$F\,\frac{\partial p_1 \dfrac{\partial V_1}{\partial \varrho_1}}{\partial \varrho_1} + (K_1F - K_2)p\,V_1 = 0,$$

$$F\,\frac{\partial p_2 \dfrac{\partial V_1}{\partial \varrho_2}}{\partial \varrho_2} + K_2 p\,V_1 = 0.$$

La première de ces équations donne:

$$V_1 = c_1(\varrho_2)u_1(\varrho_1) + c_2(\varrho_2)u_2(\varrho_1),$$

où u_1 et u_2 sont des solutions de cette équation, linéairement indépendantes.

Posons

$$\frac{K_2\lambda_1}{Fv_1} = \vartheta(\varrho_1).$$

On peut écrire:

$$(12)\quad u_1(\varrho_1)\left(\frac{dv_2c_1'(\varrho_2)}{d\varrho_2} + \vartheta(\varrho_1)\lambda_2c_1(\varrho_2)\right) + u_2(\varrho_1)\left(\frac{dv_2c_2'(\varrho_2)}{d\varrho_2} + \vartheta(\varrho_1)\lambda_2c_2(\varrho_2)\right) = 0$$

Différentions cette égalité par papport à ϱ_2 et considérons le déterminant:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dv_2c_1'(\varrho_2)}{d\varrho_2} + \vartheta(\varrho_1)\lambda_2c_1(\varrho_2), & \dfrac{dv_2c_2'(\varrho_2)}{d\varrho_2} + \vartheta(\varrho_1)\lambda_2c_2(\varrho_2) \\ \dfrac{d^2v_2c_1'(\varrho_2)}{d\varrho_2^2} + \vartheta(\varrho_1)\dfrac{d\lambda_2c_1(\varrho_2)}{d\varrho_2}, & \dfrac{d^2v_2c_2'(\varrho_2)}{d\varrho_2^2} + \vartheta(\varrho_1)\dfrac{d\lambda_2c_2(\varrho_2)}{d\varrho_2} \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant est un polynome quadratique par rapport à $\vartheta(\varrho_1)$ à coefficients indépendants de ϱ_1. Trois cas peuvent se présenter:

1) les équations (II_1) sont incompatibles [1],

2) $\vartheta(\varrho_1)$ est une constante,

[1] Il est inutile pour nous de considérer la solution $V_1 = 0$.

3) les coefficients de notre polynome sont égaux à zéro.

Les deux premiers cas démontrent le théorème. Le dernier donne la relation (coeff. de $[\vartheta(\varrho_1)]^2$ est $= 0$):

$$\frac{d \lg \lambda_2 c_2(\varrho_2)}{d\varrho_2} = \frac{d \lg \lambda_2 c_1(\varrho_2)}{d\varrho_2},$$

$$c_2(\varrho_2) = C c_1(\varrho_2),$$

où C est une constante, et l'égalité (12) devient:

$$\frac{dv_2 c_1'(\varrho_2)}{d\varrho_2} + \vartheta(\varrho_1)\lambda_2 c_1(\varrho_2) = 0$$

Donc, ou $\vartheta(\varrho_1)$ est une constante, ou les équations (II) sont incompatibles, $C.Q.F.D.$

Remarques. 1^0. Le théorème 3 a lieu si $F = 0$, G est indépendant de ϱ_2, $\lambda_1(\varrho_1) = \mu_1(\varrho_1)$ (au lieu de $\lambda_2(\varrho_2) = \mu_2(\varrho_2)$).

2^0. Le même théorème s'applique aux équations (III_1) pour le cas où F est différent de zéro; dans le cas $F = 0$, les formules (III) se réduisent aux formules (I).

Dans tous les cas du théorème 3, si l'équation de Laplace admet une solution de la forme: $V = f(\varrho) V_1(\varrho_1, \varrho_2)$, la fonction $V_1(\varrho_1, \varrho_2)$ se réduit nécessairement au produit $f_1(\varrho_1) f_2(\varrho_2)$.

§ 2.

1. Ce paragraphe sera consacré a l'intégration des équations pour H, H_1, H_2, dues à Lamé, dans lesquelles H, H_1, H_2 sont tirés des formules (I), (II), (III).

Ces équations, bien connues [1]), sont les suivantes:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial\varrho_1 \partial\varrho_2} - \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial\varrho_2} \cdot \frac{\partial H}{\partial\varrho_1} - \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial\varrho_1} \cdot \frac{\partial H}{\partial\varrho_2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial\varrho \partial\varrho_2} - \frac{1}{H} \cdot \frac{\partial H}{\partial\varrho_2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial\varrho} - \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial\varrho} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial\varrho_2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial\varrho \partial\varrho_1} - \frac{1}{H} \cdot \frac{\partial H}{\partial\varrho_1} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial\varrho} - \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial\varrho} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial\varrho_1} = 0,$$

---

[1]) Voir *Lamé*, Leçons sur les coordonnées curvilignes.

