Sur un problème hydrodynamique de Bjerknes.

A. Friedmann et M. Peteline.

Soient deux sphères Σ, Σ' dans un liquide incompressible sans frottement, dont les centres O, O' sont fixes et dont les volumes varient suivant une loi quelconque.

Désignons par r la distance OO', par x, y les volumes des sphères Σ, Σ', par ϱ la densité de liquide. Soit $F(F')$ l'action que la sphère $\Sigma'(\Sigma)$ exerce sur $\Sigma(\Sigma')$. Cette action est dirigée suivant la ligne OO'. Si l'on suppose l'action $F(F')$ comptée positivement, quand elle est dirigée de $O(O')$ vers $O'(O)$ et négativement dans le cas contraire, l'action est représentée en grandeur et en signe par les formules:

$$F = -\frac{\varrho}{8\pi r^2}\left[3\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt}\right) - 2\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}\right],$$

$$F' = -\frac{\varrho}{8\pi r^2}\left[3\frac{d}{dt}\left(y\frac{dx}{dt}\right) - 2\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}\right],$$

r est supposé très grand par rapport aux dimensions des sphères [1]).

Si la loi de la variation des volumes x, y est celle des vibrations harmoniques, l'action mutuelle *moyenne* des deux sphères Σ, Σ' est en raison inverse du carré de la distance, c'est à dire correspond à la loi de Newton [2]).

Nous nous proposons de résoudre le problème suivant:

Déterminer la loi des variations des volumes de deux sphères de telle manière que l'action mutuelle de ces sphères soit en raison inverse du carré de la distance à chaque instant donné.

---

1) Voir: Bjerknes. Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte. 1900.

2) Жуковскiй. Лекцiи по гидродинамикѣ.

Le problème proposé se ramène évidemment à l'intégration du système d'équations différentielles suivant

$$\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} - \frac{3}{2}\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt}\right) = c, \tag{A}$$

$$\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} - \frac{3}{2}\frac{d}{dt}\left(y\frac{dx}{dt}\right) = c, \tag{B}$$

c désignant une constante, positive dans le cas d'attraction, négative dans le cas de répulsion.

§ 1.

Les équations (A), (B) peuvent s'écrire sous la forme:

$$x'' = -\frac{x'y' + 2c}{3y}. \tag{1}$$

$$y'' = -\frac{x'y' + 2c}{3x}. \tag{2}$$

Ces équations admettent une intégrale première

$$xy' - yx' = a, \tag{3}$$

a étant une constante arbitraire; on peut toujours supposer $a \geqq 0$.

En multipliant respectivement par y', x' les équations (1), (2) et les ajoutant, on aura

$$y'x'' + x'y'' = -\frac{x'y' + 2c}{3}\left(\frac{y'}{y} + \frac{x'}{x}\right),$$

d'où il résulte

$$3\frac{d\lg(x'y' + 2c)}{dt} + \frac{d\lg xy}{dt} = 0,$$

on aura donc en intégrant

$$xy(x'y' + 2c)^3 = b^3, \tag{4}$$

b désignant une constante arbitraire.

En résolvant les équations (3), (4) par rapport à x', y' et substituant les valeurs trouvées

$$x' = \frac{\varepsilon R - a}{2y}, \quad y' = \frac{\varepsilon R + a}{2x},$$

où

$$\varepsilon = \pm 1, \quad R = \sqrt{a^2 - 8cxy + 4b(xy)^{2/3}},$$

dans l'équation

$$y'dx - x'dy = 0,$$

on obtient une équation différentielle entre x et y

$$\frac{\varepsilon R + a}{x} dx - \frac{\varepsilon R - a}{y} dy = 0$$

qui peut être mise encore sous la forme:

$$d \lg \frac{y}{x} = \frac{3adu}{\varepsilon u \sqrt{P(u)}}, \tag{5}$$

en posant

$$xy = u^3, \quad P(u) = a^2 + 4bu^2 - 8cu^3.$$

On trouve aussi sans peine une équation différentielle entre t et u. On a, en effet,

