Суммированіе вездѣ расходящихся строкъ Тэйлора.

С. Бернштейна.

Задача. *Найти функцію $F(x)$, аналитическую на отрѣзкѣ $\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$, за исключеніемъ, можетъ быть, точки 0, и удовлетворяющую безконечному числу условій $F(0)=A_0$, $F'(0)=A_1, \ldots$ $\frac{F_n(0)}{n!}=A_n, \ldots$, гдѣ A_n произвольно данныя числа.*

Разумѣется, если поставленная задача имѣетъ одно рѣшеніе $F(x)$, то она должна имѣть безчисленное множество рѣшеній; достаточно будетъ напримѣръ, взять функцію $F(x)+ae^{-\frac{k}{x^2}}$, каковы бы ни были a и k.

Если степенной рядъ

$$A_0+A_1x+\ldots+A_nx^n+\ldots \tag{1}$$

сходится въ требуемомъ промежуткѣ, то функція $f(x)$, представленная имъ, является наиболѣе важнымъ рѣшеніемъ задачи, будучи единственнымъ аналитическимъ на всемъ отрѣзкѣ рѣшеніемъ ея. Если рядъ (1) сходится только на части отрѣзка, то въ нѣкоторыхъ случаяхъ функція, имъ представленная, все же оказывается аналитической во всемъ промежуткѣ и опять представляетъ единственное аналитическое рѣшеніе задачи. Но возможно также, что она имѣетъ особенности на отрѣзкѣ $\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$, и тогда аналитическаго на всемъ отрѣзкѣ рѣшенія поставленной задачи не существуетъ.

Тѣмъ не менѣе, какъ въ этомъ случаѣ, такъ и въ болѣе общемъ случаѣ, когда рядъ (1) вездѣ расходящійся, рѣшеніе аналитическое на всемъ отрѣзкѣ, за исключеніемъ 0, существуетъ всегда. Я хочу это доказать и въ частности, построить одно *опредѣленное* рѣшеніе задачи, заслуживающее, можетъ быть, нѣкотораго вниманія вслѣдствіе простоты своей ариѳметической природы; но необходимо замѣтить, что безусловно общій способъ суммированія расходящихся рядовъ, какимъ является указываемый ниже способъ, страдаетъ и долженъ страдать существеннымъ недостаткомъ: въ случаѣ существованія аналитическаго на всемъ отрѣзкѣ рѣшенія задачи, наше рѣшеніе обыкновенно не будетъ съ нимъ совпадать.

Съ этой цѣлью разсмотримъ предварительно рядъ

$$F(x)=\sum_{p=0}^{p=\infty}\varepsilon_p x^p(1-x)^q \tag{2}$$

на отрѣзкѣ $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$, полагая $\varepsilon_p=\pm 1$; при этомъ, для опредѣленности, въ дальнѣйшемъ положимъ $\varepsilon_p=1$, если $q=0$. Нетрудно убѣдиться, что рядъ (2) такъ же, какъ и всѣ его послѣдовательныя производныя будетъ равномѣрно сходящимся на разсматриваемомъ отрѣзкѣ, каковы бы ни были показатели q.

Въ самомъ дѣлѣ, это очевидно, если $q<2p$, т. к. въ этомъ случаѣ, полагая

$$u_n=\varepsilon_p x^p(1-x)^q,$$

при $n=3p$, и

$$u_n=0$$

при $n\gtrless 3p$, мы видимъ на основаніи теоремы (29) моей работы «О наилучшемъ приближеніи непрерывныхъ функцій и т. д.», что функція $F(x)$ не только безконечно дифференцируема, но и голоморфна на отрѣзкѣ $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$. Наоборотъ, если q можетъ получать значенія безконечно большія, чѣмъ p, начало координатъ 0 будетъ обыкновенно особой точкой, а потому необходимо разсмотрѣть k-ую производную нашего ряда, т. е

$$\sum_{p=0}^{p=\infty}\varepsilon_p\frac{d^k\left[x^p(1-x)^q\right]}{dx^k}=\sum_{p=0}^{p=\infty}b_p \tag{3}$$

