Объ интегралахъ общихъ многимъ задачамъ механики.

Я. Шохата.

Въ двухъ мемуарахъ, опубликованныхъ въ 1856 и 1858 гг. Бертранъ [1]) показалъ, что при извѣстныхъ условіяхъ относительно силъ существуютъ интегралы, общіе многимъ задачамъ на движеніе точки или системы точекъ, и далъ изящный методъ для разысканія какъ силовыхъ условій необходимыхъ и достаточныхъ, такъ и самыхъ интеграловъ. Методъ этотъ однако приложимъ лишь къ тому частному случаю, когда силы зависятъ только отъ координатъ точекъ.—Коркинъ [2]) свелъ этотъ вопросъ къ интегрированію системы уравненій въ частныхъ производныхъ и, прилагая свою методу, обобщилъ его, введя въ выраженія для силъ и скорость.—Интересны статьи по этому вопросу, принадлежащія г. V. Amato [3]).—Настоящая статья имѣетъ цѣлью съ помощью методы Якоби изучить: 1) движеніе свободной точки въ плоскости при самыхъ общихъ условіяхъ, т. е. когда силы зависятъ явно отъ координатъ, скорости и времени, 2) движеніе на поверхности и 3) движеніе въ пространствѣ—послѣдніе два случая при силахъ Бертрана.

I. Движеніе въ плоскости.

§ 1. Разысканіе интеграловъ, общихъ двумъ механическимъ задачамъ (X, Y) и (X_1, Y_1), можно свести къ интегрированію слѣдующей системы уравненій въ частныхъ производныхъ: [2])

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t}+x'\frac{\partial f}{\partial x}+y'\frac{\partial f}{\partial y}+X\frac{\partial f}{\partial x'}+Y\frac{\partial f}{\partial y'}=0\\ \frac{\partial f}{\partial t}+x'\frac{\partial f}{\partial x}+y'\frac{\partial f}{\partial y}+X_1\frac{\partial f}{\partial x'}+Y_1\frac{\partial f}{\partial y'}=0\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ .\ .\quad (\alpha)$$

[1]) Journal de Mathématiques.

[2]) О совокупныхъ уравненіяхъ съ частными производными и нѣкоторыхъ вопросахъ механики (Спб. 1867); Mathematische Annalen 1870.

[3]) Atti del Academia Gioenia vol. XIV, XVII; Giornale di Battaglini 1901.

($x' = \frac{dx}{dt}$, $y' = \frac{dy}{dt}$, $\phi = \text{Const}$ — искомое общее рѣшеніе).

$$\left.\begin{aligned} A\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial t} + x'\frac{\partial\phi}{\partial x} + y'\frac{\partial\phi}{\partial y} + l\frac{\partial\phi}{\partial y'} = 0 \\ \text{или}\qquad B\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x'} + k\frac{\partial\phi}{\partial y'} = 0 \end{aligned}\right\} \dots\dots (\beta)$$

$$k = \frac{Y - Y_1}{X - X_1},\quad l = \frac{XY_1 - YX_1}{X - X_1} = Y - kX = Y_1 - kX_1.$$

Можно всегда предположить $\frac{\partial\phi}{\partial x'} \neq 0$, $\frac{\partial\phi}{\partial y'} \neq 0$ *) или, что то же, $X \neq X_1$, $Y \neq Y_1$. Функціи k и l суть, слѣдов., вполнѣ опредѣленныя

*) Составимъ, пользуясь системой (α), уравненіе:

$$(X - X_1)\frac{\partial\phi}{\partial x'} + (Y - Y_1)\frac{\partial\phi}{\partial y'} = 0,$$

изъ котораго непосредственно заключаемъ, что если одинъ изъ искомыхъ интеграловъ не зависитъ отъ y', наприм., то и всѣ остальные не будутъ зависѣть, и мы будемъ имѣть

$$X = X_1.$$

Далѣе, дифференцированіемъ по x' выводимъ

$$\frac{\partial^2 X}{\partial y'^2} = 0,\quad X = X_1 = my' + n,$$

гдѣ m и n отъ y' не зависитъ. Поэтому (α) разлагается на два слѣдующихъ уравненія

$$\left.\begin{aligned} X^1\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial t} + x'\frac{\partial\phi}{\partial x} + n\frac{\partial\phi}{\partial x'} = 0 \\ X^2\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial y} + m\frac{\partial\phi}{\partial x'} = 0 \end{aligned}\right\}$$

Составивъ уравненіе $(X^1\phi,\ X^2\phi) = 0$, мы непосредственно выводимъ

$$\begin{aligned} &m = 0, \\ &\frac{\partial n}{\partial y} = 0, \\ &X = X_1 = n(t,\ x,\ x'). \end{aligned}$$

Вопросъ свелся, слѣдов., къ разысканію интеграловъ уравненія

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + x'\frac{\partial\phi}{\partial x} + n\frac{\partial\phi}{\partial x'} = 0$$

или, что то же, двухъ первыхъ интеграловъ обыкновеннаго уравненія

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X(t,\ x,\ x').$$

и конечныя функціи, зависящія отъ t, x, y, x', y', причемъ k *не обращается въ нуль.* Эти функціи, какъ и всѣ другія, которыми намъ придется пользоваться, мы будемъ предполагать непрерывными и имѣющими частныя производныя.

Мы будемъ различать два случая: одного или двухъ общихъ интеграловъ.

а) Случай одного общаго интеграла.

§ 2. Въ этомъ случаѣ система (α) должна свестись къ замкнутой системѣ четырехъ уравненій. Поэтому уравненія

$$\left.\begin{aligned} C\phi &= (B\phi,\ A\phi) = \frac{\partial\phi}{\partial x} + k\frac{\partial\phi}{\partial y} + m\frac{\partial\phi}{\partial y'} = 0 \\ D\phi &= (A\phi,\ C\phi) = (Ak - m)\frac{\partial\phi}{\partial x'} + (Am - Cl)\frac{\partial\phi}{\partial y'} = 0 \\ E\phi &= (B\phi,\ C\phi) = Bk\frac{\partial\phi}{\partial x'} + (Bm - Ck)\frac{\partial\phi}{\partial y'} = 0 \end{aligned}\right\} \ldots (\gamma)$$

$$m = Bl - Ak$$

сводятся къ двумъ только независимымъ, т. е.

$$\frac{Ak - m}{Bk} = \frac{Am - Cl}{Bm - Ck}.$$

Замѣтимъ, что соотношенія

$$Bk = Ak - m = 0$$

не могутъ имѣть мѣста одновременно, ибо изъ нихъ слѣдуетъ

$$Bm - Ck = B(Ak) - B(Ak) + A(Bk) = 0,$$

а, слѣдов., уравненія (α) и (γ) свелись бы къ тремъ независимымъ, а не къ четыремъ, какъ того требуетъ разсматриваемый случай.

Слѣдуя Коркину, остановимся на частномъ случаѣ, когда функція $k = \dfrac{Y - Y_1}{X - X_1}$ удовлетворяетъ уравненію вида $B\phi = 0$, т. е.

$$Bk = \frac{\partial k}{\partial x'} + k\frac{\partial k}{\partial y'} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

[Соотношеніе это, очевидно, выполнено для силъ Бертрана].

Обозначивъ чрезъ ψ произвольную функцію, выводимъ

$$\psi(t,\ x,\ y,\ k,\ \omega) = 0,$$

$$\omega = y' - kx'.$$

Въ дальнѣйшемъ будемъ различать два предположенія, соотвѣтственно тому, содержитъ ли ψ перемѣнную k или нѣтъ.

a) $\dfrac{\partial \psi}{\partial k} \neq 0$.

Въ этомъ случаѣ, обозначая черезъ φ произвольную функцію, имѣемъ

$$k = \varphi(t,\ x,\ y,\ \omega).$$

Величины t, x, y, ω, утожествляющія уравненіе $Bf = 0$, мы примемъ за новыя перемѣнныя.

Такъ какъ уравненіе $Ef = 0$ должно удовлетвориться тожественно, разъ $Bk = 0$, то необходимо имѣемъ

$$Bm - Ck = B(m - Ak) = 0, \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

а слѣдов., если 2λ означаетъ произвольную функцію, то

$$Ak - m = 2\lambda(t,\ x,\ y,\ \omega). \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Замѣтимъ, что λ *не можетъ равняться нулю.*

Развернемъ (3), подставивъ туда $y' = \omega + \varphi x'$. Получимъ

$$\frac{\partial l}{\partial x'} = \frac{2\left[\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \omega \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} - \lambda + x'\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} - \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial \omega}\right) + l \dfrac{\partial \varphi}{\partial \omega}\right]}{1 + x' \dfrac{\partial \varphi}{\partial \omega}}, \quad \ldots \quad (4)$$

обыкновенное дифференціальное уравненіе относительно x', которое легко интегрируется и даетъ:

$$l = Y - \varphi X = Y_1 - \varphi X_1 = P + 2Qx' + Rx'^2, \quad \ldots \quad (5)$$

здѣсь P означаетъ произвольную функцію отъ t, x, y, ω, выраженія для Q и R суть слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} Q &= P\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \omega \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \lambda \\ R &= (Q - \lambda)\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Система $Af = Bf = Cf = 0$ легко теперь преобразуется къ новымъ перемѣннымъ въ нижеслѣдующую:

$$\left.\begin{aligned} X^1\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial t} + \omega\frac{\partial\phi}{\partial y} + P\frac{\partial\phi}{\partial\omega} = 0 \\ X^2\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial\phi}{\partial y} + (Q-\lambda)\frac{\partial\phi}{\partial\omega} = 0 \\ X^3\phi &= 2\lambda\frac{\partial\phi}{\partial y} + S\frac{\partial\phi}{\partial\omega} \qquad\qquad = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (\delta)$$

$$S = X^1(Q-\lambda) - X^2P.$$

Такъ какъ эта система необходимо есть замкнутая, то составивъ уравненія $(X^1\phi,\ X^3\phi) = 0$ и $(X^2\phi,\ X^3\phi) = 0$, выводимъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{2X^1\lambda - S}{2\lambda} &= \frac{X^1S - X^3P}{S} \\ \frac{2X^2\lambda - X^3\varphi}{2\lambda} &= \frac{X^2S - X^3(Q-\lambda)}{S} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

уравненія 3-го порядка относительно φ.

Интегралъ, опредѣляемый системой (δ), *даетъ* [*будучи приравненъ постоянной*] *рѣшеніе общее всѣмъ тѣмъ задачамъ, въ которыхъ силы удовлетворяютъ соотношеніямъ* (5), (6), (7).

Изъ полученныхъ результатовъ непосредственно вытекаетъ то, что дано Коркинымъ $\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial\omega} = \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial\omega} = 0\right]$ и Бертраномъ $\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial\omega} = 0,\ l = P(x,y)\right]$.

Если S обращается тожественно въ нуль, то соотношенія (7) теряютъ смыслъ, но изъ (δ) мы заключаемъ, что тогда должно имѣть

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0,$$

и остается интегрировать *нормальную* систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial t} + P\frac{\partial\phi}{\partial\omega} &= 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} + (Q-\lambda)\frac{\partial\phi}{\partial\omega} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\delta')$$

гдѣ очевидно

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(Q-\lambda)}{\partial y} = 0.$$

Это какъ разъ имѣетъ мѣсто въ случаѣ движенія точки въ сопротивляющейся средѣ, разсмотрѣнномъ Коркинымъ.

b) $\frac{\partial\psi}{\partial k}=0$.

Очевидно можно положить

$$\omega=y'-kx'=f(t,\ x,\ y).$$

Принявъ величины $t,\ x,\ y,\ k=\frac{y'-f(t,\ x,\ y)}{x'}$ за новыя перемѣнныя и разсуждая подобно предыдущему, мы легко получимъ

$$l=Y-\frac{y'-f(t,\ x,\ y)}{x'}X=P+2Qx'+Rx'^2\ .\ .\ .\quad(8)$$

$$\left.\begin{aligned}P&=\frac{\partial f}{\partial t}+f\frac{\partial f}{\partial y}\\ Q&=\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda(t,\ x,\ y,\ k)\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad(9)$$

R и λ суть произвольныя функціи отъ $t,\ x,\ y,\ k$, причемъ $\lambda\neq 0$.

Система (β) преобразовывается къ новымъ перемѣннымъ:

$$\left.\begin{aligned}X^1\phi&=\frac{\partial\phi}{\partial t}+f\frac{\partial\phi}{\partial y}+(Q+\lambda)\frac{\partial\phi}{\partial k}=0\\ X^2\phi&=\frac{\partial\phi}{\partial x}+k\frac{\partial\phi}{\partial y}+R\frac{\partial\phi}{\partial k}=0\\ X^3\phi&=2\lambda\frac{\partial\phi}{\partial y}+S\frac{\partial\phi}{\partial k}\qquad\ =0\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad(\varepsilon)$$

$$S=X^1R-X^2(Q-\lambda).$$

Отсюда легко вывести соотношенія, аналогичныя (7).

