Объ одномъ линейномъ функціональномъ уравненіи.

(По поводу задачи объ эволютахъ, предложенной Д. М. Синцовымъ).

Гр. Грузинцева.

I. Линейное разностно-дифференціальное уравненіе, связанное съ задачей объ эволютахъ.

§ 1. Задача: *разыскать кривыя, эволютами которыхъ являются тѣже кривыя, только имѣющія иное положеніе въ плоскости.*

Эта задача, какъ извѣстно, приводится къ нахожденію функціи $\varphi(s)$, удовлетворяющей уравненію

$$\varphi(s)\,\varphi'(s) = \varphi\,[\varphi(s) - a] \tag{1}$$

гдѣ $a = \varphi(s_0)$.

Попытаемся опредѣлить функцію μ такимъ образомъ, чтобы

$$\left.\begin{aligned} \mu(z) &= s + a \\ \mu(z+1) &= \varphi(s) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

и при этомъ $\varphi(s)$ удовлетворяло уравненію (1). Тогда, очевидно,

$$\mu(z+2) = \varphi\,\{\mu(z+1) - a\} = \varphi\,\{\varphi(s) - a\}$$

$$\varphi'(s) = \frac{\mu'(z+1)}{\mu'(z)}$$

и уравненіе (1) принимаетъ такую форму:

$$\frac{\mu(z+1)\,\mu'(z+1)}{\mu'(z)} = \mu(z+2)\,.$$

Написавъ его немного иначе

$$\frac{\mu'(z)}{\mu(z+1)} = \frac{\mu'(z+1)}{\mu(z+2)}$$

мы замѣчаемъ, что отношеніе

$$\frac{\mu'(z)}{\mu(z+1)} = \sigma$$

есть періодическая функція z съ періодомъ равнымъ единицѣ; въ частномъ случаѣ σ есть постоянная.

Въ дальнѣйшемъ я ограничусь отысканіемъ аналитическихъ рѣшеній уравненія (1).

Легко доказать, что, если $\mu(z)$ есть какое-нибудь аналитическое рѣшеніе уравненія

$$\mu'(z) = \sigma\mu(z+1) \tag{3}$$

то, при нѣкоторыхъ ограниченіяхъ относительно областей перемѣнныхъ z и s, $\varphi(s)$ будетъ аналитической функціей s и будетъ удовлетворять уравненію (1).

Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что μ есть рѣшеніе уравненія (3), голоморфное въ нѣкоторой односвязной области, внутри которой всегда находится точка $(z+1)$, если точка z принадлежитъ къ этой области; допустимъ также, что, не нарушая односвязности ея и сохраняя указанное, мы можемъ удалить точки, гдѣ $\mu'(z) = 0$.

Тогда, какъ извѣстно, опредѣленныя уравненіями (2) s и $\varphi(s)$ будутъ аналитическими функціями z въ данной области и обратно: z, а слѣдовательно и $\varphi(s)$ будутъ аналитическими-же функціями s въ нѣкоторой области.

Докажемъ теперь, что $\varphi(s)$ удовлетворитъ уравненію (1).

Возведемъ уравненіе (2) въ квадратъ и продифференцируемъ по z

$$\mu(z+1)\,\mu'(z+1) = \varphi(s)\,\varphi'(s)\,\mu'(z)$$

или на основаніи (3)

$$\mu(z+2) = \varphi(s)\,\varphi'(z).$$

Замѣтивъ, что

$$\mu(z+2) = \varphi\,[\varphi(s) - a]$$

мы получаемъ уравненіе (1).

§ 2. Указываемые Д. М. Синцовымъ частные случаи соотвѣтствуютъ: логариѳмическая спираль—рѣшенію

$$\mu(z) = k^z$$

уравненія

$$\mu'(z) = \frac{\log k}{k}\,\mu(z+1)$$

и циклоида—рѣшенію

$$\mu(z) = c.\sin\frac{\pi z}{2}$$

уравненія

$$\mu'(z) = \frac{\pi}{2}.\mu(z+1)$$

§ 3. Прежде чѣмъ заняться уравненіемъ (3), къ которому мы свели рѣшеніе поставленной задачи, мы укажемъ, что тѣмъ же самымъ пріемомъ можно преобразовать уравненія второй задачи Д. М. Синцова и даже въ обобщенномъ видѣ.

Опредѣлимъ $(n+1)$ кривыхъ, обладающихъ свойствомъ, что всякая $(k+1)$'ая кривая есть эволюта k'ой, а *первая—есть эволюта* $(n+1)$'*ой кривой*.