$$\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{1}{H_1}\cdot\frac{\partial H}{\partial \varrho_1}\right)+\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\frac{1}{H}\cdot\frac{\partial H_1}{\partial \varrho}\right)+\frac{1}{H_2^2}\cdot\frac{\partial H}{\partial \varrho_2}\cdot\frac{\partial H_1}{\partial \varrho_2}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{1}{H_2}\cdot\frac{\partial H}{\partial \varrho_2}\right)+\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\frac{1}{H}\cdot\frac{\partial H_2}{\partial \varrho}\right)+\frac{1}{H_1^2}\cdot\frac{\partial H}{\partial \varrho_1}\cdot\frac{\partial H_2}{\partial \varrho_1}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{1}{H_1}\cdot\frac{\partial H_2}{\partial \varrho_1}\right)+\frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{1}{H_2}\cdot\frac{\partial H_1}{\partial \varrho_2}\right)+\frac{1}{H^2}\cdot\frac{\partial H_1}{\partial \varrho}\cdot\frac{\partial H_2}{\partial \varrho}=0.$$

Nous allons appeler ces équations „équations de Lamé". En introduisant des nouvelles fonctions $h=H^2$, $h_1=H_1^2$, $h_2=H_2^2$, nous obtiendrons six relations, analogues à celles de Lamé, que nous allons appeler „équations de Lamé transformées". Dans plusieurs des cas qui vont suivre nous pouvons intégrer ces équations jusqu'à la fin, lorsque les expressions de H, H_1, H_2 ont la forme (I), (II) ou (III), mais pour abréger cette note nous indiquerons seulement quelques propriétés des intégrales de ces équations, propriétés, nécessaires pour le but de notre travail.

2. Les 1—3-me équations de Lamé pour H, H_1, H_2 définis par les formules (I) donnent deux cas:

1) $a=$ const., A, B, C satisfont à l'équation:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2}-\frac{1}{B}\cdot\frac{\partial B}{\partial \varrho_2}\cdot\frac{\partial A}{\partial \varrho_1}-\frac{1}{C}\cdot\frac{\partial C}{\partial \varrho_1}\cdot\frac{\partial A}{\partial \varrho_2}=0$$

2) $A=$ const.

Les trois autres équations pour le premier cas donnent (il est évident qu'on peut poser $a=1$):

$$\text{(IV)}\qquad \begin{cases} H=A, \\ H_1=B, \\ H_2=C, \end{cases}$$

où A, B, C satisfont aux équations:

$$\text{(IV}_1\text{)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 A}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2}-\dfrac{1}{B}\cdot\dfrac{\partial B}{\partial \varrho_2}\cdot\dfrac{\partial A}{\partial \varrho_1}-\dfrac{1}{C}\cdot\dfrac{\partial C}{\partial \varrho_1}\cdot\dfrac{\partial A}{\partial \varrho_2}=0, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 A}{\partial \varrho_1^2}-\dfrac{1}{B}\cdot\dfrac{\partial B}{\partial \varrho_1}\cdot\dfrac{\partial A}{\partial \varrho_1}+\dfrac{B}{C^2}\cdot\dfrac{\partial B}{\partial \varrho_2}\cdot\dfrac{\partial A}{\partial \varrho_2}=0, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 A}{\partial \varrho_2^2}-\dfrac{1}{C}\cdot\dfrac{\partial C}{\partial \varrho_2}\cdot\dfrac{\partial A}{\partial \varrho_2}+\dfrac{C}{B^2}\cdot\dfrac{\partial C}{\partial \varrho_1}\cdot\dfrac{\partial A}{\partial \varrho_1}=0, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\dfrac{1}{B}\cdot\dfrac{\partial C}{\partial \varrho_1}\right)+\dfrac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\dfrac{1}{C}\cdot\dfrac{\partial B}{\partial \varrho_2}\right)=0. \end{cases}$$

On peut remarquer que la dernière de ces équations est la condition d'intégrabilité de trois premières équations, où la fonction inconnue est A. L'intégration de ces équations en A (si B et C sont données) se ramène à deux équations linéaires du premier ordre et aux quadratures simples.

Dans le second cas la quatrième et la cinquième des équations de Lamé donnent:

$$\frac{d^2\frac{1}{a}}{d\varrho^2}=0,$$

d'où:

$$a=\frac{1}{\varkappa\varrho+\varkappa_1},$$

où $\varkappa$, $\varkappa_1$ sont des constantes.

Ainsi les équations de Lamé donnent:

$$(\mathrm{V})\qquad \left\{\begin{aligned} H&=\frac{1}{(\varkappa\varrho+\varkappa_1)^2},\\ H_1&=\frac{B}{\varkappa\varrho+\varkappa_1},\\ H_2&=\frac{C}{\varkappa\varrho+\varkappa_1},\end{aligned}\right.$$

où B et C satisfont à l'équation:

$$(\mathrm{V}_1)\qquad \frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left(\frac{1}{B}\cdot\frac{\partial C}{\partial\varrho_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\varrho_2}\left(\frac{1}{C}\cdot\frac{\partial B}{\partial\varrho_2}\right)+\varkappa^2 BC=0.$$

