Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités.

Je me propose d'indiquer une démonstration fort simple du théorème suivant de Weierstrass:

Si $F(x)$ est une fonction continue quelconque dans l'intervalle 01, il est toujours possible, quel que petit que soit ε, de déterminer un polynome $E_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ de degré n assez élevé, tel qu' on ait

$$|F(x) - E_n(x)| < \varepsilon$$

en tout point de l'intervalle considéré.

A cet effet, je considère un évenement A, dont la probabilité est égale à x. Supposons qu'on effectue n expériences et que l'on convienne de payer à un joueur la somme $F\left(\frac{m}{n}\right)$, si l'évenement A se produit m fois. Dans ces conditions, l'espérance mathématique E_n du joueur aura pour valeur

$$E_n = \sum_{m=0}^{m=n} F\left(\frac{m}{n}\right) . C_n^m x^m (1-x)^{n-m}. \tag{1}$$

Or, il résulte de la continuité de la fonction $F(x)$ qu'il est possible de fixer un nombre δ, tel que l'inégalité

$$|x - x_0| \leqq \delta$$

entraine

$$\left| F(x) - F(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2};$$

de sorte que, si $\overline{F}(x)$ désigne le maximum et $\underline{F}(x)$ le minimum de $F(x)$ dans l'intervalle $(x - \delta, x + \delta)$, on a

$$\overline{F}(x) - F(x) < \frac{\varepsilon}{2}, \; F(x) - \underline{F}(x) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Soit de plus η la probabilité de l'inégalité $\left| x - \frac{m}{n} \right| > \delta$, et L le maximum de $|F(x)|$ daus l'intervalle 01.

On aura alors

$$\underline{F}(x).(1-\eta) - L.\eta < E_n < \overline{F}(x).(1-\eta) + L.\eta. \tag{3}$$

Mais, en vertu du théorème de Bernoulli, on pourra prendre n assez grand pour avoir

$$\eta < \frac{\varepsilon}{4L}. \tag{4}$$

L'inégalité (3) se mettra donc sucessivement sous la forme

$$F(x) + (\underline{F}(x) - F(x)) - \eta(L + \underline{F}(x)) < E_n < F(x) + (\overline{F}(x) - F(x)) + \eta(L - \overline{F}(x))$$

et ensuite

$$F(x) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{2L}{4L}\varepsilon < E_n < F(x) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2L}{4L}\varepsilon;$$

donc

$$|F(x) - E_n| < \varepsilon \tag{5}$$

Or E_n est manifestement un polynome de degré n.

Le théorème est donc démontré.

J'ajouterai seulement deux remarques.

Les polynomes approchés $E_n(x)$ sont surtout commodes, il me semble, lorsqu'on connait exactement ou approximativement les valeurs de $F(x)$ pour $x = \frac{m}{n}$ $(m = 0,\ 1,\ ..n)$.

La formule (1) et l'inégalité (5) montrent que, quelle que soit la fonction continue $F(x)$, on a

$$F(x) = \lim_{n=\infty} \sum_{m=0}^{m=n} F\left(\frac{m}{n}\right).\, C_n^m x^m (1-x)^{n-m}.$$

S. Bernstein.