# Объ абсолютной сходимости тригонометрическихъ рядовъ.

*С. Бернштейна.*

1. Какъ извѣстно, сходимость тригонометрическаго ряда Фурье

$$f(x)=a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+\ldots+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\ldots \tag{1}$$

для всѣхъ значеній перемѣнной $x$ отнюдь не влечетъ за собою абсолютную сходимость ряда, или, что тоже самое, не является достаточной для сходимости ряда

$$S=|a_0|+|a_1|+|b_1|+\ldots+|a_n|+|b_n|+\ldots \tag{2}$$

Однако абсолютная сходимость (т. е. сходимость ряда $S$) имѣетъ мѣсто для широкаго класса функцій. А именно, мы докажемъ такую теорему:

*Если функція $f(x)$ удовлетворяетъ условію Липшица*

$$|f(x+h)-f(x)|<kh^{\alpha}$$

*степени $\alpha>\frac{1}{2}$, то ея разложеніе въ тригонометрическій рядъ сходится абсолютно; напротивъ, если $\alpha<\frac{1}{2}$, сходимость тригонометрическаго ряда можетъ не быть абсолютной.*

Для доказательства первой части теоремы, мы припомнимъ вопервыхъ результатъ, доказанный впервые Lebesgu'емъ, что для функціи $f(x)$, удовлетворяющей условію Липшица степени $\alpha$, можно указать независимый отъ $m$ коэффиціентъ $\lambda$ такой, что остатокъ ея строки Фурье

$$\left|\sum_{n=m}^{n=\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx\right|=\left|R_m(x)\right|<\frac{\lambda\log m}{m^{\alpha}} \qquad (m>1) \tag{3}$$

Кромѣ того, намъ понадобится слѣдующая лемма:

*Пусть тригонометрическая сумма*

$$P(x)=A_1\cos k_1x+A_2\cos k_2x+\ldots A_h\cos k_hx+A_{h+1}\sin k_{h+1}x+\ldots A_n\sin k_nx_i\,,$$

*состоящая изъ $n$ членовъ, гдѣ $k_1, k_2,\ldots$ какія угодно цѣлыя числа, остается по численному значенію менѣе 1, т. е. $|P_n(x)|<1$, въ такомъ случаѣ*

$$|A_1|+|A_2|+\ldots+|A_n|<\sqrt{2n}. \tag{4}$$

Въ самомъ дѣлѣ,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P_n^2(x)\,dx = A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_n^2 < 2.$$

Но, если $A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_n^2 = M$, то $|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$ достигаетъ своего наибольшаго значенія, когда $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$, т. е. не превышаетъ $n\sqrt{\frac{M}{n}} = \sqrt{Mn}$. Поэтому въ данномъ случаѣ

$$|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| < \sqrt{2n}.$$

Соединяя эти два результата, получимъ первую часть нашей теоремы. Для этого группируемъ члены нашего ряда Фурье такимъ образомъ:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=m} a_n \cos nx + b_n \sin nx + \sum_{n=2m+1}^{n=2m} a_n \cos nx + b_n \sin nx +$$
$$+ \sum_{n+2m+1}^{n=4m} a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots,$$

гдѣ $m$ произвольное цѣлое число (напр., $m=2$). Тогда, вслѣдствіе неравенства (3),

$$\left|\sum_{n=2m+1}^{n=2m} a_n \cos nx + b_n \sin nx\right| \leqq \left|\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx\right| +$$
$$+ \left|\sum_{n=2m+1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx\right| < \frac{2\lambda \log m}{m^\alpha},$$
$$\left|\sum_{n=2m+1}^{n=4m} a_n \cos nx + b_n \sin nx\right| < \frac{2\lambda \log 2m}{(2m)^\alpha} \text{ и т. д.}$$

Поэтому на основаніи доказанной леммы,

$$\sum_{n=m+1}^{n=2m} |a_n| + |b_n| < \frac{4\lambda \log m}{m^{\alpha-\frac{1}{2}}}, \quad \sum_{n=2m+1}^{n=4m} |a_n| + |b_n| < \frac{4\lambda \log 2m}{(2m)^{\alpha-\frac{1}{2}}} \text{ и т. д.,}$$

откуда

$$\sum_{n=m+1}^{n=\infty} |a_n| + |b_n| < \frac{4\lambda}{m^{\alpha-\frac{1}{2}}}\left[\log m + \frac{\log 2m}{2^{\alpha-\frac{1}{2}}} + \frac{\log 4m}{4^{\alpha-\frac{1}{2}}} + \ldots\right] =$$
$$= \frac{4\lambda}{m^{\alpha-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{2^{\alpha-\frac{1}{2}}}\right)}\left[\log m + \frac{\log 2}{2^{\alpha-\frac{1}{2}} - 1}\right].$$

Такимъ образомъ первая часть теоремы доказана.