3. Substituons les h, h_1, h_2, tirées des formules (II) dans la première des équations de Lamé transformées. Nous obtenons une fonction rationnelle en a, mais a n'est pas une constante (les formules (II) coïncident, dans le cas contraire, avec les formules (I)), et par suite l'équation obtenue sera une identité par rapport à a; multiplions la par $(a+F)$ et $(a+G)$ séparément et posons $a=-F$, $a=-G$ respectivement; nous pouvons écrire:

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} A(G-F)\frac{\partial F}{\partial\varrho_1}\frac{\partial F}{\partial\varrho_2}&=0,\\ A(F-G)\frac{\partial G}{\partial\varrho_1}\frac{\partial G}{\partial\varrho_2}&=0.\end{aligned}\right.$$

Il faut distinguer deux cas, selon que F est égal à G ou non. Si $F=G$, on peut poser dans la première équation de Lamé $a=-G$; donc nous obtenons la relation:

$$\frac{\partial F}{\partial \varrho_1}\cdot\frac{\partial F}{\partial \varrho_2}=0.$$

Deux cas se présentent naturellement:

1) F est une fonction de ϱ_2 seulement,

2) F est une fonction de ϱ_1 seulement.

Faisons d'abord une remarque préliminaire. Sans altérer ni la forme spécifique de H, H_1, H_2, ni les conditions spéciales de notre problème, on peut faire les substitutions suivantes:

$$\begin{aligned}\varrho\ &=\varrho\,(\bar{\varrho}),\\ \varrho_1&=\varrho_1(\bar{\varrho}_1),\\ \varrho_2&=\varrho_2(\bar{\varrho}_2),\end{aligned}$$

où $\varrho(\bar{\varrho})$, $\varrho_1(\bar{\varrho}_1)$, $\varrho_2(\bar{\varrho}_2)$ sont des fonctions quelconques de ces arguments.

L'emploi de ces substitutions peut ramener les équations et les fonctions de notre problème à la forme la plus simple.

A l'aide de cette remarque nous pouvons supposer, que $F=\varrho_2$ pour le premier des deux cas précédents et que $F=\varrho_1$ pour le deuxième cas:

Désignons par Ω l'expression suivante

$$\Omega=\frac{\partial^2 A}{\partial\varrho_1\partial\varrho_2}-\frac{1}{2A}\cdot\frac{\partial A}{\partial\varrho_1}\cdot\frac{\partial A}{\partial\varrho_2}-\frac{1}{2B}\cdot\frac{\partial B}{\partial\varrho_2}\cdot\frac{\partial A}{\partial\varrho_1}-\frac{1}{2C}\cdot\frac{\partial C}{\partial\varrho_1}\cdot\frac{\partial A}{\partial\varrho_2}.$$

La première équation de Lamé nous donne pour le premier cas:

$$(\mathrm{V}_2)\qquad \begin{aligned}H\ &=Ab^2(a+\varrho_2)^2,\\ H_1&=Bb\,(a+\varrho_2),\\ H_2&=Cb\,(a+\varrho_2),\end{aligned}$$

et les relations:

$$\frac{\partial \lg\sqrt{A}}{\partial\varrho_1}=\frac{\partial \lg C}{\partial\varrho_1},$$

$$\Omega=0.$$

Les conditions pour le deuxième cas s'obtiennent en permutant les lettres ϱ_2 avec ϱ_1 et B avec C.

Si F est inégal à G, nous pouvons construire, en développant les conditions (13), un tableau concernant 16 cas; mais en réalité ces 16 cas ne sont pas tous essentiellement distincts les uns des autres; le nombre des cas distincts se ramène à six. L'un de ces cas peut s'écrire, après une modification légère des notations,

$$
\text{(VI)} \qquad \begin{aligned} H &= Aab, \\ H_1 &= Ba, \\ H_2 &= Cb. \end{aligned}
$$

Les autres cinq cas ainsi que le cas (V_2) se trouvent dans le tableau suivant.

№	Cas	Les conditions qui se découlent de la 1-re équation de Lamé (transf.)
1	$H^2 = Ab^2(a+\varrho_2)^2$ $H_1^2 = Bb(a+\varrho_2)$ $H_2^2 = Cb(a+\varrho_2)$	$\frac{\partial \lg \sqrt{A}}{\partial \varrho_1} = \frac{\partial \lg C}{\partial \varrho_1}$, $\Omega = 0$.
2	$H^2 = Ab^2a(a+\varrho_2)$ $H_1^2 = Bb(a+\varrho_2)$ $H_2^2 = Cba$	$\frac{\partial C}{\partial \varrho_1} = 0$, $\Omega = 0$.
3	$H^2 = Ab^2a(a+\varrho_2)$ $H_1^2 = Bba$ $H_2^2 = Cb(a+\varrho_2)$	$\frac{\partial \lg A}{\partial \varrho_1} = \frac{\partial \lg C}{\partial \varrho_1}$, $\Omega = 0$.
4	$H^2 = Ab^2(a+\varrho_2)(a+G(\varrho_2))$ $H_1^2 = Bb(a+\varrho_2)$ $H_2^2 = Cb(a+G(\varrho_2))$	$\frac{\partial A}{\partial \varrho_2} = 0$, $\frac{\partial C}{\partial \varrho_1} = 0$.
5	$H^2 = Ab^2(a+\varrho_1)(a+\varrho_2)$ $H_1^2 = Bb(a+\varrho_2)$ $H_2^2 = Cb(a+\varrho_1)$	$\frac{\partial \lg B}{\partial \varrho_2} = \frac{1}{\varrho_1-\varrho_2}$, $\frac{\partial \lg C}{\partial \varrho_1} = \frac{1}{\varrho_2-\varrho_1}$, $\Omega = 0$.
6	$H^2 = Ab^2(a+\varrho_1)(a+\varrho_2)$ $H_1^2 = Bb(a+\varrho_1)$ $H_2^2 = Cb(a+\varrho_2)$	$\frac{\partial \lg \frac{A}{B}}{\partial \varrho_2} = \frac{1}{\varrho_1-\varrho_2}$, $\frac{\partial \lg \frac{A}{C}}{\partial \varrho_1} = \frac{1}{\varrho_2-\varrho_1}$, $\Omega = 0$.