$$xy' + yx' = \frac{d}{dt}(xy) = \varepsilon R,$$

d'où il suit

$$dt = \frac{3\varepsilon u^2 du}{\sqrt{P(u)}}. \tag{6}$$

Soit u_0 la valeur initiale de u. On doit prendre dans les formules précédentes $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$, suivant que u croît ou décroît à partir de $u = u_0$; ε ne peut changer de signe que pour les valeurs de u, pour lesquelles $\frac{du}{dt}$ s'annule ou devient infini. Les quantités x, y étant essentiellement positives, il en est de même de u; de plus, les équations (5), (6) montrent que u ne peut pas sortir de l'intervalle dans lequel $P(u)$ est positif, car les premiers membres de ces équations sont réels. Si l'on désigne par τ, x_0, y_0 les valeurs de t, x, y correspondant à $u = u_0$, et si l'on pose

$$\varphi(u) = \varepsilon \int_{u_0}^{u} \frac{3du}{u\sqrt{P(u)}}$$

on aura, en vertu des équations (5), (6), les expressions suivantes de t, x, y en fonction de u:

$$\left.\begin{aligned} t - \tau &= \varepsilon \int_{u_0}^{u} \frac{3u^2 du}{\sqrt{P(u)}} \\ x^2 = \frac{x_0}{y_0} u^3 e^{-a\varphi(u)}, &\quad y^2 = \frac{y_0}{x_0} u^3 e^{a\varphi(u)} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

pour tout intervalle de la variable positive u, dans lequel ε ne change pas de signe et $P(u)$ reste positif, u_0 étant compris dans le meme intervalle.

Examinons maintenant les divers cas du problème proposé.

§ 2.

Considérons d'abord le cas où l'équation $P(u)=0$ a ses trois racines réelles inégales. Dans ce cas on doit avoir

$$\triangle = 4b^3 + 27a^2c^2 < 0.$$

Il s'ensuit de là

$$b < 0.$$

On s'assure facilement que le polynome $P(u)$ a une racine positive et deux racines négatives dans le cas $c>0$, une racine négative et deux racines positives dans le cas $c<0$. Il suffit, pour le voir, de substituer à u la suite

$$\frac{b}{2c},\ \frac{b}{3c},\ 0,\ \infty,$$

si $c>0$ et la suite

$$-\infty,\ 0, \frac{b}{3c},\ \frac{b}{2c},$$

si $c<0$. On aura pour $P(u)$ les valeurs successives

$$a^2,\ \frac{\triangle}{27c^2},\ a^2,\ -\infty$$

dans le cas $c>0$, et

$$-\infty,\ a^2,\ \frac{\triangle}{27c^2},\ a^2$$

dans le cas $c<0$.

Soit d'abord $c>0$. On peut mettre $P(u)$ sous la forme

$$P(u) = -8c(u-u_1)(u+u_2)(u+u_3),$$

u_1, u_2, u_3, étant positifs. On voit que u doit être compris dans l'intervalle $(0, u_1)$.

Supposons, pour fixer les idées, que u aille en croissant à partir de $u=u_0$; il faudra prendre $\varepsilon=+1$ dans la formule (6); u croîtra jusqu'à la valeur $u=u_1$; on aura $\left(\frac{du}{dt}\right)_{u=u_1}=0$; u devra décroître à partir de $u=u_1$ et l'on prendra $\varepsilon=-1$; en décroissant u atteindra la valeur $u=0$, où l'on aura $\left(\frac{du}{dt}\right)_{u=0}=-\infty$; à partir de $u=0$, u devra croître et l'on prendra $\varepsilon = +1$ et ainsi de suite. Le temps qu'il faut à u pour parcourir de 0 à u_1 ou de u_1 à 0 est égal à

$$T = \int_0^{u_1} \frac{3u^2 du}{\sqrt{P(u)}}.$$

Les considérations qui précèdent nous montrent que u est une fonction périodique, ayant la période $2T$.

Soit $t=0$ la valeur de t pour laquelle $u=0$. On aura alors $u=0$ pour $t=2T$, $4T, \ldots$

Il est évident qu'on peut déterminer les fonctions x, y satisfaisant aux équations (1), (2) et continues dans l'intervalle $(0, 2T)$.

Nous allons démontrer la proposition suivante:

Il n'existe pas des fonctions x, y de t, satisfaisant aux équations (1), (2) et continues dans l'intervalle renfermant une valeur de t pour laquelle $u=0$.