Очевидно, что задача сводится къ рѣшенію системы функціональныхъ уравненій

$$\varphi_0(s)\varphi_0'(s) = \varphi_1[\varphi_0(s) - a_0] \qquad (1)$$

$$\varphi_1(s)\varphi_1'(s) = \varphi_2[\varphi_1(s) - a_1] \qquad (2)$$

. . . .

$$\varphi_n(s)\varphi_n'(s) = \varphi_0[\varphi_n(s) - a_n] \qquad (n+1)$$

гдѣ $K = \varphi_k(s)$ есть натуральное уравненіе k'ой кривой, а $a_k = \varphi_k(s_{0k})$ начальное значеніе радіуса кривизны k'ой кривой.

Введемъ вспомогательныя функціи.

$$\lambda_1(s) = \varphi_0(s).\varphi_0'(s) \qquad [1]$$

$$\lambda_2(s) = \varphi_0(s).\lambda_1'(s) \qquad [2]$$

$$\lambda_3(s) = \varphi_0(s).\lambda_2'(s) \qquad [3]$$

. . . .

$$\lambda_n(s) = \varphi_0(s).\lambda_{n-1}'(s) \qquad [n]$$

Тогда (1) приметъ видъ:

$$\lambda_1(s) = \varphi_1[\varphi_0(s) - a_0] \qquad (1)'$$

Возводимъ обѣ части этого уравненія въ квадратъ и дифференцируемъ по s:

$$\lambda_1(s)\lambda_1'(s) = \varphi_1[\varphi_0(s) - a_0].\varphi_1'[\varphi_0(s) - a_0].\varphi_0'(s).$$

Дѣлая во (2) подстановку

$$s \mid \varphi_0(s) - a$$

получаемъ, пользуясь (1) и [1]:

$$\varphi_1[\varphi_0(s)-a_0]\,\varphi_1'[\varphi_0(s)-a_0]=\varphi_2\{\varphi_1[\varphi_0(s)-a_0]-a_1\}=\varphi_2[\lambda_1(s)-a_1]$$

или послѣ вставки въ предыдущее уравненіе:

$$\lambda_1(s)\,.\,\lambda_1'(s)=\varphi_2[\lambda_1(s)-a_1]\,\varphi_0'(s).$$

Сокращая на основаніи [1] на $\varphi_0'(s)$, мы находимъ

$$\lambda_2(s)=\varphi_2[\lambda_1(s)-a_1]. \qquad (2)'$$

Дѣйствуя такимъ образомъ далѣе, мы, очевидно, шагъ за шагомъ получимъ:

$$\lambda_3(s)=\varphi_3[\lambda_2(s)-a_2] \qquad (3)'$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda_n(s)=\varphi_n[\lambda_{n-1}(s)-a_{n-1}] \qquad (n)'$$

Уравненіе $(n+1)$ приметъ такой видъ

$$\varphi_0(s)\lambda_n'(s)=\varphi_0[\lambda_n(s)-a_n]. \qquad (n+1)'$$

Замѣчу кстати, что это уравненіе содержитъ только φ_0, его производныя и итераціи.

Но для рѣшенія удобнѣе не производить исключеніе λ_k, а разсматривать систему [1], [2], ... [n] и $(n+1)'$, очевидно, эквивалентную системѣ (1), (2), ... $(n+1)$.

Теперь положимъ такъ же, какъ и въ первой задачѣ:

$$s=\mu(z)+a_n; \qquad \begin{aligned}\lambda_n(s)&=\mu(z+1)\\ \varphi_0(s)&=\mu_1(z)\\ \lambda_1(s)&=\mu_2(z)\\ &\cdots\cdots\\ \lambda_{n-1}(s)&=\mu_n(z)\end{aligned}$$

Очевидно,

$$\varphi_0'(s)=\frac{\mu_1'(z)}{\mu'(z)}$$

$$\lambda_1'(s)=\frac{\mu_2'(z)}{\mu'(z)}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda_{n-1}(s)=\frac{\mu_n'(z)}{\mu'(z)}$$

$$\lambda_n'(s)=\frac{\mu'(z+1)}{\mu'(z)}$$

и, наконецъ,

$$\mu_1(z+1)=\varphi_0[\mu(z+1)-a_n]=\varphi_0[\lambda_n(s)-a_n]$$

Тогда уравненія [1], [2],...[n] и $(n+1)'$ принимаютъ слѣдующій простой видъ:

$$\mu_2(z)=\mu_1(z).\frac{\mu_1'(z)}{\mu'(z)} \qquad [1]'$$

$$\mu_3(z)=\mu_1(z).\frac{\mu_2'(z)}{\mu'(z)} \qquad [2]'$$

. . . .

$$\mu_{n-1}(z)=\mu_1(z).\frac{\mu'_{n-1}(z)}{\mu'(z)} \qquad [n-1]'$$

$$\mu(z+1)=\mu_1(z).\frac{\mu_n'(z)}{\mu'(z)} \qquad [n]'$$

$$\mu_1(z)\frac{\mu'(z+1)}{\mu'(z)}=\mu_1(z+1) \qquad (n+1)'$$

Изъ послѣдняго уравненія мы находимъ

$$\frac{\mu_1(z)}{\mu'(z)}=\frac{\mu_1(z+1)}{\mu'(z+1)}=\sigma$$

гдѣ σ—періодическая функція съ періодомъ, равнымъ единицѣ.