2. Для доказательства второй части нашего утвержденія, очевидно, достаточно построить функціи $f(x)$, удовлетворяющія условію Липшица

степени $\alpha < \frac{1}{2}$, сколь угодно близкой къ $\frac{1}{2}$, для которыхъ однако рядъ Фурье абсолютно *не* сходится.

Съ этой цѣлью, для всякаго простого числа $p > 2$, строимъ тригонометрическую сумму порядка $p-1$

$$f_p(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x + \ldots + a_{p-1}\cos(p-1)x + b_{p-1}\sin(p-1)x, \quad (5)$$

опредѣляемую условіями, что $f_p\left(\frac{2k\pi}{p}\right) = \left(\frac{k}{p}\right)$, $f_p'\left(\frac{2k\pi}{p}\right) = 0$, при $x=0, 1, \ldots p-1$, гдѣ $\left(\frac{k}{p}\right)$ есть символъ Лежандра, равный $+1$ или $-1$, въ зависимости отъ того, является ли число $k$ квадратичнымъ вычетомъ $p$ или нѣтъ [при $k=0$, символъ $\left(\frac{k}{p}\right) = 0$]. Эту сумму мы получимъ воспользовавшись формулой Jackson'a:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{k=p-1} f\left(\frac{2k\pi}{p}\right) \frac{\sin^2\left[\frac{1}{2}p\left(x - \frac{2k\pi}{p}\right)\right]}{p^2\sin^2\left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{2k\pi}{p}\right)\right]} = \quad (6)$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x + \ldots + a_{p-1}\cos(p-1)x + b_{p-1}\sin(p-x)x,$$

гдѣ

$$a_l = \frac{2(p-b)}{p^2}\sum_{k=0}^{k=p-1} f\left(\frac{2k\pi}{p}\right)\cos\frac{2kl\pi}{p}, \quad b_l = \frac{2(p-l)}{p^2}\sum_{k=0}^{k=p-1} f\left(\frac{2k\pi}{p}\right)\sin\frac{2kl\pi}{p}.$$

Jackson [1]) приходитъ къ этой весьма интересной формулѣ, исходя изъ разсмотрѣнія интеграла Fejer'a, и замѣчаетъ, что, при $k=0, 1, \ldots p-1$, $F\left(\frac{2k\pi}{p}\right) = f\left(\frac{2k\pi}{p}\right)$. Но эти $p$ равенствъ были бы недостаточны для опредѣленія $(2p-1)$ коэффиціентовъ $a_l$, $b_l$, еслибы функція $F(x)$ не обладала еще важнымъ свойствомъ, которое нетрудно провѣрить, а именно, $F'\left(\frac{2k\pi}{p}\right) = 0$, (при $k=0, 1, \ldots p-1$); это доставляетъ еще $(p-1)$ условія, которыя связываютъ $a_l$ и $b_l$ равенствами $la - (p-l)a_{p-l} = 0$, $lb_l + (p-l)b_{p-l} = 0$.

Такимъ образомъ формула Jackson'a есть не что иное, какъ точная интерполяціонная формула для опредѣленія тригонометрической суммы

---

[1]) *Jackson.* A formula of trigonometric interpolation. (Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo, 1914).

$F(x)$ порядка $(p-1)$ по условіямъ $F\left(\frac{2k\pi}{p}\right)=f\left(\frac{2k\pi}{p}\right)$, $F'\left(\frac{2k\pi}{p}\right)=0$.
Существенное свойство формулы (6), указанное Jackson'омъ и которое вытекаетъ изъ тождества

$$\sum_{k=0}^{k=p-1}\frac{\sin^2\left[\frac{1}{2}p\left(x-\frac{2k\pi}{p}\right)\right]}{p^2\sin^2\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{2k\pi}{p}\right)\right]}=1,$$

заключается въ томъ, что, при всякомъ $x$

$$|F(x)|\leqq M,$$

гдѣ $M$ наибольшее изъ значеній $F\left(\frac{2k\pi}{p}\right)$ при $k=0, 1, \ldots p-1$.