Considérons, pour fixer les idées, l'intervalle $(T, 3T)$. Soient τ, τ' deux valeurs de t suffisamment voisines de $2T$ et telles que

$$T < \tau < 2T, \quad 2T < \tau' < 3T.$$

Soient u_0, u_0', x_0, x_0', y_0, y_0' les valeurs de u, x, y correspondant respectivement á $t=\tau$, $t=\tau'$.

Les formules (7) nous donnent

$$x^2 = \frac{x_0}{y_0} u^3 e^{-a\varphi(u)}, \quad y^2 = \frac{y_0}{x_0} u^3 e^{a\varphi(u)},$$

$$\varphi(u) = -\int_{u_0}^{u} \frac{3du}{u\sqrt{P(u)}}$$

pour l'intervalle $(T, 2T)$;

$$x^2 = \frac{x_0'}{y_0'} u^3 e^{-a\varphi_1(u)}, \quad y^2 = \frac{y_0'}{x_0'} u^3 e^{a\varphi_1(u)},$$

$$\varphi_1(u) = \int_{u_0'}^{u} \frac{3du}{u\sqrt{P(u)}}$$

pour l'intervalle $(2T, 3T)$.

Considérons les limites vers lesquelles tend x^2, lorsque t tend vers $2T$ par des valeurs croissantes ou décroissantes. On a, dans le voisinage de $u=0$,

$$\frac{3}{u\sqrt{P(u)}} = \frac{3}{a} \cdot \frac{1}{u} + \alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \ldots$$

Il en suit

$$\varphi(u) = \frac{3}{a} \lg \frac{u_0}{u} - \alpha_0 (u - u_0) - \ldots,$$

$$\varphi_1(u) = \frac{3}{a} \lg \frac{u}{u_0'} + \alpha_0 (u - u_0') + \ldots,$$

d'où

$$x^2 = \frac{x_0}{y_0 u_0^3} u^6 F(u),$$

dans l'intervalle $(T, 2T)$.

$$x^2 = \frac{x_0' u_0'^3}{y_0'} F_1(u),$$

dans l'intervalle $(2T, 3T)$.

Les fonctions F, F_1 sont holomorphes dans le voisinage de $u=0$, et ne s'annulent pas au point $u=0$.

En remarquant que $\lim\limits_{t=2T} u = 0$, on a:

$$\lim_{t=2T-0} x^2 = 0, \quad \lim_{t=2T+0} x^2 = \frac{x_0' u_0'^3}{y_0'} F_1(0).$$

On voit ainsi que ces deux limites sont toujours différentes. On s'assure de la même manière que $\lim\limits_{t=2T-0} y$ est diffèrent de $\lim\limits_{t=2T+0} y$

Dans le cas $c<0$, $P(u)$ peut s'écrire:

$$P(u) = -8c(u-u_1)(u-u_2)(u+u_3),$$

u_1, u_2, u_3 étant positifs. Soit $u_1 > u_2$. La variable u peut être comprise dans l'intervalle $(0, u_2)$ ou bien dans l'intervalle (u_1, ∞). Si u est dans l'intervalle $(0, u_2)$ nous avons le cas absolument semblable à celui que nous venons de considérer. Considérons le cas où la variable u est comprise dans l'intervalle (u, ∞). Supposons que la valeur initiale de $\frac{du}{dt}$ soit négative; u ira en décroissant à partir de $u=u_0$ et atteindra la valeur $u=u_1$; à partir de cette valeur u croitra continuellement; l'expression de t [form. (7)] nous prouve que $\lim\limits_{t=\infty} u = \infty$.