Замѣчаніе.

При силахъ, не зависящихъ явно отъ времени, можно искать одно общее рѣшеніе, не зависящее отъ времени, положивъ въ (δ) или (ε) $\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$. Для существованія такого интеграла очевидно необходимо, чтобы

$$\left.\begin{aligned}\frac{2\lambda}{\omega}&=\frac{S}{p}\qquad(\text{для сист. }(\delta))\\ \frac{2\lambda}{f}&=\frac{S}{Q+\lambda}\quad(\text{для сист. }(\varepsilon))\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad(10)$$

b) Случай двухъ общихъ рѣшеній.

§ 3. Въ этомъ случаѣ уравненія $D\phi=E\phi=0$ (см. (γ)) даютъ очевидно тожественный нуль, т. е.

$$Bk = Bm - Ck = Ak - m = Am - Cl = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Первыя три изъ этихъ соотношеній позволяютъ примѣнить всѣ результаты предыдущаго параграфа, положивъ тамъ $\lambda = 0$, послѣ чего останется соотношеніе

$$Am - Cl = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Пусть будетъ сначала

$$y' - kx' = f(t, x, y).$$

Сдѣлавъ $\lambda = 0$ въ (ε), (8), (9), получимъ

$$l = Y - \frac{y' - f(t, x, y)}{x'} = \frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial y} + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)x' + R(t, x, y, k)x'^2 \, . \, . (13)$$

Такъ какъ $\frac{\partial \phi}{\partial k} \neq 0$, то необходимо имѣемъ:

$$S = X^1 R - X^2\left(\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$$

или, развернувъ,

$$\frac{\partial R}{\partial t} + f\frac{\partial R}{\partial y} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial R}{\partial k} - R\frac{\partial f}{\partial y} = 2k\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \, . \, . \, . (14)$$

уравненіе, которое равносильно (12), какъ не трудно провѣрить.

Пусть f не зависитъ отъ t (какъ у Бертрана и Коркина). Не трудно убѣдиться, что функція

$$\sigma = \frac{2k\frac{\partial f}{\partial x}}{f} + k^2\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f} - f\int\frac{\partial^2\left(\frac{1}{f}\right)}{\partial x^2}\,dy$$

есть частное рѣшеніе уравненія (13).

Полагаемъ поэтому $R = \sigma + \varrho$ и легко находимъ

$$R = \sigma + f\mu(\alpha, \beta, x). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

гдѣ

$$\alpha = \frac{k}{f} + \int\frac{\partial\left(\frac{1}{f}\right)}{\partial x}\,dy$$

$$\beta = t - \int\frac{dy}{f},$$

μ есть знакъ произвольной функціи

Остается теперь интегрировать *нормальную* систему (см. ε),

$$\left.\begin{aligned} X^1\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial t} + f\frac{\partial\phi}{\partial y} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial\phi}{\partial k} = 0 \\ X^2\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x} + k\frac{\partial\phi}{\partial y} + R\frac{\partial\phi}{\partial k} = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \mathrm{I}$$

которая съ помощью (15) сводится къ *одному* уравненію

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mu(\alpha,\ \beta,\ x)\frac{\partial\phi}{\partial\alpha} - \alpha\frac{\partial\phi}{\partial\beta} = 0,$$

или, что тоже, къ обыкновенному уравненію

$$\frac{d^2\beta}{dx^2} = -\mu\left(-\frac{d\beta}{dx},\ \beta,\ x\right).$$

При силахъ, не зависящихъ отъ времени явно, функція μ не зависитъ отъ β, и мы заключаемъ, что *интегралъ, содержащій время, получается изъ другого квадратурой.*

Предположимъ теперь

$$k = \varphi(t,\ x,\ y,\ \omega)$$

$$\omega = y' - kx'.$$

Полагаемъ $\lambda = 0$ въ (5, 6) и (δ), имѣемъ

$$l = Y - \varphi X = P + 2Qx' + Rx'^2 \quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

$P(t,\ x,\ y,\ \omega)$ остается произвольной функціей,

$$\left.\begin{aligned} Q &= P\frac{\partial\varphi}{\partial\omega} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \omega\frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ R &= Q\frac{\partial\varphi}{\partial\omega} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (16')$$

Общіе интегралы опредѣляются *нормальной* системой (см. δ):

$$\left.\begin{aligned} X^1\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial t} + \omega\frac{\partial\phi}{\partial y} + P\frac{\partial\phi}{\partial\omega} = 0 \\ X^2\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial\phi}{\partial y} + Q\frac{\partial\phi}{\partial\omega} = 0 \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots \mathrm{II}$$

Выраженіе $S = X^1Q - X^2P$ очевидно равно нулю, что приводитъ къ слѣдующему уравненію

$$-\frac{\partial P}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial \omega}+\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}\left(\varphi-\omega\frac{\partial \varphi}{\partial \omega}\right)+\frac{\partial P}{\partial \omega}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\omega\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)=\omega^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+$$

$$+2\omega\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}+P\left(2\omega\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial \omega}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}+2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial \omega}\right)+P^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2}\ .\ .\ .\ (17)$$

[замѣнивъ здѣсь P на $P\omega$, получимъ уравненіе, которое разсматривали и интегрировали въ интересной формѣ Коркинъ [1]) и Амато [2]). Уравненіе это при силахъ Бертрана распадается на рядъ другихъ, изъ которыхъ легко получаются результаты Коркина.

Замѣчаніе.

Система (II) показываетъ, что одинъ, по крайней мѣрѣ, изъ искомыхъ интеграловъ содержитъ явно время. Поэтому для разысканія двухъ общихъ рѣшеній, не содержащихъ оба времени, нужно обратиться къ системѣ (I), причемъ очевидно придется положить тамъ $f=0$. Но тогда

$$k=\frac{y'}{x'},$$

и силы удовлетворяютъ условію

$$x'Y-y'X=R\left(x,\ y,\ \frac{y'}{x'}\right).$$

Общія рѣшенія опредѣляются уравненіемъ (см. I)

$$\frac{d^2y}{dx^2}=R\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right).$$

II. Движеніе по поверхности.

Этотъ случай движенія сводится къ предыдущему, если координаты точекъ поверхности выразить, какъ функціи двухъ параметровъ. Слѣдуя Коркину [3]), воспользуемся симметрическими координатами. Обозначивъ ихъ черезъ (u, v), линейный элементъ черезъ ds и черезъ $F(u,\ v)=e^{\varrho}$ — нѣкоторую функцію, пока неопредѣленную, имѣемъ

$$ds^2=2Fdudv=2e^{\varrho}dudv,$$

[1]) Mathematische Annalen 1870.

[2]) Atti del Acad. Gioenia vol. XIV; Giornale di Battaglini 1901.

[3]) Mathemat. Annalen. 1870.

Далѣе полагаемъ [1])

$$\sum_{x,y,z} X\frac{\partial x}{\partial u}=M$$

$$\sum_{x,y,z} X\frac{\partial x}{\partial v}=N$$

$$U=\frac{N}{e^\varrho}-u'^2\frac{\partial\varrho}{\partial u}$$

$$V=\frac{M}{e^\varrho}-v'\frac{\partial\varrho}{\partial v}$$

$$\left.\begin{aligned}
&k=\frac{V-V_1}{U-U_1}=\frac{M-M_1}{N-N_1}\\
&l=V-kU=V_1-kU_1=n-\frac{\partial\varrho}{\partial v}v'^2+k\frac{\partial\varrho}{\partial u}u'^2\\
&n=\frac{M-kN}{e^\varrho}
\end{aligned}\right\}\quad . \; . \; . \; (18)$$

Вопросъ сведется къ интегрированію системы (β) [1]).

Наиболѣе простой—это случай существованія *двухъ общихъ интеграловъ, независящихъ отъ времени.* Согласно замѣчанію предыдущаго параграфа, имѣемъ для силъ условіе

$$u'M-v'N=u'^3\Pi\left(u,\ v,\ \frac{v'}{u'}\right)F(u,\ v),$$

Π и F остаются вполнѣ произвольными функціями.

Характеръ поверхности здѣсь, слѣдовательно, роли не играетъ.

Остается найти два первыхъ интеграла обыкновеннаго уравненія

$$\frac{d^2v}{du^2}=\Pi\left(u,\ v,\ \frac{dv}{du}\right)-\left(\frac{dv}{du}\right)^2\frac{\partial lgF}{dv}+\frac{dv}{du}\,\frac{\partial lgF}{du};$$

исключивъ изъ нихъ $\frac{dv}{du}$, найдемъ траекторію точки, содержащую двѣ произвольныя постоянныя [2]).

Соотношенія и формулы предыдущихъ параграфовъ вполнѣ сюда примѣнимы, но они много даютъ, если взять силы Бертрана, зависящія только отъ координатъ.

---

[1]) Mathemat. Annalen 1870.

[2]) Коркинъ: О совокупныхъ уравненіяхъ etc.

Тогда очевидно имѣемъ

$$k = \varphi(u,\ v).$$

$$l = p(u,\ v) - \frac{\partial \varrho}{\partial v}\omega^2 - \varphi\omega\frac{\partial \varrho}{\partial v}u' + \varphi\left(\frac{\partial \varrho}{\partial u} - \varphi\frac{\partial \varrho}{\partial v}\right)u'^2 \quad . \ . \ . \ (19)$$

$$\omega = v' - \varphi u'$$

Разсмотримъ послѣдовательно слѣдующіе случаи

a) Случай двухъ общихъ рѣшеній.

§ 5. Уравненіе (17), если туда вставить изъ (19)

$$P = p - \frac{\partial \varrho}{\partial v}\omega^2,$$

распадается на рядъ другихъ, которыя легко даютъ:

$$F = e^{\varrho} = a(u)\,.\,b(v)$$

$$\varphi = \frac{Aa}{Bb}$$

$$p = \frac{f(\pi)}{b},\ \pi = A\int adu - B\int bdv,$$

f, a, b — произвольныя функціи, A, B — произвольныя постоянныя.

Силы, слѣдовательно, удовлетворяютъ условію

$$\frac{M}{Aa(u)} - \frac{N}{Bb(v)} = f(A\int adu - B\int bdv)$$

Пользуясь системой (II), найдемъ общія рѣшенія въ формѣ [1])

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{d\pi}{dt}\right)^2 - \int f(\pi)\,d\pi = \text{Const} = d_1$$

$$\lambda_2 = -t + \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\pi}{\sqrt{d_1 + \int f(\pi)\,d\pi}} = \text{Const}.$$

Второе рѣшеніе выводится изъ перваго квадратурой.

Мы нашли, что

$$ds^2 = 2a(u)b(v)dudv,$$

а это показываетъ, *что поверхность наша развертывающаяся* [1]).

---

[1]) Коркинъ, Mathem. Annalen, 1870.

b) Случай одного общаго интеграла безъ времени.

На основанiи соотношенiй (5, 6, 19) имѣемъ

$$\left.\begin{aligned}
P &= p - \frac{\partial\varrho}{\partial v}\,\omega^2 \\
Q &= \omega\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \lambda = -\varphi\omega\frac{\partial\varrho}{\partial v} \\
\lambda &= \omega\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \varphi\frac{\partial\varrho}{\partial v}\right) \\
R &= \frac{\partial\varphi}{\partial u} + \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \varphi\left(\frac{\partial\varrho}{\partial u} - \varphi\frac{\partial\varrho}{\partial v}\right).
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ (20)$$

Далѣе, примѣняя сюда первое изъ соотношенiй (10), имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial u} + \varphi\frac{\partial p}{\partial v} + p\left(3\frac{\partial\varphi}{\partial v} + 4\varphi\frac{\partial\varrho}{\partial v}\right) &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\varrho}{\partial u} - \varphi\frac{\partial\varrho}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) &= 0
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ (21)$$

Отсюда найдемъ, называя черезъ $a(u)$, $b(v)$, Π, f произвольныя функцiи,

$$\left.\begin{aligned}
F &= e^{\varrho} = \Pi(a+b)\frac{da}{du}\cdot\frac{db}{dv} \\
\varphi &= \frac{\dfrac{da}{du}}{\dfrac{db}{dv}} \\
p &= \frac{f(a-b)e^{\Pi(a+b)}}{\dfrac{db}{dv}}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ (22)$$

Условiе для силъ

$$\frac{M}{\dfrac{da}{du}} - \frac{N}{\dfrac{db}{dv}} = f(a-b)e^{\Pi(a+b)}$$

Искомый интегралъ опредѣляется изъ системы (δ)

$$\frac{1}{2}\left[e^{\Pi(a+b)}\frac{d\pi}{dt}\right]^2 - \int f(\pi)d\pi = \text{Const}, \ \pi = a(u) - b(v).$$

Ясно, что функцiя $\Pi(a+b)$ не приводится къ постоянной (ср. § 5a).