Слѣдовательно,

$$|b_p|<\sum_{i=0}^{i=k}\frac{k!\,p!\,q!\,x^{p-i}(1-x)^{q-k+i}}{i!\,(k-i)!\,(p-i)!\,(q-k+i)!},$$

и, замѣчая, что

$$\frac{p!\,q!\,x^{p-i}(1-x)^{q-k+i}}{(p-i)!\,(q-k+i)!}<p^i q^{k-i}x^{p-i}(1-x)^{q-k+i}\leqq\frac{p^p q^k}{(p+q-k)^{p+q-k}},$$

находимъ

$$|b_p|<\frac{2^k p^p q^q}{(p+q-k)^{p+q-k}}.$$

Далѣе, по предположенію, $q > 2p$; кромѣ того, достаточно разсмотрѣть только значенія $p > 2k$. Въ такомъ случаѣ,

$$|b_p| < \frac{2^k p^p}{(p+q-k)^{p-k}} \cdot \frac{q^q}{(p+q-k)^q} < \frac{(2p)^k}{\left(\frac{5}{2}\right)^{p-k}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{p-k}{q}\right)^q} <$$

$$< \frac{(2p)^k}{5^{p-k}} = \frac{(10p)^k}{5^p}.$$

Но рядъ

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(10p)^k}{5^p},$$

очевидно, сходящійся, такъ какъ отношеніе $(p+1)$-го члена къ p-ому члену, равное

$$\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{p}\right)^k,$$

менѣе единицы, если $p > k$.

Поэтому и рядъ (3) равномѣрно сходится, и представляетъ k-ую производную $F^{(k)}(x)$ функціи $F(x)$. Полагая $x = y^2$, видимъ, что рядъ

$$\Phi(y) = \sum_{p=0}^{p=\infty} \varepsilon_p\, y^p (1-y^2)^q \tag{4}$$

можетъ быть также безконечно дифференцируемъ на отрѣзкѣ $\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$. Слѣдовательно, для вычисленія $\Phi(0)$, $\Phi'(0), \ldots, \Phi^{(k)}(0)$ достаточно положить въ соотвѣтственныхъ рядахъ $y = 0$; другими словами, *строка Тэйлора функціи* $\Phi(y)$, *для* $y = 0$, *сходящаяся или нѣтъ, можетъ быть получена простымъ приведеніемъ подобныхъ членовъ ряда* (4). Прибавимъ еще, что функція $\Phi(y)$ голоморфна на всякой части отрѣзка $\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$, лежащей *внѣ точки* 0. (Это вытекаетъ изъ упомянутой выше теоремы 29).

Наконецъ, замѣчаемъ, что функція

$$F(x) = A_0' + A_1' x + \sum_{p=0}^{p=\infty} \varepsilon_p x^p [(1-x^2)^{f(p)} - b_p], \tag{5}$$

обладаетъ тѣми же свойствами, что $\Phi(y)$, если $f(p)$ цѣлое положительное число (или нуль), а коэффиціентъ b_p удовлетворяетъ неравенствамъ $0 < b_p \leqq 1$, при $\varepsilon_p = +1$, и $1 \leqq b_p < 2$, при $\varepsilon_p = -1$, и кромѣ того $b_0 = b_1 = 1$, а именно, она голоморфна на всякой части отрѣзка $\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$, не заключающей 0, и строка Тэйлора, для $x = 0$, получается приведеніемъ подобныхъ членовъ.

Я говорю, что *среди функцій* $F(x)$ *всегда есть одна и только одна, которая удовлетворяетъ всѣмъ условіямъ поставленной задачи.*

