Объ асимптотическомъ значеніи наилучшаго приближенія аналитическихъ функцій.

С. Н. Бернштейна.

1. Въ моемъ сочиненіи «О наилучшемъ приближеніи непрерывныхъ функцій и т. д.» указаны общіе принципы для опредѣленія *порядка* безконечнаго убыванія наилучшаго приближенія функціи при помощи многочленовъ безконечно возрастающихъ степеней. Изъ этого изслѣдованія вытекаетъ, между прочимъ, что если намъ дана аналитическая функція

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{1}$$

которой извѣстенъ радіусъ сходимости R, то величина R имѣетъ лишь малое вліяніе на законъ убыванія положительныхъ чиселъ, которыя я обозначаю черезъ $E_n f(x)$, и которыя выражаютъ наилучшее приближеніе $f(x)$ при помощи многочлена степени n на отрѣзкѣ $(-1, +1)$. Для того, чтобъ получить болѣе точныя свѣдѣнія относительно убыванія E_n, слѣдуетъ преобразовать разложеніе $f(x)$ въ строку Тайлора въ рядъ тригонометрическихъ многочленовъ $T_n(x) = \cos n \arccos x$, т. е.

$$f(x) = A_0 + A_1 T_1(x) + A_2 T_2(x) + \ldots + A_n T_n(x) + \ldots \tag{2}$$

гдѣ [1])

$$A_{n+1} = \frac{1}{2^n}\left[a_{n+1} + \frac{n+3}{2^2} a_{n+3} + \frac{(n+4)(n+5)}{2^4 . 2!} a_{n+5} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} f(x) . T_{n+1}(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

---

[1]) См. § 61 и примѣчаніе къ § 70 упомянутаго сочиненія. Если радіусъ сходимости $R \leq 1$, то ряды, выражающіе коэффиціенты A_{n+1}, могутъ оказаться расходящимися; тогда можно воспользоваться ихъ выраженіемъ въ видѣ интеграла.

Дѣйствительно, на основаніи обобщенной теоремы Лебега (§ 71), мы знаемъ, что

$$I_n \geqq E[f(x)] > \frac{kI_n}{\log(n+1)}, \tag{3}$$

гдѣ k нѣкоторой независящій отъ $f(x)$ и n коэффиціентъ, а

$$I_n = \text{макс.}\,|\,A_{n+1}T_{n+1}(x) + A_{n+2}T_{n+2}(x) + \ldots\,|$$

есть величина приближенія, осуществляемаго многочленомъ

$$A_0 + A_1T_1(x) + \ldots + A_nT_n(x).$$

Изъ неравенства (3) видно, что порядокъ E_n почти тотъ же, что порядокъ I_n; кромѣ того, вслѣдствіе теоремы (76),

$$E_n[f(x)] \leqq I_n < \frac{2M\varrho^{n+1}}{1-\varrho}, \tag{4}$$

если на эллипсѣ s, имѣющемъ фокусами $(-1, +1)$ и суммою полуосей $\frac{1}{\varrho}$, внутри котораго функція голоморфна, $|f(x)| < M$. Наоборотъ. если, при всякомъ значеніи n, неравенство (4) соблюдено, то функція голоморфна *внутри* этого эллипса s (§ 29). Такимъ образомъ порядокъ E_n и I_n зависитъ прежде всего отъ числа ϱ, и вмѣстѣ съ тѣмъ не только порядокъ каждой изъ этихъ величинъ, но и асимптотическія значенія зависятъ *только* отъ особенностей функціи на *наименьшемъ* изъ гомофокальныхъ эллипсовъ, ибо, на основаніи только что упомянутой теоремы, прибавленіе къ данной функціи другой функціи голоморфной въ области, заключающей въ себѣ разсматриваемый эллипсъ, не повліяетъ вообще на асимптотическое значеніе E_n и I_n.

Вслѣдствіе выше изложеннаго, особое значеніе пріобрѣтаетъ рѣшеніе слѣдующей задачи:

Найти асимптотическое значеніе

$$E_n\left[\frac{B_1}{x-a} + \ldots + \frac{B_k}{(x-a)^k}\right];$$

этой задачей мы сейчасъ и займемся, полагая число a вещественнымъ; къ случаю a комплекснаго я вернусь въ ближайшемъ будущемъ.