4. Examinons d'abord les formules (VI).

On peut dire que: 1) a et b sont différents tous les deux des constantes et que 2) a est inégale à b; dans le cas contraire les formules (VI)

$$H = Aab,$$
$$H_1 = Ba,$$
$$H_2 = Cb,$$

se dégénèrent aux formules (I).

Les trois premières équations de Lamé donnent:

$$(14) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 A}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2} - \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial B}{\partial \varrho_2} \cdot \frac{\partial A}{\partial \varrho_1} - \frac{1}{C} \cdot \frac{\partial C}{\partial \varrho_1} \cdot \frac{\partial A}{\partial \varrho_2} = 0, \\ &\frac{a'}{a}\left(\frac{1}{B} \cdot \frac{\partial B}{\partial \varrho_2} - \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial \varrho_2}\right) - \frac{b'}{b} \cdot \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial B}{\partial \varrho_2} = 0. \\ &\frac{b'}{b}\left(\frac{1}{C} \cdot \frac{\partial C}{\partial \varrho_1} - \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial \varrho_1}\right) - \frac{a'}{a} \cdot \frac{1}{C} \cdot \frac{\partial C}{\partial \varrho_1} = 0. \end{aligned}$$

Nous avons trois cas à distinguer:

1) $a' \neq 0$, $b' \neq 0$, $\dfrac{\partial B}{\partial \varrho_2} \neq 0$ $\left(\text{ou ce qui revient au même, } \dfrac{\partial C}{\partial \varrho_1} \neq 0\right)$;

2) $a' \neq 0$, $b' \neq 0$, $\dfrac{\partial B}{\partial \varrho_2} = \dfrac{\partial C}{\partial \varrho_1} = 0$;

3) $b' = 0$, $a' \neq 0$ (ou ce qui est au fond la même chose, $a' = 0$, $b' \neq 0$).

Dans le premier cas il est facile de déduire des équations (14) la formule:

$$\frac{\dfrac{d \lg b}{d\varrho}}{\dfrac{d \lg a}{d\varrho}} = \frac{\dfrac{1}{B} \cdot \dfrac{\partial B}{\partial \varrho_2} - \dfrac{1}{A} \cdot \dfrac{\partial A}{\partial \varrho_2}}{\dfrac{1}{B} \cdot \dfrac{\partial B}{\partial \varrho_2}},$$

d'où (parce que dans cette égalité l'une des parties ne dépend que de ϱ, l'autre que de ϱ_1 et ϱ_2) $b = \alpha a^h$, où α est une constante, h est aussi une constante différente de *1* ou de *0* (voir plus haut).

Les formules (14) nous donnent:

$$A = \zeta_1(\varrho_1)\zeta_2(\varrho_2),$$
$$B = \xi_1(\varrho_1) A^{\frac{1}{1-h}},$$
$$C = \xi_2(\varrho_2) A^{\frac{h}{h-1}}.$$

Mais à l'aide d'une remarque à la p. 256 on peut supposer:

$$\xi_1(\varrho_1) = \zeta_1(\varrho_1), \ \xi_2(\varrho_2) = \zeta_2(\varrho_2).$$

La dernière des équations de Lamé peut s'écrire ainsi:

$$(15) \qquad a^2 a^{2h} \frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{1}{B}\cdot\frac{\partial C}{\partial \varrho_1}\right) + a^2 \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{1}{C}\cdot\frac{\partial B}{\partial \varrho_2}\right) + h\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = 0,$$

où h est différent de 1; donc l'équation précédente donne:

$$\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{1}{B}\cdot\frac{\partial C}{\partial \varrho_1}\right) = k_1, \ \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{1}{C}\cdot\frac{\partial B}{\partial \varrho_2}\right) = k_2,$$

où k_1, k_2 sont des constantes.

La première de ces conditions peut s'écrire:

$$\zeta_2(\varrho_2)^{1+\frac{h+1}{h-1}} \psi(\varrho_1) = k_1$$

où $\psi(\varrho_1)$ est une certaine combinaison de la fonction $\zeta_1(\varrho_1)$ et de ses dérivées. Cette égalité, pour $k_1 \neq 0$, entraîne [1])

$$1 + \frac{h+1}{h-1} = 0$$

ce qui est impossible pour h différent de zéro.