Въ самомъ дѣлѣ, для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned}
&A_0' + \varepsilon_0(1-b_0) = A_0,\\
&\varepsilon_2(1-b_2) - \varepsilon_0 f(0) = A_2,\\
&\varepsilon_4(1-b_4) - \varepsilon_2 f(2) + \varepsilon_0 \frac{f(0).(f(0)-1)}{2} = A_4, \qquad (6)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varepsilon_{2p+2}(1-b_{2p+2}) - \varepsilon_{2p} f(2p)\, \varepsilon_{2p-2}\frac{f(2p-2).(f(2p-2)-1)}{2} + \ldots = A_{2p+2},
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
&A_1' + \varepsilon_1(1-b_1) = A_1,\\
&\varepsilon_3(1-b_3) - \varepsilon_1 f(1) = A_3, \qquad (6^{\text{bis}})\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varepsilon_{2p+1}(1-b_{2p+1}) - \varepsilon_{2p-1} f(2p-1) + \varepsilon_{2p-1}\frac{f(2p-3).(f(2p-3)-1)}{2} + \ldots = A_{2p+1}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Откуда, во-первыхъ, получаемъ

$$A_0' = A_0 \quad \text{и} \quad A_1' = A,$$

такъ какъ $b_0 = b_1 = 1$.

Далѣе, полагаемъ $A_n = a_n + \beta_n$, гдѣ a_n цѣлое число, и $0 \leq \beta_n < 1$, такъ что a_n и β_n суть вполнѣ опредѣленныя данныя величины. Съ другой стороны, вводимъ на мѣсто b_n неизвѣстныя γ_n, опредѣленныя равенствами $\gamma_n = \varepsilon_n(1-b_n)$, и замѣчаемъ, что условія, которымъ подчинены b_n, равнозначны условію $0 \leq \gamma_n < 1$.

Такимъ образомъ уравненія (6) и (6^{bis}) обратятся въ уравненія

$$\begin{aligned}
&\gamma_2 - \varepsilon_0 f(0) = a_2 + \beta_2\\
&\gamma_4 - \varepsilon_2 f(2) + \varepsilon_0 \frac{f(0).(f(0)-1)}{2} = a_4 + \beta_4, \qquad (7)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\gamma_{2p+2} - \varepsilon_{2p} f(2p) + \varepsilon_{2p-2}\frac{f(2p-2).(f(2p-2)-1)}{2} + \ldots = a_{2p+2} + \beta_{2p+2}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
&\gamma_3 - \varepsilon_1 f(1) = a_3 + \beta_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (7^{\text{bis}})\\
&\gamma_{2p+1} - \varepsilon_{2p-1} f(2p-1) + \varepsilon_{2p-3}\frac{f(2p-3).(f(2p-3)-1)}{2} + \ldots = a_{2p+1} + \beta_{2p+1}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

въ которыхъ цѣлыя части и положительныя дробныя части должны быть соотвѣтственно равны. Поэтому, съ одной стороны,

$$\gamma_n = \beta_n \quad (n > 1),$$

откуда

$$b_n = 1 - \varepsilon_n \beta_n ,$$

и, съ другой стороны,

$$\begin{aligned}
&-\varepsilon_0 f(0) = a_2 \\
&-\varepsilon_2 f(2) = -\varepsilon_0 \frac{f(0).(f(0)-1)}{2} + a_4. \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&-\varepsilon_{2p} f(2p) = -\varepsilon_{2p-2} \frac{f(2p-2).(f(2p-2)-1)}{2} + \dots + a_{2p+2} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{8}$$

и

$$\begin{aligned}
&-\varepsilon_{2p} f(1) = a_3 \\
&\dots\dots\dots\dots \\
&-\varepsilon_{2p-1} f(2p-1) = -\varepsilon_{2p-1} \frac{f(2p-1).(f(2p-1)-1)}{2} - \dots + a_{2p+1} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{8bis}$$

Полученныя уравненія имѣютъ одну и только одну систему рѣшеній: $f(0)$, $f(2)$ и т. д. представляютъ абсолютныя значенія вторыхъ частей равенствъ, $-\varepsilon_0$, $-\varepsilon_2$ и т. д. опредѣляются ихъ знаками, при чемъ этотъ знакъ считается отрицательнымъ, если вторая часть равенства равна нулю. Аналогичнымъ образомъ находятся $f(1)$, ε_1, $f(3)$ и т. д. Такимъ образомъ задача рѣшена.

Примѣчаніе. Если числа A_i цѣлыя, то всѣ $b_i = 1$, и наоборотъ.