Наша поверхность наложима на поверхность вращенія [1]), ибо положивъ

$$u_1 = a(u), \quad v_1 = b(v),$$

имѣемъ

$$ds^2 = 2F(u_1 + v_1)\, du_1 dv_1$$

Найденный интегралъ принимаетъ интересный видъ для *поверхности развертывающейся.*

Имѣемъ тогда

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial u \partial v} = 0$$

и, пользуясь предыдущими соотношеніями, находимъ для силъ

$$\frac{[m(u)+C]M}{\dfrac{dm}{du}} - \frac{[n(v)+B]N}{\dfrac{dn}{dv}} = \frac{1}{(m+c)^3} f\left(\frac{n+B}{m+C}\right),$$

f, m, n — знаки произвольныхъ функцій, B и C постоянныя.

Общее рѣшеніе представится въ видѣ

$$\frac{1}{2}\left[(m+C)\frac{dn}{dt} - (n+B)\frac{dm}{dt}\right]^2 - \int f(\pi)\,d\pi = \mathrm{Const},$$

$$\pi = \frac{n+B}{m+C}.$$

Мы такимъ образомъ нашли *обобщеніе на поверхности интеграла площадей.*

Замѣчаніе. Не трудно провѣрить, что предположеніе

$$S = X^1(Q-\lambda) - X^2P = 0$$

входитъ, какъ частный случай, въ разсмотрѣнное нами: нужно лишь положить въ только что полученныхъ формулахъ: $f = 0$, $\dfrac{dn}{dv} = 1$, что даетъ интегралъ площадей.

c) Случай одного общаго рѣшенія съ временемъ.

§ 6. Это самый сложный случай, который не поддается, какъ увидимъ, полному рѣшенію.

---

[1]) Ср. цитированные мемуары Бертрана (у него иная система координатъ).

Функціи P, Q, λ, выраженія которыхъ даны выше (20), удовлетворяютъ соотношеніямъ (7), причемъ

$$\left.\begin{aligned} -S=M+N\omega^2=\frac{\partial p}{\partial u}+\varphi\frac{\partial p}{\partial v}+p\left(2\psi-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)+\omega^2\left(2\varphi\frac{\partial\varrho}{\partial v}+\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial^2\varrho}{\partial u\partial v}\right)\\ \psi=\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial v}\end{aligned}\right\}\ldots(23)$$

Замѣтимъ, что $\psi \neq 0$, ибо мы имѣли (20)

$$\lambda=\psi\omega\neq 0.$$

Развернувъ соотношенія (7), получимъ рядъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} &M(M+2p\psi)=0\\ &M\left(2\frac{\partial\psi}{\partial v}-2\psi\frac{\partial\varrho}{\partial v}+N\right)+N(2p\psi+M)=2\psi\left(\frac{\partial M}{\partial v}+2pN+2M\frac{\partial\varrho}{\partial v}+2\psi\frac{\partial p}{\partial v}\right)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\ldots(24)$$

(остальныя опускаемъ).

Сюда присоединяемъ еще послѣднее изъ уравненій (20)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial v}=\varphi\left(\frac{\partial\varrho}{\partial u}-\varphi\frac{\partial\varrho}{\partial v}\right)\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(24)$$

Прежде всего замѣтимъ, что предположеніе

$$p=0$$

приводитъ къ очень сложнымъ уравненіямъ, мы его поэтому оставимъ въ сторонѣ. Далѣе, не трудно провѣрить, что приравнявъ нулю выраженіе $M+2p\psi$, мы попадаемъ на разсмотрѣнный уже случай одного общаго рѣшенія безъ времени. Остается, слѣдовательно, предположить

$$M=\frac{\partial p}{\partial u}+\varphi\frac{\partial p}{\partial v}+p\left(2\psi-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)=0,$$

$$p\neq 0.$$

Разсмотримъ сначала болѣе частное предположеніе, именно

$$S=0,$$

что приводитъ къ уравненію

$$N=0.$$

Развернувъ выраженіе для N, найдемъ легко

$$\left.\begin{aligned} &\varrho = a(u) + m(u)n(v) \\ &\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \varphi\left(\frac{da}{du} + n\frac{dm}{du} - \frac{1}{m}\frac{dm}{du}\right) + \varphi^2 m\frac{dm}{du} \\ &\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \frac{1}{m}\frac{dm}{du} - 2m\varphi\frac{dm}{dv}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

Ясно, что φ опредѣлится изъ *алгебраическаго уравненія 2-ой степени*. Мы его не приводимъ въ виду его сложности.

Если добавить еще допущеніе, *что наша поверхность развертывающаяся,* мы легко найдемъ общій интегралъ въ видѣ

$$-t + \frac{1}{D}\left[(m+C)\frac{dn}{dt} - (n+B)\frac{dm}{dt}\right] = \mathrm{Const}$$

гдѣ $m(u)$ и $n(v)$ суть произвольныя функціи, B, C, D—постоянныя ($D \neq 0$).

Силы удовлетворяютъ условію

$$\frac{m+C}{\dfrac{dm}{du}}M - \frac{n+B}{\dfrac{dn}{dv}}N = D.$$

Предположимъ теперь $N \neq 0$.

Второе изъ уравненій (24) приводится къ виду

$$Np + 2\psi\frac{\partial p}{\partial v} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

пользуясь которымъ, мы изъ другихъ уравненій (24) выводимъ:

$$\frac{\partial p}{\partial v} + p\frac{\partial\varrho}{\partial v} = a(u) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Представивъ уравненія $M = 0$ подъ видомъ

$$\frac{\partial p}{\partial u} - \varphi\frac{\partial p}{\partial v} + \frac{2a\varphi}{p} + \frac{\partial\varphi}{\partial v} = 0$$

легко докажемъ, что функція $a(u)$ приводится къ постоянной:

$$a(u) = \mathrm{Const} = A.$$

Пользуясь уравненіями (26), (27) и послѣднимъ (24), найдемъ

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{a(u) + A\int e^{\rho}dv}{b(v) - A\int e^{\rho}du} \\ p &= \frac{a(u) + A\int e^{\rho}dv}{e^{\rho}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

$a(u)$ и $b(v)$ — произвольныя функціи.

Остается лишь подставить найденныя для p и φ выраженія въ послѣднее уравненіе (24). Однако полученное уравненіе намъ удалось проинтегрировать только при допущеніи

$$A = 0.$$

Полученные при такомъ допущеніи результаты можно формулировать такъ:

Если силы удовлетворяютъ условію

$$\frac{M}{a(u)} - \frac{N}{b(v)} = 0,$$

и если линейный элементъ поверхности выражается черезъ

$$ds^2 = 2a(u)b(v)e^{\mu\int(adu+bdv)}\, dudv,$$

(μ — знакъ произвольной функціи), то имѣетъ мѣсто интегралъ

$$-t + e^{\mu(\alpha)}\frac{d\beta}{dt} = \text{Const}$$

гдѣ

$$\alpha = \int(adu + bdv)$$

$$\beta = \int(bdv - adu),$$

функція $\mu(\alpha)$ не можетъ привестись къ постоянной (ср. § 5,a).

Наша поверхность наложима на поверхность вращенія.

§ 7. Вышеприведенные результаты легко приложить къ случаю движенія точки по поверхности въ сопротивляющейся средѣ, уже изученному Коркинымъ для плоскости [1]). Предполагая по предыдущему силы зависящими только отъ координатъ точки, полагаемъ

$$\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = c.$$

Пусть далѣе функція $\phi(c)$ характеризуетъ сопротивленіе среды.

Положивъ

$$\frac{\phi(c)}{c} = f(c),$$

---

[1]) Коркинъ „О совокупныхъ уравненіяхъ“.

мы напишемъ уравненія движенія точки въ симметрическихъ координатахъ (ср. § 4) такъ:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = U = \frac{N}{e^\varrho} - \frac{\partial\varrho}{\partial u}u'^2 - e^\varrho u' f(2e^\varrho u'v')$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} = V = \frac{M}{e^\varrho} - \frac{\partial\varrho}{\partial v}v'^2 - e^\varrho v' f(2e^\varrho u'v')$$

Введя по предыдущему функціи ω, k и l и помня полученное для l выраженіе, заключаемъ, что f можетъ содержать степени u' не выше второй, для чего необходимо имѣть

$$f(c) = a_0 + a_1 c,$$

a_0 и a_1 суть постоянныя.

Далѣе, легко показать (съ помощью выраженія для l), что

$$a_1 = 0,$$

$$f(c) = a_0,$$

$$\phi(c) = a_0 c.$$

Сопротивленіе среды, слѣдовательно, пропорціонально первой степени скорости.

Примѣняя теперь разсужденія предыдущихъ параграфовъ, выводимъ слѣдующее.

1⁰) *На поверхности развертывающейся возможны два общихъ интеграла, при чемъ одинъ съ временемъ получается изъ другого квадратурой;* они опредѣляются уравненіемъ

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial\pi} + [f(\pi) + a_0\psi]\frac{\partial\phi}{\partial\psi} = 0,$$

при этомъ силы должны удовлетворять условію

$$\frac{M}{Aa(u)} - \frac{N}{Bb(v)} = f(\pi),$$

гдѣ

$$\pi = A\int a du - B\int b dv,$$

$$\psi = -\frac{d\pi}{dt},$$

$a(u)$ и $b(v)$ — произвольныя функціи, A и B — постоянныя (ср. § 5, a).

2⁰) *Существованіе двухъ общихъ интеграловъ, оба безъ времени, возможно лишь при отсутствіи сопротивленія* (ср. § 5,b).

3⁰) *Одинъ общій интегралъ безъ времени возможенъ:*

α) на поверхности, линейный элементъ которой выражается такъ:

$$ds^2 = e^{m(u)n(v) + a(u)} du dv,$$

или, въ частномъ случаѣ, *на развертывающейся поверхности*, если заданныя силы удовлетворяютъ условію

$$\frac{[m(u)+C]}{\frac{dm}{du}} M - \frac{[n(v)+B]}{\frac{dn}{dv}} N = D,$$

$m(u)$ и $n(v)$ — произвольныя функціи; B, C, D — постоянныя ($D \neq 0$).

Общій интегралъ въ этомъ случаѣ имѣетъ видъ:

$$-t + \frac{1}{a_0} log \left\{ a_0 \left[(m+C) \frac{dn}{dt} - (n+B) \frac{dm}{dt} \right] + D \right\} = \text{Const}$$

β) *на поверхности, наложимой на поверхность вращенія*, если силы удовлетворяютъ условію

$$\frac{M}{a(u)} - \frac{N}{b(v)} = 1\,.$$

Искомый интегралъ представляется въ видѣ

$$-t + \frac{1}{a_0} log \left[a_0 e^{\mu(\alpha)} \frac{d\beta}{dt} + 1 \right] = \text{Const},$$

$a(u)$, $b(v)$, $\mu(\alpha)$ — произвольныя функціи, причемъ положено для краткости

$$\alpha = \int (adu + bdv),$$

$$\beta = \int (bdv - adu) \text{ (ср. § 6)}.$$

Если положить здѣсь $a_0 = 0$, то по извѣстнымъ правиламъ найдемъ общій интегралъ при отсутствіи сопротивленія, данный выше въ § 6, а именно:

$$-t + e^{\mu(\alpha)} \frac{d\beta}{dt} = \text{Const}$$

III. Движеніе въ пространствѣ.

§ 8. Пусть (X, Y, Z) и (X_1, Y_1, Z_1) обозначаютъ силы, заданныя для двухъ задачъ и *зависящія только отъ координатъ точки*. Разысканіе общихъ этимъ задачамъ рѣшеній сводится къ интегрированію системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial t} + x'\frac{\partial\phi}{\partial x} + y'\frac{\partial\phi}{\partial y} + z'\frac{\partial\phi}{\partial z} + X\frac{\partial\phi}{\partial x'} + Y\frac{\partial\phi}{\partial y'} + Z\frac{\partial\phi}{\partial z'} = 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial t} + x'\frac{\partial\phi}{\partial x} + y'\frac{\partial\phi}{\partial y} + z'\frac{\partial\phi}{\partial z} + X_1\frac{\partial\phi}{\partial x'} + Y_1\frac{\partial\phi}{\partial y'} + Z_1\frac{\partial\phi}{\partial z'} = 0 \end{aligned}\right\} \ldots(\alpha)$$