Les mêmes conclusions peuvent démontrer l'impossibilité de l'équation (15) pour $k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$, et il est facile de démontrer cette impossibilité pour le cas où $k_1 = 0$, $k_2 = 0$.

Dans le second cas la dernière des équations de Lamé devient, comme il est facile à voir, impossible.

Les équations (14) pour le 3-me cas donnent les relations:

$$(\mathrm{VI}_1) \qquad \begin{cases} A = \zeta_1(\varrho_1)\zeta_2(\varrho_2) \\ B = \zeta_2(\varrho_2) \\ C = 1 \end{cases}$$

Ces relations sont suffisantes pour le but de ce travail et nous n'examinerons pas plus loin ce cas. Mais il convient de dire que dans

---

[1]) Nous avons:

$$\zeta_2'(\varrho_2) \neq 0.$$

ce cas on peut intégrer complétement les équations de Lamé et obtenir deux formes différentes sous lesquelles se présentent les fonctions $\zeta_1(\varrho_1)$ et $\zeta_2(\varrho_2)$.

5. Il est facile de démontrer que les cas 1, 2, 4, 5 de notre tableau [p. 257] sont impossibles. Multiplions la seconde des équations de Lamé par $(a+\varrho_2)$ et posons $\varrho_2 = -a(\varrho)$, pour tous les cas mentionnés nous obtenons la relation:

$$B(\varrho_1, \varrho_2)b(\varrho)a'(\varrho) = 0,$$

ce qui démontre l'impossibilité de ces quatre cas.

6. Nous avons vu, que dans le cas 3 de notre tableau (p. 257) les conditions suivantes sont remplies:

$$\tag{16} \begin{gathered} \frac{\partial \lg A}{\partial \varrho_1} = \frac{\partial \lg C}{\partial \varrho_1}, \\ \frac{\partial^2 A}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2} - \frac{1}{A}\cdot\frac{\partial A}{\partial \varrho_1}\cdot\frac{\partial A}{\partial \varrho_2} - \frac{1}{2\,B}\cdot\frac{\partial B}{\partial \varrho_2}\cdot\frac{\partial A}{\partial \varrho_1} = 0. \end{gathered}$$

La troisième des équations de Lamé donne:

$$\frac{a+\varrho_2}{2\,a}\cdot\frac{\partial C}{\partial \varrho_1}\cdot\frac{d(ba)}{d\varrho} = 0.$$

Ainsi il faut distinguer deux cas: 1) $(ba)' = 0$; 2) $\dfrac{\partial C}{\partial \varrho_1} = 0$, $(ba)' \neq 0$

La seconde des équations de Lamé peut s'écrire pour le premier cas:

$$\frac{b'a\varrho_2}{2\,(a+\varrho_2)}\cdot\frac{\partial B}{\partial \varrho_2} = 0.$$

Mais il est facile de voir que $b'a \neq 0$, ainsi il faut conclure que $\dfrac{\partial B}{\partial \varrho_2} = 0$, et les équations (16), après une transformation légère, donnent.

$$\tag{VII$_1$} \left\{ \begin{aligned} A &= \zeta_1(\varrho_1)\zeta_2(\varrho_2), \\ B &= 1, \\ C &= \zeta_1(\varrho_1). \end{aligned} \right.$$

Cette forme de A, B, C suffit pour le but de notre travail; on peut ajouter que dans ce cas-là les équations de Lamé s'intègrent complétement et donnent une forme particulière des fonctions ζ_1 et ζ_2.

Le second cas donne:

$$\frac{\partial C}{\partial \varrho_1} = 0, \ \frac{\partial A}{\partial \varrho_1} = 0.$$

Faisons une remarque préliminaire.

Pour le cas 3 on peut écrire les formules pour H^2, H_1^2, H_2^2, de la manière suivante:

$$H^2 = Ab^2a^2\varrho_2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\varrho_2}\right),$$
$$H_1^2 = Bba,$$
$$H_2^2 = Cba\varrho_2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\varrho_2}\right),$$

ou, en tenant compte de la remarque de la p. 256,

$$H^2 = \overline{A}l(\varrho + \varrho_2),$$
$$H_1^2 = Bg.$$
$$H_2^2 = \overline{C}g(\varrho + \varrho_2).$$

La seconde des équations de Lamé donne:

$$\frac{\partial \lg \overline{A}}{\partial \varrho_2}(\varrho + \varrho_2) + 1 + \frac{g'}{g'} \cdot \frac{\partial \lg B}{\partial \varrho_2} = 0.$$

De cette égalité on peut conclure que, dans le cas considéré (voir la remarque de la p. 256) B ne dépend pas de ϱ_1; donc dans ce cas A, B, C sont indépendants de ϱ_1.

7. Examinons le cas 6. La 2-me des équations de Lamé donne

$$(ba')\left(\frac{1}{\varrho_2 - \varrho_1} - \frac{\partial \lg B}{\partial \varrho_2}\right) + b'\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2 - \varrho_1} - \varrho_2 \frac{\partial \lg B}{\partial \varrho_2}\right) = 0.$$

Si $b' \neq 0$, on peut dire que

$$\frac{(ba)'}{b'} = K,$$

où K est une constante.