Теперь получаемъ окончательную систему уравненій:

$$\mu_1(z)=\sigma\mu'(z) \qquad \{0\}$$
$$\mu_2(z)=\sigma\mu_1'(z) \qquad \{1\}$$
$$\mu_3(z)=\sigma\mu_2'(z) \qquad \{2\}$$

. . . .

$$\mu_n(z)=\sigma\mu'_{n-1}(z) \qquad \{n-1\}$$
$$\mu(z+1)=\sigma\mu_n'(z) \qquad \{n\}$$

Если мы исключимъ μ_k изъ этихъ уравненій—что сдѣлать очень не трудно,—то получимъ уравненіе для одного $\mu(z)$, аналогичное уравненію (3) въ простѣйшей задачѣ.

Если мы найдемъ рѣшеніе этого уравненія, то уравненіе первой кривой будетъ:

$$s=\mu(z)+a_n$$
$$R=\sigma\mu'(z)$$

§ 4. Если мы будемъ разсматривать случай $\sigma=\text{const.}$, то, какъ извѣстно, перемѣнное z имѣетъ чрезвычайно простой геометрическій смыслъ.

Вычислимъ уголъ θ, который дѣлаетъ касательная къ первой кривой въ точкѣ $z(s, R)$ съ направленіемъ ея въ точкѣ $z=0$;

$$\theta = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{R} = \int_{0}^{z} \frac{\mu'(z)\,dz}{\sigma\mu'(z)} = \frac{z}{\sigma}$$

т. е. $z = \sigma\theta$.

Что касается уравненій $\{0\}, \{1\}, \ldots \{n\}$, то въ случаѣ $\sigma = \mathrm{const.}$ они имѣютъ видъ:

$$\begin{aligned} &\mu_1(z) = \sigma\mu'(v) \\ &\mu_2(z) = \sigma^2\mu''(z) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\mu_n(z) = \sigma^n\mu^{(n)}(z) \\ &\mu(z+1) = \sigma^{n+1}\mu^{(n+1)}(z) \end{aligned}$$

Послѣднее уравненіе въ частномъ случаѣ $n=0$ даетъ уравненіе (3) § 1-го.

II. Доказательство существованія.

§ 5. Обратимся къ уравненію

$$\mu'(z) = \sigma\mu(z+1), \tag{1}$$

гдѣ мы будемъ предполагать σ дѣйствительнымъ и меньшимъ единицы по абсолютной величинѣ [1]).

Задачу—рѣшить уравненіе (1)—мы понимаемъ слѣдующимъ образомъ: найти наиболѣе общій видъ функціи $\mu(z)$, удовлетворяющей этому уравненію и указать всѣ ея особенности.

Такая постановка задачи, очевидно, объясняется ея геометрическимъ происхожденіемъ.

Это уравненіе принадлежитъ къ т. н. однороднымъ, такъ какъ удовлетворяется функціей

$$\mu(z) = c_1\mu_1(z) + c_2\mu_2(z)$$

если μ_1 и μ_2—рѣшенія того-же уравненія, а c_1 и c_2—конечныя постоянныя.

Легко видѣть, что рѣшеніями его не могутъ быть ни многочлены, ни мероморфныя функціи.

Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе (1) не можетъ удовлетворяться никакимъ многочленомъ, такъ какъ послѣ подстановки степень лѣвой части будетъ на единицу меньше степени правой.

---

[1]) Cp. *F. Schürer.* Üb. die Funktional-Differentialgleichung $f'(x+1) = af(x)$ (Leipziger Berichte Bd. 64).

Точно такъ же, мероморфное рѣшеніе, имѣющее полюсъ k'-го порядка въ точкѣ $z=u$, должно имѣть простой полюсъ въ точкѣ $z=u-k+1$, что невозможно, такъ какъ это влечетъ за собой необходимость имѣть въ точкѣ $z=u-k$ логариѳмическую особенность.

Вообще говоря, если $\mu(z)$ имѣетъ въ точкѣ $z=u$ особенность, вблизи которой она можетъ быть представлена разложеніемъ

$$\mu(z)=\frac{A_1}{(z-u)^{\alpha_1}}+\frac{A_2}{(z-u)^{\alpha_2}}+\dots$$

$$\alpha_1>\alpha_2>\dots$$

то въ точкѣ

$$z=u+k$$

гдѣ k есть цѣлое число, она будетъ имѣть особенность:

$$\mu(z)=\frac{A_1'}{(z-u-k)^{\alpha_1+k}}+\frac{A_2'}{(z-u-k)^{\alpha_2+k}}+\dots$$

Очевидно также, что не существуетъ однозначныхъ рѣшеній, имѣющихъ на конечномъ разстояніи существенно-особенныя точки (т. н. quasi-цѣлыя и quasi-мероморфныя функціи). Въ этомъ легко убѣдиться, исходя изъ разложенія такой функціи въ рядъ Laurent'а вблизи одной изъ ея особенныхъ точекъ.

