Объ интегралахъ одной дифференціальной системы.

М. Лагутинскаго.

Въ своей работѣ: «Приложеніе полярныхъ операцій къ интегрированію обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій въ конечномъ видѣ» я между прочимъ изучаю такую систему [1]):

$$
\begin{aligned}
\alpha p' &= (\beta-\gamma)\,qr + K\,(c-b)\,vw + \frac{2Ma\,(c-b)}{5}\,[c\,(a-b)\,rv - b\,(c-a)\,qw] \\
\beta q' &= (\gamma-\alpha)\,pr + K\,(a-c)\,uw + \frac{2Mb\,(a-c)}{5}\,[a\,(b-c)\,pw - c\,(a-b)\,ru] \qquad (1)\\
\gamma r' &= (\alpha-\beta)\,pq + K\,(b-a)\,uv + \frac{2Mc\,(b-a)}{5}\,[b\,(c-a)\,qu - a\,(b-c)\,pv],
\end{aligned}
$$

гдѣ

$$K = \frac{2Mabc}{5}.$$

$$
\begin{aligned}
(c+a)\,(a+b)\,u' &= a\,(b-c)\,vw + 2a\,[(a+c)\,rv - (a+b)\,qw] \equiv (c+a)\,(a+b)\,U \\
(a+b)\,(b+c)\,v' &= b\,(c-a)\,uw + 2b\,[(b+a)\,pw - (b+c)\,ru] \equiv (a+b)\,(b+c)\,V \quad (2)\\
(b+c)\,(c+a)\,w' &= c\,(a-b)\,vu + 2c\,[(c+b)\,qu - (c+a)\,pv] \equiv (b+c)\,(c+a)\,W.
\end{aligned}
$$

Она заимствована мной изъ двухъ большихъ мемуаровъ В. А. Стеклова, помѣщенныхъ въ Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, 2-e série t. X, p. 271 et 3-e série t. I, p. 145.

Для упрощенія вычисленій я беру въ трехъ первыхъ уравненіяхъ (1) вмѣсто α, β, γ произведенія αK, βK, γK и получаю слѣдующія:

$$
\begin{aligned}
\alpha p' &= (\beta-\gamma)\,qr + (c-b)\,vw + (c-b)\left(\frac{a-b}{b}\,rv - \frac{c-a}{c}\,qw\right) \equiv \alpha P \\
\beta q' &= (\gamma-\alpha)\,rp + (a-c)\,uw + (a-c)\left(\frac{b-c}{c}\,pw - \frac{a-b}{a}\,ru\right) \equiv \beta Q \qquad (3)\\
\gamma r' &= (\alpha-\beta)\,pq + (b-a)\,uv + (b-a)\left(\frac{c-a}{a}\,qu - \frac{b-c}{b}\,pv\right) \equiv \gamma R.
\end{aligned}
$$

---

[1]) Сообщенія Х. М. О. 2-я серія. Т. XII, стр. 217.

В. А. Стекловъ даетъ въ этой работѣ три интеграла этой системы:

$$f_1 \equiv bcu^2 + acv^2 + abw^2$$

$$f_2 \equiv \frac{au^2+bv^2+cw^2}{2} + \alpha p^2 + \beta q^2 + \gamma r^2 \tag{4}$$

$$f_3 \equiv \left[\frac{(a+c)(a+b)}{a} u + \alpha p\right]^2 + \left[\frac{(a+b)(b+c)}{b} v + \beta q\right]^2 + \\ + \left[\frac{(b+c)(a+c)}{c} w + \gamma r\right]^2.$$

Кромѣ того, имъ изученъ вопросъ о четвертомъ интегралѣ 1-го порядка и данъ примѣръ четвертаго интеграла въ видѣ полинома 2-го порядка. Примѣнивъ методъ полярныхъ операцій, я изслѣдовалъ вопросъ о четвертомъ интегралѣ 2-го порядка во всей общности вплоть до мнимыхъ значеній входящихъ въ систему параметровъ. Полученный мной при этомъ добавочный случай, какъ указалъ мнѣ П. В. Воронецъ, не имѣетъ механическаго значенія. Можно предполагать, что этотъ случай, относящійся къ изученной В. А. Стекловымъ формѣ интеграловъ, не остался неизвѣстнымъ для него, и не приведенъ имъ въ его работѣ по отсутствію механическаго значенія.

Въ настоящей работѣ я продолжаю разысканіе подобныхъ интеграловъ въ видѣ полиномовъ, но высшихъ степеней.

Сначала я позволю себѣ изложить самый пріемъ, ограничившись простѣйшими предположеніями.

Дана система:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i, \qquad i=1, 2, \ldots, p, \tag{5}$$

гдѣ X_i обозначаютъ однородные полиномы второй степени, не зависящіе отъ перемѣнной t.

Ея интегралы, не зависящіе отъ перемѣнной t, удовлетворяютъ уравненію:

$$\sum X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0. \tag{6}$$

Подъ особенной точкой системы (5) будемъ подразумѣвать точку, опредѣляемую значеніями $a_i (i = 1, 2, \ldots, p)$, полученными при рѣшеніи уравненій

$$\lambda x_i = X_i \tag{7}$$
$$i=1, 2, \ldots, p,$$

Условимся обозначать черезъ A_i результатъ подстановки $x_i = a_i$ въ полиномы X_i, такъ, что будемъ имѣть тождественно

$$\lambda_1 a_i = A_i. \qquad i = 1, 2, \ldots, p. \tag{8}$$

Предположимъ, что однородный полиномъ f будетъ интеграломъ уравненія (6). Тогда будемъ имѣть тождество:

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0. \tag{9}$$

Подвергнемъ его k разъ операціи

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Если обозначимъ результатъ g-кратнаго примѣненія этой операціи къ полиному f черезъ f_g и однократной къ полиному X_i черезъ $X_i^{(1)}$, то, такъ какъ результатъ двукратнаго примѣненія той-же операціи къ полиному X_i равняется $2A_i = 2\lambda_{1i}$, получимъ тождество:

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + k \sum_{i=1}^{p} X_i^{(1)} \frac{\partial f_{k-1}}{\partial x_i} + k(k-1)\lambda_1 \sum_{i=1}^{p} a_i \frac{\partial f_{k-2}}{\partial x_i} = 0$$

или

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + k \sum_{i=1}^{p} X_i^{(1)} \frac{\partial f_{k-1}}{\partial x_i} + k(k-1)\lambda_1 f_{k-1} = 0. \tag{10}$$

Примемъ порядокъ полинома f равнымъ n и сдѣлаемъ въ равенствѣ (10) $k = n$. Тогда первая сумма обратится въ нуль, такъ какъ въ нее войдутъ производныя $n+1$-го порядка отъ полинома f, и мы найдемъ:

$$\sum_{i=1}^{p} X_i^{(1)} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_i} + (n-1)\lambda_1 f_{n-1} = 0. \tag{11}$$

Это тождество показываетъ, что мы можемъ получить $n-1$-ю поляру искомаго интеграла при помощи написаннаго уравненія.

Давая въ равенствѣ (10) k значеніе $n-1$, получимъ еще такое:

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_i} + (n-1) \sum_{i=1}^{p} X_i^{(1)} \frac{\partial f_{n-2}}{\partial x_i} + (n-1)(n-2)\lambda_1 f_{n-2} = 0. \tag{12}$$

Это равенство можно разсматривать, какъ уравненіе для полученія поляры f_{n-2} нашего полинома по найденной нами полярѣ f_{n-1}.

Напишемъ уравненія (2) и (3) въ такомъ видѣ

$$\begin{aligned} u' &= l_{12}vw + l_{13}qw + l_{14}rv \equiv U \\ v' &= l_{22}uw + l_{23}pw + l_{24}ru \equiv V \\ w' &= l_{32}uv + l_{33}pv + l_{34}qu \equiv W \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} p' &= l_{41}qr + l_{42}vw + l_{43}qw + l_{44}rv \equiv P \\ q' &= l_{51}pr + l_{52}uw + l_{53}pw + l_{54}ru \equiv Q \\ t' &= l_{61}pq + l_{62}uv + l_{63}pv + l_{64}qu \equiv R. \end{aligned} \tag{14}$$

Нетрудно видѣть, что при

$$\begin{aligned} &p=a_1, \quad u=b_1, \quad v=q=w=r=0, \\ &p=u=r=w=0, \quad v=b_2, \quad q=a_2, \\ &p=u=q=v=0, \quad r=a_3, \quad w=b_3, \end{aligned} \tag{15}$$

гдѣ a_i и b_i совершенно произвольныя постоянныя полиномы, U, V, W, P, Q и R обращаются въ нуль. Слѣдовательно таблица (15) даетъ особенныя точки системы (13) (14) или, что тоже, системы (2) (3) при $\lambda_1=0$.

Разсмотримъ сначала операцію $a_1\dfrac{\partial}{\partial p}+b_1\dfrac{\partial}{\partial u}$.

Предположимъ, что однородный полиномъ φ n-го порядка относительно перемѣнныхъ p, q, r, u, v, w—интегралъ уравненія:

$$P\frac{\partial z}{\partial p}+Q\frac{\partial z}{\partial q}+R\frac{\partial z}{\partial r}+U\frac{\partial z}{\partial u}+V\frac{\partial z}{\partial v}+W\frac{\partial z}{\partial w}=0 \tag{16}$$

Условившись обозначать результатъ примѣненія операціи

$$\left(a_1\frac{\partial}{\partial p}+b_1\frac{\partial}{\partial u}\right)^k$$

къ функціи Θ черезъ Θ_k, мы можемъ написать уравненіе (11) для даннаго случая слѣдующимъ образомъ:

$$Q_1\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial q}+R_1\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial r}+V_1\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial v}+W_1\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial w}=0. \tag{17}$$

Это тождество можно написать въ видѣ двухъ:

$$Q_1\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial q}+V_1\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial v}=0 \tag{18}$$

$$R_1 \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial r} + W_1 \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial w} = 0\,, \qquad (19)$$

такъ какъ ихъ лѣвыя части не имѣютъ общихъ подобныхъ членовъ.

Тождества какъ (17), такъ и (18), (19) должны существовать при какихъ-угодно значеніяхъ постоянныхъ a_1, b_1. Они будутъ существовать и при замѣнѣ a_1 черезъ p и b_1 черезъ u. Тогда Q_1, V_1, R_1 и W_1 обратятся въ Q, V, R и W, а производныя $\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial q}$, $\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial v}$, $\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial r}$ и $\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial w}$ въ нѣкоторые однородные полиномы отъ $L_1\, L_2\, L_3$ и L_4, которые сами суть однородные полиномы $n-1$-го порядка перемѣнныхъ p, u.

Тождество (18) напишется тогда такъ:

$$QL_1 + VL_2 = 0$$

и покажетъ, что частное $\frac{Q}{V}$ не должно зависѣть отъ перемѣнныхъ r, w.

Для этого необходимо, чтобы мы имѣли тождественно:

$$\frac{l_{51}p + l_{54}u}{l_{24}u} = \frac{l_{53}p + l_{52}u}{l_{23}p + l_{22}u}.$$

Но отсюда видно, что въ этомъ случаѣ долженъ равняться нулю либо коэффиціентъ l_{23}, либо коэффиціентъ l_{51}. Первое предположеніе даетъ:

$$\frac{2b}{b+c} = 0$$

или

$$b = 0.$$

Это приводитъ къ четвертому линейному интегралу, а мы ищемъ интегралы высшихъ степеней.