Mais on peut écrire les formules pour H^2, H_1^2, H_2^2, du n° 6 de la manière suivante:

$$H^2 = Ab^2(a - K + K + \varrho_1)(a - K + K + \varrho_2),$$
$$H^2 = Bb(a - K + K + \varrho_1),$$
$$H_2^2 = Cb(a - K + K + \varrho_2).$$

On peut transformer ces formules ainsi:

$$H^2 = A(K+\varrho_1)(K+\varrho_2)(ba-Kb)^2\left(\frac{1}{a-K}+\frac{1}{K+\varrho_1}\right)\left(\frac{1}{a-K}+\frac{1}{K+\varrho_2}\right),$$
$$H_1^2 = B(K+\varrho_1)(ba-Kb)\left(\frac{1}{a-K}+\frac{1}{K+\varrho_1}\right),$$
$$H_2^2 = C(K+\varrho_2)(ba-Kb)\left(\frac{1}{a-K}+\frac{1}{K+\varrho_2}\right).$$

On peut donner à ces formules cette forme plus simple:

$$H^2 = \overline{A}.\overline{b}^2(\overline{a}+\overline{\varrho}_1)(\overline{a}+\overline{\varrho}_2),$$
$$H_1^2 = \overline{B}.\overline{b}\,(\overline{a}+\overline{\varrho}_1),$$
$$H_2^2 = \overline{C}.\overline{b}\,(\overline{a}+\overline{\varrho}_2),$$

où $\overline{b} = ba - Kb$, et, en vertu des conditions précédentes, $\overline{b}' = 0$. Donc dans les formules du n⁰ 6 on peut supposer toujours $b' = 0$.

Les équations 2-me et 3-me de Lamé donnent (à l'aide des conditions du tableau de la p. 257)

$$\frac{\partial \lg B}{\partial \varrho_2} = \frac{1}{\varrho_2 - \varrho_1}, \quad \frac{\partial \lg C}{\partial \varrho_1} = \frac{1}{\varrho_1 - \varrho_2}, \quad \frac{\partial \lg A}{\partial \varrho_1} = \frac{\partial \lg A}{\partial \varrho_2} = 0,$$

d'où il suit:

$$A = k,$$
$$B = \xi_1(\varrho_1)(\varrho_2 - \varrho_1),$$
$$C = \xi_2(\varrho_2)(\varrho_1 - \varrho_2),$$

où k est une constante.

On peut écrire les coefficients de Lamé ainsi:

$$H^2 = b(\varrho+\varrho_1)(\varrho+\varrho_2),$$
$$H_1^2 = \xi_1(\varrho_1)(\varrho+\varrho_1)(\varrho_2-\varrho_1),$$
$$H_2^2 = \xi_2(\varrho_2)(\varrho+\varrho_2)(\varrho_1-\varrho_2).$$

Multiplions la 6-me des équations de Lamé par $\dfrac{(\varrho+\varrho_2)(\varrho+\varrho_1)}{(\varrho_2-\varrho_1)^2}$ et différentions la quatre fois par rapport à ϱ; nous pouvons écrire:

$$\frac{d^4\left(\frac{1}{b}\right)}{d\varrho^4} = 0,$$

d'où

$$\frac{1}{b} = \alpha\varrho^3 + \beta\varrho^2 + \gamma\varrho + \delta = f(\varrho),$$

où α, β, γ, δ sont des constantes.

Multiplions Ia 6-me des équations de Lamé par $(\varrho_2 - \varrho_1)$ et posons $\varrho_2 = \varrho_1$; nous obtenons:

$$\xi_1(\varrho_1) = \xi_2(\varrho_1).$$

Multiplions la même équation de Lamé par $(\varrho + \varrho_1)$ et faisons ensuite $\varrho = -\varrho_1$; nous obtenons:

$$\xi_1(\varrho_1) = -\frac{1}{f(-\varrho_1)},$$

et, par suite:

$$\xi_2(\varrho_2) = -\frac{1}{f(-\varrho_2)}.$$

Après toutes ces considérations préliminaires, nous pouvons écrire les coefficients de Lamé sous la forme suivante:

$$\text{(VIII)} \qquad \left\{ \begin{aligned} H^2 &= \frac{(\varrho - \varrho_1)(\varrho - \varrho_2)}{f(\varrho)}, \\ H_1^2 &= \frac{(\varrho_1 - \varrho)(\varrho_1 - \varrho_2)}{f(\varrho_1)}, \\ H_2^2 &= \frac{(\varrho_2 - \varrho)(\varrho_2 - \varrho_1)}{f(\varrho_2)}. \end{aligned} \right.$$

Ce sont les formules célèbres dues à Lamé [1]), qui jouent un rôle prépondérant dans la théorie des coordonnées curvilignes. Il est facile de démontrer que les H, H_1, H_2 tirés des formules (VIII) satisfont à toutes les équations de Lamé.

8. Il est évident que dans les formules (III) l'expression:

$$a' + F\frac{\partial\gamma}{\partial\varrho}$$

est différent de zéro, car dans le cas contraire ces formules se ramènent aux formules (I) et (II). Cette remarque nous permet de déterminer ϱ comme fonction de ϱ_1 et ϱ_2 de l'égalité:

$$a + F\gamma = 0.$$

---

[1]) *Lamé* l. c.