Soient τ, τ_1 les valeurs de t correspondant respectivement à $u=u_0$, $u=u_1$. On peut construire deux fonctions x, y satisfaisant aux équations (1), (2) et continues dans tout l'intervalle (τ, ∞). Il suffit pour cela de déterminer x, y par les formules

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= \frac{x_0}{y_0} u^3 e^{-a\varphi(u)}, \quad y^2 = \frac{y_0}{x_0} u^3 e^{a\varphi(u)}, \\ \varphi(u) &= -\int_{u_0}^{u} \frac{3du}{u\sqrt{P(u)}} \\ &\text{dans l'intervalle } (\tau, \tau_1), \end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= \frac{x_1}{y_1} u^3 e^{-a\varphi_1(u)}, \quad y^2 = \frac{y_1}{x_1} u^3 e^{a\varphi_1(u)} \\ \varphi_1(u) &= \int_{u_1}^{u} \frac{3du}{u\sqrt{P(u)}} \\ &\text{dans l'intervalle } (\tau_1, \infty). \end{aligned}\right\} \quad (\beta)$$

Dans les formules (β) il faut prendre pour x_1, y_1, les limites vers lesquelles tendent x, y, déterminées par les formules (α), lorsque u tend vers u_1.

L'expression $\varphi_1(\infty)$ ayant un sens déterminé, on voit immédiatement que

$$\lim_{t=\infty} x = \lim_{t=\infty} y = \infty.$$

Si l'on suppose la valeur initiale de $\frac{du}{dt}$ positive, on obtiendra les mêmes résultats.

§ 3.

Considerons le cas où l'équation $P(u)=0$ a une seule racine réelle. On doit avoir dans ce cas

$$\triangle = 4b^3 + 27a^2c^2 > 0.$$

Soit d'abord $c>0$. On trouve sans peine que la racine réelle u_1 de $P(u)$ est positive. On peut écrire

$$P(u) = -8c(u-u_1)P_1(u), \quad P_1(u)>0,$$

d'où il suit que u doit varier dans l'intervalle $(0, u_1)$ et nous avons le cas semblable au premier cas du § 2.

Si $c<0$, on obtiendra de même

$$P(u) = -8c(u+u_1)P_1(u), \quad P_1(u)>0, \quad u_1>0.$$

La variable u doit varier dans l'intervalle $(0, \infty)$.

Si la valeur initiale de $\frac{du}{dt}$ est négative, u décroîtra de $u = u_0$ jusqu'à la valeur $u = 0$; à partir de cette valeur u croîtra à l'infini. En raisonnant comme dans le premier cas du § 2, on démontrera qu'il n'existe pas des fonctions x, y, satisfaisant aux équations (1), (2) et continues dans l'intervalle renfermant la valeur de t pour laquelle $u = 0$.

Si la valeur initiale de $\frac{du}{dt}$ est positive, u croitra de u_0 à l'infini. Il existe dans ce cas des fonctions x, y continues dans tout l'intervalle (τ, ∞). On aura

$$\lim_{t=\infty} x = \lim_{t=\infty} y = \infty.$$

Dans tous les cas considérés on peut obtenir sans peine les expressions de t, x, y par les fonctions elliptiques d'un paramètre auxiliaire v pour tout intervalle dans lequel $\frac{du}{dt}$ ne change pas de signe.

§ 4.

Passons au cas où l'on a

$$a \neq 0, \quad 4b^3 + 27a^2c^2 = 0$$

et, par suite

$$b < 0$$

On a dans ce cas

$$P(u) = -8c(u - u_1)^2 (u - u_2),$$

où

$$u_1 = \frac{b}{3c}, \quad u_2 = -\frac{b}{6c}.$$

Si $c > 0$, on a $u_1 < 0$, $u_2 > 0$. Pour que $\sqrt{P(u)}$ soit réel, la variable u doit rester dans l'intervalle $(0, u_2)$. Nous aurons donc le cas tout à fait analogue au premier cas du § 2.

Soit $c < 0$; on a alors $u_1 > 0$, $u_2 < 0$. La variable u doit etre comprise dans l'intervalle $(0, \infty)$.