2. *Примѣчаніе.* Въ § 62 среди другихъ примѣровъ, я вычислилъ между прочимъ порядокъ $E_n\left(\frac{1}{1-Rx}\right)$. Пользуюсь случаемъ, чтобъ указать что рядъ

$$1+(n+3)\left(\frac{R}{2}\right)^2+\frac{(n+4)(n+5)}{2}\left(\frac{R}{2}\right)^4+\ldots,$$

который я, для краткости, обозначилъ тамъ, пользуясь обычными обозначеніями гипергеометрическихъ функцій, черезъ

$$F\left(\frac{n}{2}+1,\ \frac{n}{2}+\frac{3}{2},\ n+2,\ R^2\right),$$

легко вычислить, а именно,

$$F\left(\frac{n}{2}+1,\ \frac{n}{2}+\frac{3}{2},\ n+2,\ R^2\right)=\frac{2^{n+1}}{\sqrt{1-R^2}}\cdot\frac{1}{(1+\sqrt{1-R^2})^{n+1}}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{1-Rx}=\sum\frac{2R^nT_n(x)}{\sqrt{1-R^2}.\,1+\sqrt{1-R^2})^n},$$

откуда

$$\frac{1}{a-x}=\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\sum\frac{T_n(x)}{(a+\sqrt{a^2-1})^n},$$

и наконецъ

$$I_n\left(\frac{1}{a-x}\right)=\frac{2}{(a+\sqrt{a^2-1})^n.[a^2-1+(a-1)\sqrt{a^2-1}]},\tag{5}$$

гдѣ, для опредѣленности, $a=\frac{1}{R}>0$ (для $a<0$, достаточно въ формулѣ (5) написать $|a|$ вмѣстѣ a). Благодаря тому, что всѣ коэффиціенты въ разложеніи $\frac{1}{a-x}$ положительны, имѣемъ

$$I_n\left(\frac{1}{a-x}\right)^2=\left|\frac{d}{da}\frac{2}{(a+\sqrt{a^2-1})^n[a^2-1+(a-1)\sqrt{a^2-1}]}\right|$$

и вообще

$$k!\,I_n\left(\frac{1}{a-x}\right)^{k+1}=\left|\frac{d^k}{da^k}\frac{2}{(a+\sqrt{a^2-1})^n[a^2-1+(a-1)\sqrt{a^2-1}]}\right|.$$

Поэтому

$$\text{асим. зн. } I_n\left(\frac{1}{a-x}\right)^{k+1}=\frac{2n^k}{k!(a^2-1)^{\frac{k}{2}}[a^2-1+(a-1)\sqrt{a^2-1}].(a+\sqrt{a^2-1})^n}$$

Мы увидимъ дальше, (и это вытекаетъ также изъ § 62), что порядокъ $E_n\left(\frac{1}{a-x}\right)^{k+1}$ тотъ же, что порядокъ $I_n\left(\frac{1}{a-x}\right)^{k+1}$. Полезно замѣтить что въ неравенствѣ (3) нижняя граница въ большинствѣ случаевъ чрезмѣрно низка; и для аналитическихъ функцій множитель $\frac{1}{\log(n+1)}$ можетъ почти всегда быть упраздненнымъ. Дѣйствительно, неравенство (77^{bis}) въ § 70 даетъ для всякой функціи

$$\sqrt{A_{n+1}^2+A_{n+1}^2+\ldots}<E_n[f(x)]\leqq I_n[f(x)]\leqq|A_{n+1}|+|A_{n+2}|+\ldots$$

Изъ доказательства же теоремы (76) слѣдуетъ, что

$$|A_n|<2M\varrho^n.$$

А потому, какъ бы мало ни было число ε, будетъ безчисленное множество значеній n (а обыкновенно этому условію удовлетворятъ *всѣ* достаточно большіе n), такихъ, что, при $k>1$,

$$|A_{n+k}|<|A_{n+1}|.(\varrho+\varepsilon)^{k-1}. \tag{6}$$

Для всѣхъ этихъ значеній n,

$$\frac{|A_{n+1}|+|A_{n+2}|+\ldots+|A_{n+k}|+\ldots}{\sqrt{A_{n+1}^2+A_{n+2}^2+\ldots}}<\frac{1}{1-(\varrho+\varepsilon)}.$$