Multiplions la seconde des équations de Lamé par $a+F\gamma$ et déterminons ϱ de la manière précédente, nous aurons:

$$\frac{\partial F}{\partial \varrho_2}=0$$

c'est à dire F est une fonction de ϱ_1 seulement.

A l'aide de cette égalité nous pouvons simplifier les formules (III) en les écrivant sous la forme:

$$\begin{aligned} H &= Aa\gamma, \\ H_1 &= B\gamma, \\ H_2 &= Ca. \end{aligned} \tag{17}$$

Substituant ces expressions de H, H_1, H_2 dans la première des équations de Lamé (non transformée) et différentiant le résultat obtenu par rapport à ϱ, on aura:

$$\left(\frac{\partial \lg A}{\partial \varrho_2}-\frac{\partial \lg B}{\partial \varrho_2}\right)\cdot\frac{\partial^2 \lg \gamma}{\partial \varrho\, \partial \varrho_1}=0.$$

Il est facile de voir que $\frac{\partial^2 \lg \gamma}{\partial \varrho \partial \varrho_1} \neq 0$; dans le cas contraire les formules (17) se ramènent à des formules (I).

Ainsi de la première des équations de Lamé nous pourrons conclure:

$$\frac{\partial \lg A}{\partial \varrho_2}=\frac{\partial \lg B}{\partial \varrho_2}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2}-\frac{1}{A}\cdot\frac{\partial A}{\partial \varrho_1}\cdot\frac{\partial A}{\partial \varrho_2}-\frac{1}{C}\cdot\frac{\partial C}{\partial \varrho_1}\cdot\frac{\partial A}{\partial \varrho_2}=0.$$

La seconde des equations de Lamé donne:

$$\gamma\cdot\frac{a'}{a}\cdot\frac{\partial B}{\partial \varrho_2}=0.$$

Il faut distinguer deux cas:

1) $a'=0$;

2) $a' \neq 0$, $\frac{\partial B}{\partial \varrho_2}=0$.

Si $a'=0$, la 3-me des équations de Lamé donne:

$$\frac{\partial \lg C}{\partial \varrho_1}=0,$$

(on peut supposer, sans restreindre la généralité, $\frac{\partial \lg \gamma}{\partial \varrho} \neq 0$) et on peut écrire à l'aide des conditions précédentes:

$$(\mathrm{IX}_1) \qquad \begin{cases} A = \zeta_1(\varrho_1)\zeta_2(\varrho_2), \\ B = \zeta_2(\varrho_2), \\ C = 1. \end{cases}$$

Il y a en effet des fonctions ζ_1 et ζ_2 qui donnent les expressions (IX_1) satisfaisantes à toutes les équations de Lamé; nous n'insistons pas sur ce point.

Si $\frac{\partial B}{\partial \varrho_2} = 0$, on peut dire que $\frac{\partial A}{\partial \varrho_2} = 0$, par suite on peut poser $A = B = 1$ (sans restreindre la généralité). Différentions la 3-me des équations de Lamé par ϱ_2; nous aurons:

$$\frac{\partial^2 \lg C}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2}\left(a' - a\frac{\partial \lg \gamma}{\partial \varrho}\right) = 0.$$

L'expression, $a' - a\frac{\partial \lg \gamma}{\partial \varrho}$, est différent de zéro, car $\frac{\partial^2 \lg \gamma}{\partial \varrho \partial \varrho_1}$ est différent de zéro; on a donc

$$\frac{\partial^2 \lg C}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2} = 0,$$

et nous pouvons écrire:

$$(\mathrm{IX}_2) \qquad \begin{cases} A = 1, \\ B = 1, \\ C = \zeta(\varrho_1). \end{cases}$$

On peut déterminer effectivement la fonction $\zeta(\varrho_1)$ pour que toutes les conditions de Lamé soient satisfaites.

9. Les considérations précédentes (§ 2) conduisent à la proposition suivante.

Théorème 4. *Si l'équation de Laplace admet des solutions de la forme:*

$$V = f(\varrho) V_1(\varrho_1, \varrho_2)$$

(à condition du théorème 1, p. 247) on a quatre cas à distinguer:

1)
$$H = A,\quad H_1 = B,\quad H_2 = C,$$

où A, B, C vérifient les conditions de la p. 254.

2)
$$H = \frac{1}{(k\varrho + k_1)^2},\quad H_1 = \frac{B}{k\varrho + k_1},\quad H_2 = \frac{C}{k\varrho + k_1},$$

où B, C vérifient les conditions de la p. 255; k, k_1 sont des constantes.

3)
$$H^2 = \frac{(\varrho - \varrho_1)(\varrho - \varrho_2)}{f(\varrho)},\quad H_1^2 = \frac{(\varrho_1 - \varrho)(\varrho_1 - \varrho_2)}{f(\varrho_1)},\quad H_2^2 = \frac{(\varrho_2 - \varrho)(\varrho_2 - \varrho_1)}{f(\varrho_2)},$$

où $f(\varrho)$ est un polynôme du 3-me degré.