Supposons la valeur initiale de $\frac{du}{dt}$ positive. Soit d'abord $u_0 > u_1$; u croitra constamment avec t au delà de toute limite. Ce cas est semblable au dernier cas du § 3. Soit $u_0 < u_1$. L'expression de t:

$$t - \tau = \int_{u_0}^{u} \frac{3u^2 du}{|u - u_1| \sqrt{-8c(u - u_2)}}$$

nous montre que

$$\lim_{u=u_1} t = \infty,$$

d'où il suit que la variable u ne peut pas sortir de l'intervalle (u_0, u_1). Les fonctions x, y sont évidemment continues dans tout l'intervalle (τ, ∞). La fonction $\varphi(u)$ étant de la forme

$$\varphi(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{3du}{u(u_1 - u)\sqrt{-8c(u-u_2)}}$$

on en conclut

$$\lim_{t=\infty} \varphi(u) = \infty, \quad \lim_{t=\infty} x = 0, \quad \lim_{t=\infty} y = \infty.$$

Supposons maintenant la valeur initiale de $\frac{du}{dt}$ négative. Soit $u_0 > u_1$. L'expression de t:

$$t - \tau = -\int_{u_0}^{u} \frac{3u^2du}{|u-u_1|\sqrt{-8c(u-u_1)}} = \int_{u}^{u_0} \frac{3u^2du}{|u-u_1|\sqrt{-8c(u-u_2)}}, \quad (u < u_0)$$

nous montre que

$$\lim_{u=u_1} t = \infty.$$

On obtient comme dans le cas précédent que x, y sont continues dans tout l'intervalle (τ, ∞) et que

$$\lim_{t=\infty} x = 0, \quad \lim_{t=\infty} y = \infty.$$

Soit $u_0 < u_1$; la variable u décroîtra à partir de $u = u_0$ jusqu'à la valeur $u = 0$; à partir de $u = 0$, u croîtra et atteindra la valeur $u = u_1$, pour $t = \infty$. Ce cas est analogue à l'un des cas du § 3.

§ 5.

Considérons maintenant le cas $a = 0$ que nous avons laissé de côté. L'équation (3) nous donne pour $a = 0$:

$$y = \alpha^3 x,$$

α désignant une constante arbitraire positive.

L'équation (4) se réduit à

$$\alpha^3 x^2 (\alpha^3 x'^2 + 2c)^3 = b^3,$$

d'où l'on tire

$$dt = \varepsilon \frac{3\alpha\sqrt{\alpha}}{2} \cdot \frac{zdz}{\sqrt{2c(z_1 - z)}},$$

en posant

$$\varepsilon = \pm 1, \quad z = x^{2/3}, \quad z_1 = \frac{b}{2c\alpha}.$$

Soit $c > 0$. On a alors $b > 0$, $z_1 > 0$. Pour que $\frac{dz}{dt}$ soit réel il faut que z soit compris dans l'intervalle $(0, z_1)$. On trouvera facilement que z, et par suite x et y, sont des fonctions périodiques de t, dont la démi-période est égale à

$$T = {}^3/_2 . \frac{\alpha \sqrt{\alpha}}{\sqrt{2c}} \int_0^{z_1} \frac{z dz}{\sqrt{z_1 - z}} = \frac{b\sqrt{b}}{2c^2}.$$

Soit $z=0$ pour $t=0$. Les quantités t, z sont liées alors par la relation

$$t = \frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{2c} [2z_1\sqrt{z_1} - (z + 2z_1)\sqrt{z_1 - z}],$$

si t varie dans l'intervalle $(0, T)$, et par la relation

$$t = T + \frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2c}} (z + 2z_1)\sqrt{z_1 - z} = \frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{2c} (2z_1\sqrt{z_1} + (z + 2z_1)\sqrt{z_1 - z}),$$

si t varie dans l'intervalle $(T, 2T)$.

Si $c < 0$, on trouvera sans peine que z, et par suite x, y sont continues dans tout l'intervalle (τ, ∞) et que

$$\lim_{t=\infty} z = \lim_{t=\infty} x = \lim_{t=\infty} y = \infty.$$

L'analyse précédente nous montre que l'on peut diviser tous les cas possibles en trois groupes.

1. Les fonctions x, y correspondant à notre problème ne sont pas continues dans tout l'intervalle de la variation de t.

2. Les fonctions x, y sont continues, mais l'une d'elles au moins, peut dépasser toute limite donnée à l'avance.

3. Dans le cas $a=0$, $c>0$ et dans ce cas seulement, les fonctions x, y de t sont bornées, continues et périodiques. Dans le cas considéré les sphères Σ, Σ' s'attirent suivant la loi de Newton et leurs volumes x, y conservent le rapport constant.