Второе предположеніе покажетъ, что отношеніе функцій Q и V будетъ постоянной, и слѣдовательно наша система будетъ имѣть линейный интегралъ.

Итакъ, если L_1 и L_2 не равны нулю, то система (2) и (3) имѣетъ четвертый линейный интегралъ. Поэтому, если $n>1$, то L_1 и L_2 должны равняться нулю, и производныя $\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial v}$ и $\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial q}$ равны нулю.

Аналогично заключеніе даетъ и равенство (19). Слѣдовательно получаемъ такую теорему:

Если степень интеграла φ, *имѣющаго видъ однороднаго полинома, равна числу* $n>1$, *то его* $n-1$*-я поляра вида*

$$\left(a_1\frac{\partial}{\partial p}+b_1\frac{\partial}{\partial u}\right)^{n-1}\varphi$$

не будетъ зависѣть отъ перемѣнныхъ q, r, v, w.

Другими словами:

$$\left(a_1\frac{\partial}{\partial p}+b_1\frac{\partial}{\partial u}\right)^{n-1}\varphi=M_{11}p+M_{12}u. \tag{20}$$

Точно также доказываемъ, что

$$\left(a_2\frac{\partial}{\partial q}+b_2\frac{\partial}{\partial v}\right)^{n-1}\varphi=M_{21}q+M_{22}v, \tag{21}$$

$$\left(a_3\frac{\partial}{\partial r}+b_3\frac{\partial}{\partial w}\right)^{n-1}\varphi=M_{31}r+M_{32}w. \tag{22}$$

Переходимъ къ опредѣленію поляры

$$\varphi_{n-2}\equiv\left(a_1\frac{\partial}{\partial p}+b_1\frac{\partial}{\partial v}\right)^{n-2}\varphi.$$

Формула (12) даетъ намъ:

$$P\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial p}+U\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial u}+$$
$$+(n-1)\left\{Q_1\frac{\partial\varphi_{n-2}}{\partial q}+V_1\frac{\partial\varphi_{n-2}}{\partial v}+R_1\frac{\partial\varphi_{n-2}}{\partial r}+W_1\frac{\partial\varphi_{n-2}}{\partial w}\right\}=0$$

или въ виду равенства (20)

$$(n-1)\left\{Q_1\frac{\partial\varphi_{n-2}}{\partial q}+V_1\frac{\partial\varphi_{n-2}}{\partial v}+R_1\frac{\partial\varphi_{n-2}}{\partial r}+W_1\frac{\partial\varphi_{n-2}}{\partial w}\right\}+$$
$$+M_{11}P+M_{12}U=0. \tag{23}$$

Дифференцируя тождество (20) по параметрамъ a_1 и b_1, получаемъ:

$$\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial a_1}=\left(\frac{\partial M_{11}}{\partial a_1}p+\frac{\partial M_{12}}{\partial a_1}u\right). \tag{24}$$

$$\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial b_1}=\left(\frac{\partial M_{11}}{\partial b_1}p+\frac{\partial M_{12}}{\partial b_1}u\right). \tag{25}$$

Но по свойству поляръ

$$\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial a_1} = (n-1)\frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial p}, \quad \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial b_1} = (n-1)\frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial u}. \qquad (26)$$

Поляра φ_{n-2} можетъ быть написана въ такомъ видѣ:

$$\varphi_{n-2} = \Theta(p^2) + \Theta_1(qr)p + \Theta_2(qr)u + \Theta_3(q^2) + \Theta_4(qr) + \Theta_5(r^2),$$

гдѣ Θ, Θ_3, Θ_5 однородные полиномы второй степени соотвѣтственно трехъ паръ перемѣнныхъ p, u; q, v; r, w; Θ_1 и Θ_2 линейныя однородныя функціи перемѣнныхъ q, v, r, w, а

$$\Theta_4(qr) \equiv L_1 qr + L_2 qw + L_3 rv + L_4 vw, \qquad (27)$$

т. е. эта функція Θ_4 равна билинейной функціи двухъ паръ перемѣнныхъ q, v; r, w.

Подставляя φ_{n-2} въ равенства (26), мы въ виду формулъ (24) и (25) убѣждаемся, что функціи Θ_1 и Θ_2 равны тождественно нулю, а потому

$$\varphi_{n-2} \equiv \Theta(p^2) + \Theta_3(q^2) + \Theta_5(r^2) + \Theta_4(qr).$$

Обозначимъ черезъ B операцію $\Theta_1 \dfrac{\partial}{\partial q} + V_1 \dfrac{\partial}{\partial v} + R_1 \dfrac{\partial}{\partial r} + W_1 \dfrac{\partial}{\partial w}$.