Итакъ, если мы ограничимся функціями, имѣющими только изолированныя особенности, то единственно-возможными *однозначными рѣшеніями уравненія* (1) *являются цѣлыя трансцендентныя.*

§ 6. Возьмемъ функцію $f(z)$, на которую наложимъ слѣдующія ограниченія: она должна быть аналитической во всякой конечной области, заключенной между двумя прямыми $y=\pm l$ и, кромѣ того, въ безконечной области между этими прямыми должны имѣть мѣсто неравенства

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\sqrt[k]{f(z+k)}\right|\leqq a \tag{2}$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\sqrt[k]{f^{(k)}(z-k)}\right|\leqq b<\sigma \tag{3}$$

если z находится въ нѣкоторой конечной области S_0, заключающей начало координатъ. Допустимъ еще, что наименьшая изъ окружностей, радіусы которыхъ равны l и $\frac{1}{a\sigma}$, цѣликомъ находится внутри S_0.

Разсмотримъ два уравненія

$$\mu_1'(z)-\sigma\mu_1(z+1)=-\sigma f(z+1) \tag{4}$$

$$\mu_2'(z)-\sigma u_2(z+1)=\sigma f(z+1) \tag{5}$$

Если намъ удастся показать, что этимъ уравненіямъ удовлетворяютъ функціи μ_1 и μ_2, аналитическія въ областяхъ S_1 и S_2, имѣющихъ общую часть S', то, очевидно, уравненіе (1) имѣетъ рѣшеніе

$$\mu(z) = \mu_1(z) + \mu_2(z)$$

аналитическое въ области S, общей областямъ S_0 и S'.

Рядъ

$$\mu_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(z) \tag{6}$$

гдѣ Q_k связаны между собой соотношеніями:

$$Q_k'(z) = \sigma Q_{k+1}(z+1) \tag{7}$$

$$Q_0(z) = f(z) \tag{8}$$

очевидно удовлетворяетъ формально уравненію (4):

$$\mu_1'(z) = \sigma \sum_{k=0}^{\infty} Q_{k+1}(z+1) = \sigma\mu_1(z+1) - \sigma f(z+1);$$

значитъ, если-бы онъ сходился абсолютно и равномѣрно въ нѣкоторой области, то онъ представилъ бы рѣшеніе уравненія (4), аналитическое въ этой области.

Изъ уравненія (7) мы находимъ:

$$Q_k(z) = \frac{1}{\sigma^k} f^{(k)}(z-k) \tag{9}$$

и, значитъ, въ рядѣ

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\, Q_k(z) \,|$$

только конечное число членовъ не будетъ удовлетворять неравенству

$$|\, Q_k(z) \,|^{\frac{1}{k}} \leqq \frac{b}{|\sigma|} + \varepsilon < 1.$$

какъ бы мало ни было ε.

Слѣдовательно $\mu_1(z)$ будетъ аналитической функціей во всякой конечной области, лежащей въ разсматриваемой полосѣ.

Подобнымъ-же образомъ рядъ

$$\mu_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(z) \tag{10}$$

гдѣ $P_k(z)$ связаны уравненіями

$$P_k(z) = \sigma \int_1^{z+1} P_{k-1}(z)\, dz \qquad (11)$$

$$P_1(z) = \sigma \int_1^{z+1} f(z)\, dz \qquad (12)$$

формально удовлетворяетъ уравненію (5):

$$\mu_2'(z) = \sigma \sum_{k=2}^{\infty} P_{k-1}(z+1) + \sigma P_1'(z) = \sigma\mu_2(z+1) + \sigma f(z+1).$$

Абсолютную и равномѣрную сходимость его въ нѣкоторой области легко показать, пользуясь неравенствомъ (2).

На основаніи (11):

$$| P_k(z) | \leqq | \sigma | \max | P_{k-1}(z) |_1^{z+1} | z | \leqq | \sigma z |^k \max | f(z+k) |$$

и

$$\overline{\lim} \, | P_k(z) |^{\frac{1}{k}} \leqq | \sigma z | \; \overline{\lim} \max | f(z+k) |^{\frac{1}{k}}$$

Въ силу непрерывности $f(z+k)$ для конечныхъ k

$$\overline{\lim} \max | f(z+k) |^{\frac{1}{k}} = \overline{\lim} \; | f(z+k) |^{\frac{1}{k}} \leqq a$$

Итакъ рядъ (10) сходится абсолютно и равномѣрно внутри круга

$$| z | < r \qquad (13)$$

гдѣ r есть меньшее изъ двухъ чиселъ l и $\frac{1}{a|\sigma|}$.