3. Опредѣлимъ многочленъ степени n, $R_n(x)$, наименѣе уклоняющійся отъ

$$\frac{1}{x-a}$$

въ промежуткѣ $(-1, +1)$. Для этого достаточно, чтобъ разность

$$\frac{1}{x-a}-R_n(x)=\frac{P_{n+1}(x)}{x-a}$$

достигала въ $(n+2)$ точкахъ отрѣзка своего абсолютнаго максимума съ послѣдовательно мѣняющимися знаками. Но этому условію удовлетворяетъ многочленъ $R(x)$, если

$$P_{n+1}(x)=\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n[ax-1+\sqrt{(x^2-1)(a^2-1)}]+[x-\sqrt{x^2-1}]^n[ax-1-\sqrt{(x^2-1)(a^2-1)}]}{2(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n},$$

ибо можемъ написать

$$\frac{P_{n+1}(x)}{x-a} = \frac{\cos(n\varphi+\delta)}{(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})}, \tag{7}$$

гдѣ [1]) $\cos\varphi = x$, $\sin\varphi = \sqrt{1-x^2}$,

$$\cos\delta = \frac{ax-1}{x-a}, \quad \sin\delta = \frac{\sqrt{(a^2-1)(1-x^2)}}{x-a}.$$

Слѣдовательно,

$$E_n\left(\frac{1}{x-a}\right) = \frac{1}{(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n}. \tag{8}$$

4. Точное опредѣленіе $E_n\left(\frac{1}{x-a}\right)^k$, при $k>1$, представляетъ значительныя трудности, возрастающія вмѣстѣ съ числомъ k.

Напротивъ, асимптотическое значеніе $E_n\left(\frac{1}{x-a}\right)^k$ находится весьма легко благодаря слѣдующему замѣчанію.

Дифференцируемъ равенство (7) по a $(k-1)$ разъ, что дастъ намъ

$$\frac{(k-1)!}{(x-a)^k} - R_n^{(k-1)}(x) = \frac{d^{k-1}}{da^{k-1}}\left[\frac{\cos(n\varphi+\delta)}{(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n}\right]. \tag{9}$$

Замѣчаемъ, что вторая часть, въ которой φ не зависитъ отъ a, равна

$$\frac{d^{k-1}}{da^{k-1}}\left[\frac{\cos(n\varphi+\delta)}{(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n}\right] = A\cos(n\varphi+\delta) + B\sin(n\varphi+\delta),$$

гдѣ

$$A = \frac{\pm n^{k-1}(1+\varepsilon_n)}{(a^2-1)^{\frac{k+1}{2}}(a+\sqrt{a^2-1})^n}, \quad B = \varepsilon'_n A,$$

обозначая черезъ ε_n и ε'_n величины, стремящіяся къ нулю при безконечномъ возрастаніи n. Поэтому разность

$$\frac{1}{(x-a)^k} - \frac{R_n^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}$$

[1]) См. П. Л. Чебышевъ. «Sur les questions de minima etc.» §§ 29—38. (Полное собраніе сочиненій, т. I) и А. А. Марковъ. «Опредѣленіе нѣкоторой функціи по условію наименѣе отклоняться отъ нуля». (Сообщ. Харьковскаго Матем. Общ. 1884 г.).

достигаетъ въ $(n+2)$ точкахъ максимальнаго абсолютнаго значенія съ противоположными знаками, асимптотически равнаго

$$\frac{n^{k-1}}{(k-a)!\,(a^2-1)^{\frac{k+1}{2}}(a+\sqrt{a^2-1})^n}$$

Слѣдовательно, асимптотическое значеніе

$$E_n\left(\frac{1}{x-a}\right)^k = \frac{n^{k-1}}{(k-1)!\,(a^2-1)^{\frac{k+1}{2}}.(a+\sqrt{a^2-1})^n}\,; \tag{10}$$

и асимптотическое значеніе

$$E_n\left(\varphi(x)+\sum_{i=1}^{i=k}\frac{A_i}{(x-a)^i}\right)=\frac{|A_k|\,n^{k-1}}{(k-1)!\,(a^2-1)^{\frac{k+1}{2}}(a+\sqrt{a^2-1})^n}\,, \tag{11}$$

если $\varphi(x)$ есть какая нибудь функція голоморфная внутри эллипса [1]), *проходящаго черезъ точку a, имѣющаго фокусами* $(+1,\ -1)$.

