О нѣкоторыхъ полиномахъ и связи ихъ съ алгебраическимъ интегрированіемъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ алгебраическихъ уравненій.

М. Лагутинскій.

Въ своей работѣ: «Приложеніе полярныхъ операцій къ интегрированію обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій въ конечномъ видѣ» [1]) при изученіи вопроса о полученіи частныхъ алгебраическихъ интеграловъ G. Darboux, я ввожу рядъ полиномовъ, изученіе которыхъ имѣетъ, по моему мнѣнію, особую важность для алгебраическаго интегрированія.

Настоящее изслѣдованіе я посвящаю дальнѣйшему раскрытію ихъ свойствъ.

§ 1. Предварительно я остановлюсь нѣсколько подробнѣе на общности послѣдующихъ заключеній.

Ради теоретической простоты я кладу въ основаніе моихъ изслѣдованій такую дифференціальную систему:

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\frac{dx_3}{X_3}=\ldots=\frac{dx_p}{X_p}, \tag{1}$$

гдѣ функціи X_i представляютъ собой однородные полиномы въ перемѣнныхъ $x_i (i=1, 2, \ldots, p)$ одного и того же измѣренія m.

Возьмемъ теперь самую общую алгебраическую систему:

$$\frac{dy_1}{Y_1}=\frac{dy_2}{Y_2}=\frac{dy_3}{Y_3}=\ldots=\frac{dy_{p-1}}{Y_{p-1}}, \tag{2}$$

гдѣ Y_i можно предположить полиномами относительно перемѣнныхъ y_i и также алгебраическихъ ирраціональныхъ выраженій этихъ перемѣнныхъ. Но согласно классическому пріему Абеля всѣ эти ирраціональ-

[1]) Сообщенія Харьковскаго Математическаго Общества (2) т. XII, стр. 111.

ности можно выразить раціонально черезъ одну новую ирраціональность. Поэтому, предположивъ, что она опредѣляется уравненіемъ

$$\Theta(z\,,\ y_1\,,\ y_2\,,\ldots y_{p-1})=0\,, \tag{3}$$

гдѣ Θ означаетъ полиномъ относительно перемѣнныхъ z и $y_i (i=1, 2, \ldots p-1)$, можно и функціи Y_i считать полиномами въ тѣхъ же перемѣнныхъ.

Въ своей работѣ «Частные алгебраическіе интегралы» (Харьковъ, 1908 г. стр. 1—11), я показываю, что интегрированіе этой системы эквивалентно интегрированію системы въ полныхъ дифференціалахъ:

$$\left|\begin{array}{ll} dx_1 & dx_2\ldots dx_p \\ x_1 & x_2\ldots x_p \\ X_1 & X_2\ldots X_p \end{array}\right| = 0\,, \tag{4}$$

гдѣ знакъ равенства показываетъ, что каждый опредѣлитель написанной матриссы равенъ нулю. Функціи X_i будутъ однородными полиномами относительно перемѣнныхъ x_i и ирраціональности z, которая будетъ опредѣляться уравненіемъ, получающимся изъ уравненія (3) замѣной y_i черезъ $\dfrac{x_i}{x_p}$, а полиномъ $X_i - x_i X_p$ при подстановкѣ $x_i = y_i (i=1, 2, \ldots, p-1)$ и $x_p=1$ обратится въ полиномъ Y_i.

Съ другой стороны я показалъ въ той же работѣ, что для интегрированія полученной системы въ полныхъ дифференціалахъ достаточно найти $p-2$ однородныхъ интеграловъ нулевого измѣренія слѣдующей системы:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \frac{dx_3}{X_3} = \ldots = \frac{dx_p}{X_p}. \tag{5}$$

Чтобы получить изъ такихъ интеграловъ интегралы системы (2), достаточно произвести въ нихъ подстановку $x_i = y_i (i=1, 2 \ldots p-1)$ и $x_p=1$.

Вмѣсто ирраціональности z, входящей въ систему (3) можно ввести новую $x_{p+1} = z x_p$; тогда функціи X_i можно преобразовать въ полиномы, однородные относительно перемѣнныхъ $x_1, x_2, x_3 \ldots x_p, x_{p+1}$. При этомъ сама ирраціональность x_{p+1} будетъ опредѣляться уравненіемъ:

$$\vartheta\,(x_1\,,\ x_2\ldots x_p\,,\ x_{p+1}) = 0\,, \tag{6}$$

гдѣ функція ϑ будетъ однороднымъ полиномомъ относительно тѣхъ же перемѣнныхъ, который при подстановкѣ $x_i = y_i (i=1\,,\ 2\,,\ldots,\ p-1)$,

$x_{p+1}=z$, $x_p=1$ обращается въ полиномъ $\Theta(z, y_1, y_2, \ldots, y_{p-1})$. Прибавимъ къ системѣ (5) новый членъ такимъ образомъ:

$$\frac{dx_1}{X_1\frac{\partial\vartheta}{\partial x_{p+1}}}=\frac{dx_2}{X_2\frac{\partial\vartheta}{\partial x_{p+1}}}=\frac{dx_3}{X_3\frac{\partial\vartheta}{\partial x_{p+1}}}=\ldots=\frac{dx_p}{X_p\frac{\partial\vartheta}{\partial x_{p+1}}}=\frac{dx_{p+1}}{-\sum\limits_{i=1}^{p}X_i\frac{\partial\vartheta}{\partial x_i}} \qquad (7)$$

Если положимъ, что степень полиномовъ X_i будетъ равна m_1, а степень полинома ϑ равна m_2, то обозначая черезъ $L_i (i=1, 2, \ldots, p+1)$ произвольные полиномы порядка m_1-1, напишемъ рядъ полиномовъ:

$$X_i\frac{\partial\vartheta}{\partial x_{p+1}}-L_i\vartheta \quad (i=1, 2, \ldots, p), \quad -\sum_{i=1}^{p}X_i\frac{\partial\vartheta}{\partial x_i}-L_{p+1}\vartheta.$$

Можетъ случиться, что всѣ эти полиномы имѣютъ общаго множителя v порядка m_1+m_2-m-1. Тогда мы можемъ написать:

$$\begin{gathered} X_i\frac{\partial\vartheta}{\partial x_{p+1}}-L_i\vartheta=vX_i^{(1)} \\ i=1, 2, \ldots, p. \\ -\sum_{i=1}^{p}X_i\frac{\partial\vartheta}{\partial x_i}-L_{p+1}\vartheta=vX_{p+1}^{(1)}, \end{gathered} \qquad (8)$$

гдѣ полиномы $X_i^{(1)}$ будутъ однородными полиномами порядка m. Если предположимъ, что множитель v можетъ быть принятъ и равнымъ единицѣ, то формулы (8) будутъ обнимать всѣ возможные случаи.

Замѣтимъ относительно множителя v слѣдующее: Пусть v_1 его неприводимый множитель. Онъ не можетъ быть дѣлителемъ полинома ϑ, такъ какъ изъ пріема Абеля слѣдуетъ неприводимость послѣдняго; слѣдовательно остается два предположенія, что либо $v_1\equiv\vartheta$, либо полиномы v_1 и ϑ первые между собой. Но формулы (8) показываютъ, что при первомъ предположеніи всѣ полиномы $X_i (i=1, 2, \ldots, p)$ будутъ дѣлиться на полиномъ ϑ. Но тогда система (5) въ силу условія (6) пріобрѣтала бы неопредѣленный видъ. Итакъ полиномъ ϑ долженъ быть первымъ съ каждымъ неприводимымъ множителемъ полинома v, а слѣдовательно и съ нимъ самимъ.