Итакъ $\mu(z) = \mu_1(z) + \mu_2(z)$ будетъ рѣшеніемъ уравненія (1) и будетъ голоморфной функціей внутри круга, радіусъ котораго равенъ меньшему изъ чиселъ l и $\frac{1}{a|\sigma|}$ [1]).

Продолжая при помощи уравненія (1) функціи $\mu(z)$, мы находимъ, что она будетъ голоморфна во всей полосѣ шириной въ $2h_1$, гдѣ $h_1 < l, \frac{1}{a\sigma}$.

---

[1]) Пріемъ, при помощи котораго мы доказали существованіе рѣшенія уравненія (1), есть въ сущности способъ послѣдовательныхъ приближеній; какъ извѣстно, онъ даетъ прекрасные результаты при доказательствѣ существованія рѣшеній дифференціальныхъ, интегральныхъ и нѣкоторыхъ другихъ функціональныхъ уравненій.

§ 7. Разсмотримъ два частныхъ случая: во первыхъ $f(z)=1$, во-вторыхъ $f(z)=(z-h)^{-\alpha}$.

Въ первомъ случаѣ $a=1$; $b=0$, l можетъ-быть сколь угодно велико и, слѣдовательно, мы получимъ рѣшеніе уравненія (1):

$$\mu(z)=1+\sigma\int\limits_1^{z+1} dz+\sigma^2\int\limits_1^{z+1}\int\limits_1^{z+1} dz^2+\sigma^3\int\limits_1^{z+1}\int\limits_1^{z+1}\int\limits_1^{z+1} dz^3+\ldots \qquad (14)$$

причемъ рядъ (14), какъ это слѣдуетъ изъ неравенства (13), сходится внутри круга $|z|=\frac{1}{\sigma}>1$.

Докажемъ, что опредѣленная рядомъ (14) $\mu(z)$ *есть цѣлая трансцендентная функція.*

Обозначимъ $v_k(z)$ коэффиціентъ при σ^k, такъ что

$$\mu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\sigma^k v_k(z) \qquad (14^{\text{bis}})$$

Очевидно, что $v_k(z)$ — многочлены съ положительными коэффиціентами и поэтому, если рядъ этотъ сходится въ нѣкоторой точкѣ ϱ, лежащей на положительной части дѣйствительной оси, то онъ сходится внутри всего круга радіуса $|x|=\varrho$.

Такимъ образомъ для того, чтобы $\mu(z)$ была цѣлой трансцендентной, достаточно, чтобы рядъ (14) равномѣрно сходился на всей положительной части оси x'овъ за исключеніемъ, быть можетъ, безконечно-удаленной точки. Возьмемъ внутри круга радіуса $\frac{1}{\sigma}$ точку z; опишемъ вокругъ нея окружность радіусомъ $r<\frac{1}{\sigma}-\varrho$; какъ извѣстно, если M_k есть maximum $|v_k(z)|$ на послѣдней окружности, то

$$|v_k'(z)|<\frac{M_k}{r}.$$

Такъ какъ $v_k(z)$ есть многочленъ съ положительными коэффиціентами, то

$$M_k<v_k(\varrho+r)$$

т. е. рядъ

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sigma^{k+1}v_{k+1}(z)$$

сходится абсолютно и равномѣрно внутри круга радіуса

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sigma}\right)$$

и, слѣдовательно, внутри этого круга представлетъ $v'(z)$.

Возьмемъ точку

$$z=\varrho'=\varrho+1>0$$

и пусть

$$\varrho<\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sigma}\right)$$

Такъ какъ

$$v_k(\varrho')=v'_{k+1}(\varrho)$$

то всѣ члены ряда для $v(\varrho')$ будутъ пропорціональны членамъ ряда для $v'(\varrho)$ и, значитъ, рядъ (14) сходится и для $z=\varrho'$. Равномѣрность сходимости очевидна. Разсуждая такимъ образомъ, мы докажемъ сходимость ряда (14) и для $\varrho''=\varrho'+1$ и т. д. и значитъ наше утвержденіе относительно $\mu(z)$ доказано.

III. Многозначныя рѣшенія.

§ 8. Обратимся теперь къ случаю

$$f(z)=(z-h)^{-\alpha}$$

гдѣ h—произвольный параметръ, а α—правильная положительная дробь [1]).

Тогда

$$Q_k(z)=\frac{(-1)^k\sigma^{-k}}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+k)}{(z-h-k)^{\alpha+k}} \tag{15}$$

и

$$P_k(z)=\sigma^k\int_1^{z+1}\ldots\int_1^{z+1}(z-h)^{-\alpha}\,dz^k \tag{16}$$

Выше мы доказали, что ряды:

$$\mu_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty}Q_k(z) \tag{17}$$

и

$$\mu_2(z)=\sum_{k=1}^{\infty}P_k(z) \tag{18}$$

[1]) Какъ увидимъ изъ хода дальнѣйшихъ разсужденій, ограниченіе $|\alpha|<1$ несущественно и введено только для того, чтобы отдѣлить конечную часть функціи $\mu(z)$ отъ части ея, которая обращается въ нѣкоторыхъ точкахъ въ безконечность.