5. Аналогичнымъ образомъ вычисляется и асимптотическое значеніе

$$E_n\,[\log(a-x)]$$

Дѣйствительно, интегрируемъ относительно a равенство (7) въ предѣлахъ отъ a до b, гдѣ b нѣкоторое число бóльшее, чѣмъ a. Находимъ

$$\log(b-x)-\log(a-x)+\int_a^b R_n(x)\,da=\int_a^b\frac{P_{n+1}(x)\,da}{a-x} \tag{12}$$

Обозначая черезъ $S_n(x)$ многочленъ степени n относительно x, кокимъ является $\int_a^b R_n(x)\,da$, изслѣдуемъ разность

$$[\log(a-x)-\log(b-x)]-S_n(x)=-\int_a^b\frac{P_{n+1}(x)\,da}{a-x}=$$

$$=\int_b^a\frac{\cos(n\varphi+\delta)\,da}{(a-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n}=\frac{1}{n}\left|\frac{\cos(n\varphi+\delta)}{\sqrt{a^2-1}\,(a+\sqrt{a^2-1})^n}\right|_a^b+$$

$$+\frac{1}{n}\int_b^a\frac{d}{da}\left(\frac{\cos(n\varphi+\delta)}{\sqrt{a^2-1}}\right).\frac{da}{(a+\sqrt{a^2-1})^n}.$$

---

[1]) Замѣтимъ, что этотъ случай въ частности имѣетъ мѣсто, если радіусъ сходимости

$$f(x)=\varphi(x)+\Sigma\frac{A_i}{(x-a)^i}$$

равенъ a, при чемъ $f(x)$, кромѣ полюса a, имѣетъ какія угодно особенности на кругѣ сходимости.

Но, интегрируя вторично по частямъ, находимъ, что

$$\int_b^a \frac{d}{da}\left(\frac{\cos(n\varphi+\delta)}{\sqrt{a^2-1}}\right)\cdot\frac{da}{(a+\sqrt{a^2-1})^n}=\frac{1}{n}\left|\frac{d}{da}\left(\frac{\cos(n\varphi+\delta)}{\sqrt{a^2-1}}\right)\cdot\frac{\sqrt{a^2-1}}{(a+\sqrt{a^2-1})^n}\right|_a^b+$$
$$+\frac{1}{n}\int\frac{d}{da}\left[\sqrt{a^2-1}\cdot\frac{d}{da}\left(\frac{\cos(n\varphi+\delta)}{\sqrt{a^2-1}}\right)\right]\frac{da}{(a+\sqrt{a^2-1})^n}=\frac{\lambda}{n(a+\sqrt{a^2-1})^n}.$$

гдѣ λ остается конечнымъ, при $-1\leqq x\leqq 1$.

Такимъ образомъ равенство (12) можемъ замѣнить слѣдующимъ:

$$\log(a-x)-\log(b-x)-S_n(x)=-\frac{\cos(n\varphi+\delta)+\varepsilon_n}{n\sqrt{a^2-1}\,(a+\sqrt{a^2-1})^n}, \qquad (13)$$

гдѣ ε_n стремится къ нулю вмѣстѣ съ $\frac{1}{n}$. Отсюда, какъ въ предыдущемъ §, заключаемъ, что асимптотическое значеніе

$$E_n[\log(a-x)-\log(b-x)]=\frac{1}{n\sqrt{a^2-1}\,(a+\sqrt{a^2-1})^n}$$

и слѣдовательно, асимптотическое значеніе

$$E_n[\log(a-x)]=\frac{1}{n\sqrt{a^2-1}\,(a+\sqrt{a^2-1})^n}, \qquad (14)$$

такъ какъ $\log(b-x)$ есть голоморфная функція внутри элипса, проходящаго черезъ a. Интегрируя еще разъ, найдемъ асимптотическое значеніе

$$E_n[(a-x)\log(a-x)]=\frac{1}{n^2(a+\sqrt{a^2-1})^n}. \qquad (15)$$

Примѣчаніе. Еслибъ послѣдняя формула была точной, а не асимптотической, то изъ нея переходомъ къ предѣлу немедленно можно было бы получить и $E_n[(1-x)\log(1-x)]$. Но въ данномъ случаѣ, переходъ къ предѣлу требуетъ новаго анализа, и изъ предшествующихъ вычисленій нельзя получить отвѣта на вопросъ, будетъ ли асимптотическое значеніе

$$E_n[(1-x)\log(1-x)]$$

равно $\frac{1}{n^2}$?

6. Для опредѣленія асимптотическаго значенія $E_n f(x)$ цѣлыхъ трансцендентныхъ функцій въ большинствѣ случаевъ достаточно разсмотрѣнія разложенія (2) функціи въ рядъ тригонометрическихъ многочленовъ.