4) Dans tous les autres cas les conditions du théorème 3 sont remplies (et des remarques sur la p. 253) et par suite ce théorème a lieu pour tous ces autres cas.

§ 3.

Dans ce paragraphe nous voulons rechercher quelles sont les surfaces $\varrho = \text{const.}$, $\varrho_1 = \text{const.}$, $\varrho_2 = \text{const.}$, pour lesquelles l'équation de Laplace a des propriétés mentionnées plus haut. Comme nous l'avons déjà dit, M. Darboux avait examiné tous les cas pour lesquels l'équation de Laplace admet des solutions de la forme:

$$V = f(\varrho) f_1(\varrho_1) f_2(\varrho_2),$$

sous quelques conditions supplémentaires [1]).

[1]) *Darboux.* Leçons sur les syst. orthogon. etc.

Il a trouvé que tous ces cas se ramènent aux surfaces du second ordre, aux cônes et aux cylindres isothermiques. Pour abréger le langage nous allons donner à cet ensemble de surfaces le nom des „surfaces de Darboux".

A l'aide du théorème 3 nous pouvons conclure que le 4-me cas de la p. 266 donne des „surfaces de Darboux".

C'est à Lamé qu'on doit rapporter le 3-me cas—les surfaces dans ce cas sont des ellipsoïdes et hyperboloïdes à une ou à deux nappes, confocales.

Les raisonnements bien simples [1]) nous montrent que dans le 1-er cas $\varrho = \text{const}$ est un plan, $\varrho_1 = \text{const}$, $\varrho_2 = \text{const}$, sont des surfaces de revolution. Et, réciproquement, pour chaque système des surfaces de révolution avec l'axe de révolution commune on peut ramener H, H_1, H_2, à la forme du 1-r cas.

Dans le 2-me cas ce sont les deux courbures qui montrent que les surfaces $\varrho_1 = \text{const.}$ sont des sphères, tandis que les surfaces $\varrho_1 = \text{const.}$, $\varrho_2 = \text{const.}$ sont des cônes.

On peut répondre à présent à la question posée plus haut p. 245. A cette question (sous quelques conditions supplémentaires) répondent *les surfaces de Darboux, les plans et les surfaces de révolution, les sphères et les cônes.* On peut remarquer aisément, que si l'équation de Laplace admet des solutions $f(\varrho) . V_1(\varrho_1, \varrho_2)$, les fonctions fondamentales pour la surface $\varrho = \text{const.}$ créées par M. Stekloff [2]), coïncident (formellement, au moins) avec celles de M. Poincaré et M. Ed. Le-Roy [3]). Mais les travaux de M. Zaremba et M. Levi-Civita [4]) ont montré que dans ce cas les surfaces $\varrho = \text{const}$ sont des surfaces du second ordre [5]).

§ 4.

Examinons à présent le cas mentionné à la p. 3, où $\psi(\varrho) = 0$, et

$$f = m\varrho + n,$$

où m, n sont des constantes.

---

[1]) *Bianchi.* Lezioni di geometria differenziale, t. 2, p. 482.

[2]) *В. А. Стекловъ.* Общiе методы рѣшенiя и т. д.

[3]) *Ed. Le-Roy.* Ann. Ec. Norm. Sup. 1897—98.

[4]) *Zaremba.* Bull. internat. de l'Acad. de Cracovie. 1902. *Levi-Ciita.* Ib. 1902.

[5]) Ou peut être quelques sortes des cônes et des cylindres.

Il est évident que dans ce cas, si $f.V_1$ vérifie l'équation de Laplace, V_1 la vérifiera aussi.

Si u et v satisfont à l'équation de Laplace, la formule bien connue nous donne:

$$\iint_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) d\sigma = 0,$$

où $d\sigma$ désigne l'élément de la surface S, n désigne la direction de la normale à la surface S, enfin l'intégration s'étend sur toute la surface S. Transformons cette intégrale aux coordonnées ϱ, ϱ_1, ϱ_2 et soit $\varrho=$const. la surface S; nous aurons:

$$\iint_{\rho=\text{const.}} \frac{H_1 H_2}{H}\left(v\frac{\partial u}{\partial \varrho} - u\frac{\partial v}{\partial \varrho}\right) d\varrho_1 d\varrho_2 = 0,$$

Posons maintenant $u = f(\varrho)V_1(\varrho_1, \varrho_2)$, $v = V_1(\varrho_1, \varrho_2)$, nous obtenons

$$f'(\varrho)\iint_{\rho=\text{const.}} \frac{H_1 H_2}{H} V_1^2 d\varrho_1 d\varrho_2 = 0,$$

d'où il suit:

$$f'(\varrho)_{\rho=\text{const.}} = 0,$$

ou (voir plus haut):

$$m = 0,$$

ainsi notre cas se ramène à celui où le potentiel ne dépend que de deux variables ϱ_1, ϱ_2,—le cas qui a été traité M. Levi-Civita [1]). Par une méthode analogue, on peut discuter le cas où $\frac{f'}{f}$ ne contient une constante arbitraire.

St.-Pétersbourg.
Decembre 1909.

---

[1]) *Levi-Civita.* Memor. della Reale Accad. delle Scienze de Torino, 1898—1899. p. 105.