сходятся абсолютно и равномѣрно внутри нѣкотораго круга конечнаго радіуса и

$$\mu(z) = \mu_1(z) + \mu_2(z)$$

есть рѣшеніе нашего уравненія, аналитическое внутри упомянутаго круга.

Докажемъ теперь, что *ряды 17 и 18 сходятся абсолютно и равномѣрно: рядъ 18—на всей плоскости, а рядъ 17—на всей плоскости за исключеніемъ, очевидно, точекъ* $z = h + k$, гдѣ k цѣлое число. То-есть, другими словами $\mu_1(z)$ есть аналитическая функція на всей плоскости, кромѣ искусственнаго сѣченія, которое проходитъ черезъ точки $z = h + k$, а $\mu_2(z)$—аналитическая функція также на всей плоскости за исключеніемъ сѣченія, проходящаго черезъ точки $z = h - k$.

Рядъ для функціи $\mu_1(z)$ обладаетъ очевиднымъ свойствомъ: если онъ сходится абсолютно и равномѣрно въ точкѣ $z = x + yi$, то тоже обстоятельство будетъ имѣть мѣсто во всякой другой точкѣ $z' = x' + y'i$ при условіи $x' < x$.

Въ самомъ дѣлѣ, если $x' < x$, то только для конечнаго числа членовъ ряда 17 не будетъ соблюдаться неравенство

$$|z' - h - k| > |z - h - k|$$

т. е., начиная съ нѣкотораго k, будетъ

$$|Q_k(z')| < |Q_k(z)|$$

и, слѣдовательно, рядъ 17 будетъ сходиться абсолютно и равномѣрно слѣва вертикальной прямой, касательной къ первоначальной области сходимости этого ряда.

Кромѣ того изъ уравненія (4) мы имѣемъ:

$$\mu_1(z+1) = \frac{\mu_1'(z)}{\sigma} + (z - h + 1)^{-\alpha} \qquad (4^{\text{bis}})$$

пользуясь этимъ свойствомъ функціи $\mu_1(z)$, мы можемъ продолжить эту функцію на всю часть плоскости справа упомянутой выше касательной; исключеніемъ будетъ *полу-прямая*, идущая вправо отъ точки $z = h$, параллельно оси x'овъ.

Если-бы пожелали, какъ это намъ понадобится ниже, замѣнить полупрямую произвольной кривой, проходящей черезъ точки $z = h + k$, то эту замѣну легко выполнить.

Въ самомъ дѣлѣ на прямой, на которой лежатъ всѣ особенныя точки $\mu_1(z)$, функція $\mu_1(z)$ — дѣйствительна и, кромѣ того, равномѣрно стремится къ своимъ значеніямъ на этой прямой, если z будетъ приближаться къ любой точкѣ между $h+k+\varepsilon$ и $h+k+1-\varepsilon$.

Такимъ образомъ мы можемъ воспользоваться методомъ «зеркальнаго отображенія» («Spiegelung» Schwarz'a) [1]) и, деформируя сѣченія, замѣнить нашу полупрямую любой не имѣющей двойныхъ точекъ кривой, проходящей черезъ особенныя точки функціи $\mu_1(z)$,

§ 9. Прежде, чѣмъ перейти къ изслѣдованію сходимости ряда для $\mu_2(z)$, мы докажемъ одну простую лемму относительно многочленовъ съ положительными коэффиціентами.

Если намъ данъ многочленъ съ положительными коэффиціентами

$$F(z)=\sum_{m=0}^{n} c_m z^m$$

то всегда можно выбрать такое z', *чтобы*

$$|F(z')|>\sum_{m=0}^{n}|c_m z^m|$$

Пусть

$$\varrho=|z|$$

тогда

$$|F(\varrho)|=\sum_{m=0}^{n} c_m\varrho^m=\sum_{m=0}^{n}|c_m z^m|$$

Но модуль аналитической функціи имѣетъ максимумъ всегда на контурѣ, а не внутри его; значитъ на любой замкнутой кривой, огибающей точку $z=\varrho$, существуетъ такая точка z', что

$$|F(z')|>F(\varrho)$$

и

$$|F(z')|>\sum_{m=0}^{n}|c_m z^m| \qquad (19)$$

ч. и т. д.

За точку z' можно взять точку, лежащую на оси x'овъ, правѣе точки $z=\varrho$; тогда, очевидно, неравенство (19) будетъ имѣть мѣсто для *всякаго* многочлена.

---

[1]) См. напр. *G. Darboux.* Leçons s. la th. des surfaces, t. I p. 174 et ss.