Этимъ замѣчаніемъ мы воспользуемся сейчасъ-же.

Возьмемъ систему:

$$\frac{dx_1}{X_1^{(1)}}=\frac{dx_2}{X_2^{(1)}}=\frac{dx_3}{X_3^{(1)}}=\ldots=\frac{dx_{p+1}}{X_{p+1}^{(1)}} \qquad (9)$$

и покажемъ, что полиномъ ϑ будетъ ея частнымъ алгебраическимъ интеграломъ.

Для этого достаточно показать, что сумма

$$\sum_{i=1}^{p+1} X_i^{(1)} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}$$

дѣлится на полиномъ ϑ.

Умножая обѣ части формулъ (8) соотвѣтственно на $\frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}$, складывая полученные результаты и произведя соотвѣтствующія сокращенія, мы получимъ такое тождество:

$$-\vartheta \sum_{i=1}^{p+1} L_i \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \equiv v \sum_{i=1}^{p+1} X_i^{(1)} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}.$$

Но такъ какъ полиномы ϑ и v первые между собою, то сумма $\sum_{i=1}^{p+1} X_i^{(1)} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}$ дѣлится на полиномъ ϑ. Обозначивъ частное отъ такого дѣленія черезъ K, получимъ такое тождество:

$$\sum_{i=1}^{p+1} X_i^{(1)} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} = K\vartheta,$$

которое и доказываетъ, что ϑ—частный алгебраическій интегралъ.

§ 2. Сдѣлаемъ небольшое отступленіе для доказательства одной леммы, касающейся частныхъ алгебраическихъ интеграловъ.

Дѣло идетъ о взаимномъ соотношеніи интегральныхъ кривыхъ и частнаго алгебраическаго интеграла.

Возьмемъ систему (1)

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_p}{X_p} \tag{1}$$

Обозначимъ черезъ X дифференціальную операцію, выраженную суммой

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Тождество

$$Xf = Kf, \tag{10}$$

гдѣ f нѣкоторой полиномъ, покажетъ, что f частный алгебраическій интегралъ.

Для вычисленія интегральной кривой системы вида (1) удобно брать вспомогательную независимую перемѣнную. Выберемъ ее такъ, чтобы всѣ отношенія, составляющія систему (1), были бы равны ея дифференціалу, т. е. положимъ

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i. \qquad i=1, 2, \ldots, p. \tag{11}$$

Предположимъ, что величины $a_i (i = 1, 2, \ldots, p)$ при подстановкѣ $x_i = a_i$ не обращаютъ въ нуль всѣхъ опредѣлителей матриссы:

$$\left| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \ldots & x_p \\ X_1 & X_2 & X_3 \ldots & X_p \end{matrix} \right| \tag{12}$$

Тогда черезъ точку A, опредѣляемую значеніями $a_1, a_2, \ldots, a_p$, проходитъ вполнѣ опредѣленная интегральная кривая.

Безъ вреда для общности можемъ предположить, что точка a_i интегральной кривой будетъ соотвѣтствовать значенію, равному нулю параметра t.

Замѣтивъ это, опредѣляемъ путемъ простого дифференцированія голоморфныя разложенія

$$x_i = \Theta_i(t), \qquad i=1, 2, \ldots, p \tag{13}$$

обращающіяся, какъ сказано, при $t = 0$ соотвѣтственно въ постоянныя a_i.

Въ нѣкоторой области значеній перемѣннаго t вблизи нуля они представятъ извѣстную часть интегральной кривой, проходящей черезъ точку A.

Если мы подставимъ въ полиномъ f, представляющій частный алгебраическій интегралъ, вмѣсто перемѣнныхъ x_i соотвѣтственно функціи $\Theta_i(t)$, то получимъ нѣкоторую новую функцію, точно также голоморѳную вблизи $t = 0$. Разложеніе ея въ рядъ по степенямъ t можно получить непосредственно, не вычисляя предварительно разложеній, данныхъ равенствами (13).

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ нѣкоторую функцію перемѣнныхъ x_i $F(x_1, x_2, \ldots, x_p)$; предположимъ въ ней перемѣнныя x_i функціями независимой перемѣнной t, опредѣляемыми равенствами (13). Замѣчая кромѣ того, что производная отъ каждой перемѣнной x_i дается равенствами (11), получаемъ:

$$\frac{dF(x_1, x_2, \ldots, x_p)}{dt} = \sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial F(x_1, x_2, \ldots, x_p)}{\partial x_i},$$

т. е. операція $\frac{d}{dt}$ въ данномъ случаѣ даетъ тотъ же результатъ, что и операція X.

На основаніи этого, воспользовавшись тождествомъ (10), находимъ

$$\frac{df}{dt}=Kf.$$

Отсюда

$$\frac{d^2f}{dt^2}=\frac{d(Kf)}{dt}=f\{XK+K^2\}=fK_1,$$

и вообще

$$\frac{d_gf}{dt^g}=\frac{d(K_{g-1}f)}{dt}=f\{XK_{g-1}+KK_{g-1}\}=fK_g.$$

Итакъ производная g-го порядка отъ f по перемѣнной t будетъ равна ей же самой, умноженной на нѣкоторый полиномъ $g(m-1)$-го порядка K_g.

Чтобы получить значенія этихъ производныхъ для $t=0$, достаточно замѣнить въ этихъ полиномахъ x_i соотвѣтственно черезъ a_i. Условимся брать въ скобки полиномъ, въ которомъ произведена такая замѣна, и мы получимъ искомое разложеніе въ такомъ видѣ:

$$f=(f)\left\{1+(K)\,t+\sum_{j=2}^{\infty}(K_{j-1})\,\frac{t^j}{j!}\right\}.$$

Полученное равенство показываетъ:

Если обыкновенная точка системы A обращаетъ въ нуль частный алгебраическій интегралъ f, то обращается въ нуль и результатъ подстановки въ этотъ полиномъ разложеній $\Theta_i(t)$, опредѣляющихъ интегральную кривую, проходящую черезъ точку A.

Такимъ образомъ всѣ точки интегральной кривой, лежащія на достаточно малой дугѣ ея, обращаютъ въ нуль частный алгебраическій интегралъ, если одна изъ этихъ точекъ обращаетъ его въ нуль.

Пользуясь теоріей аналитическаго продолженія, при помощи простыхъ разсужденій приходимъ къ такой теоремѣ:

Если дуга интегральной кривой, проходя черезъ точку A, обращающую въ нуль частный алгебраическій интегралъ, не содержитъ особенныхъ точекъ разсматриваемой дифференціальной системы, то всѣ ея точки обращаютъ полиномъ f въ нуль.

Можно формулировать эту теорему и чисто геометрически.

Если подъ частными алгебраическими интегралами будемъ понимать точечное многообразіе, опредѣляемое уравненіемъ

$$f = 0,$$

то наша теорема можетъ быть выражена и такъ: всякій частный алгебраическій интегралъ образуется перемѣщеніемъ интегральной кривой.

