Двѣ задачи.

Д. М. Синцова.

1. Какъ извѣстно, эволюта циклоиды есть снова циклоида. Можно поставить себѣ вопросъ: *разыскать всѣ кривыя, эволютами которыхъ являются тѣ же кривыя, только имѣющія иное положеніе въ плоскости.* Здѣсь умѣстно примѣненіе методовъ натуральной геометріи [1]).

Пусть

$$R = \varphi(s), \tag{1}$$

гдѣ R и s суть радіусъ кривизны и дуга, есть натуральное уравненіе кривой. По свойству эволюты ея радіусъ кривизны

$$R_1 = R\frac{dR}{ds} \quad \text{и} \quad s_1 = R - R_0,$$

гдѣ R_0—значеніе радіуса кривизны при $s_1 = 0$ и $s = s_0$.

Такимъ образомъ кривая, удовлетворяющая поставленному условію, должна выполнять функціональное уравненіе

$$R_1 = \varphi(s_1)$$

т. е.

$$\varphi(s).\frac{d\varphi(s)}{ds} = \varphi[\varphi(s) - \varphi(s_0)]. \tag{I}$$

Простѣйшіе извѣстные частные случаи:

a) Логариѳмическая спираль $(R = ks \quad s_0 = 0)$;

b) Циклоида $(R^2 + s^2 = a^2)$, $s_0 = -4a$, $R_0 = 0$, $(s_1)_0 = 0$, $(R_1)_0 = 4a$
$R = \sqrt{16a^2 - s^2} = s_1$, $R_1 = \sqrt{16a^2 - s_1{}^2} = -s$. (l. c. p. 32)

---

[1]) *E. Cesàro.* Lezioni di geometria intrinseca. 1896. Литература указана у *G. Loria.* Spezielle algebraische und transzendente Kurven n° 253—254.

2. Можно поставить также вопросъ о *парахъ кривыхъ*, служащихъ эволютами одна другой,—таковы, напр., приводимыя E. Cesàro l. c. *псевдоциклоиды*:

$$s^2 - R^2 = a^2, \quad R^2 - s^2 = a^2.$$

Для такихъ кривыхъ должно быть

$$R = \varphi(s)\,, \quad R_1 = \psi(s_1)\,, \quad R_2 = \varphi(s_2) \quad \text{и т. д.}$$

т. е.

$$R\frac{dR}{ds} = \psi(R - R^0) \quad \text{и} \quad R_1\frac{dR_1}{ds_1} = \varphi\,(R_1 - R_1{}^0)$$

гдѣ R^0 и $R_1{}^0$ — начальныя значенія R и R_1.

Итакъ должно быть

$$\left.\begin{aligned} \varphi\,(s)\frac{d\varphi}{dS} &= \psi\,[\varphi(s) - \varphi\,(s_0)]\,, \\ \psi\,(s)\frac{d\psi}{dS} &= \varphi\,[\psi(s) - \psi\,(s_1{}^0)]. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II)}$$

На рѣшеніе функціональныхъ уравненій (I) и (II) сводятся такимъ образомъ двѣ указанныя геометрическія задачи.

Уравненія (I) и (II) упрощаются, если за независимое перемѣнное взять не дугу, а уголъ касательной съ опредѣленнымъ направленіемъ. (Cp. Loria l. c. p. 624) Но Loria принимаетъ начальное значеніе угла для всѣхъ эволютъ равнымъ нулю. Это вноситъ существенное ограниченіе, и въ результатѣ единственными кривыми, удовлетворяющими требованіямъ 2-ой задачи, оказываются псевдоциклоиды.

Интересно поэтому провѣрить, какія рѣшенія получаются, если не налагать ограниченій на начальныя значенія дуги и соотвѣтствующаго радіуса кривизны и, сверхъ того, не предполагать для функціи $\varphi(s)$ существованія производныхъ порядка выше 1-го, resp. 2-го. [1])

---

[1]) Ср. мои «Замѣтки по функціональному исчисленію» Изв. Казан. Физико-Мат. Общества (2) т. XIII n⁰ 2. 1902 г.