§ 10. Преобразуемъ теперь выраженіе (16) для $P_k(z)$, введя вмѣсто комплексныхъ перемѣнныхъ интегрированія—дѣйствительныя, а именно положимъ:

$$z_1 = 1 + t_1 z_2$$
$$z_2 = 1 + t_2 z_3$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$z_k = 1 + t_k z$$

тогда

$$P_k(z) = \sigma^k \int_0^1\int_0^1 \ldots \int_0^1 z_2 z_3 \ldots z_k z\, (z_1 - h)^{-\alpha} dt_1 dt_2 \ldots dt_k \tag{20}$$

при этомъ, очевидно, $z_1, z_2, \ldots z_k$ будутъ линейными функціями z, съ положительными внутри предѣловъ интегрированія коэффиціентами и z_1 принимаетъ всѣ возможныя значенія, находящіяся внутри параллелограмма π_k съ вершинами: 1, $1+z$, $k+z$ и k.

Итакъ

$$P_k(z) = \sigma^k \int_0^1 \ldots \int_0^1 F_k(z)(z_1 - h)^{-\alpha} dt_1 \ldots dt_k$$

гдѣ $F_k(z)$—многочленъ относительно z съ положительными коэффиціентами; пусть

$$F_k(z) = \sum_{m=1}^{k} c_m(k) . z^m$$

тогда $P_k(z)$ представится въ видѣ суммы интеграловъ вида:

$$\sigma^k z^m \int_0^1 \ldots \int_0^1 c_m(k)(z_1 - h)^{-\alpha} dt_1 \ldots dt_k$$

Прилагая къ каждому изъ слагаемыхъ k разъ теорему о средней, обобщенную Darboux [1]), получимъ:

$$\sigma^k z^m \int_0^1 \ldots \int_0^1 c_m(k)(z_1 - h)^{-\alpha} dt_1 \ldots dt_k = \sigma^k z^m\, \theta_m (\bar{z} - h)^{-\alpha} \int_0^1 \ldots \int_0^1 c_m(k) dt_1 \ldots dt_k$$

гдѣ $|\theta_m| < 1$ и $\bar{z}$ находится внутри параллелограмма π_k; если мы обозначимъ ζ точку его ближайшую къ началу координатъ и, очевидно, одну

[1]) Сравн. *U. Dini.* Sugli sviluppi in serie per la rappresentazione analitica etc. pp. 68—70.

и туже для всѣхъ параллелограммовъ, то получимъ

$$M_k = |(\zeta - h)^{-\alpha}|.$$

Итакъ

$$|P_k(z)| < |\sigma|^k |(\zeta - h)|^{-\alpha} \sum_{m=0}^{k} \varrho^m \int_0^1 \dots \int_0^1 c_m(k)\, dt_1 \dots dt_k$$

или мѣняя порядокъ суммированія и интегрированія:

$$|P_k(z)| < |\sigma|^k |(\zeta - h)|^{-\alpha} \int_0^1 \dots \int_0^1 F_k(\varrho) dt_1 \dots dt_k.$$

Но, если мы обозначимъ черезъ $v_k(z)$, коэффиціентъ при σ^k въ разложеніи найденнаго нами выше цѣлаго трансцендентнаго рѣшенія [см. 14], то замѣтимъ, во-первыхъ, что $v_k(z)$, есть многочленъ съ положительными коэффиціентами и, во-вторыхъ, что

$$v_k(z) = \int_0^1 \dots \int_0^1 F_k(z) dt_1 \dots dt_k$$

итакъ

$$|P^k(z)| < |\sigma|^k |(\zeta - h)^{-\alpha}| v_k(\varrho).$$

Но по доказанной леммѣ можно выбрать такое независящее отъ k число z', чтобы было

$$v_k(\varrho) < |v_k(z')|.$$

Слѣдовательно

$$|P_k(z)| < |(\zeta - h)^{-\alpha}| \quad |\sigma|^k |v_k(z')| \tag{21}$$

т. е. каждый членъ разложенія 18 по абсолютной величинѣ меньше умноженнаго на нѣкоторую конечную величину соотвѣтствующаго члена ряда, сходящагося абсолютно и равномѣрно для всякаго z.

Итакъ абсолютная и равномѣрная сходимость ряда 18 на всей плоскости доказана.

Функція $\mu_2(z)$ будетъ, значитъ, аналитической во всякой односвязной области, не заключающей точекъ $z = h - k$; $k = 1, 2, \dots$

Такую область мы образуемъ, проведя произвольную кривую подобнымъ-же образомъ, какъ и для $\mu_1(z)$.

Итакъ, можно считать доказаннымъ существованіе рѣшенія нашего функціональнаго уравненія, единственными особенностями котораго на конечной плоскости будутъ точки $z = h \pm k$.