§ 3. Вернемся снова къ системѣ (9) § 1:

$$\frac{dx_1}{X_1^{(1)}} = \frac{dx_2}{X_2^{(1)}} = \ldots = \frac{dx_p}{X_p^{(1)}} = \frac{dx_{p+1}}{X_{p+1}^{(1)}}, \tag{9}$$

которая согласно доказанному имѣетъ частный алгебраическій интегралъ ϑ.

Возьмемъ какую-нибудь функцію $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ и предположимъ, что уравненіе

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) = 0 \tag{14}$$

можетъ быть однимъ изъ уравненій нѣкоторой интегральной кривой b. Тогда дифференціалъ отъ этого уравненія вдоль этой кривой долженъ быть равенъ нулю.

Получимъ

$$d\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) = 0$$

или

$$\Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) \equiv \sum_{i=1}^{p+1} X_i^{(1)} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0.$$

Отсюда слѣдуетъ, что вновь полученное уравненіе будетъ также однимъ изъ уравненій этой интегральной кривой.

Если полученное уравненіе не будетъ слѣдствіемъ уравненія (14), то мы можемъ снова примѣнить пріемъ и получимъ такимъ образомъ рядъ уравненій:

$$\begin{gathered}
\Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) = 0 \\
\Phi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\Phi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) = 0.
\end{gathered}$$

Такой процессъ полученія уравненій кривой b, закончится при $k < p+1$ тѣмъ, что послѣднее уравненіе будетъ слѣдствіемъ первыхъ k уравненій.

Итакъ мы нашли k уравненій интегральной кривой b:

$$\begin{aligned} &\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) = 0 \\ &\Phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) = 0 \\ &\qquad i = 1, 2, \ldots, k-1. \end{aligned} \tag{15}$$

Если число этихъ уравненій k равно $p-1$, то ими интегральная кривая b опредѣляется вполнѣ. Когда же $k < p-1$, то можно опредѣлить ея недостающія уравненія двумя путями:

Опредѣлить изъ уравненій (15) k перемѣнныхъ и свести систему (9) къ новой системѣ съ $p-k+1$ перемѣнными. Интегрированіе ея даетъ $p-k$ интеграловъ; приравнивая ихъ произвольнымъ постояннымъ получимъ еще $p-k$ уравненій, которыя вмѣстѣ съ уравненіями (15) опредѣлятъ всѣ интегральныя кривыя b.

Можно поступить также иначе. Напишемъ полную систему всѣхъ независимыхъ интеграловъ уравненій (9) и приравняемъ ихъ произвольнымъ постояннымъ. Полученныя уравненія

$$\Psi_i = C_i \qquad i = 1, 2, \ldots, p \tag{16}$$

будутъ разрѣшимыми относительно p перемѣнныхъ.

Разрѣшивъ и подставивъ результатъ въ уравненія (15), убѣждаемся дифференцированіемъ, что полученныя соотношенія не будутъ зависѣть отъ оставшейся перемѣнной и могутъ быть написаны въ видѣ:

$$\sigma_i(C_1, C_2, \ldots, C_p) = 0$$
$$i = 1, 2, \ldots, k.$$

Эти условія оставляютъ $p-k$ постоянныхъ совершенно произвольными. Пусть это будутъ $C_1, C_2, \ldots, C_{p-k}$. Тогда, присоединяя къ уравненіямъ (15) нижеслѣдующія

$$\Psi_i = C_i \qquad i = 1, 2, \ldots, p-k,$$

мы получимъ уравненія, опредѣляющія интегральныя кривыя b. Въ самомъ дѣлѣ, если полученная система уравненій была бы не совмѣстима, то существовало бы соотношеніе между постоянными C_i, которое мы исключили a priori.

Такимъ образомъ видимъ, что по второму способу достаточно для полученія интегральныхъ кривыхъ въ системѣ уравненій (16) замѣнить k надлежащимъ образомъ выбранныхъ уравненій уравненіями (15).

Въ частномъ случаѣ, если мы ищемъ интегральныя кривыя, всѣ точки которыхъ обращаютъ въ нуль частный алгебраическій интегралъ, то уже второе уравненіе будетъ слѣдствіемъ перваго, и система (15) сведется къ одному уравненію, которое получится приравниваніемъ нулю частнаго интеграла.

Напр. приравняемъ ϑ нулю,

$$\vartheta = 0. \tag{17}$$

Если мы примѣнимъ первый способъ, то исключая перемѣнную x_{p+1}, придемъ къ системѣ (5) и слѣдовательно, примѣняя второй способъ, можемъ получить всѣ ея интегральныя кривыя при помощи полной системы интеграловъ уравненій (9), замѣнивъ одинъ изъ нихъ уравненіемъ (17), а потому:

Всѣ вопросы объ алгебраичности рѣшеній системы (5) [а также и (2)] зависятъ отъ рѣшенія этихъ вопросовъ для системы (9), которая отличается отъ системы (1) только числомъ перемѣнныхъ.

§ 4. Въ дальнѣйшемъ наши разсужденія будутъ касаться только системы (1):

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \frac{dx_3}{X_3} = \ldots = \frac{dx_p}{X_p}. \tag{1}$$

Предположимъ, что однимъ изъ уравненій нѣкоторой интегральной кривой будетъ однородный полиномъ n-го порядка.

Обозначимъ черезъ B_{1i} всѣ одночлены, составленные изъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_p$ измѣренія n, черезъ s ихъ число, равное $\binom{n+p-1}{p-1}$, а черезъ $C_i (i = 1, 2, \ldots, s)$ нѣкоторыя постоянныя, тогда $\sum_{i=1}^{s} C_i B_{1i}$ даетъ намъ при произвольномъ выборѣ постоянныхъ C_i самую общую форму полинома n-го порядка.

Условимся затѣмъ, что операція $X \equiv \sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ обращаетъ одночлены B_{1i} въ полиномы B_{2i}, т. е. имѣемъ тождество:

$$XB_{1i} = B_{2i}. \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Точно также примемъ вообще

$$XB_{ji} = B_{j+1\,i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s), \qquad j = 1, 2, 3, 4, \ldots \tag{18}$$

Положимъ напр., что постоянная C_1 отлична отъ нуля, и пусть уравненіе

$$\sum_{i=1}^{s} C_i B_{1i} = 0 \tag{19}$$

представляетъ то уравненіе интегральной кривой, о которомъ мы говорили.