Разсмотримъ результатъ подстановки въ равенство (25) полинома φ_{n-2}; мы получаемъ

$$(n-1)B\{\Theta(p^2) + \Theta_3(q^2) + \Theta_5(r^2)\} + M_{11}P + M_{12}U + (n-1)B\Theta_4(qr) = 0.$$

Лѣвую часть этого тождества можно раздѣлить на двѣ части, въ которыхъ нѣтъ подобныхъ членовъ и которыя должны отдѣльно быть тождественно равны нулю, и потому имѣемъ:

$$(n-1)B\{\Theta + \Theta_3 + \Theta_5\} + M_{11}P + M_{12}U = 0.$$

$$Q_1 \frac{\partial \Theta_4(qr)}{\partial q} + V_1 \frac{\partial \Theta_4(qr)}{\partial v} + R_1 \frac{\partial \Theta_4(qr)}{\partial r} + W_1 \frac{\partial \Theta_4(qr)}{\partial w} = 0. \qquad (28)$$

Въ этомъ послѣднемъ тождествѣ опять подобные члены будутъ только въ первыхъ двухъ выраженіяхъ и въ двухъ послѣднихъ, а потому имѣемъ отдѣльно:

$$Q_1 \frac{\partial \Theta_4(qr)}{\partial q} + V_1 \frac{\partial \Theta_4(qr)}{\partial v} = 0\,,$$

$$R_1 \frac{\partial \Theta_4(qr)}{\partial r} + W_1 \frac{\partial \Theta_4(qr)}{\partial w} = 0\,.$$

Или, принимая во вниманіе равенство (27),

$$Q_1(L_1 r + L_2 w) + V_1(L_3 r + L_4 w) = 0\,,$$

$$R_1(L_1 q + L_3 v) + W_1(L_2 q + L_4 v) = 0\,.$$

Такъ какъ частныя $\frac{Q_1}{V_1}$ и $\frac{R_1}{W_1}$ на основаніи предыдущаго равенства (18) и (19), не могутъ быть независимыми отъ перемѣнныхъ q, v, r, w, то мы получимъ:

$$\begin{aligned} L_1 r + L_2 w &= \varrho_1 V_1 \\ L_3 r + L_4 w &= -\varrho_1 Q_1 \\ L_1 q + L_3 v &= \varrho_2 W_1 \\ L_2 q + L_4 v &= -\varrho_2 R_1 \end{aligned}$$

Умножая соотвѣтственно первыя два равенства на q, v, а послѣднія два на r, w, получаемъ:

$$\Theta_4(qr) = \varrho_1(V_1 q - Qv) = \varrho_2(W_1 r - R_1 w). \tag{29}$$

Очевидно по этому равенству, что отношеніе

$$\frac{Vq - Qv}{Wr - Rw}$$

не должно зависѣть отъ перемѣнныхъ q, v, r, w.

Коэффиціенты при qr въ числителѣ и въ знаменателѣ равны соотвѣтственно $l_{24}u$ и $l_{34}u$. Принимая во вниманіе значенія коэффиціентовъ l_{24} и l_{34}, мы получимъ

$$\frac{Vq - Qv}{Wr - Rw} = -\frac{b(a+c)}{c(a+b)}.$$

Это равенство должно уже быть тождествомъ при всѣхъ значеніяхъ перемѣнныхъ p, u, q, v, r, w, Изъ этого тождества, сравнивая коэффиціенты при членахъ uvw, pvw, мы выведемъ безъ труда, что либо $a = b = c$, либо $\beta = \gamma$, $b = c$. Но эти случаи приводятъ къ уже извѣстнымъ результатамъ.

Наши разсужденія останутся справедливыми только до тѣхъ подъ, пока въ равенствѣ (29) ϱ_1 или ϱ_2 не будутъ равны нулю; въ обратномъ же случаѣ функція $\Theta_4(qr)$ будетъ также равна нулю, и мы получаемъ:

$$\varphi_{n-2} \equiv \left(a\frac{\partial}{\partial p} + b_1\frac{\partial}{\partial u}\right)^{n-2}\varphi = \Theta(p^2) + \Theta_3(q^2) + \Theta_5(r^2), \tag{30}$$

т. е. поляра n—2-го порядка не заключаетъ въ себѣ членовъ линейныхъ относительно перемѣнныхъ двухъ различныхъ паръ изъ трехъ паръ перемѣнныхъ p, u; q, v; r, w.

Совершенно аналогичныя разсужденія приведутъ насъ къ такимъ формуламъ:

$$\left.\begin{aligned} \left(a_2\frac{\partial}{\partial q} + b_2\frac{\partial}{\partial v}\right)^{n-2}\varphi = \Theta_{10}(p^2) + \Theta_{13}(q^2) + \Theta_{15}(r^2) \\ \left(a_3\frac{\partial}{\partial r} + b_3\frac{\partial}{\partial w}\right)^{n-2}\varphi = \Theta_{20}(p^2) + \Theta_{23}(q^2) + \Theta_{25}(r^2). \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Этими формулами устанавливается общее свойство интеграла изучаемой системы въ видѣ полинома n-го порядка.

Всѣ его производныя n—2-го порядка по какой-нибудь изъ паръ перемѣнныхъ p, u; q, v; r, w представятъ собой сумму трехъ полиномовъ, зависящихъ каждый только отъ одной пары.

Полагая прежде всего $n = 2$, мы приходимъ къ заключенію, что интегралъ 2-го порядка можетъ имѣть только ту форму, которая изучена В. А. Стекловымъ.

Принимаемъ затѣмъ n=3. Формулы (30) и (31) показываютъ, что всѣ первыя производныя имѣютъ одинъ и тотъ же видъ. Члены, изъ которыхъ составленъ полиномъ φ, можно раздѣлить на три части; первую часть представятъ тѣ, которые составлены изъ перемѣнныхъ одной-какой нибудь пары перемѣнныхъ, напр. p^2u, вторую часть—тѣ, въ которые перемѣнныя одной пары входятъ во второмъ измѣреніи, а другой линейно, напр. puv, и, наконецъ, третью тѣ, которые линейны относительно перемѣнныхъ каждой пары, напр. pvr.

Члены второй и третьей части должны имѣть въ интегралѣ коэффиціентами нули, такъ какъ иначе въ производныя полинома φ вошли бы такіе члены, которыхъ не должно быть по формуламъ (30) и (31).