Мы исключаемъ, разумѣется, очевидный интегралъ

$$\phi = \text{постоянной},$$

какъ и предположеніе

$$X = X_1,\ Y = Y_1,\ Z = Z_1.$$

Отсюда вытекаетъ, что ни для одного изъ искомыхъ интеграловъ не могутъ *заразъ* имѣть мѣста соотношенія

$$\frac{\partial\phi}{\partial x'} = \frac{\partial\phi}{\partial y'} = \frac{\partial\phi}{\partial z'} = 0.$$

Итакъ, общія рѣшенія зависятъ, по крайней мѣрѣ, отъ одной изъ перемѣнныхъ x', y', z', а слѣдовательно, отъ *всѣхъ* этихъ трехъ (измѣнивъ, если нужно, систему координатъ) [1]). Отсюда заключаемъ, что имѣютъ мѣста два, по крайней мѣрѣ, изъ неравенствъ

---

[1]) Положимъ, напримѣръ,

$$\frac{\partial\phi}{\partial x'} = \frac{\partial\phi}{\partial y'} = 0.$$

Система (α) послѣ дифференцированія по x' и y' даетъ:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0$$

$$Z = Z_1$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial y} = 0.$$

Поэтому общія рѣшенія найдутся интегрированіемъ уравненія

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + z'\frac{\partial\phi}{\partial z} + Z\frac{\partial\phi}{\partial z'} = 0$$

$$X \gtrless X_1, \quad Y \gtrless Y_1, \quad Z \gtrless Z_1,$$

ибо, допустивъ, напримѣръ,

$$Y = Y_1, \quad Z = Z_1, \quad X \gtrless X_1,$$

мы изъ уравненій (α) выводимъ невозможное уравненіе

$$(X - X_1)\frac{\partial f}{\partial x'} = 0.$$

Наши обозначенія выбраны такъ, чтобы

$$X \gtrless X_1, \quad Y \gtrless Y_1.$$

Введемъ, подобно предыдущему, слѣдующія функціи:

$$\varphi(x,\ y,\ z) = \frac{Y - Y_1}{X - X_1}$$

$$\psi(x,\ y,\ z) = \frac{Z - Z_1}{X - X_1}$$

$$l(x,\ y,\ z) = Y - \varphi X = Y_1 - \varphi X_1$$

$$\lambda(x,\ y,\ z) = Z - \psi X = Z_1 - \psi X_1.$$

Онѣ суть вполнѣ опредѣленныя и конечныя функціи, причемъ *функція φ не можетъ равняться нулю.*

Система (α) преобразуется теперь къ виду

$$\left.\begin{aligned} Af &= \frac{\partial f}{\partial t} + x'\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} + l\frac{\partial f}{\partial y'} + \lambda\frac{\partial f}{\partial z'} = 0 \\ Bf &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \frac{\partial f}{\partial x'} + \varphi\frac{\partial f}{\partial y'} + \psi\frac{\partial f}{\partial z'} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (\beta)$$

или, что то же, обыкновеннаго уравненія

$$\frac{d^2z}{dt^2} = Z\left(t,\ z,\ \frac{dz}{dt}\right).$$

Положимъ, наконецъ, для примѣра

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = 0.$$

Вопросъ непосредственно сводится къ движенію въ плоскости, ибо тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial l}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Такъ какъ уравненіе

$$C\phi = -(A\phi,\ B\phi) = \frac{\partial\phi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial\phi}{\partial y} + \psi\frac{\partial\phi}{\partial z} + m\frac{\partial\phi}{\partial y'} + \mu\frac{\partial\phi}{\partial z'} = 0$$

$$(m = -A\varphi,\quad \mu = -A\psi)$$

не можетъ уничтожиться ни тожественно, ни какъ слѣдствіе уравненій (β), то мы заключаемъ, что *возможно не болѣе четырехъ общихъ рѣшеній, одно изъ нихъ съ временемъ.* Дѣйствительно, допустивъ противное, имѣемъ

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0;$$

система (β) необходимо есть замкнутая, а потому должно имѣть (обозначивъ черезъ a и b два неопредѣленныхъ множителя):

$$C\phi = aA\phi + bB\phi.$$

Соотношеніе это даетъ рядъ уравненій, изъ которыхъ, по исключеніи a и b, найдемъ φ, ψ, l, λ, а слѣдовательно условія для силъ:

$$\left.\begin{aligned} x'Y - y'X &= x'^3\phi_1\left(x,\ y,\ z,\ \frac{y'}{x'},\ \frac{z'}{x'}\right) \\ x'Z - z'X &= x'^3\phi_2\left(x,\ y,\ z,\ \frac{y'}{x'},\ \frac{z'}{x'}\right) \end{aligned}\right|$$

(ϕ_1 и ϕ_2 — произвольныя функціи). Очевидно, *это имѣетъ мѣсто только для силъ, зависящихъ и отъ скоростей.*

Самыя рѣшенія найдутся изъ системы (β), которая сводится къ такой:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \phi_1\left(x,\ y,\ z,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{dz}{dx}\right) \\ \frac{d^2z}{dx^2} &= \phi_2\left(x,\ y,\ z,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{dz}{dx}\right) \end{aligned}\right|$$

Четыре первыхъ интеграла этой системы:

$$f_i\left(x,\ y,\ z,\ \frac{dz}{dx},\ \frac{dy}{dx}\right) = \text{Const} = d_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

и дадутъ рѣшеніе вопроса. Исключивъ оттуда $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, найдемъ траекторію точки, содержащую четыре постоянныхъ.

[Исключая z и $\frac{dz}{dx}$, приходимъ къ двумъ интеграламъ безъ времени, даннымъ для плоскости Коркинымъ].

Такъ какъ наши силы зависятъ только отъ координатъ, то мы начинаемъ со случая существованія четырехъ общихъ рѣшеній, изъ нихъ одно съ временемъ.

Случай четырехъ общихъ рѣшеній.

§ 9. Такъ какъ система

$$A\phi = B\phi = C\phi = 0$$

необходимо должна быть замкнутой, то уравненія

$$\left.\begin{aligned} D\phi&=(A\phi, C\phi)=(A\varphi-m)\frac{\partial\phi}{\partial y}+(A\psi-\mu)\frac{\partial\phi}{\partial z}+(Am-Cl)\frac{\partial\phi}{\partial y'}+(A\mu-C\lambda)\frac{\partial\phi}{\partial z'}=0 \\ E\phi&=(B\phi, C\phi)= \qquad\qquad (Bm-C\varphi)\frac{\partial\phi}{\partial y'}+(B\mu-C\psi)\frac{\partial\phi}{\partial z'}=0 \end{aligned}\right\} (\gamma)$$

уничтожаются тожественно (самый видъ ихъ показываетъ, что онѣ не суть слѣдствіе предыдущихъ уравненій). Имѣемъ поэтому:

$$\left.\begin{aligned} A\varphi - m &= 2A\varphi = 0 \\ Am - Cl &= 0 \\ Am - C\varphi &= 0 \end{aligned}\right\}$$

(то же имѣетъ мѣсто для ψ, μ, λ) или

$$\left.\begin{aligned} m = A\varphi &= 0 \\ C\varphi = 0;\quad Cl &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Такъ какъ выраженіе $B\varphi$ очевидно даетъ тожественный нуль, то второе изъ приведенныхъ соотношеній есть слѣдствіе перваго. Легко теперь находимъ

$$\varphi = \text{Const} = M$$

$$\psi = \text{Const} = N$$

$$l = f(y - Mx,\ z - Nx)$$

$$\lambda = f_1(y - Mx,\ z - Nx)$$

f и f_1 — произвольныя функціи; M и N постоянныя произвольныя. Выбравъ болѣе симметричныя обозначенія для постоянныхъ, представимъ условія для силъ въ видѣ

$$\left.\begin{aligned} aY + bX &= f(ay + bx,\ cz + dx) \\ cZ + dX &= f_1(ay + bx,\ cz + dx) \end{aligned}\right\}$$

a, b, c, d — постоянныя произвольныя.

Введя новыя перемѣнныя

$$t, \quad u = ay + bx, \quad v = cz + dx, \quad u' = \frac{du}{dt}, \quad v' = \frac{dv}{dt}$$

мы легко придемъ къ уравненію

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + u'\frac{\partial\phi}{\partial u} + v'\frac{\partial\phi}{\partial v} + f(u,\ v)\frac{\partial\phi}{\partial u'} + f_1(u,\ v)\frac{\partial\phi}{\partial v'} = 0.$$

Три изъ искомыхъ интеграловъ, не содержащіе времени, опредѣляются системой обыкновенныхъ уравненій

$$\frac{du}{u'} = \frac{dv}{v'} = \frac{du'}{f(u, v)} = \frac{dv'}{f_1(u, v)}.$$

Четвертый интегралъ съ временемъ очевидно найдется квадратурой, такъ какъ изъ найденныхъ трехъ интеграловъ можно найти $u' = \frac{du}{dt}$, какъ функцію отъ u и трехъ постоянныхъ.

Случай трехъ общихъ интеграловъ.

§ 10. Интегралы эти должны опредѣляться замкнутой системой четырехъ уравненій, иначе говоря, оба уравненія $D\phi = E\phi = 0$ предыдущаго параграфа должны свестись къ одному. Помня вышеприведенныя относительно μ, ψ, λ, m, φ, l соотношенія и составивъ уравненія

$$(A\phi,\ D\phi) = 0$$

легко вывести, что уравненіе $E\phi = 0$ должно удовлетвориться тождественно, т. е.

$$Bm - C\varphi = B\mu - C\psi = 0.$$

Но мы имѣли

$$m = - A\varphi, \quad \mu = - A\psi$$

$$C\phi = (B\phi,\quad A\phi)$$

$$B\varphi = B\psi = 0,$$

а потому предыдущія соотношенія даютъ

$$B(A\varphi) = B(A\psi) = 0.$$

Но уравненіе $B\phi = 0$ удовлетворяется, если подставить вмѣсто ϕ величины

$$x,\ y,\ z,\quad \omega = y' - \varphi x',\quad \omega_1 = z' - \psi x',$$

а потому предыдущія уравненія показываютъ, что

$$\left.\begin{aligned} A\varphi &= v(x,\ y,\ z,\ \omega,\ \omega_1) \\ A\psi &= v_1(x,\ y,\ z,\ \omega,\ \omega_1) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

(v и v_1 — произвольныя функціи). Развернувъ лѣвыя части, найдемъ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \psi\frac{\partial\varphi}{\partial z} = C\varphi = 0 \ldots\ldots\ldots (30)$$

$$\omega\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \omega_1\frac{\partial\varphi}{\partial y} = v \ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

[аналогичныя уравненія напишутся для ψ и v_1].

Взявъ за новыя перемѣнныя $t,\ x,\ y,\ z,\ \omega,\ \omega_1$, придемъ къ системѣ

$$\left.\begin{aligned} X^1 f &= \frac{\partial f}{\partial t} + \omega\frac{\partial f}{\partial y} + \omega_1\frac{\partial f}{\partial z} + l\frac{\partial f}{\partial \omega} + \lambda\frac{\partial f}{\partial \omega_1} = 0 \\ X^2 f &= \frac{\partial f}{\partial x} + \varphi\frac{\partial f}{\partial y} + \psi\frac{\partial f}{\partial z} - v\frac{\partial f}{\partial \omega} - v_1\frac{\partial f}{\partial \omega_1} = 0 \\ X^3 f &= \qquad 2v\frac{\partial f}{\partial y} + 2v_1\frac{\partial f}{\partial z} - Q\frac{\partial f}{\partial \omega} - q\frac{\partial f}{\partial \omega_1} = 0 \end{aligned}\right\} \ldots (A)$$

гдѣ

$$Q = X^1 v + P = X^1 v + X^2 l,$$

$$q = X^1 v_1 + X^2 \lambda$$

[преобразовывая систему къ новымъ перемѣннымъ, мы пользовались формулами

$$D\varphi = -Cv,$$

$$Av + x' D\varphi = \omega\frac{\partial v}{\partial y} + \omega_1\frac{\partial v}{\partial z} + l\frac{\partial v}{\partial \omega} + \lambda\frac{\partial v}{\partial \omega_1}$$

(аналогично для ψ и v_1), которыя легко провѣрить].