Дифференцируя его вдоль интегральной кривой, получимъ:

$$\sum_{i=1}^{s} C_i X B_{1i} \equiv \sum_{i=1}^{s} C_i B_{2i} = 0\,. \tag{20}$$

Примѣняя изложенный пріемъ еще s—2 раза, получимъ рядъ такихъ уравненій, которыя всѣ обращаются въ нуль для точекъ разсматриваемой нами интегральной кривой:

$$\sum_{i=1}^{s} C_i B_{ji} = 0\,. \qquad (j=1,\,2,\,3,\ldots,s) \tag{21}$$

Обозначимъ черезъ $\Phi_n(x)$ опредѣлитель

$$\Phi_n(x) \equiv \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \ldots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \ldots & B_{2s} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & \ldots & B_{3s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{s1} & B_{s2} & B_{s3} & \ldots & B_{ss} \end{vmatrix}. \tag{22}$$

Умножая уравненія (21) на первые миноры этого опредѣлителя, отвѣчающіе элементамъ его перваго столбца, получимъ такое уравненіе:

$$C_1 \Phi_n(x) = 0\,.$$

Такимъ образомъ приходимъ къ такой теоремѣ:

Если одно изъ уравненій нѣкоторой интегральной кривой представляетъ собой нѣкоторый однородный полиномъ n-го порядка, то интегральная кривая будетъ удовлетворять и уравненію

$$\Phi_n(x) = 0\,.$$

Слѣдствіе: Если только одно изъ уравненій интегральной кривой можетъ быть алгебраическимъ, то уже уравненіе (20) не можетъ быть новымъ уравненіемъ по сравненію съ уравненіемъ (19), и полиномъ

$\sum_{i=1}^{s} C_i B_{2i}$ долженъ заключать полиномъ $\sum_{i=1}^{s} C_i B_{1i}$ множителемъ, т. е. можно написать тождество:

$$\sum_{i=1}^{s} C_i B_{2i} = K \sum_{i=1}^{s} C_i B_{1i};$$

но, такъ какъ, очевидно,

$$X \sum_{i=1}^{s} C_i B_{1i} = \sum_{i=1}^{s} C_i B_{2i},$$

то получаемъ такую теорему:

Если только одно уравненіе интегральной кривой можетъ быть приведено къ алгебраическому виду, то система обладаетъ по крайней мѣрѣ однимъ частнымъ алгебраическимъ интеграломъ, и приравнявъ его нулю, мы получимъ искомое уравненіе интегральной кривой.

§ 5. Встрѣтившійся въ разсматриваемомъ вопросѣ опредѣлитель, какъ я показалъ въ цитированной уже работѣ «Приложеніе полярныхъ операцій къ интегрированію обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій», представляетъ собой точечный коваріантъ линейнаго коннекса

$$\sum_{i=1}^{p} X_i u_i = 0.$$

Теорема предыдущаго параграфа показываетъ, что за первое уравненіе интегральной кривой, имѣющей въ числѣ своихъ уравненій алгебраическіе, можно взять одинъ изъ этихъ полиномовъ.

Покажемъ, что, если выбрать надлежащимъ образомъ параметръ, въ функціи котораго выразятся интегральныя кривыя, то этотъ опредѣлитель представляетъ собой ничто иное, какъ опредѣлитель Вронскаго.

Въ самомъ дѣлѣ, введемъ тутъ же вспомогательную перемѣнную, какъ и въ § 2 и слѣдовательно форма уравненій будетъ слѣдующая:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i, \qquad (i=1, 2, 3, \ldots, p), \tag{11}$$

а интегральныя кривыя опредѣлятся уравненіями:

$$x_i = \Theta_i(t). \qquad (i=1, 2, \ldots, p). \tag{13}$$

Тогда операція X и дифференцированіе по перемѣнной t даютъ одинаковые результаты.

Поэтому имѣемъ:

$$\frac{d}{dt} B_{j,i} = B_{j+1,i} \qquad (i=1,\, 2, \ldots, s)$$

и вообще

$$\frac{d^{(j)} B_{1i}}{dt^j} = B_{j+1,i}. \qquad (i=1,\, 2, \ldots, s)$$

Замѣтимъ это и замѣнимъ въ опредѣлителѣ (22) перемѣнныя x_i функціями $\Theta_i(t)$ на основаніи равенствъ (13). При этомъ всѣ элементы первой строки B_{1i} обратятся въ функціи B_i параметра t и онъ приметъ видъ:

$$\begin{vmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & \ldots & B_s \\ \frac{dB_1}{dt} & \frac{dB_2}{dt} & \frac{dB_3}{dt} & \ldots & \frac{dB_s}{dt} \\ \frac{d^{(2)}B_1}{dt^2} & \frac{d^{(2)}B_2}{dt^2} & \frac{d^{(2)}B_3}{dt^2} & \ldots & \frac{d^{(2)}B_s}{dt^2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d^{(s-1)}B_1}{dt^{s-1}} & \frac{d^{(s-1)}B_2}{dt^{s-1}} & \frac{d^{(s-1)}B_3}{dt^{s-1}} & \ldots & \frac{d^{(s-1)}B_s}{dt^{s-1}} \end{vmatrix}$$

Полученное выраженіе и доказываетъ наше утвержденіе.

Если этотъ опредѣлитель равенъ нулю для какой-нибудь интегральной кривой, то между элементами первой строки должно быть по извѣстному свойству опредѣлителя Вронскаго линейное соотношеніе съ постоянными коэффиціентами, и слѣдовательно всѣ точки интегральной кривой удовлетворяютъ нѣкоторому уравненію, которое получаютъ, приравнивая нулю нѣкоторый полиномъ n-го порядка.

Такимъ образомъ получаемъ теорему: *Если полиномъ $\Phi_n(x)$ обращается въ нуль для всѣхъ точекъ интегральной кривой, то одно изъ ея уравненій будетъ имѣть въ лѣвой части однородный полиномъ n-го порядка, а въ правой нуль.*

§ 6. Дадимъ еще новое доказательство той же теоремы, а кстати и способъ, какъ составлять это уравненіе интегральной кривой по заданной ея точкѣ.

Сначала докажемъ слѣдующее тождество:

Даны нѣкоторыя величины:

$$\begin{array}{lllll}
b_{11} & b_{12} & b_{13} & \ldots & b_{1r} \\
b_{21} & b_{22} & b_{23} & \ldots & b_{2r} \\
b_{31} & b_{32} & b_{33} & \ldots & b_{3r} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
b_{r-2,1} & b_{r-2,2} & b_{r-2,3} & \ldots & b_{r-2,r} \\
b_{r-1,1} & b_{r-1,2} & b_{r-1,3} & \ldots & b_{r-1,r} \\
b_{r,1} & b_{r,2} & b_{r,3} & \ldots & b_{r,r} \\
b_{r+1,1} & b_{r+1,2} & b_{r+1,3} & \ldots & b_{r+1,r} \\
b_{r+2,1} & b_{r+2,2} & b_{r+2,3} & \ldots & b_{r+2,r}
\end{array}$$

Обозначимъ первые миноры первыхъ $r-1$ строкъ, образованныхъ выбрасываніемъ i-го столбца черезъ z_i. Условимся также обозначать черезъ Δ_{ij} опредѣлитель, полученный черезъ выбрасываніе i и j строки въ написанной таблицѣ.

Тогда имѣемъ непосредственно такія тождества:

$$\sum_{i=1}^{r} b_{r,i} z_i - \Delta_{r+1,\, r+2} \equiv 0$$

$$\sum_{i=1}^{r} b_{r+1,i} z_i - \Delta_{r,r+2} \equiv 0$$

$$\sum_{i=1}^{r} b_{r+2,i}\, z_i - \Delta_{r,r+1} \equiv 0$$

$$\sum_{i=1}^{r} b_{ji}\, z_i \equiv 0$$

$$j=1,\ 2,\ 3,\ldots, r-2.$$

Исключая же изъ этихъ тождествъ z_i, мы получимъ такое:

$$\Delta_{r+1,\, r+2}\, \Delta_{r-1,r} - \Delta_{r,r+2}\, \Delta_{r-1,\, r+1} + \Delta_{r,r+1}\, \Delta_{r-1,\, r+2} = 0. \tag{23}$$

Это тождество для случая $r=4$ имѣетъ уже примѣненіе въ наукѣ. Укажу напр. на теорію бинарныхъ формъ и на изученіе различныхъ значеній ангармоническаго отношенія для четырехъ элементовъ.