§ 11. На основаніи однородности нашего уравненія мы можемъ утверждать, что существуетъ рѣшеніе нашего уравненія $\mu(z)$, соотвѣтствующее функціи

$$f(z)=\sum_{n=1}^{m} A_n(z-h_n)^{-\alpha_n}; \tag{22}$$

рѣшеніе это имѣетъ единственными особенностями точки

$$z=h_n\pm k\,,\ k=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

и выражается рядами, аналогичными рядамъ (17) и (18) и представляющими функцію $\mu(z)$ на всей плоскости.

Въ частномъ случаѣ, если α_n ограничены сверху, то наше утвержденіе остается въ силѣ и при $m=\infty$, если только рядъ (22)—сходится (напр., если онъ представляетъ каноническое разложеніе мероморфной функціи $f(z)$ въ рядъ Mittag-Leffler'а).

Тогда (при помощи интеграла Cauchy это легко доказать) рѣшеніемъ нашего уравненія будетъ

$$\mu(z)=\int_c \mu_0(z-\alpha)\,f(\alpha)\,d\alpha$$

гдѣ μ_0—частное рѣшеніе, соотв. $\alpha=1$ и контуръ C не заключаетъ внутри полюсовъ $f(\alpha)$.

IV. Однозначныя рѣшенія.

§ 12. Пусть намъ дана функція $\varphi(z)$ голоморфная внутри нѣкотораго контура C, внутри котораго находится по крайней мѣрѣ одинъ корень уравненія

$$1-ze^{-\sigma z}=0; \tag{1}$$

допустимъ, что начало координатъ находится внѣ этого контура.

Разсмотримъ цѣлую трансцендентную функцію

$$v(z)=\int_c \frac{\varphi(\alpha)\,\alpha^z}{1-\alpha e^{-\alpha\sigma}}\,d\alpha \tag{2}$$

Какъ легко видѣть

$$v'(z)-\sigma v(z+1)=\int_c \varphi(\alpha)\,\alpha^z\,\frac{\log\alpha-\sigma\,.\,\alpha}{1-\alpha e^{-\alpha\sigma}}\,d\alpha$$

Подъинтегральная функція голоморфна во всей области, ограниченной контуромъ C.

Это очевидно если $\alpha \neq \alpha_k$, гдѣ α_k—корень ур. (1); если же $\alpha = \alpha_k$, то

$$1 - \alpha e^{-\alpha\sigma} = - e^{-\alpha_k\sigma}(1 - \alpha_k\sigma)(\alpha - \alpha_k)(1 + \varepsilon)$$
$$\log\alpha - \alpha\sigma = - \alpha_k^{-1}(1 - \alpha_k\sigma)(\alpha - \alpha_k)(1 + \eta)$$

гдѣ ε и η голоморфныя функціи α вблизи α_k и обращаются въ ноль, если $\alpha = \alpha_k$.

Итакъ
$$v'(z) - \sigma v(z+1) = 0$$

и, слѣдовательно $v(z)$, *представляемая интеграломъ (2), есть цѣлое трансцендентное рѣшеніе нашего уравненія.*

§ 13. Уравненіе
$$1 - ze^{-\sigma z} = 0 \tag{3}$$

играетъ большую роль при нахожденіи частныхъ цѣлыхъ рѣшеній уравненія
$$\mu'(z) = \sigma\mu(z+1) \tag{4}$$

Какъ въ этомъ легко убѣдиться, если $z = \alpha_k$ будетъ корень этого уравненія, то, вообще говоря,
$$v(z) = e^{\alpha_k\sigma z} \tag{5}$$

будетъ рѣшеніемъ уравненія (4).

По аналогіи съ линейными дифференціальными и разностными уравненіями мы назовемъ это уравненіе *характеристическимъ* уравненіемъ.

Въ другомъ сообщеніи, имѣющемъ появиться на страницахъ этого журнала, я доказываю, что, вообще говоря, т. е. если $\sigma \neq e^{-1}$, корни уравненія (3) всѣ различны и даю асимптотическое выраженіе α_k въ зависимости отъ ихъ индекса k. Въ случаѣ, если $\sigma = e^{-1}$, кромѣ экспоненціальныхъ рѣшеній (5), уравненію (4) удовлетворяетъ
$$v(z) = ze^{z} \tag{6}$$

§ 14. Въ заключеніе я позволю себѣ указать на два частныхъ рѣшенія нашего уравненія, особенно интересныхъ съ геометрической стороны; это рѣшеніе (6) съ одной асимптотической точкой и съ одной точкой возврата и—рѣшеніе съ нѣсколькими безконечными вѣтвями, имѣющими асимптоты, которое мы получимъ, полагая $\alpha = \frac{1}{3}$ въ формулахъ (15) и (16) въ § 8. Выбирая σ соотвѣтствующимъ образомъ, можно достигнуть того, чтобы число безконечныхъ вѣтвей кривой, соотвѣтствующей рѣшенію $\mu(z)$ было конечно или безконечно.