На основаніи (30) и (31) заключаемъ, что v и v_1 оба заразъ не могутъ обратиться въ нуль (что привело бы къ предыдущему случаю). Соотношенія эти перепишутся такъ:

$$\left.\begin{aligned} X^2\varphi = X^2\psi = 0 \\ v = X^1\varphi,\quad v_1 = X^1\psi \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (32)$$

Замѣтимъ еще, что согласно § 8 мы, не нарушая общности, считаемъ

$$\frac{\partial\phi}{\partial\omega} \neq 0, \quad \frac{\partial\phi}{\partial\omega_1} \neq 0.$$

Въ дальнѣйшемъ различаемъ два случая.

а) Всѣ три общихъ интеграла не зависятъ отъ времени.

Система (A) необходимо сводится къ двумъ независимымъ уравненіямъ, т. е.

$$\frac{2v}{\omega} = \frac{2v_1}{\omega_1} = -\frac{X^1v + P}{l} = -\frac{X^1v_1 + p}{\lambda}.$$

Развернувъ эти соотношенія, найдемъ послѣдовательно:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial z}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0,$$

откуда выводимъ

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{y+D}{x+C} \\ \psi &= \frac{z+E}{x+C} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{1}{(x+C)^3} f\left(\frac{y+D}{x+C}, \frac{z+E}{x+C}\right) \\ \lambda &= \frac{1}{(x+C)^3} f_1\left(\frac{y+D}{x+C}, \frac{z+E}{x+C}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (34)$$

f и f_1 — произвольныя функціи, C. D, E — постоянныя.

Силы, слѣдовательно, удовлетворяютъ условіямъ

$$\left.\begin{aligned} (x+C)Y - (y+D)X &= \frac{1}{(x+C)^2} f\left(\frac{y+D}{x+C}, \frac{z+E}{x+C}\right) \\ (x+C)Z - (z+E)X &= \frac{1}{(x+C)^2} f\left(\frac{y+D}{x+C}, \frac{z+E}{x+C}\right) \end{aligned}\right\}$$

Механическая интерпретація этихъ условій очевидна.

Искомые интегралы найдутся, какъ не трудно видѣть, изъ уравненія.

$$u\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}+v\frac{\partial\phi}{\partial\psi}+f(\varphi,\ \psi)\frac{\partial\phi}{\partial u}+f_1(\varphi,\ \psi)\frac{\partial\phi}{\partial v}=0,$$

гдѣ

$$u=(x+C)y'-(y+D)x'=(x+C)^2\frac{d\varphi}{dt}$$

$$v=(x+C)z'-(z+E)x'=(x+C)^2\frac{d\psi}{dt}$$

Если два интеграла найдены, то третій опредѣлится изъ обыкновеннаго дифференціальнаго уравненія перваго порядка, связывающаго φ и ψ.

Если положить въ вышеприведенныхъ формулахъ

$$f=f_1=0,$$

то искомые интегралы совпадаютъ съ интегралами площадей. Попутно выводимъ извѣстное положеніе механики: если существуетъ два интеграла площадей (при нашихъ обозначеніяхъ они суть: $u=\text{Const}$, $v=\text{Const}$), то существуетъ и третій ($u\psi-v\varphi=\text{Const}$).

𝔟) Одинъ изъ трехъ общихъ интеграловъ содержитъ время.

§ 11. Система (A) необходимо есть замкнутая, поэтому уравненія

$$\left.\begin{aligned}X^4\phi=(X^1\phi,X^3\phi)=(3X^1v+P)\frac{\partial\phi}{\partial y}+(3X^1v_1+p)\frac{\partial\phi}{\partial z}-(X^1Q+X^3l)\frac{\partial\phi}{\partial\omega}-(X^1q+X^3\lambda)\frac{\partial\phi}{\partial\omega_1}=0\\ X^5\phi=(X^2\phi,X^3\phi)=3X^2v\frac{\partial\phi}{\partial y}+3X^2v_1\frac{\partial\phi}{\partial z}-(X^2Q-X^3v)\frac{\partial\phi}{\partial\omega}-(X^2q-X^3v_1)\frac{\partial\phi}{\partial\omega_1}=0\end{aligned}\right\}(\delta)$$

суть слѣдствіе предыдущихъ. Поэтому имѣемъ въ общемъ случаѣ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{3X^1v+P}{2v}=\frac{3X^1v_1+p}{2v_1}=\frac{X^1Q+X^3l}{Q}=\frac{X^1q+X^3\lambda}{q}\\ \frac{3X^2v}{2v}=\frac{3X^2v_1}{2v_1}=\frac{X^2Q-X^3v}{Q}=\frac{X^2q-X^3v_1}{q}\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ (35)$$

Первое изъ соотношеній второй строки даетъ, будучи развернуто:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{D(\varphi,\psi)}{D(y,z)}=\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{D(\varphi,\psi)}{D(y,z)}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{D(\varphi,\psi)}{D(y,z)}=0\ .\ .\ .\ (36)$$

а слѣдовательно,

$$\frac{D(\varphi,\psi)}{D(y,z)}=0,$$

(иное допущеніе привело бы къ случаю предыдущаго параграфа),

т. е.
$$\Xi(\varphi,\ \psi,\ x) = 0,$$
Ξ — знакъ произвольной функціи.

Такъ какъ v и v_1 не могутъ одновременно равняться нулю, то одна по крайней мѣрѣ изъ функцій φ и ψ не приводится къ постоянной. Для опредѣленности положимъ
$$\varphi \neq \text{Const}, \quad v \neq 0.$$

Функція Ξ необходимо содержитъ ψ, откуда выводимъ
$$\psi = \varrho(\varphi, \quad x)$$
или, пользуясь уравненіями (32),
$$\psi = \varrho(\varphi).$$

Далѣе находимъ
$$v_1 = v\,\frac{\partial\varrho}{\partial\varphi}$$
$$X^1 v_1 = \frac{\partial\varrho}{\partial\varphi}\,X^1 v + v^2\,\frac{\partial^2\varrho}{\partial\varphi^2}\,.$$

Первое изъ равенствъ (35) даетъ
$$\frac{\partial^2\varrho}{\partial\varphi^2} = 0,$$
откуда, обозначая черезъ A и B двѣ постоянныя, имѣемъ:
$$\psi = A\varphi + B.$$

Другія соотношенія (35) приводятъ къ уравненіямъ
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\lambda}{\partial x} + \varphi\,\frac{\partial\lambda}{\partial y} + (A\varphi + B)\,\frac{\partial\lambda}{\partial z} &= A\left[\frac{\partial l}{\partial x} + \varphi\,\frac{\partial l}{\partial y} + (A\varphi + B)\,\frac{\partial l}{\partial z}\right] \\ \frac{\partial\lambda}{\partial y} + A\,\frac{\partial\lambda}{\partial z} &= A\left[\frac{\partial l}{\partial y} + A\,\frac{\partial l}{\partial z}\right], \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$
откуда непосредственно слѣдуетъ
$$\lambda - Al = \mu(z - Ay - Bx)$$
(μ — знакъ произвольной функціи). Но
$$\lambda - Al = Z - (A\varphi + B)X - A(Y - \varphi X) = Z - AY - BX,$$

поэтому одно изъ искомыхъ условій для силъ представится такъ

$$Z - AY - BX = \mu(z - Ay - Bx), \quad \ldots\ldots \quad (38)$$

или, болѣе симметрично,

$$aX + bY + cZ = \mu(ax + by + cz),$$

a, b, c — постоянныя произвольныя.

Два изъ искомыхъ интеграловъ уже опредѣляются изъ системы (A), если вставить туда

$$\begin{aligned} v_1 &= Av \\ q &= AQ \\ \lambda &= Al + \mu(u) \\ u &= z - Ay - Bx \ (\text{или } ax + by + cz). \end{aligned}$$

Каковы бы ни были φ и l, интегралы эти суть:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - \int \mu(u)du = \text{Const} = \alpha_1 \\ \lambda_2 &= -t + \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{du}{\sqrt{\alpha_1 + \int \mu du}} = \text{Const} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (39)$$

(ср. § 13)

Второй получается изъ перваго одной квадратурой.

Итакъ, *условія для силъ (38) достаточны для существованія двухъ общихъ рѣшеній, изъ нихъ одно съ временемъ.*

Третій искомый интегралъ очевидно зависитъ отъ вида функцій φ и l. Ихъ мы будемъ искать изъ соотношеній (35), гдѣ осталось удовлетворить уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{3X^1 + P}{2v} &= \frac{X^1Q + X^3l}{Q} \\ \frac{3X^2v}{2v} &= \frac{X^2Q - X^3v}{Q} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (40)$$

Развернувъ, получимъ рядъ уравненій для φ и l (мы выпишемъ изъ нихъ только простѣйшія):

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial l}{\partial x} + \varphi\frac{\partial l}{\partial y} + (A\varphi + B)\frac{\partial l}{\partial z} + l\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial l}{\partial x} + \varphi\frac{\partial l}{\partial y} + (A\varphi + B)\frac{\partial l}{\partial z} + 3l\frac{\partial\varphi}{\partial y} + 3\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} (41)$$

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+(A\varphi+B)\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}=0\\ 2\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\dfrac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}=3\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)^2\\ 2\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\dfrac{\partial^3\varphi}{\partial z^3}=3\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)^2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\end{array}\right\}\quad\dots\dots\quad(42)$$

и легко составить еще уравненіе

$$\frac{\partial S}{\partial x}+A\frac{\partial S}{\partial y}=0,$$

гдѣ

$$S=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+A\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

Опредѣляя φ изъ (42), мы можемъ сдѣлать два допущенія.

α) $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$.

Другія уравненія (42) даютъ

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

Слѣдовательно, обозначая черезъ $f(x)$ пока неопредѣленную функцію, имѣемъ уравненія:

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+B\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}+\varphi f(x)=0\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+A\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}=f(x)\end{array}\right\}$$

изъ которыхъ нетрудно вывести выраженіе для φ, именно

$$\varphi=\frac{Ku+Dy+N}{Dx+C}\quad\dots\dots\dots\quad(43)$$

C, D, K, N — постоянныя произвольныя.

Будемъ теперь искать l изъ (41).

Приравнявъ нулю перваго множителя, найдемъ

$$l=f(u)-Kx\mu(u)\quad\dots\dots\dots\quad(44')$$

(f — знакъ произвольной функціи). Третій интегралъ найдется изъ (A):

$$\lambda_3 = y'(Dx+C) - x'(Ku+Dy+N) + Kx\frac{du}{dt} - \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{f(u)du}{\sqrt{\alpha_1 + \int \mu du}} = \text{Const} \quad (45')$$

(ср. 39).

Если приравнять нулю второго множителя (41), то найдемъ

$$l = \frac{f(\varphi)}{(x+C)^3} - K\mu(u) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (44''),$$

и третій интегралъ приметъ видъ:

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}[y'(x+C) - x'(Ku+y+N) + Ku'(x+C)]^2 - \int f(\varphi)d\varphi = \text{Const} \; . \; . \; (45''),$$

причемъ было предположено $D \neq 0$ или, что то же, $D = 1$.

Если же, приравнявъ нулю второго множителя (41), положить

$$D = 0,$$

то выраженія для l и третьяго интеграла будутъ соотвѣтственно

$$l = f(u) + [y - (Ku+N)x]\frac{d\mu}{du} - 3Kx\mu(u) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (44''')$$

$$\lambda_3 = [y' - (Ku+N)x']u' + Kxu'^2 + [y - (Ku+N)x]\mu(u) -$$

$$- \int f(u)du = \text{Const} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (45''')$$

$\beta)$ $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \neq 0$.

Интегрируя послѣднее изъ уравненій (42), находимъ

$$S = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + A\frac{\partial\varphi}{\partial z} = f(x,\; z - Ay) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (46)$$

(f — знакъ произвольной функціи). Отсюда мы послѣдовательно найдемъ значенія производныхъ $\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\dots$ и, подставивъ ихъ въ (42), придемъ къ двумъ уравненіямъ (кромѣ 42_1):

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial\varphi}{\partial z} - f\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2} - \frac{\partial f}{\partial\xi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (47)$$

$$\xi = z - Ay.$$

Изъ уравненій (47) непосредственно выводится слѣдующее:

$$2\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2 - f\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} = 0,$$

интегрированіе котораго не представляетъ затрудненій.

Пользуясь имъ, а также уравненіями (46) и (42), находимъ

$$\varphi = \frac{K(y - Nx) + L}{u + Kx + C} + N \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (48)$$

C, K, L, N — произвольныя постоянныя.