Прибавимъ къ s строкамъ опредѣлителя $\Phi_n(x)$ двѣ такія строки:

$$\begin{array}{lllll}
E_{11} & E_{12} & E_{13} & \ldots & E_{1s} \\
E_{21} & E_{22} & E_{23} & \ldots & E_{2s}
\end{array} \tag{24}$$

составленныя изъ произвольно взятыхъ постоянныхъ. Обозначимъ черезъ $\varDelta_1$ опредѣлитель, который получится изъ $\varPhi_n(x)$, когда замѣстимъ всѣ элементы послѣдней строки элементами первой изъ строкъ (24). Точно такая же замѣна въ опредѣлителѣ $\varPhi_n(x)$ элементовъ послѣдней строки элементами второй изъ строкъ (24) приведетъ насъ къ опредѣлителю $\varDelta_2$. А если замѣнимъ въ опредѣлителѣ $\varPhi_n(x)$ элементы предпослѣдней строки соотвѣтственно элементами первой или второй изъ строкъ (24), то получимъ два опредѣлителя $\varDelta_3$ и $\varDelta_4$. Наконецъ замѣняя въ опредѣлителѣ $\varPhi_n(x)$ двѣ послѣднія строки строками (24), получимъ опредѣлитель $\varDelta$.

Шесть опредѣлителей $\varDelta$, $\varPhi_n(x)$, $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, $\varDelta_3$ и $\varDelta_4$ имѣютъ по $s-2$ строкъ одинаковыхъ, а остальныя двѣ берутся изъ четырехъ данныхъ строкъ. Эти опредѣлители только что разсмотрѣннаго типа, а потому между ними должно быть тождественное соотношеніе типа (23), а именно:

$$\varDelta\varPhi_n(x) + \varDelta_1\varDelta_4 - \varDelta_2\varDelta_3 \equiv 0 \tag{25}$$

Возьмемъ еще и такую таблицу:

$$\begin{array}{lllll}
B_{11} & B_{12} & B_{13} & \dots & B_{1s} \\
B_{21} & B_{22} & B_{23} & \dots & B_{2s} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
B_{k-1,1} & B_{k-1,2} & B_{k-1,3} & \dots & B_{k-1,s} \\
B_{k,1} & B_{k,2} & B_{k,3} & \dots & B_{k,s} \\
E_{11} & E_{12} & E_{13} & \dots & E_{1,s} \\
E_{21} & E_{22} & E_{23} & \dots & E_{2s} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
E_{s-k,1} & E_{s-k,2} & E_{s-k,3} & \dots & E_{s-k,s} \\
E_{s-k+1,1} & E_{s-k+1,2} & E_{s-k+1,3} & \dots & E_{s-k+1,s} \\
E_{s-k+2,1} & E_{s-k+2,2} & E_{s-k+2,3} & \dots & E_{s-k+2,s}
\end{array} \tag{26}$$

Условимся обозначать опредѣлитель, который составленъ изъ этихъ элементовъ выбрасываніемъ i и j строки, черезъ $\varDelta_{ij}$.

Тогда на основаніи разсужденій начала параграфа мы будемъ имѣть между шестью опредѣлителями $\varDelta_{k-1,k}$, $\varDelta_{k-1,s+1}$, $\varDelta_{k-1,s+2}$, $\varDelta_{k,s+1}$ $\varDelta_{k,s+2}$, $\varDelta_{s+1,s+2}$ такое тождественное соотношеніе:

$$\varDelta_{k-1,k}\,\varDelta_{s+1,s+2} - \varDelta_{k-1,s+1}\,\varDelta_{k,s+2} + \varDelta_{k-1,s+2}\,\varDelta_{k,s+1} = 0. \tag{27}$$

§ 7. Пусть уравненіями (13):

$$x_i = \Theta_i(t) \qquad\qquad i=1, 2, \ldots, p \qquad\qquad (13)$$

при нѣкоторыхъ предположеніяхъ относительно входящихъ въ функціи Θ_i начальныхъ постоянныхъ опредѣляется такая интегральная кривая, всѣ точки которой обращаютъ въ нуль полиномъ $\Phi_n(x)$.

Возьмемъ произвольно два ряда постоянныхъ (24) и разсмотримъ выраженія Δ_1 и Δ_2. Подставивъ въ нихъ вмѣсто x_i соотвѣтственно функціи Θ_i, будемъ имѣть двѣ функціи перемѣнной t $\Psi_1(t)$ и $\Psi_2(t)$.

Если функція $\Psi_1(t)$ равна тождественно нулю, то получаемъ сразу уравненіе:

$$\Delta_1 = 0, \qquad (28)$$

которое будетъ слѣдствіемъ уравненій интегральной кривой.

Когда же $\Psi_1(t)$ отлична отъ нуля, то, обозначивъ частное функцій $\Psi_2(t)$ и $\Psi_1(t)$ черезъ $\Psi(t)$, пишемъ выраженіе $\Delta_2 - \Delta_1 \Psi(t)$. Очевидно, что уравненіе

$$\Delta_2 - \Delta_1 \Psi(t) = 0 \qquad (29)$$

будетъ слѣдствіемъ уравненій интегральной кривой.

Беремъ дифференціалъ отъ обѣихъ частей этого уравненія.

На основаніи условій (11) мы получимъ

$$X\Delta_2 - \Psi(t) X\Delta_1 - \Delta_1 \frac{d\Psi(t)}{dt} = 0.$$

Если мы примемъ во вниманіе правила дифференцированія опредѣлителя, то, воспользовавшись формулами (18), получимъ, что

$$X\Delta_2 = -\Delta_4 \quad \text{и} \quad X\Delta_1 = -\Delta_3,$$

и слѣдовательно наше уравненіе принимаетъ видъ:

$$-\Delta_4 + \Delta_2 \Psi(t) - \Delta_1 \frac{d\Psi(t)}{dt} = 0.$$

Исключая изъ полученнаго уравненія и изъ уравненія (29) функцію $\Psi(t)$, получаемъ:

$$\Delta_2\Delta_3 - \Delta_1\Delta_4 - \Delta_1^2 \frac{d\Psi(t)}{dt} = 0.$$

Принимая же во вниманіе тождество (25), имѣемъ окончательно такое уравненіе:

$$\Delta\Phi_n(x) = \Delta_1{}^2 \frac{d\Psi(t)}{dt}.$$

Но для всѣхъ точекъ разсматриваемой нами кривой полиномъ $\Phi_n(x)$ обращается въ нуль; поэтому мы должны имѣть либо

$$\Delta_1 = 0,$$

либо

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = 0.$$

Мы уже разсмотрѣли первый случай, второй же показываетъ, что функція $\Psi(t)$ должна быть постоянной, которую обозначимъ черезъ λ.