А именно, не трудно видѣть, что для безчисленнаго множества значеній n (которыя имѣются у всякой цѣлой функціи) удовлетворяющихъ условію, что

$$|A_{n+k}| < |A_{n+1}| \varepsilon^{k-1},$$

при сколь угодно маломъ ε, имѣемъ

$$|A_{n+1}| < E_n[f(x)] < |A_{n+1}| \cdot \frac{1}{1-\varepsilon};$$

это вытекаетъ изъ (6); равнозначный результатъ можно также получить, замѣтивъ, что

$$f(x) - \sum_0^n A_i T_i(x) = A_{n+1}[T_{n+1}(x) + \eta],$$

гдѣ

$$|\eta| < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

такъ что наша разность въ $(n+2)$ точкахъ достигаетъ максимума (или минимума) равнаго $A_{n+1}(1+\eta)$; откуда заключаемъ, что

$$\text{Ас. знач. } E_n f(x) = A_{n+1}.$$

Въ моей работѣ «О наилучшемъ приближеніи и т. д.» этотъ результатъ, не формулированный въ общемъ видѣ, примѣненъ къ функціямъ e^x, $\sin x$, $\cos x$. Здѣсь я хочу указать, что послѣдній способъ разсужденій примѣнимъ иногда и къ функціямъ не только не цѣлымъ, но даже не аналитическимъ; весьма интереснымъ примѣромъ этого служитъ извѣстная функція Вейерштрасса, не имѣющая производной, къ изслѣдованію которой мы теперь и перейдемъ.

7. Пусть будетъ

$$f(x) = \sum a^n \cos b^n t = \sum a^n T_{b^n}(x),$$

полагая какъ и раньше $T_i(x) = \cos i \arccos x$. Допустимъ, что b есть цѣлое нечетное число. Какъ извѣстно, если

$$ab > 1,$$

функція $f(x)$ не имѣетъ производной.

Я говорю, что многочленъ

$$R(x) = \sum_0^n a^k T_{b^k}(x) \tag{16}$$

есть многочленъ степени не выше m, наименѣе уклоняющійся отъ $f(x)$ въ промежуткѣ $(-1, +1)$, если $b^n \leqq m < b^{n+1}$, и

$$E_m[f(x)] = \frac{a^{n+1}}{1-a} \tag{17}$$

Въ самомъ дѣлѣ, разность

$$f(x) - R(x) = \sum_{u+1}^{\infty} a^k T_{b^k}(x)$$

въ точкахъ $x_l = \cos\frac{l\pi}{b^{n+1}}$, при $l = 0, 1, \ldots b^{n+1}$, получаетъ свои наибольшія абсолютныя значенія, послѣдовательно равныя

$$\frac{(-1)^l a^{n+1}}{1-a},$$

т. е. не менѣе, чѣмъ въ $(m+2)$ точкахъ, если $b^n \leqq m < b^{n+1}$, а потому $R(x)$ есть, изъ многочленовъ степени не выше m, наименѣе уклоняющійся отъ $f(x)$.

Интересно замѣтить что многочленъ $R(x)$, будучи наименѣе уклоняющимся отъ $f(x)$, обращаетъ также въ минимумъ и квадратичную ошибку

$$\int_{-1}^{+1} \frac{[f(x) - R(x)]^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Такое совпаденіе является, разумѣется, рѣдкимъ исключеніемъ.

Такъ какъ разсматриваемую нами функцію Вейерштрасса можно считать классической, то довольно любопытно опредѣлить, какимъ условіямъ Липшица она удовлетворяетъ, пользуясь общими критеріями, изложенными въ моемъ сочиненіи «О наилучшемъ приближеніи и т. д.» и наглядно резюмированными въ таблицѣ, приложенной къ моему докладу «Sur les recherches recentes и т. д.» на Кембриджскомъ конгрессѣ 1912 г.

Положимъ

$$n + \varepsilon = \log_b m,$$

гдѣ

$$0 \leqq \varepsilon < 1;$$

въ такомъ случаѣ

$$E_m f(x) = \frac{a^{n+1}}{1-a} = \frac{a^{\log_b m + 1 - \varepsilon}}{1-a} = \frac{a^{\log_a m \cdot \log_b a + 1 - \varepsilon}}{1-a} = m^{\log_b a} \cdot \frac{a^{1-\varepsilon}}{1-a}.$$

Поэтому можемъ утверждать, что $f(x)$ удовлетворяетъ условію Липшица любой степени $\alpha < \log_b \frac{1}{a}$, и не можетъ удовлетворять условію Липшица степени $\alpha > \log_b \frac{1}{a}$. Напримѣръ, если $b = 9$, и $a = \frac{1}{3}$, то

$$f(x) = \sum \left(\frac{1}{3}\right)^n T_{9n}(x),$$

удовлетворяетъ условіямъ Липшица степени менѣе, чѣмъ $\frac{1}{2}$, но не удовлетворяетъ условіямъ Липшица степени болѣе, чѣмъ $\frac{1}{2}$.