Что касается l, то разсужденія, аналогичныя предыдущимъ, приводятъ къ одному изъ слѣдующихъ трехъ выраженій:

либо
$$\begin{cases} l = \dfrac{f(u) + \mu(u)(Y - Nx)}{u + Kx + C} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (49') \\[2ex] l = \dfrac{f(\varphi)}{(u + x + C)^3} + \dfrac{\mu(u)\,(y - Nx + L)}{u + x + C} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (49'') \\[2ex] l = \dfrac{f(u) + 3\mu(u)(y - Nx)}{u + C} + (y - \varphi x)\,\dfrac{d\mu}{du} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (49''') \end{cases}$$

(ср. 39)

Соотвѣтственно этому третій общій интегралъ также будетъ представляться въ трехъ видахъ, аналогичныхъ соотвѣтственно приведеннымъ выше ($45'$, $45''$ и $45'''$).

Выбравъ болѣе симметричныя обозначенія для постоянныхъ, резюмируемъ полученные результаты.

Если заданныя силы таковы, что выполняется условіе

$$aX + bY + cZ = \mu(ax + by + cz)$$

(a, b, c, — постоянныя, μ — знакъ произвольной функціи) и *одно какое-либо* изъ трехъ условій, выраженныхъ равенствами:

либо
$$\begin{cases} (Au + Bx + C)Y - (A'u + By + D)X = f(u) + (Ay - A'x)\mu(u) \\[2ex] (Au+x+C)Y-(A'u+y+D)X = \dfrac{f\left(\dfrac{A'u+y+D}{Au+x+C}\right)}{(Au+x+C)^2} + \mu(u)\,[A(y+D) - A'(x+C)] \\[2ex] (Au+B)Y-(A'u+C)x = f(u) + 3\mu(u)(Ay - A'x) + \dfrac{d\mu}{du}[(Ay - A'x)u + By - Cx] \end{cases}$$

$$u = ax + by + cz,$$

(f — знакъ произвольной функціи, A, B, C, D, A' — постоянныя), то имѣютъ мѣсто три интеграла, изъ нихъ одинъ съ временемъ.

Два изъ этихъ интеграловъ, коль скоро выполнено первое изъ приведенныхъ для силъ условій, имѣютъ всегда видъ

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - \int \mu(u)du = \mathrm{Const} = \alpha_1$$

$$\lambda_2 = -t + \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{du}{\sqrt{\alpha_1 + \int \mu du}} = \mathrm{Const}.$$

(ср. § 13).

Третій интегралъ представляется въ трехъ видахъ, соотвѣтственно тому, какое изъ условій второй группы выполнено:

$$\text{либо}\begin{cases} \lambda_3 = (Au+Bx+C)y' - (A'u+By+D)x' - (Ay-A'x)u' - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\int \frac{f(u)du}{\sqrt{\alpha_1 + \int \mu du}} = \mathrm{Const} \\ \lambda_3 = \dfrac{1}{2}[(Au+x+C)y' - (A'u+y+D)x' - (Ay-A'x)u']^2 - \displaystyle\int f(\varphi)d\varphi = \mathrm{Const} \\ \qquad \varphi = \dfrac{A'u+y+D}{Au+x+C} \\ \lambda_3 = [(Au+B)y' - (A'u+C)x']u' - (Ay-A'x)u'^2 - [(Ay-A'x)u + By - Cx]\mu(u) - \\ \qquad - \displaystyle\int f(u)du = \mathrm{Const} \end{cases}$$

Всѣ эти интегралы легко провѣряются дифференцированіемъ.

Замѣчаніе. Мы предположили въ предыдущихъ разсужденіяхъ

$$\varphi \neq \mathrm{Const}.$$

Можно было бы предположить

$$\psi \neq \mathrm{Const}$$

и разсуждать по предыдущему. Мы бы нашли

$$\varphi = A\psi + B,$$

$$l = A\lambda + \mu(u),$$

и вообще y и z перемѣнились бы мѣстами, какъ видно изъ уравненій

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \psi\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}+\psi\frac{\partial\psi}{\partial z}+\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y}=0.$$

Слѣдующій случай это

Случай двухъ общихъ рѣшеній.

§ 12. Система уравненій (β) и (γ)

$$A\phi=B\phi=C\phi=D\phi=E\phi=0$$

необходимо должна быть замкнутая. Преобразуемъ ее по предыдущему къ перемѣннымъ

$$t,\quad x,\quad y,\quad z,\quad \omega=y'-\varphi x',\quad \omega_1=z'-\psi x'.$$

Къ прежнимъ функціямъ: v, v_1, P и p добавимъ еще двѣ:

$$\left.\begin{aligned} h&=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\psi\frac{\partial\varphi}{\partial z}\\ h_1&=\frac{\partial\psi}{\partial x}+\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y}+\psi\frac{\partial\psi}{\partial z}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ (50)$$

Нетрудно вывести, что преобразованная система содержитъ три уравненія (A), данныя выше, и еще уравненіе

$$X^4\phi=h\frac{\partial\phi}{\partial\omega}+h_1\frac{\partial\phi}{\partial\omega_1}=0\ \ldots\ldots\ldots\ (51)$$

Результатомъ преобразованія будутъ также уравненія

$$\left.\begin{aligned} G\phi&=h\frac{\partial\phi}{\partial y}+h_1\frac{\partial\phi}{\partial z}-X'h\frac{\partial\phi}{\partial\omega}-X'h_1\frac{\partial\phi}{\partial\omega_1}=0\\ H\phi&=(X^2h+X^4v)\frac{\partial\phi}{\partial\omega}+(X^2h_1+X^4v_1)\frac{\partial\phi}{\partial\omega_1}=0\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ (\varepsilon)$$

но нетрудно провѣрить, что

$$(X^1\phi,\ X^4\phi)=-G\phi$$

$$(X^2\phi,\ X^4\phi)=H\phi.$$

Уравненіе (51) и второе (ε) показываютъ, что должно имѣть либо

$$h=h_1=0,$$

либо, если

$$h \neq 0, \quad h_1 \neq 0,$$

то

$$\frac{X^2h + X^4v}{h} = \frac{X^2h_1 + X^4v_1}{h_1} \quad \ldots\ldots\ldots (52)$$

Въ дальнѣйшемъ различаемъ два случая:

а) Два общихъ рѣшенія, оба безъ времени.

Въ этомъ случаѣ $\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$, и наши четыре уравненія сводятся къ тремъ независимымъ. Легко показать, что должно имѣть

$$h = h_1 = 0.$$

Дѣйствительно, допустивъ противное, мы будемъ имѣть систему трехъ независимыхъ уравненій

$$X^1\phi = X^2\phi = X^3\phi = 0,$$

остальныя уравненія суть прямое ихъ слѣдствіе, т. е. (ср. ε)

$$\frac{h}{\omega} = \frac{h_1}{\omega_1} = -\frac{X^1h}{l} = -\frac{X^1h_1}{\lambda},$$

что невозможно, ибо h и h_1 отъ ω и ω_1 не зависятъ.

Итакъ, мы доказали, что h и h_1 оба обращаются въ нуль, и намъ остается интегрировать данную выше систему (А), положивъ тамъ

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0.$$

Для упрощенія вычисленій, мы будемъ искать тѣ интегралы этой системы, которые не зависятъ отъ y и z.

Положивъ въ (А)

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0,$$

мы должны притти къ одному лишь уравненію съ перемѣнными x, ω и ω_1. Ясно, что для этого должно имѣть

$$l = \lambda = 0$$

$$X^1v = X^1v_1 = 0,$$

что даетъ

$$\left.\begin{array}{l}\varphi = a + by + cz \\ \psi = \alpha + \beta y + \gamma z\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (53)$$

$a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ — функціи одного x, причемъ остается искать общіе интегралы изъ уравненія

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} - v\frac{\partial\phi}{\partial\omega} - v_1\frac{\partial\phi}{\partial\omega_1} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (54)$$

Такъ какъ v и v_1 не могутъ равняться нулю ни одновременно, ни порознь (иначе мы имѣли бы четыре или три общихъ интеграла), то заключаемъ, что въ (53) нельзя положить

$$b = c = 0$$

или

$$\beta = \gamma = 0.$$

Соотношенія $h = h_1 = 0$ показываютъ далѣе, что, приравнявъ нулю b или γ, получимъ соотвѣтственно

$$\beta \quad \text{или} \quad C = 0;$$

наконецъ, если φ отъ x не зависитъ, то же имѣетъ мѣсто относительно ψ, и обратно.

Установивъ это, мы всегда можемъ исключить изъ (53) y либо z. Пусть для опредѣленности

$$C \neq 0.$$

Исключая z (ибо γ также не равно 0), полагаемъ

$$\psi = m\varphi + ny + p,$$

(m, n, p — функціи одного x). Тогда φ и ψ легко опредѣляются изъ уравненій

$$h = h_1 = 0.$$

Условія для силъ послѣ упрощенія представятся такъ:

$$\left.\begin{array}{r}Z - BY - MX - A(xY - yX) = 0 \\ xZ - zX + C(xY - yX) + DY - EX = 0\end{array}\right\}$$

A, B, C, D, E, M — постоянныя произвольныя.

Общіе интегралы найдутся изъ (54). Они будутъ

$$\lambda_1 = z' - By' - Mx' - A(xy' - yx') = \text{Const}$$

$$\lambda_2 = xz' - zx' + C(xy' - yx') + Dy' - Ex' = \text{Const}.$$

Совершивъ круговую перестановку буквъ, сдѣлаемъ обобщеніе:

Если силы удовлетворяютъ условію

$$a(xY - yX) + b(yZ - zY) + c(zX - xZ) + dX + eY + fZ = 0$$

(a, b, c, d, e, f—постоянныя), *то имѣетъ мѣсто интегралъ вида*

$$a(xy' - yx') + b(yz' - zy') + c(zx' - xz') + dx' + ey' + fz' = \text{Const},$$

представляющій обобщеніе интеграла площадей.

b) Случай двухъ общихъ рѣшеній, одно съ временемъ.

§ 13. Тутъ возможны два допущенія

α) $h \neq 0$, $h_1 \neq 0$.

Составимъ уравненія $(X^1\varphi, X^3\varphi) = 0$ и $(X^2\varphi, X^3\varphi) = 0$. Необходимо имѣемъ

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{h}{2v} = \dfrac{h_1}{2v_1} = \dfrac{X^1h}{Q} = \dfrac{X^1h_1}{q} \\[2mm]
\dfrac{X^2h + X^4v}{h} = \dfrac{X^2h_1 + X^4v_1}{h_1} \\[2mm]
\dfrac{3X^1v + P}{2v} = \dfrac{3X^1v_1 + p}{2v_1} = \ldots \\[2mm]
\dfrac{3X^2v - X^1h}{2v} = \dfrac{3X^2v_1 - X^1h_1}{2v_1} = \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (55)$$

Уравненіе

$$\frac{h}{2v} = \frac{h_1}{2v_1}$$

даетъ, будучи развернуто,

$$\frac{D(\varphi, \ \psi)}{D(y, \ z)} = 0.$$

Поступая съ другими уравненіями (55) такъ же, какъ выше съ уравненіями (35) [съ небольшими, впрочемъ, измѣненіями], придемъ къ полученнымъ уже выше результатамъ (см. § 11, резюме).

β) $h = h_1 = 0$.

При такомъ допущеніи мы должны имѣть замкнутую систему четырехъ уравненій изъ трехъ уравненій системы (A) и двухъ уравненій. (δ) Для простоты мы изучимъ частный случай, предполагая, что уравненія $X^i\varphi = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) составляютъ нужную намъ систему, и что уравненіе $X^5\varphi = 0$ есть слѣдствіе уравненія $X^3\varphi = 0$, т. е. предположимъ, что имѣютъ мѣсто соотношенія

$$\frac{3X^2v}{2v} = \frac{3X^2v_1}{2v_1} = \frac{X^2Q - X^3v}{Q} = \frac{X^2q - X^3v_1}{q} \quad \ldots\ldots (56)$$

Развернувъ ихъ и предполагая

$$\frac{D(\varphi,\ \psi)}{D(y,\ z)} \neq 0,$$

получимъ, какъ выше (33, § 10),

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{y+D}{x+C} \\ \psi &= \frac{z+E}{x+C} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (57)$$

C, D, E—постоянныя. Далѣе находимъ

$$Q = X_1 v + X^2 l = \frac{f(\varphi,\ \psi)}{(x+C)^4},$$

$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{\pi(\varphi,\psi)}{x+C} - \frac{f(\varphi,\ \psi)}{(x+C)^3} \\ \lambda &= \frac{\pi_1(\varphi,\psi)}{x+C} - \frac{f_1(\varphi,\ \psi)}{(x+C)^3} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (58)$$

π, π_1, f, f_1—произвольныя функціи, π и π_1 не обращаются одновременно въ нуль (ср. § 10).