Если обозначимъ

$$E_i^{(1)} = E_{2i} - \lambda E_{1i}, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, s,$$

то уравненіе (29) приметъ видъ:

$$\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \ldots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \ldots & B_{2s} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & \ldots & B_{3s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{s-1,1} & B_{s-1,2} & B_{s-1,3} & \ldots & B_{s-1,s} \\ E_1^{(1)} & E_2^{(1)} & E_3^{(1)} & \ldots & E_s^{(1)} \end{vmatrix} = 0.$$

Мы получаемъ опять опредѣлитель типа Δ_1, но съ другими постоянными, въ которыя входитъ линейно неизвѣстный параметръ λ. Его можно опредѣлить, если задать предварительно точку на этой интегральной кривой. Тогда получимъ линейное уравненіе, которымъ связаны постоянныя $E_i^{(1)}$.

Итакъ приходимъ къ такой теоремѣ: *Если всѣ точки интегральной кривой обращаютъ въ нуль полиномъ $\Phi_n(x)$, то онѣ обращаютъ въ нуль и опредѣлитель, который получится изъ $\Phi_n(x)$, если мы въ послѣдней строкѣ его замѣнимъ всѣ элементы постоянными, связанными линейной зависимостью.*

§ 8. Полученный результатъ можно обобщить слѣдующимъ образомъ:

Мы въ предыдущемъ параграфѣ нашли опредѣлитель, который отличенъ отъ полинома $\Phi_n(x)$ тѣмъ, что элементы его послѣдней строки замѣщены нѣкоторыми постоянными.

Предположимъ, что всѣ точки нѣкоторой интегральной кривой обращаютъ въ нуль опредѣлитель, который мы въ § 6 обозначили черезъ $\Delta_{s+1,\, s+2}$.

Аналогично предыдущему прибавляемъ два ряда постоянныхъ:

$$\begin{array}{ccccc} E_{s-k+1,1} & E_{s-k+1,2} & E_{s-k+1,3} & \ldots & E_{s-k+1,s} \\ E_{s-k+2,1} & E_{s-k+2,2} & E_{s-k+2,3} & \ldots & E_{s-k+2,s} \end{array}$$

Подставляемъ въ опредѣлитель $\Delta_{k,s+3}$ выраженія въ перемѣнной t, опредѣляющія точки интегральной кривой.

Можетъ случиться, что результатъ этой подстановки будетъ нулемъ. Тогда мы приходимъ сразу къ заключенію, что существуетъ опредѣлитель, который обращаютъ въ нуль всѣ точки интегральной кривой и въ которомъ постоянныя занимаютъ еще одну новую строку по сравненію съ исходнымъ.

Предположимъ теперь, что результатъ этой подстановки дастъ нѣкоторую функцію $\psi_1(t)$, а результатомъ такой же подстановки въ опредѣлитель $\Delta_{k,s+1}$ будетъ функція $\psi_2(t)$. Обозначимъ отношеніе функціи $\psi_2(t)$ къ функціи $\psi_1(t)$ черезъ $\psi(t)$. Тогда уравненіе

$$\Delta_{k,s+1} - \Delta_{k,s+2}\,\psi(t) = 0 \tag{30}$$

будетъ имѣть мѣсто для всѣхъ точекъ разсматриваемой кривой.

Дифференцируя это уравненіе вдоль интегральной кривой, мы получимъ по принятымъ обозначеніямъ:

$$X\Delta_{k,s+1} - \psi(t)X\Delta_{k,s+2} - \Delta_{k,s+2}\frac{d\psi(t)}{dt} = 0.$$

Но нетрудно убѣдиться непосредственнымъ вычисленіемъ, что

$$X\Delta_{k,s+1} = \Delta_{k-1,\, s+1}\,, \quad X\Delta_{k,s+2} = \Delta_{k-1,\, s+2}\,,$$

и слѣдовательно наше уравненіе принимаетъ такой видъ:

$$\Delta_{k-1,\, s+1} - \psi(t)\Delta_{k-1,\, s+2} - \Delta_{k,s+2}\frac{d\psi(t)}{dt} = 0.$$

Исключая изъ этого уравненія и уравненія (30) функцію $\psi(t)$, приходимъ къ такому равенству:

$$\Delta_{k-1,\, s+1}\,\Delta_{k,s+2} - \Delta_{k-1,\, s+2}\,\Delta_{k,s+1} - (\Delta_{k,s+2})^2\frac{d\psi(t)}{dt} = 0\,,$$

или принимая во вниманіе тождество (27), получаемъ:

$$\Delta_{k-1,k}\,\Delta_{s+1,\,s+2} = (\Delta_{k,s+2})^2\,\frac{d\psi(t)}{dt}.$$

Но $\Delta_{s+1,\,s+2}$ равно нулю для точекъ интегральной кривой; равенство-же нулю $\Delta_{k,s+2}$ мы разсмотрѣли, и потому теперь остается случай, когда $\frac{d\psi(t)}{dt}=0$, т. е. когда $\psi(t)$ будетъ нѣкоторая постоянная λ.

Обозначивъ черезъ

$$E_i^{(1)} = E_{s-k+2,i} - E_{s-k+1,i}\lambda,$$
$$i=1,\,2,\,3,\ldots,\,s.$$

получимъ опредѣлитель такого же вида, какъ и $\Delta_{k,s+2}$; только вмѣсто ряда постоянныхъ $E_{s-k+1,i}$ онъ будетъ имѣть рядъ постоянныхъ $E_i^{(1)}$, заключающихъ неизвѣстный параметръ λ.

Онъ можетъ быть опредѣленъ всегда, разъ задана точка интегральной кривой, такъ какъ подставляя въ уравненіе (30) величины, опредѣляющія ее, мы получимъ условіе для опредѣленія λ.

Итакъ, если интегральная кривая удовлетворяетъ уравненію типа:

$$\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{k1} & B_{k2} & B_{k3} & B_{ks} \\ E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{1s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ E_{s-k,1} & E_{s-k,2} & E_{s-k,3} & E_{s-k,s} \end{vmatrix} = 0, \qquad (31)$$

то всѣ ея точки обратятъ въ нуль и опредѣлитель, полученный изъ даннаго замѣщеніемъ строки:

$$B_{k1} \quad B_{k2} \quad B_{k3} \quad \ldots \quad B_{ks}$$

строкой

$$E_1^{(1)} \quad E_2^{(1)} \quad E_3^{(1)} \quad \ldots \quad E_s^{(1)}.$$

Надо замѣтить, что между постоянными $E_i^{(1)}$ существуетъ, говоря вообще, одно линейное соотношеніе.

Мы видимъ изъ предыдущаго, что изъ опредѣлителя $\Phi_n(x)$, если всѣ точки интегральной кривой обращаютъ его въ нуль, можно получить рядъ опредѣлителей, въ которыхъ строки послѣдовательно замѣщаются постоянными. Въ концѣ концовъ придемъ къ опредѣлителю, въ которомъ только первая строка зависитъ отъ перемѣнныхъ x_i, а остальныя составлены изъ постоянныхъ. Такой опредѣлитель будетъ однороднымъ полиномомъ n-го порядка, и мы снова приходимъ къ доказанной уже въ параграфѣ пятомъ теоремѣ.

§ 9. Новое доказательство этой теоремы сложнѣе перваго, даже безъ тѣхъ дополнительныхъ разсужденій, которыя нужно сдѣлать относительно выбора постоянныхъ E_{ij}, чтобы предупредить сомнительные случаи, которые я опустилъ. Но въ немъ указывается рядъ полиномовъ, которые обладаютъ тѣмъ же свойствомъ, какъ и полиномъ $\Phi_n(x)$, обращаться въ нуль для всѣхъ точекъ интегральной кривой. Любопытно, что заданіе одной ея точки можетъ быть достаточнымъ для полнаго последовательнаго опредѣленія этихъ полиномовъ.