Примѣняя все это къ интересующему насъ случаю, находимъ, что функція $f_p(x)$, опредѣленная вышеуказанными условіями, равна

$$f_p(x)=\frac{2}{p^{3/2}}\sum_{l=1}^{l=p-1}\left(\frac{l}{p}\right)(p-l)\cos lx \quad \text{(при } p=4\mu+1) \qquad (7)$$

и

$$f_p(x)=\frac{2}{p^{3/2}}\sum_{l=1}^{l=p-1}\left(\frac{l}{p}\right)(p-l)\sin lx \quad \text{(при } p=4\mu+3) \qquad (7^{\text{bis}})$$

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи извѣстныхъ изъ теоріи квадратичныхъ вычетовъ свойствъ суммъ Гаусса,

$$a_l=\frac{2(p-l)}{p^2}\sum_{h=0}^{k=p-1}\left(\frac{k}{p}\right)\cos\frac{2kl\pi}{p}=\frac{2(p-l)}{p^{3/2}}\left(\frac{l}{p}\right), \qquad b_l=0,$$

если $p=4\mu+1$, и

$$a_l=0,\quad b_l=\frac{2(p-l)}{p^2}\sum_{k=1}^{k=p-1}\left(\frac{k}{p}\right)\sin\frac{2kl\pi}{p}=\frac{2(p-l)}{p^{3/2}}\left(\frac{l}{p}\right),$$

если $p=4\mu+3$. Итакъ, въ обоихъ случаяхъ,

$$\sum_{l=1}^{l=p-1}|a_l|+|b_l|=\frac{2}{p^{3/2}}[1+2+\ldots(p-1)]=\frac{p-1}{\sqrt{p}}.$$

Сопоставляя этотъ результатъ съ доказанной выше леммой заключаемъ, что, *если $p$ есть число простое вида $4\mu+1$, то наибольшее возможное значеніе $S$ суммы модулей коэффиціентовъ въ $P(x)=\sum_{k=1}^{k=p-1}a_k\cos kx$ удовлетворяетъ неравенству* [1])

$$\frac{p-1}{\sqrt{p}}\leqq S\leqq\sqrt{2(p-1)}, \qquad (8)$$

---

[1]) Весьма вѣроятно, что въ дѣйствительности $S=\frac{p-1}{\sqrt{p}}$; однако доказательство представляетъ нѣкоторыя трудности, которыя я еще не преодолѣлъ вполнѣ. (См. мою замѣтку въ Comptes Rendus, іюнь 1914 г.).

*при условіи, что* $|P(x)| \leqq 1$; *если же* $p = 4\mu + 3$, *то соотвѣтствующее утвержденіе относится къ выраженію* $P(x) = \sum_{k=1}^{k=p-1} b_k \sin kx$.

Выбравъ указаннымъ выше образомъ $f_p(x)$, строимъ тригонометрическій рядъ

$$F(x) = \frac{\cos 2px}{\sqrt{p}} f_p(x) + \frac{\cos 2p_1 x}{\sqrt{p_1}} f_{p_1}(x) + \ldots + \frac{\cos 2p_n x}{\sqrt{p_n}} f_{p_n}(x) + \ldots \quad (9)$$

гдѣ $p, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ суть какія-нибудь простыя числа, удовлетворяющія неравенствамъ $3p_n < p_{n+1} < 6p_n - 2$, возможность которыхъ вытекаетъ изъ постулата Бертрана, доказаннаго Чебышевымъ.

Замѣчая, что сумма модулей коэффиціентовъ въ $\frac{\cos 2p_n x}{\sqrt{p_n}} f_{p_n}(x)$ равна $\frac{p_n - 1}{p_n}$, убѣждаемся, вопервыхъ, что сумма абсолютныхъ значеній коэффиціентовъ тригонометрическаго ряда $F(x)$ безконечно возрастаетъ. Между тѣмъ

$$\left| \sum_{n=n_0}^{n=\infty} \frac{\cos 2p_n x}{\sqrt{p_n}} f_{p_n}(x) \right| \leqq \sum_{n=n_0+1}^{n=\infty} \frac{1}{\sqrt{p_{n_0}}} < \frac{1}{\sqrt{3p_{n_0}}} + \frac{1}{\sqrt{9p_{n_0}}} + \ldots = \frac{1}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{p_{n_0}}}.$$