Такъ, если бы коэффиціенты при членахъ puv, pvr не были равны нулю, то въ производную $\dfrac{\partial\varphi}{\partial p}$ вошли бы члены uv, vr.

Слѣдовательно искомый интегралъ будетъ вида:

$$\varphi \equiv \vartheta_1(p^3) + \vartheta_2(q^3) + \vartheta_3(r^3), \tag{32}$$

гдѣ ϑ_i однородные полиномы третьяго порядка одной только пары перемѣнныхъ.

Перейдемъ теперь къ интегралу въ видѣ полинома 4-го порядка. Дѣлимъ всѣ его члены на двѣ части; первую составятъ члены четнаго измѣренія относительно каждой входящей пары перемѣнныхъ, наприм., членъ $puqv$, а вторую—члены, которые будутъ нечетнаго измѣренія по отношенію по крайней мѣрѣ къ одной парѣ перемѣнныхъ.

Коэффиціенты членовъ второй части должны равняться нулю, такъ какъ иначе во второй части формулъ (30) и (31) были бы не надлежащіе члены. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что членъ составленъ изъ перемѣнныхъ двухъ паръ; тогда перемѣнныя одной пары войдутъ въ третьемъ измѣреніи, напр. при существованіи члена pu^2w во вторую часть формулы (30) войдетъ при постоянной b_1 отличной отъ нуля по крайней мѣрѣ одинъ изъ членовъ pw, uw. Если же войдутъ перемѣнныя всѣхъ трехъ паръ, то одна пара войдетъ во второмъ измѣреніи; напр. при существованіи члена $puvr$ при постоянныхъ a_1, b_1 отличныхъ отъ нуля во вторую часть формулы (30) вошелъ бы членъ vr.

Итакъ интегралъ въ видѣ полинома четвертой степени будетъ имѣть такую форму:

$$\begin{aligned}\varphi = {} & Z_1(p^4) + Z_2(q^4) + Z_3(r^4) + Z_{11}(q^2)p^2 + Z_{12}(q^2)pu + Z_{13}(q^2)u^2 + \\ & + Z_{21}(q^2)r^2 + Z_{22}(q^2)rw + Z_{23}(q^2)w^2 + Z_{31}(r^2)p^2 + Z_{32}(r^2)pu + Z_{33}(r^2)u^2,\end{aligned} \tag{33}$$

гдѣ Z_i однородные полиномы четвертой степени, а Z_{ij} полиномы второй степени отъ соотвѣтственной пары перемѣнныхъ.

Перейдемъ теперь къ изслѣдованію полученныхъ результатовъ.

Начнемъ съ наиболѣе простого случая $n = 3$.

Обозначимъ операцію $P\dfrac{\partial}{\partial p} + Q\dfrac{\partial}{\partial q} + R\dfrac{\partial}{\partial r} + U\dfrac{\partial}{\partial u} + V\dfrac{\partial}{\partial v} + W\dfrac{\partial}{\partial w}$ черезъ X и получимъ для нашего случая по равенству (32)

$$X\varphi \equiv X\vartheta_1(p^3) + X\vartheta_2(q^3) + X\vartheta_3(r^3) \equiv 0. \tag{34}$$

Выраженія $X\vartheta_1(p^3)$, $X\vartheta_2(q^3)$ и $X\vartheta_3(r^3)$ будутъ второго измѣренія относительно перемѣнныхъ одной пары и линейны относительно перемѣнныхъ двухъ другихъ паръ; но такъ какъ они будутъ второго измѣренія, то въ первомъ изъ этихъ выраженій не можетъ быть членовъ, подобныхъ членамъ второго и третьяго выраженій, и во второмъ не можетъ быть членовъ, подобныхъ членамъ третьяго выраженія; а потому тождество (34) ведетъ къ тремъ такимъ тождествамъ:

$$X\vartheta_1(p^3) = 0$$

$$X\vartheta_2(q^3) = 0$$

$$X\vartheta_3(r^3) = 0$$

или

$$P\frac{\partial\vartheta_1(p^3)}{\partial p} + U\frac{\partial\vartheta_1(p^3)}{\partial u} = 0\,,$$

$$Q\frac{\partial\vartheta_2(q^3)}{\partial q} + V\frac{\partial\vartheta_2(q^3)}{\partial v} = 0$$

$$R\frac{\partial\vartheta_3(r^3)}{\partial r} + W\frac{\partial\vartheta_3(r^3)}{\partial w} = 0\,.$$

Сравнивая полученныя тождества съ тождествами (18) и (19), мы убѣждаемся, что они того же характера, какъ и послѣднія; и разсуждая точно также, мы убѣдимся въ существованіи четвертаго линейнаго интеграла. Мы приходимъ къ извѣстному ранѣе случаю.

Слѣдовательно *разсматриваемая система не имѣетъ самостоятельнаго интеграла въ видѣ полинома 3-ей степени.*

Сдѣлаемъ небольшое отступленіе для разысканія особенныхъ точекъ системы (2) (3). Можно написать ее въ такомъ видѣ:

$$\begin{aligned}
\frac{(a+b)(a+c)}{a}u' &= \begin{vmatrix} v-2q & (a+c)v \\ w-2r & (a+b)w \end{vmatrix} \\
\frac{(a+b)(b+c)}{b}v' &= \begin{vmatrix} w-2r & (a+b)w \\ u-2p & (b+c)u \end{vmatrix} \qquad (35) \\
\frac{(a+c)(b+c)}{c}w' &= \begin{vmatrix} u-2p & (b+c)u \\ v-2q & (a+c)v \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\alpha p' + \frac{(a+b)(a+c)}{a} u' = \begin{vmatrix} \beta q + \dfrac{(a+b)(b+c)}{b} vq \\ \gamma r + \dfrac{(a+c)(b+c)}{c} wr \end{vmatrix}$$

$$\beta p' + \frac{(a+b)(b+c)}{b} v' = \begin{vmatrix} \gamma r + \dfrac{(a+b)(b+c)}{c} wr \\ \alpha p + \dfrac{(a+b)(a+c)}{a} up \end{vmatrix} \qquad (36)$$

$$\gamma r' + \frac{(a+c)(b+c)}{a} w' = \begin{vmatrix} \alpha p + \dfrac{(a+b)(a+c)}{a} up \\ \beta q + \dfrac{(a+b)(b+c)}{b} vq \end{vmatrix}.$$