Особенно просто опредѣляются эти полиномы, если намъ извѣстно уравненіе (19) интегральной кривой. Тогда по даннымъ коэффиціентамъ этого уравненія составляется рядъ линейныхъ соотношеній между ними. Въ самомъ дѣлѣ, въ соотношеніи

$$\sum_{i=1}^{s} E_i C_i = 0 \tag{32}$$

можно взять постоянныя $E_2, E_3, \ldots, E_s$ совершенно произвольно, а E_1 опредѣлить при помощи этого равенства.

Пусть мы имѣемъ $s-k$ такихъ условій:

$$\sum_{i=1}^{s} E_{ji} C_i = 0. \qquad j=1,2,\ldots,s-k$$

Если замѣнимъ ими послѣднія $s-k$ уравненій изъ числа уравненій (20), то мы придемъ какъ разъ къ уравненію (31).

Съ помощью этого свойства можно пойти дальше, т. е. доказать, что не только, какъ мы показали, среди алгебраическихъ уравненій интегральной кривой находится одинъ изъ неприводимыхъ множителей полиномовъ $\Phi_n(x)$, приравненный нулю, но что можно принять всѣ ея алгебраическія уравненія, составленными изъ множителей полиномовъ $\Phi_m(x)$ m-го же порядка.

Изложеніе этой общей и любопытной теоремы я отлагаю до другой статьи, тѣмъ болѣе, что придется также развить при этомъ нѣкоторое обобщеніе задачи интегрированія дифференціальнаго уравненія

$$Xz = 0.$$

Идея этого обобщенія заключается въ слѣдующемъ:

Исходимъ изъ уравненія

$$f = 0,$$

гдѣ f нѣкоторая функція перемѣнныхъ x_i, и пишемъ рядъ новыхъ уравненій, изъ которыхъ каждое получается при помощи операціи X надъ лѣвой частью предыдущаго

$$Xf = 0, \quad X(Xf) = 0, \quad X\{X(Xf)\} = 0 \ldots$$

Сравнивая полученныя уравненія между собою, мы можемъ встрѣтить различные случаи:

Во-первыхъ всѣ полученныя уравненія не будутъ имѣть ни одного общаго корня, во-вторыхъ всѣ уравненія будутъ обращаться въ нуль для отдѣльныхъ точекъ, для всѣхъ точекъ нѣкоторой кривой и т. д., и наконецъ всѣ уравненія будутъ слѣдствіями перваго изъ нихъ.

Очевидно, что третій случай приводитъ насъ къ интегральной кривой, послѣдній же, если f неприводимый полиномъ, къ частному (алгебраическому) интегралу G. Darboux.

Уже изъ этого обстоятельства, какъ мнѣ кажется, должна слѣдовать важность этой новой задачи.

Очевидно, что при ея изслѣдованіи придется встрѣтиться съ теоріей группъ.

Затѣмъ также придется встрѣтиться съ теоріей исключенія, нѣкоторые пункты которой и для чисто алгебраическихъ уравненій представляютъ собой солидныя трудности.

§ 10. Въ этомъ параграфѣ я попытаюсь сдѣлать сводку тому, что могутъ дать предлагаемыя мной свойства для вычисленія частныхъ алгебраическихъ интеграловъ G. Darboux.

Извѣстно, что нѣкоторыя изъ особенныхъ точекъ системы (1) обращаютъ въ нуль частный алгебраическій интегралъ. Это свойство даетъ рядъ соотношеній между коэффиціентами искомаго частнаго интеграла типа (32).

Затѣмъ въ цитированной уже работѣ [1]) я далъ уравненія для апріорнаго опредѣленія поляръ частныхъ алгебраическихъ интеграловъ по отношенію къ особеннымъ точкамъ дифференціальной системы.

---

[1]) Сообщенія Х. М. О. т. XII стр. 131.

Знаніе такой поляры ведетъ къ нѣсколькимъ соотношеніямъ между коэффиціентами частнаго алгебраическаго интеграла.

Мы можемъ слѣдовательно воспользоваться этими соотношеніями для полученія опредѣлителя типа $\varDelta_{s+1\,,\;s+2}$, который заключаетъ въ себѣ частный интегралъ въ видѣ множителя.

Во всякомъ случаѣ мы можемъ имѣть нѣкоторый полиномъ, который заключаетъ нашъ частный интегралъ въ видѣ множителя. Пусть это будетъ F.

Извѣстно, что и $XF \equiv F_1$ также будетъ имѣть его множителемъ. Покажемъ, что и обратно, если полиномъ v общій дѣлитель полиномовъ F и F_1, а полиномы $v_1 \equiv \frac{F}{v}$ и v первые между собой, то полиномъ v—частный алгебраическій интегралъ. Въ самомъ дѣлѣ, тождество

$$XF = X(vv_1) = v_1 Xv + vXv_1 = F_1$$

показываетъ, что полиномъ v дѣлитъ полиномъ Xv, что и доказываетъ наше утвержденіе.

Опредѣленіе подобнаго множителя двухъ полиномовъ F и F_1 достигается помощью послѣдовательнаго вычисленія общаго наибольшаго дѣлителя двухъ полиномовъ.

Когда мы получимъ полиномъ v, останется разложить его на неприводимые множители, изъ которыхъ каждый будетъ частнымъ интеграломъ.

Ради упрощенія можно воспользоваться полярными операціями. Если особенная точка обращаетъ въ нуль частный алгебраическій интегралъ, то она обратитъ въ нуль оба полинома и F и F_1. Если, слѣдовательно, вычислимъ необращающіяся въ нуль поляры наинизшей степени для полиномовъ F и F_1, то необращающаяся въ нуль поляра наинизшей степени искомаго частнаго интеграла будетъ ихъ общимъ множителемъ.

Опредѣленіе такой поляры снова дастъ соотношенія типа (32) между коэффиціентами частнаго интеграла, которыя въ томъ случаѣ, когда F вида $\varPhi_n(x)$ или $\varDelta_{s+1\,,\;s+2}$, можно использовать для замѣны перемѣнныхъ элементовъ нѣкоторыхъ строкъ постоянными, заимствованными изъ этихъ отношеній.

Затѣмъ скажемъ нѣсколько словъ о замѣнѣ элементовъ строки опредѣлителей этого типа постоянными, содержащими произвольный параметръ λ.

Въ этомъ случаѣ мы можемъ примѣнить любой изъ разсмотрѣнныхъ способовъ, надо только имѣть въ виду, что разысканіе общихъ дѣлителей можетъ потребовать выполненія нѣкотораго условія для λ.

Такія условія и дадутъ намъ всѣ возможныя значенія для этого параметра.

Полученіе такихъ условій въ общемъ видѣ представляетъ большія трудности, которыя тѣмъ не менѣе не кажутся мнѣ непреодолимыми. Полученіе ихъ можетъ, какъ я надѣюсь, имѣть значеніе и въ самомъ общемъ случаѣ интегрированія.