Слѣдовательно, функція $F(x)$ допускаетъ приближеніе равное $\frac{1}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{p_n}}$ при помощи тригонометрической суммы любого порядка $m$ не выше $3p_{n_0+1} - 2 < 18p_{n_0} - 14$; а потому на основаніи теоремы 12 (и § 17) моей книги «О наилучшемъ приближеніи непрерывныхъ функцій и т. д.» можемъ утверждать, что $F(x)$ удовлетворяетъ условію Липшица степени $\alpha < \frac{1}{2}$, сколь угодно близкой къ $\frac{1}{2}$, что и требовалось доказать.

3. Закончу свою статью новымъ доказательствомъ теоремы, *что условіе абсолютной сходимости тригонометрическаго ряда*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (1)$$

*для всѣхъ значеній x равнозначно* [1]) *сходимости*

$$S = \sum_{n=0}^{n=\infty} |a_n| + |b_n|. \quad (2)$$

---

[1]) Эта теорема впервые доказана въ работѣ *Fatou* «Séries trigonométriques et séries de Taylor» (Acta Mathematica, t. XXX, 1906 г.); затѣмъ она была обобщена Н. Н. Лузинымъ въ статьѣ «Къ абсолютной сходимости тригонометрическихъ рядовъ» (Мат. Сборн., т. XXVIII). Поэтому я не могу согласиться съ замѣчаніемъ проф. А. П. Пшеборскаго въ его отзывѣ о моей докторской диссертаціи, что въ теоремѣ 79 я ошибочно смѣшиваю оба эти условія. Быть можетъ, при случаѣ, мнѣ прійдется остановиться еще на нѣкоторыхъ разногласіяхъ съ моимъ глубокоуважаемымъ оппонентомъ.

Очевидно, вопервыхъ, что изъ абсолютной сходимости ряда (1) при $x=0$ вытекаетъ абсолютная сходимость $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|$; такимъ образомъ нужно только доказать, что изъ сходимости ряда $\sum|b_n \sin nx|$ вытекаетъ сходимость ряда $\Sigma|b_n|$. Для этого, очевидно, достаточно доказать теорему:

*Если*

$$\sum_{n=0}^{n=m+1}\left|b_n \sin\frac{2\pi nk}{2m+1}\right| \leqq M,$$

*при* $k=1, 2, \ldots 2m$, *то*

$$\sum_{n=1}^{n=2m+1}|b_n| \leqq 2mM \operatorname{tg}\frac{\pi}{4m+2},$$

*при предположеніи, что* $2m+1$ *есть число простое.*

Въ самомъ дѣлѣ, складывая неравенства, соотвѣтствующія всѣмъ значеніямъ $k$, получимъ

$$\sum_{n=1}^{n=2m+1}\sum_{k=1}^{k=2m}\left|b_n \sin\frac{2\pi nk}{2m+1}\right| \leqq 2mM;$$

но

$$\sum_{k=1}^{k=2m}\left|\sin\frac{2\pi nk}{2m+1}\right| = 2\sum_{k=1}^{k=m}\sin\frac{2\pi nk}{2m+1} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{2m+1}}{\sin\frac{\pi}{2m+1}}.$$

Слѣдовательно [1]),

$$\frac{1+\cos\frac{\pi}{2m+1}}{\sin\frac{\pi}{2m+1}}\sum_{n=1}^{n=2m+1}|b_n| \leqq 2mM,$$

т. е.

$$\sum_{n=1}^{n=2m+1}|b_n| \leqq \frac{2mM\sin\frac{\pi}{2m+1}}{1+\cos\frac{\pi}{2m+1}} = 2mM\operatorname{tg}\frac{\pi}{4m+2}.$$

Такимъ образомъ, полагая $m$ безконечно возрастающимъ, находимъ что *неравенство* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n \sin nx| \leqq M$, *при всякомъ* $x$, *влечетъ за собой* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n| \leqq \frac{\pi}{2}M$. Весьма вѣроятно, что численный коэффиціентъ $\frac{\pi}{2}$ не можетъ быть болѣе уменьшенъ.

---

[1]) Не трудно видѣть, что знакъ равенства имѣетъ мѣсто тогда и только тогда, когда $|b_1| = |b_2| = \ldots = |b_{2m+1}|$.