Для полученія величинъ, опредѣляющихъ особенныя точки, достаточно въ этихъ уравненіяхъ замѣнить производныя p', q', r', u', ,v', w', черезъ λp, λq, λr, λu, λv, λw. Остается разрѣшить полученныя алгебраическія уравненія.

Надо различать два случая: когда $\lambda = 0$ и когда λ не равно нулю.

Когда $\lambda = 0$, значенія перемѣнныхъ должны обратить въ нуль двѣ матриссы:

$$\begin{vmatrix} u - 2p & v - 2q & w - 2r \\ (b+c)u & (a+c)v & (a+b)w \end{vmatrix} = 0 \qquad (37)$$

$$\begin{vmatrix} \alpha p + \dfrac{(a+b)(a+c)}{a} u & \beta q + \dfrac{(a+b)(b+c)}{b} v & \gamma r + \dfrac{(a+b)(b+c)}{c} w \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0 \qquad (38)$$

Если между постоянными задачи нѣтъ особыхъ соотношеній, то мы имѣемъ прежде всего таблицу (15), которую мы использовали для полученія формы интеграла.

Затѣмъ, предполагая только одну пару перемѣнныхъ изъ трехъ паръ равными нулю, мы получаемъ вмѣсто (37) и (38) два опредѣлителя, которые дадутъ намъ отношенія перемѣнныхъ q, v, а также отношенія перемѣнныхъ r, w. Такимъ образомъ, если мы нашли особенную точку, опредѣляемую значеніями 0, 0, l_1, l_2, l_3, l_4, то и значенія 0, 0, $\varrho_1 l_1$, $\varrho_1 l_2$, $\varrho_2 l_3$, $\varrho_2 l_4$ при ϱ_1 или ϱ_2 совершенно произвольныхъ также удовлетворятъ уравненіямъ (37) и (38). Это показываетъ, что черезъ особенную точку 0, 0, l_1, l_2, l_3, l_4, проходитъ прямая особенныхъ точекъ.

$$\frac{p}{0}=\frac{u}{0}=\frac{q}{\varrho_1 l_1}=\frac{v}{\varrho_1 l_2}=\frac{r}{\varrho_2 l_1}=\frac{w}{\varrho_2 l_4} \tag{39}$$

Такихъ прямыхъ мы найдемъ еще пять, и слѣдовательно всѣ особенныя точки при $\lambda=0$ образуютъ девять прямыхъ, состоящихъ изъ особенныхъ точекъ.

Предполагаемъ теперь, что величина λ отлична отъ нуля.

Прежде всего покажемъ, что всякая особенная точка, отвѣчающая этому случаю, обращаетъ въ нуль интегралъ въ видѣ однороднаго полинома. Въ самомъ дѣлѣ, напишемъ выраженіе:

$$Z\equiv(P-\lambda p)\frac{\partial\varphi}{\partial p}+(Q-\lambda q)\frac{\partial\varphi}{\partial q}+(R-\lambda r)\frac{\partial\varphi}{\partial r}+(U-\lambda u)\frac{\partial\varphi}{\partial u}+(V-\lambda v)\frac{\partial\varphi}{\partial v}+(W-\lambda w)\frac{\partial\varphi}{\partial w}.$$

Предположимъ, что φ интегралъ въ видѣ однороднаго полинома порядка n. Тогда это выраженіе приводится къ такому:

$$-\lambda\left\{p\frac{\partial\varphi}{\partial p}+q\frac{\partial\varphi}{\partial q}+r\frac{\partial\varphi}{\partial r}+u\frac{\partial\varphi}{\partial u}+v\frac{\partial\varphi}{\partial v}+w\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right\}\equiv-\lambda n\varphi.$$

Выраженіе Z обратится въ нуль для особенной точки, у которой λ не нуль. Второй же видъ его покажетъ, что для этой точки обратится въ нуль самъ полиномъ.

Согласно этому сразу получаемъ три уравненія для разысканія особенныхъ точекъ этой группы. Для этого беремъ интегралы изъ таблицы (4) f_1, f_2, f_3 и приравниваемъ ихъ нулю:

$$f_1=0,\quad f_2=0,\quad f_3=0. \tag{40}$$

Предположимъ теперь, что въ равенствахъ (35) и (36) производныя u', v', w', p', q', r' замѣнены соотвѣтственно черезъ λu, λv, λw, λp, λq, λr.