Уравненіе $X^2\phi = 0$ утожествляется величинами

$$t,\ \varphi,\ \psi,\ \sigma = \omega(x+C) = y'(x+C) - x'(y+D),\ \sigma_1 = z'(x+C) - x'(z+E);$$

примемъ ихъ за новыя перемѣнныя. Преобразованная система приметъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned} X^1\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial t} + \pi(\varphi,\ \psi)\frac{\partial\phi}{\partial\sigma} + \pi_1(\varphi,\ \psi)\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_1} = 0 \\ X^2\phi &= \sigma\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} + \sigma_1\frac{\partial\phi}{\partial\psi} - f(\varphi,\ \psi)\frac{\partial\phi}{\partial\sigma} - f_1(\varphi,\ \psi)\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_1} = 0 \\ X^3\phi &= \pi\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} + \pi_1\frac{\partial\phi}{\partial\psi} - \left(\sigma\frac{\partial\pi}{\partial\varphi} + \sigma_1\frac{\partial\pi_1}{\partial\psi}\right)\frac{\partial\phi}{\partial\sigma} - \left(\sigma\frac{\partial\pi_1}{\partial\varphi} + \sigma_1\frac{\partial\pi_1}{\partial\psi}\right)\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_1} = 0 \end{aligned}\right\} \ldots (B)$$

Такъ какъ это есть замкнутая система, то уравненія

$$\left.\begin{aligned} X^4\phi &= (X^1\phi,\ X^3\phi) = \left(\pi\frac{\partial\pi}{\partial\varphi} + \pi_1\frac{\partial\pi}{\partial\psi}\right)\frac{\partial\phi}{\partial\sigma} + \left(\pi\frac{\partial\pi_1}{\partial\varphi} + \pi_1\frac{\partial\pi_1}{\partial\psi}\right)\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_1} = 0 \\ X^5\phi &= (X^2\phi,\ X^3\phi) = 2\left(\sigma\frac{\partial\pi}{\partial\varphi} + \sigma_1\frac{\partial\pi}{\partial\psi}\right)\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} + 2\left(\sigma\frac{\partial\pi_1}{\partial\varphi} + \sigma_1\frac{\partial\pi_1}{\partial\psi}\right)\frac{\partial\phi}{\partial\psi} - \\ &- \left(\sigma^2\frac{\partial^2\pi}{\partial\varphi^2} + 2\sigma\sigma_1\frac{\partial^2\pi}{\partial\varphi\partial\psi} + \sigma_1^2\frac{\partial^2\pi}{\partial\psi^2} - f\frac{\partial\pi}{\partial\varphi} - f_1\frac{\partial\pi}{\partial\psi} - \pi\frac{\partial f}{\partial\varphi} - \pi_1\frac{\partial f}{\partial\psi}\right)\frac{\partial\phi}{\partial\sigma} - \\ &- \left(\sigma^2\frac{\partial^2\pi_1}{\partial\varphi^2} + 2\sigma\sigma_1\frac{\partial\varphi\partial\psi}{\partial^2\pi_1} + \sigma_1^2\frac{\partial^2\pi_1}{\partial\psi^2} - f\frac{\partial\pi_1}{\partial\varphi} - f_1\frac{\partial\pi_1}{\partial\psi} - \pi_1\frac{\partial f_1}{\partial\psi} - \pi\frac{\partial f_1}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_1} = 0 \end{aligned}\right\} (3)$$

уничтожаются на основаніи предыдущихъ. Поэтому, обозначая черезъ a и b два неопредѣленныхъ множителя, имѣемъ:

$$X^4 f = aX^2 f + bX^3 f,$$

откуда

$$a\sigma + b\pi = a\sigma_1 + b\pi_1 = 0,$$

уравненія, показывающія, что

$$a = b = 0,$$

ибо иначе мы имѣли бы

$$\pi = \pi_1 = 0.$$

$X^4 f$ даетъ, слѣдовательно, тожественно нуль, а потому

$$\left.\begin{aligned} \pi\frac{\partial\pi}{\partial\varphi} + \pi_1\frac{\partial\pi}{\partial\psi} = 0 \\ \pi\frac{\partial\pi_1}{\partial\varphi} + \pi_1\frac{\partial\pi_1}{\partial\psi} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

Соотношенія эти очевидно удовлетворяются, если положить

$$\pi = \mathrm{Const} = C_1; \quad \pi_1 = \mathrm{Const} = C_2$$

Нетрудно вывести, что при такомъ допущеніи $X^5 f$ также тожественно обращается въ нуль. Полагая

$$u = C_2\varphi - C_1\psi = \frac{C_2(y+D) - C_1(z+E)}{x+C},$$

легко найдемъ, что данныя выше функціи f и f_1 остаются вполнѣ произвольными функціями отъ u. Силы поэтому удовлетворяютъ условіямъ (ср. 58):

$$\left.\begin{aligned} Y(x+C) - X(y+D) &= C_1 + \frac{f\left(\frac{C_2(y+D) - C_1(z+E)}{x+C}\right)}{(x+C)^2} \\ Z(x+C) - X(z+E) &= C_2 + f_1\left(\frac{C_2(y+D) - C_1(z+E)}{x+C}\right) \end{aligned}\right\}$$

Предполагая для опредѣленности

$$C_1 \neq 0,$$

найдемъ оба искомыхъ интеграла изъ (B):

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\{C_2[y'(x+C) - x'(y+D)] - C_1[z'(x+C) - x'(z+E)]\}^2 -$$

$$- \int [C_2 f(u) - C_1 f_1(u)]du = \mathrm{Const} = \alpha_1$$

$$\lambda_2 = -t + \frac{y'(x+C)-x'(y+D)}{C_1} - \frac{1}{C_1\sqrt{2}}\int\frac{f(u)du}{\sqrt{\alpha_1+\int(C_2 f - C_1 f_1)du}} = \text{Const}.$$

При $C_2 = 0$, напримѣръ, упрощенія очевидны.

[Для движенія на плоскости полагаемъ здѣсь

$$C_2 = f_1 = f = 0,$$

что даетъ одно общее рѣшеніе съ временемъ, полученное Коркинымъ].

Положимъ теперь, что одна какая-либо изъ функцій π и π_1, скажемъ для опредѣленности π_1, не приводится къ постоянной. Соотношенія (59) даютъ тогда

$$\frac{D(\pi,\ \pi_1)}{D(\varphi,\ \psi)} = 0$$

$$\pi = \mu(\pi_1).$$

Далѣе имѣемъ (a и b обозначаютъ два неопредѣленныхъ множителя):

$$X^5\phi = aX^2\phi + bX^3\phi,$$

что приводитъ къ ряду уравненій:

$$a\sigma + b\mu = 2\left(\sigma\frac{\partial\pi_1}{\partial\varphi} + \sigma_1\frac{\partial\pi_1}{\partial\psi}\right)\frac{d\mu}{d\pi_1}$$

. . . .

Изъ нихъ легко найдемъ

$$\pi = 0,\quad \pi_1 = \frac{A}{B-\varphi},\quad f = f(\varphi),\quad f_1 = -\psi\frac{f(\varphi)}{B-\varphi} + \bar{\varphi},$$

f и $\bar{\varphi}$ — произвольныя функціи отъ $\varphi = \dfrac{y+D}{x+C}$, A и B — постоянныя ($A \neq 0$).

Общіе интегралы, найденные изъ (B), имѣютъ видъ:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}[y'(x+C)-x'(y+D)]^2 - \int f(\varphi)d\varphi = \text{Const} = \alpha_1$$

$$\lambda_2 = -t + \frac{1}{A}\left\{\frac{[y'(x+C)-x'(y+D)](z+E)-[z'(x+C)-x'(z+E)][B(x+C)-(y+D)]}{x+C} -\right.$$

$$\left. -\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\bar{\varphi}.(B-\varphi)d\varphi}{\sqrt{\alpha_1+\int f(\varphi)d\varphi}}\right\} = \text{Const}.$$

[Интегралъ $\lambda_1 = \text{Const}$ очевидно относится и къ движенію на плоскости].

Условія для силъ суть (ср. 58):

$$\left.\begin{aligned}(x+C)Y-(y+D)X&=\frac{f\left(\dfrac{y+D}{x+C}\right)}{(x+C)^2}\\(x+C)Z-(z+E)X&=\frac{A(x+C)-f\left(\dfrac{y+D}{x+C}\right)\cdot\dfrac{z+E}{(x+C)^2}}{B(x+C)-(y+D)}+\frac{\bar{\varphi}\left(\dfrac{y+D}{x+C}\right)}{(x+C)^2}\end{aligned}\right\}$$

Перейдемъ теперь къ послѣднему случаю.

Случай одного общаго рѣшенія безъ времени.

§ 14. Мы изучимъ здѣсь только частный случай. Полагая

$$h=h_1=0,$$

возьмемъ систему независимыхъ уравненій предыдущаго параграфа, т. е.

$$X^i f=0; \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4);$$

что касается уравненія $X^5 f=0$, то пусть имѣемъ

$$\frac{3X^2 v}{\omega}=\frac{3X^2 v_1}{\omega_1}=-\frac{X^2 Q-X^3 v}{l}=-\frac{X^2 q-X^3 v_1}{\lambda},$$

выражая этимъ, что $X^5 f=0$ есть прямое слѣдствіе уравненія $X^1 f=0$, гдѣ положено

$$\frac{\partial f}{\partial t}=0.$$

Для φ и ψ найдемъ значенія, данныя выше:

$$\varphi=\frac{y+D}{x+C},\ \psi=\frac{z+E}{x+C}$$

Уравненіе

$$\frac{3X^2 v}{\omega}=-\frac{X^2 Q-X^3 v}{l}$$

принимаетъ видъ

$$\frac{\partial S}{\partial x}+\varphi\frac{\partial S}{\partial y}+\psi\frac{\partial S}{\partial z}-\frac{S}{x+C}=0$$

$$S=X^2 l+\frac{3l}{x+C}.$$

Интегрированіе не представляетъ затрудненій.

Окончательно найдемъ для l и λ выраженія вида:

$$\left.\begin{aligned}l&=\frac{f_1(\varphi,\ \psi)}{(x+C)^3}+(x+C)^2\pi_1(\varphi,\ \psi)\\\lambda&=\frac{f_2(\varphi,\ \psi)}{(x+C)^3}+(x+C)^2\pi_2(\varphi,\ \psi)\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots(60)$$

f_1, f_2, π_1, π_2—произвольныя функціи, послѣднія двѣ не обращаются одновременно въ нуль (ср. § 10).

Взявъ тѣ же перемѣнныя, что въ § 13 (t, φ, ψ, σ, σ_1), придемъ къ системѣ, вполнѣ аналогичной (В), гдѣ

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 .$$

Условія замкнутости этой системы приводятъ къ уравненію

$$\frac{\pi_1 \dfrac{\partial \pi_1}{\partial \varphi} + \pi_2 \dfrac{\partial \pi_2}{\partial \psi}}{\pi_1} = \frac{\pi_1 \dfrac{\partial \pi_2}{\partial \varphi} + \pi_2 \dfrac{\partial \pi_2}{\partial \psi}}{\pi_2} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (61)$$

Такъ какъ $\dfrac{\partial \phi}{\partial \sigma}$ и $\dfrac{\partial \phi}{\partial \sigma_1}$ не равны 0, то

$$\pi_1 \neq 0, \quad \pi_2 \neq 0,$$

а потому, положивъ

$$\frac{\pi_2}{\pi_1} = k,$$

гдѣ k вполнѣ опредѣленная функція отъ φ и ψ, найдемъ изъ (61):

$$\frac{\partial k}{\partial \varphi} + k \frac{\partial k}{\partial \psi} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (62)$$

Преобразованная система имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned} X^1\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} + k \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_1} = 0 \\ X^2\phi &= \sigma \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + \sigma_1 \frac{\partial \phi}{\partial \psi} + f_1(\varphi, \ \psi) \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} + f_2(\varphi, \ \psi) \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_1} = 0 \\ X^3\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + k \frac{\partial \phi}{\partial \psi} - \left(\sigma \frac{\partial k}{\partial \varphi} + \sigma_1 \frac{\partial k}{\partial \psi} \right) \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_1} = 0 \end{aligned}\right\} \ldots . \ (\mathrm{B}')$$

Называя черезъ a, b, c три неопредѣленныхъ множителя, имѣемъ:

$$(X^2\phi, \ X^3\phi) = aX^1\phi + bX^2\phi + cX^3\phi.$$

Составивъ уравненіе $(X^2\phi, \ X^3\phi) = 0$ и исключивъ множителей a, b, c, придемъ къ ряду уравненій:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 k}{\partial \psi^2} = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &2 \frac{\partial k}{\partial \varphi} (f_2 - k f_1) + k^2 \left(\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} + k \frac{\partial f_1}{\partial \psi} \right) = k \left(f_1 \frac{\partial k}{\partial \varphi} + f_2 \frac{\partial k}{\partial \psi} + \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} + k \frac{\partial f_2}{\partial \psi} \right) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots (63)$$

изъ которыхъ легко выводится еще одно

$$\left.\begin{aligned} k\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}+k\frac{\partial f}{\partial \psi}\right)&=3f\frac{\partial k}{\partial \varphi} \\ f&=f_2-kf_1 \end{aligned}\right\}\quad \ldots\ldots\ldots (64)$$

Уравненіямъ этимъ можно удовлетворить двумя допущеніями:

α) $k=\text{Const}=A\neq 0$.