8. Закончу свою статью доказательствомъ слѣдующей общей теоремы.

Теорема. *Если $f(x)$ есть какая угодно функція, голоморфная на отрѣзкѣ $(-1, +1)$, то среди асимптотическихъ выраженій многочленовъ степени n, наименѣе уклоняющихся отъ нея, есть такіе, для которыхъ точки максимальнаго уклоненія β_k удовлетворяютъ условію*

$$\text{пред.}_{n=\infty} \left(\beta_k - \cos\frac{k\pi}{n}\right) = 0\,.$$

Для того, чтобъ убѣдиться въ правильности высказанной теоремы, сдѣлаемъ слѣдующее замѣчаніе. Пусть $P(x)$ будетъ нѣкоторый многочленъ степени $n+s$, который, послѣдовательно мѣняя знакъ, получаетъ въ $(n+1)$ точкахъ $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ максимальныя отклоненія равныя $\pm A$, и составимъ разность

$$R(x) = AT_n(x) - P(x).$$

Въ такомъ случаѣ, ясно, что въ каждомъ промежуткѣ

$$\left(\cos\frac{k\pi}{n}, \cos\frac{(k+1)\pi}{n}\right),$$

такъ же какъ и въ каждомъ промежуткѣ (β_k, β_{k+1}),

$$R(x) = 0$$

имѣемъ не менѣе одного корня. Поэтому, обозначая черезъ ξ_i послѣдовательные корни уравненія $R(x) = 0$, которыхъ не болѣе, чѣмъ $n+s$ на отрѣзкѣ $(-1, +1)$, заключаемъ, что

$$\xi_k < \beta_k \leqq \xi_{k+s+1}$$

и

$$\cos\frac{(k-s-1)\pi}{n} \leqq \xi_k\,, \quad \xi_{k+s+1} \leqq \cos\frac{(k+s+1)\pi}{n}\,;$$

и слѣдовательно, тѣмъ болѣе,

$$\cos\frac{(k-s-1)\pi}{n} \leqq \beta_k \leqq \cos\frac{(k+s+1)\pi}{n}\,. \tag{18}$$

Съ другой стороны, на основаніи (6) для всякой голоморфной функціи $f(x)$, есть безчисленное множество значеній n, для которыхъ

$$\frac{E_n f(x)}{E_{n+s} f(x)} < \lambda^s\,,$$

гдѣ λ опредѣленное число большее единицы.

Для указанныхъ значеній n, выбираемъ s такъ, чтобъ λ^s стремилось къ безконечности, хотя и $\frac{s}{n}$ стремится къ нулю. Въ такомъ случаѣ, многочленъ $P'_n(x)$ степени n, наименѣе уклоняющійся отъ многочлена $P_{n+s}(x)$ степени $(n+s)$, наименѣе уклоняющагося отъ $f(x)$, будетъ очевидно, асимптотическимъ выраженіемъ для многочлена $P_n(x)$ степени n, наименѣе уклоняющагося отъ $f(x)$.

Но разность

$$P_{n+s}(x) - P'_n(x)$$

является такимъ образомъ многочленомъ степени $n+s$, получающимъ въ $(n+1)$ точкахъ β_k отклоненія равныя, но съ обратными знаками, а потому β_k удовлетворяютъ неравенству (18), гдѣ $\frac{s}{n}$ стремится къ нулю; откуда

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}} \left(\beta_k - \cos\frac{k\pi}{n}\right) = 0\,.$$

Основная задача опредѣленія точекъ отклоненія асимптотическихъ выраженій многочленовъ, наименѣе уклоняющихся отъ данной функціи, приводится такимъ образомъ къ опредѣленію *безконечно малыхъ* измѣненій, какимъ надо для этого подвергнуть точки отклоненія $\cos\frac{k\pi}{n}$ многочлена $T_n(x)$, наименѣе уклоняющагося отъ нуля.