Множимъ три равенства (35) соотвѣтственно на $(b+c)u$, $(a+c)v$, $(a+b)w$ и получаемъ вновь:

$$bcu^2+acv^2+abw^2\equiv f_1=0 \tag{41}$$

Затѣмъ множимъ ихъ же соотвѣтственно на $u-2p$, $v-2q$, $w-2r$ и получаемъ:

$$\frac{u^2-2up}{a(b+c)}+\frac{v^2-2vq}{b(a+c)}+\frac{w^2-2wr}{c(a+b)}\equiv\psi_1=0. \tag{42}$$

Тѣ же уравненія можно разсматривать, какъ линейныя и однородныя относительно перемѣнныхъ u, v, w. Исключеніе ихъ приведетъ къ такому уравненію, заключающему вводный параметръ λ:

$$\frac{\lambda^2}{abc}+\frac{1}{a}\left(\frac{u-2p}{b+c}\right)^2+\frac{1}{b}\left(\frac{v-2q}{a+c}\right)^2+\frac{1}{c}\left(\frac{w-2r}{a+b}\right)^2=0. \tag{43}$$

Тѣ же самые пріемы относительно равенствъ (36) дадутъ намъ три такихъ уравненія:

$$\begin{gathered}\left\{\alpha p+\frac{(a+b)(a+c)}{a}u\right\}^2+\left\{\beta q+\frac{(a+b)(b+c)}{b}v\right\}^2+\\+\left\{\gamma r+\frac{(a+c)(b+c)}{c}w\right\}^2\equiv f_3=0\end{gathered} \tag{44}$$

$$\begin{gathered}\alpha p^2+\beta q^2+\gamma r^2+(a+b)(a+c)(b+c)\\ \left\{\frac{pu}{a(b+c)}+\frac{qv}{b(a+c)}+\frac{rw}{c(a+b)}\right\}\equiv\psi_2=0\end{gathered} \tag{45}$$

$$\lambda^2+p^2+q^2+r^2=0. \tag{46}$$

Изъ трехъ равенствъ (45) (42) и (41) мы выводимъ

$$\psi_2+\frac{1}{2}(a+b)(a+c)(b+c)\psi_1-\frac{(ab+ac+bc)}{2abc}f_1\equiv f_2=0. \tag{47}$$

Исключая изъ уравненій (43) и (46) параметръ λ, мы получаемъ:

$$\frac{1}{a}\left(\frac{u-2p}{b+c}\right)^2+\frac{1}{b}\left(\frac{v-2q}{a+c}\right)^2+\frac{1}{c}\left(\frac{w-2r}{a+b}\right)^2-\frac{1}{abc}(p^2+q^2+r^2)\equiv\psi_3=0. \tag{48}$$

Искомыя особенныя точки будутъ опредѣляться пятью уравненіями (41), (42), (44), (47) и (48). Всякій полиномъ 2-го порядка, обращающійся въ нуль для этихъ точекъ, выразится такой формулой:

$$l_1f_1+l_2f_2+l_3f_3+l_4\psi_1+l_5\psi_3, \tag{49}$$

гдѣ l_i нѣкоторыя постоянныя.

Такъ какъ интегралъ въ видѣ полинома 2-го порядка обращается въ нуль для всѣхъ этихъ точекъ, то такой интегралъ имѣетъ форму выраженія (49), и слѣдовательно четвертый интегралъ будетъ имѣть форму $l_4\psi_1 + l_5\psi_3$. Остается только подставить его въ уравненіе (16), и приравнивая полученные коэффиціенты нулю, получаемъ уравненіе для опредѣленія отношенія параметровъ l_4 и l_5 и условія существованія этого интеграла.

Мы видимъ, что примѣненіе группы особенныхъ точекъ, для которыхъ λ не нуль, даетъ сразу форму четвертаго интеграла въ видѣ полинома 2-го порядка, зависящую только отъ одного произвольнаго параметра.

Точно также интегралъ φ въ видѣ полинома 4-го порядка, обращаясь въ нуль для этой группы особенныхъ точекъ, долженъ имѣть форму:

$$\varphi \equiv \psi_4 f_1 + \psi_5 f_2 + \psi_6 f_3 + \psi_7\psi_1 + \psi_8\psi_3. \tag{50}$$

Кромѣ того, сравнивая это выраженіе для интеграла съ найденнымъ ранѣе (33), мы убѣдимся безъ труда, что полиномы 2-го порядка ψ_4, ψ_5, ψ_6, ψ_7, ψ_8 будутъ всѣ имѣть форму (31), т. е. не будутъ обладать членами, въ которые входятъ произведенія изъ двухъ различныхъ паръ перемѣнныхъ p, u; q, v; r, w.

Можно это выраженіе изслѣдовать непосредственно, можно примѣнить къ его изслѣдованію особенныя точки первой группы, которыя опредѣляются величинами, заключающими произвольный параметръ.

Здѣсь я изложу частный пріемъ, который приведетъ къ цѣли гораздо скорѣе. При этомъ я не буду входить въ детали т. е. опущу здѣсь изложеніе провѣрки путемъ вычисленія тѣхъ условій, при которыхъ справедливы формы (49) и (50).

Всѣ функціи f_i, ψ_i, какъ уже замѣчено, одного и того же типа:

$$F \equiv L_1p^2 + L_2pu + L_3u^2 + L_4q^2 + L_5qv + L_6v^2 + L_7r^2 + L_8rw + L_9w^2. \tag{51}$$

Функція XF будетъ вида

$$M_1pqr + M_2pqw + M_3pvr + M_4uqr + M_5pvw + M_6uqw + M_7uvr + M_8uvw. \tag{52}$$

Коэффиціенты M_i будутъ линейными относительно коэффиціентовъ L_i и функція XF будетъ самаго общаго характера. Въ силу этого можно опредѣлить четыре функцін ψ_9, ψ_{10}, ψ_{11}, ψ_{12} такъ, чтобы эти функціи вмѣстѣ съ функціями f_1, f_2, f_3, ψ_1, ψ_3 образовали полную систему линейно независимыхъ функцій типа (51), и кромѣ того алгебраическія уравненія

$$X\psi_1 = 0,\ X\psi_3 = 0,\ X\psi_9 = 0,\ X\psi_{10} = 0,\ X\psi_{11} = 0,\ X\psi_{12} = 0 \tag{53}$$

не имѣли бы вовсе общихъ рѣшеній, кромѣ очевидныхъ $p = u = 0$, $q = v = 0$, $r = w = 0$.