Предыдущія соотношенія легко даютъ

$$\pi_2(\varphi,\ \psi)=A\pi_1(\varphi,\ \psi)$$

$$f_2(\varphi,\ \psi)=Af_1(\varphi,\ \psi)+f\left(\frac{z+E-A(y+D)}{x+C}\right)$$

π_1, f_1, f остаются вполнѣ произвольными функціями.

Подставивъ эти выраженія въ (60), найдемъ, разумѣется *два* условія для силъ. Въ силу одного изъ нихъ необходимо, чтобы общій интегралъ былъ единственнымъ при нашихъ частныхъ предположеніяхъ. Болѣе существенно другое; видъ его (при новыхъ обозначеніяхъ для постоянныхъ):

$$xZ-zX+a(xY-yX)+pZ+qY+rX=\frac{1}{(x+p)^2}f\left(\frac{z+ay-r}{x+p}\right),$$

f—произвольная функція, a, p, q, r—постоянныя, связанныя соотношеніемъ

$$q-ap=0.$$

Общій интегралъ найдется изъ (B′):

$$\frac{1}{2}[xz'-zx'+a(xy'-yx')+pz'+qy'+rx']^2-\int f(u)du=\text{Const},\ u=\frac{z+ay-r}{x+p}.$$

β) $k=\dfrac{A\psi+\alpha}{A\varphi+\beta}$, A, α, β – постоянныя ($A\neq 0$).

Называя черезъ f произвольную функцію, находимъ изъ (64):

$$f_2=kf_1+\frac{1}{(A\varphi+\beta)^3}f(k).$$

Кромѣ того, имѣемъ, очевидно,

$$\pi_2(\varphi,\ \psi)=\frac{A\psi+\alpha}{A\varphi+\beta}\pi_1(\varphi,\ \psi).$$

Разсуждая по предыдущему, мы найдемъ *существенно важное условіе, опредѣляющее видъ интеграла.* Оно есть

$$A(yZ-zY)+\beta(xZ-zX)-\alpha(xY-yX)+pZ+qY+rX=$$

$$=\frac{1}{(Ay+\beta x+p)^2}f\left(\frac{Az+\alpha x-q}{Ay+\beta x+p}\right)$$

f — знакъ произвольной функціи, A, α, β, p, q, r — постоянныя, связанныя соотношеніемъ

$$rA = p\alpha + q\beta, \quad (A \neq 0).$$

Общій интегралъ, отвѣчающій этому условію, есть:

$$\frac{1}{2}[A(yz' - zy') + \beta(xz' - zx') - \alpha(xy' - yx') + pz' + qy' + rx']^2 -$$

$$-\frac{1}{A}\int f(k)dk = \text{Const}$$

$$k = \frac{Az + dx - q}{Ay + \beta x + p}.$$

Это есть обобщеніе уже полученнаго выше (§ 12) интеграла, если здѣсь положить

$$f(k) = 0,$$

причемъ всѣ шесть постоянныхъ дѣлаются совершенно произвольными.

Sur les intégrales communes aux plusieurs problèmes de Mécanique.

Résumé par l'auteur.

Le problème en question déjà étudié par J. Bertrand [1]) et Korkine [2]), se ramène dans cet article (suivant Korkine) à l'intégration des équations aux dérivées partielles simultanées dont l'intégration s'effectue á l'aide de la méthode de Jacobi. Nous considérons le cas du mouvement plan sous les conditions les plus générales, les forces dépendant non seulement des coordonnées du mobile et de la vitesse, mais encore du temps. Des relations ainsi obtenues on déduit comme des cas particuliers celles de Bertrand et Korkine.—Le cas du mouvement d'un point sur une surface conduit aux résultats obtenus par Bertrand. Nous ājoutons, en outre, le cas du mouvement dans un milieu résistant étudié par Korkine dans le plan.—Enfin je considère le cas du mouvement d'un point dans l'espace en supposant—pour simplifier la question—que les forces ne dépendent que des coordonnées du mobile. Les résultats ainsi obtenus se présentent comme il suit.

1) Si les forces du problème satisfont aux conditions

$$\left.\begin{aligned} x'Y - y'X &= x'^3\varphi_1\left(x,\ y,\ z,\ \frac{y'}{x'},\ \frac{z'}{x'}\right) \\ x'Z - z'X &= x'^3\varphi_2\left(x,\ y,\ z,\ \frac{y'}{x'},\ \frac{z'}{x'}\right) \end{aligned}\right\}$$

---

1) „Journal de Mathématiques“ 1856 et 1858.

2) „Mathematische Annalen“ 1870.

($x' = \frac{dx}{dt} \dots$, φ_1, φ_2 désignant des fonctions arbitraires) il existe quatre intégrales ne dépendant pas du temps; elles se déterminent par le système suivant

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \varphi_1\left(x,\ y,\ z,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{dz}{dx}\right)\\ \frac{d^2z}{dx^2} &= \varphi_2\left(x,\ y,\ z,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{dz}{dx}\right)\end{aligned}\right\}$$

2) Si les forces satisfont aux conditions

$$\left.\begin{aligned}aY + bX &= f(ay + bx,\ cz + dx)\\ cZ + dX &= f_1(ay + bx,\ cz + dx)\end{aligned}\right\}$$

(f, f_1 désignant des fonctions arbitraires; a, b, c, d étant des constantes) il existe quatre intégrales, dout l'une dépend du temps et s'obtient par une seule quadrature.

Elles se déterminent par l'équation

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + u'\frac{\partial\varphi}{\partial u} + v'\frac{\partial\varphi}{\partial v} + f(u,\ v)\frac{\partial\varphi}{\partial u'} + f_1(u,\ v)\frac{\partial\varphi}{\partial v} = 0$$

où l'on a posé

$$u = ay + bx, \quad v = cz + dx, \quad u' = \frac{du}{dt}, \quad v' = \frac{dv}{dt}.$$

3) Si les forces satisfont à la relation

$$aX + bY + cZ = \mu(ax + by + cz)$$

et encore à *l'une* de trois suivantes

$$\left\{\begin{aligned}&(Au + Bx + C)Y - (A'u + By + D)X = f(u) + (Ay - A'x)\mu(u)\\ &(Au+x+C)Y - (A'u+y+D)X = \frac{f\left(\dfrac{A'u+y+D}{Au+x+C}\right)}{(Au+x+C)^2} + [A(y+D) - A'(x+C)]\mu(u)\\ &(Au+B)Y - (A'u+C)X = f(u) + 3(Ay - A'x)\mu(u) + [(Ay - A'x)u + By - Cx]\frac{d\mu}{du}\end{aligned}\right.$$

[f, μ désignant des fonctions arbitraires; A, B, C, D, A', a, b, c, étant des constantes, $u = ax + by + cz$], il existe trois intégrales, dont l'une dépend du temps et s'obtient par une seule quadrature. Deux de ces intégrales ont toujours les expressions suivantes

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - \int \mu(u)du = \text{Const} = \alpha_1$$

$$\lambda_2 = -t + \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{du}{\sqrt{\alpha_1+\int\mu du}} = \text{Const}.$$

La troisiéme intégrale se présente respectivement sous trois formes suivantes

$$\left\{\begin{aligned}
&\lambda_3 = (Au+Bx+C)y' - (A'u+By+D)x' - (Ay-A'x)u' - \\
&\qquad - \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{f(u)}{\sqrt{\alpha_1+\int\mu du}} = \text{Const} \\
&\lambda_3 = \frac{1}{2}[(Au+x+C)y' - (A'u+y+D)x' - (Ay-A'x)u']^2 - \\
&\qquad - \int f(\varphi)d\varphi = \text{Const} \\
&\qquad \varphi = \frac{A'u+y+D}{Au+x+C} \\
&\lambda_3 = [(Au+B)y' - (A'u+C)x']u' - (Ay-A'x)u'^2 \\
&\qquad [(Ay-A'x)u+By-Cx]\mu(u) - \int f(u)du = \text{Const}.
\end{aligned}\right.$$

4) Si les forces satisfont aux conditions

$$\left.\begin{aligned}
(x+C)Y-(y+D)X &= C_1 + \frac{f_1\left(\dfrac{C_2(y+D)-C_1(z+E)}{x+C}\right)}{(x+C)^2} \\
(x+C)Z-(z+E)X &= C_2 + \frac{f_2\left(\dfrac{C_2(y+D)-C_1(z+E)}{x+C}\right)}{(x+C)^2},
\end{aligned}\right\}$$

ou

$$\left.\begin{aligned}
(x+C)Y-(y+D)X &= \frac{f\left(\dfrac{y+D}{x+C}\right)}{(x+C)^2} \\
(x+C)Z-(z+E)X &= \frac{A(x+C)-f\left(\dfrac{y+D}{x+C}\right)}{B(x+C)-(y+D)}\,\frac{z+E}{(x+C)^2} + \frac{\bar{\varphi}\left(\dfrac{y+D}{x+C}\right)}{(x+C)^2},
\end{aligned}\right\}$$

il existe respectivement deux intégrales de la forme

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda_1 = \frac{1}{2}\Big\{C_2[(x+C)y'-(y+D)x'] - C_1[(x+C)z'-(z+E)x']\Big\}^2 - \int(C_2f_1-C_1f_2)du = \text{Const} \\
&\lambda_2 = -t + \frac{(x+C)y'-(y+D)x'}{C_1} - \frac{1}{C_1\sqrt{2}}\int\frac{f_1du}{\sqrt{\alpha_1+\int(C_2f_1-C_1f_2)du}} = \text{Const},
\end{aligned}\right\}$$

ou

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda_1 = \frac{1}{2}[(x+C)y'-(y+D)x']^2 - \int f(\varphi)d\varphi = \text{Const} = \alpha_1 \\
&\lambda_2 = -t + \frac{1}{A}\left\{\frac{[(x+C)y'-(y+D)x'](z+E)+[(x+C)z'-(z+E)x'][B(x+C)-(y+D)]}{x+C} - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{(B-\varphi).\bar{\varphi}d\varphi}{\sqrt{\alpha_1+\int fd\varphi}}\right\} = \text{Const}
\end{aligned}\right\}$$

Dans les formules précédentes A, B, C, D, E, C_1, C_2 sont des constantes, f, f_1, f_2 et φ désignent des fonctions quelconques, et

$$u=\frac{C_2(y+D)-C_1(z+E)}{x+C};\quad \varphi=\frac{y+D}{x+C}.$$

5) Si les forces satisfont à la relation

$$aX+bY+cZ+d(xZ-zX)+e(yZ-zY)+f(xY-yX)=0$$

(a, b, c, d, e, f étant des constantes arbibraires) ou à la relation

$$xZ-zX+a(xY-yX)+pZ+qY+rX=\frac{1}{(x+p)^2}f\left(\frac{z+ay-r}{x+p}\right),$$

(f désignant une fonction arbitraire, les constantes a, p, q, r sont liées par l'équation $q-ap=0$),
ou enfin à la relation

$$A(yZ-zY)+\beta(xZ-zX)-\alpha(xY-yX)+pZ+qY+rX=$$
$$=\frac{1}{(Ay+\beta x+p)^2}f\left(\frac{Az+\alpha x-q}{Ay+\beta x+p}\right),$$

[la fonction f restant arbitraire, les constantes $A(\neq 0)$, β, α, p, q, r, sont liées par l'équation $rA=p\alpha+q\beta$]

il existe une intégrale ayant respectivement l'expression suivante

$$ax'+by'+cz'+d(xz'-zx')+e(yz'-zy')+f(xy'-yx')=\text{Const}$$

ou: $$\frac{1}{2}[xz'-zx'+a(xy'-yx')+pz'+qy'+rx']^2-\int f(u)du=\text{Const}$$

$$\left(u=\frac{z+ay-r}{x+p}\right)$$

ou enfin:

$$\frac{1}{2}\{A(yz'-zy')+\beta(xz'-zx')-\alpha(xy'-yx')+pz'+qy'+rx'\}^2-$$
$$-\frac{1}{A}\int f(k)dk=\text{Const}$$

$$\left(k=\frac{Az+\alpha x-q}{Ay+\beta x+p}\right).$$