Изложенные пріемы, какъ и данный мной въ предыдущей работѣ способъ предварительнаго опредѣленія полинома K, даютъ возможность рѣшить задачу *только при заданномъ порядкѣ частнаго алгебраическаго интеграла*.

Но, какъ легко видѣть, эти условія могутъ быть получены полностью изъ сравненія полиномовъ $\Phi_n(x)$ и $X\Phi_n(x)$ и ихъ общихъ множителей. Какъ ни трудна задача найти предѣлъ для числа n, но, какъ мы уже видѣли, полиномы $\Phi_n(x)$ и полиномы вида $\Lambda_{s+1\,,\,s+2}$, обладаютъ такими любопытными свойствами, что утверждать невозможность примѣненія ихъ къ ея рѣшенію было бы рисковано.

§ 11. Перейдемъ теперь къ случаю, когда полиномъ $\Phi_n(x)$ равенъ тождественно нулю. При дальнѣйшемъ изслѣдованіи предположимъ, что не всѣ миноры, отвѣчающіе элементамъ послѣдней строки этого опредѣлителя, равны нулю.

Тогда легко показать, что частное двухъ опредѣлителей, которые получены замѣщеніемъ элементовъ въ послѣдней строкѣ черезъ постоянныя

$$E_{11} \quad E_{12} \quad E_{13} \quad \ldots \quad E_{1s} \tag{33}$$

или черезъ постоянныя

$$E_{21} \quad E_{22} \quad E_{23} \quad \ldots \quad E_{2s} \tag{34}$$

интегралъ системы (1).

Обозначимъ первый опредѣлитель черезъ D_1, а второй черезъ D_2. Тогда интеграломъ будетъ $\dfrac{D_2}{D_1}$.

Обозначимъ черезъ D_3 и D_4 соотвѣтственно полиномы XD_1 и XD_2. Это какъ нетрудно убѣдиться, будутъ опредѣлители, отличающіеся отъ опредѣлителей D_1 и D_2 элементами предпослѣднихъ строкъ.

Нетрудно убѣдиться, что тождество (23) примѣнимо въ данномъ случаѣ и покажетъ, что

$$D_1 D_4 - D_2 D_3 \equiv 0\,, \tag{35}$$

такъ какъ выраженіе, стоящее въ лѣвой части равно произведенію $\Phi_n(x)$ на нѣкоторый опредѣлитель.

Но въ силу тождества (35)

$$X\frac{D_2}{D_1}=\frac{D_1D_4-D_2D_3}{D_1^2}=0$$

и слѣдовательно $\psi_1=\dfrac{D_2}{D_1}$ будетъ интеграломъ системы (1).

Этотъ результатъ уже опубликованъ мной [1]). Я только хочу обратить здѣсь вниманіе на то обстоятельство, что искомый интегралъ будетъ имѣть одну изъ извѣстныхъ заранѣе формъ $\dfrac{D_2}{D_1}$.

Правда число этихъ формъ—числовая безконечность, но *оно инымъ и не можетъ быть по существу вопроса.* Форма интеграла мѣняется съ измѣненіемъ числа n и во всякомъ случаѣ даетъ возможность черезъ примѣненіе полярныхъ операцій изучить интегралъ вблизи особенныхъ точекъ дифференціальной системы. Пользоваться методами, ведущими начало отъ французскихъ ученыхъ Briot и Bouquet, можетъ быть затруднительно, такъ какъ уже начиная съ $p=4$, интегральныя кривыя могутъ быть трансцендентными и при существованіи алгебраическаго интеграла. А при рекомендуемыхъ мной пріемахъ мы остаемся въ сферѣ раціональныхъ алгебраическихъ операцій.

Я остановлюсь нѣсколько подробнѣе на задачѣ H. Poincaré [2]) объ опредѣленіи алгебраическаго интеграла уравненія въ полныхъ дифференціалахъ:

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{vmatrix}=0\,,$$

гдѣ X_i— однородные полиномы перемѣнныхъ x_i $(i=1\,,\ 2\,,\ 3)$ одного и того же измѣренія.

Такъ какъ интегралъ его будетъ также однороднымъ интеграломъ нулевого измѣренія системы

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\frac{dx_3}{X_3}$$

и обратно, то искомый алгебраическій интегралъ будетъ однимъ изъ выраженій $\dfrac{D_2}{D_1}$. Эти выраженія измѣняются вмѣстѣ съ числомъ n. Если

---

[1]) Сообщенія Х. М. О. XII, стр. 175.

[2]) Rendiconti del Circolo di Palermo. 1891, т. V, стр. 161.

обозначимъ общій множитель полиномовъ D_1 и D_2 черезъ Θ, а черезъ ψ_1 и ψ_2 соотвѣтственно частныя отъ дѣленія полиномовъ D_1 и D_2 на полиномъ Θ, то уравненія интегральныхъ кривыхъ напишется такъ:

$$\psi_1 - C\psi_2 = 0. \tag{36}$$

Напомнимъ, что можно предположить полиномъ, находящійся въ лѣвой части этого равенства неприводимымъ кромѣ нѣкотораго конечнаго числа значеній постоянной C.

Теперь воспользуемся теоріей, изложенной въ § 7. А именно, умножая уравненіе (36) на Θ, мы приведемъ его къ виду опредѣлителя разсматриваемаго типа и, примѣняя послѣдовательно пріемъ замѣны элементовъ одной строки постоянными, придемъ къ уравненію нашей интегральной кривой въ видѣ полинома n-го порядка.

Такъ какъ при $p=3$ такое уравненіе можетъ быть только одно, то заключаемъ, что уравненіе (36) (полиномъ $\psi_1 - C\psi_2$ неприводимъ) n-го порядка.

Отсюда слѣдуетъ, что полиномы ψ_1 и ψ_2 также n-го порядка, и мы приходимъ къ такой теоремѣ:

Для того, чтобы система

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{vmatrix} = 0$$

имѣла алгебраическій интегралъ n-го порядка, необходимо и достаточно, чтобы полиномъ $\Phi_n(x)$ обращался тождественно въ нуль.

Такимъ образомъ въ этомъ случаѣ намъ дѣлается извѣстнымъ и видъ интеграла, и его порядокъ, соотвѣтствующій данному виду.

Это даетъ возможность предпринять изслѣдованіе кратныхъ точекъ этого интеграла въ зависимости отъ даннаго числа n. При этомъ вводимыя H. Poincaré неизвѣстныя цѣлыя числа, характеризующія кратныя точки, опредѣляются вполнѣ точно. Тѣ ограничивающія предположенія, которыя онъ дѣлаетъ относительно кратныхъ точекъ, могутъ быть провѣрены и установлены точно, если онѣ примѣнимы къ общему случаю, или въ противномъ случаѣ сняты безъ вреда для окончательнаго результата.

Точно также опредѣленіе въ уравненіи (36) такихъ значеній постоянныхъ C (quantités remarquables) [1], которыя давали бы полиномы

---

[1]) Rendiconti del Circolo di Palermo. 1891, т. V, стр. 167 и слѣд.

$\psi_1 - C\psi_2$ съ кратными множителями, можетъ быть выполнено предварительно, а это, какъ видно изъ работъ G. Darboux, H. Poincaré и P. Painlevé, представляетъ особую важность.

Къ этому предмету и къ болѣе систематическому примѣненію предлагаемыхъ здѣсь пріемовъ я надѣюсь скоро вернуться.