Послѣднее возможно всегда, разъ только между функціями $X\psi_1$ и $X\psi_3$ нѣтъ линейнаго соотношенія вида

$$l_4 X\psi_1 + l_5 X\psi_3 \equiv 0\,;$$

но это указывало бы, что существуетъ четвертый интегралъ $l_4\psi_1 + l_5\psi_3$, представляющій собой полиномъ второй степени.

Согласно нашему предположенію мы можемъ выразить функціи $\psi_4, \psi_5, \psi_6, \psi_7, \psi_8$, черезъ девять функцій $f_1, f_2, f_3, \psi_1, \psi_9, \psi_3, \psi_{10}, \psi_{11}, \psi_{12}$; такимъ образомъ

$$\psi_i = N_{i1}f_1 + N_{i2}f_2 + N_{i3}f_3 + N_{i4}\psi_1 + N_{i5}\psi_3 + N_{i6}\psi_9 + N_{i7}\psi_{10} + N_{i8}\psi_{11} + N_{i6}\psi_{12}$$
$$i = 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8.$$

Подставляя эти выраженія въ форму (50) и отбрасывая произведенія $f_i\, f_j$, такъ какъ отъ этого все выраженіе φ не перестаетъ быть интеграломъ, получаемъ для нашего интеграла такое выраженіе:

$$\begin{aligned}\varphi \equiv \psi_1\{(N_{44}+N_{71})f_1 + (N_{54}+N_{72})f_2 + (N_{64}+N_{73})f_3 + N_{74}\psi_1 + (N_{84}+N_{75})\psi_3\} + \\ + \psi_3\{(N_{45}+N_{81})f_1 + (N_{55}+N_{82})f_2 + (N_{75}+N_{83})f_3 + N_{85}\psi_3\} + \\ + \sum_{i=1}^{4}\psi_{8+i}\{N_{4,5+i}f_i + N_{5,5+i}f_2 + N_{6,5+i}f_3 + N_{7,6+i}\psi_1 + N_{8,5+i}\psi_3\}.\end{aligned}$$

Обозначивъ для краткости коэффиціенты при функціяхъ $\psi_1, \psi_3, \psi_9, \psi_{10}, \psi_{11}, \psi_{12}$ соотвѣтственно черезъ $\varphi_1, \varphi_3, \varphi_9, \varphi_{10}, \varphi_{11}, \varphi_{12}$, получимъ:

$$\varphi = \psi_1\varphi_1 + \psi_3\varphi_3 + \psi_9\varphi_9 + \psi_{10}\varphi_{10} + \psi_{11}\varphi_{11} + \psi_{12}\varphi_{12}.$$

Такъ какъ φ, f_1, f_2, f_3 интегралы, то, примѣняя операцію X, мы получимъ:

$$\begin{aligned}X\varphi \equiv \left(\varphi_1 + N_{74}\psi_1 + \sum_{i=1}^{4} N_{7,5+i}\,\psi_{8+i}\right) X\psi_1 + \\ + \left(\varphi_3 + N_{75}\psi_1 + N_{85}\psi_3 + \sum_{i=1}^{4} N_{8,5+i}\,\psi_{8+i}\right) X\psi_3 + \\ + \varphi_9 X\psi_9 + \varphi_{10}X\psi_{10} + \varphi_{11}X\psi_{11} + \varphi_{12}X\psi_{12} \equiv 0.\end{aligned}$$

Полученное тождество типа

$$A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + A_4B_4 + A_5B_5 + A_6B_6 = 0\,,$$

гдѣ A_i и B_i однородные полиномы шести перемѣнныхъ, причемъ полиномы A_i 2-го порядка а B_i третьяго. Изучая нули этихъ полиномовъ, приходимъ къ заключенію, что полиномы A_i должны равняться нулю, и слѣдовательно

$$\varphi_9 = \varphi_{10} = \varphi_{11} = \varphi_{12} = 0.$$

Интегралъ φ пріобрѣтаетъ благодаря этому болѣе простой видъ

$$\varphi = \psi_1\varphi_1 + \psi_3\varphi_3,$$

т. е. четвертый интегралъ въ видѣ полинома четвертаго порядка выражается черезъ тѣ пять функцій, которыя мы встрѣтили при опредѣленіи особенныхъ точекъ 2-ой группы.

Изученіе такого выраженія очень просто и приводитъ къ заключенію, что эта форма не можетъ дать новаго интеграла, если его не даетъ форма $l_4\psi_1 + l_5\psi_3$.

Итакъ полиномы ни третьей степени, ни четвертой не даютъ самостоятельнаго четвертаго интеграла.

Изслѣдованіе полиномовъ высшихъ степеней можно вести по тому же плану, и, такъ какъ трудно ожидать встрѣтить при этомъ новый факторъ, благопріятствующій существованію новаго четвертаго интеграла въ видѣ полинома, то существуетъ большая вѣроятность, что среди полиномовъ высшихъ степеней нѣтъ новыхъ интеграловъ по отношенію къ уже извѣстнымъ.

При изложеніи настоящей работы я обратилъ главное вниманіе на примѣненіе метода полярныхъ операцій въ опредѣленіи интеграловъ даннаго вида, и вывожу формы интеграловъ и ихъ поляръ по отношенію къ особеннымъ точкамъ, опредѣляемыя формулами (20), (21), (22), (30), (31), (32) и (33).

Во второй части я примѣняю частные пріемы и потому не излагаю ихъ со всей подробностью, а лишь настолько, чтобы была дана желающему возможность провѣрить вычисленіемъ мои разсужденія.