

## Sur certaines fonctions périodiques qui s'écartent le moins possible de zéro.

*Serge Bernstein.*

En étudiant les conditions de convergence absolue des séries trigonométriques <sup>1)</sup>, j'ai établi la proposition suivante fondamentale pour cette étude:

Si

$$\left| \sum_{n=1}^{n=N} a_n \cos nx + b_n \sin nx \right| \leq 1,$$

le maximum  $M$  de

$$\sum_{n=1}^{n=N} |a_n| + |b_n|$$

est de l'ordre de  $\sqrt{N}$ .

La démonstration s'appuie essentiellement sur la considération des fonctions

$$f_p(x) = \frac{2}{p^{3/2}} \sum_{n=1}^{n=p-1} \binom{n}{p} (p-n) \sin nx \quad (\text{pour } p=4\mu+3),$$

$$f_p(x) = \frac{2}{p^{3/2}} \sum_{n=1}^{n=p-1} \binom{n}{p} (p-n) \cos nx \quad (\text{pour } p=4\mu+1),$$

où  $\binom{n}{p}$  représente le symbole de Legendre.

Je me propose de démontrer ici quelques propriétés remarquables de ces fonctions, en supposant toujours  $p$  un nombre premier:

Soit d'abord  $p=4\mu+3$ . Nous allons établir le théorème que voici:

**Théorème.** *Entre toutes les fonctions de la forme*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=p-1} a_n \sin nx$$

<sup>1)</sup> Comptes Rendus, Juin 1914, et Communicat. de la Société Math. de Kharkow, t. XIV.

qui satisfait à la condition

$$\sum_{n=1}^{n=p-1} |a_n - a_{p-n}| = 1 \quad (1)$$

c'est la fonction

$$\frac{\sqrt{p}}{p-1} f_p(x) = \frac{2}{p(p-1)} \sum_{n=1}^{n=p-1} \binom{n}{p} (p-n) \sin nx$$

qui s'écarte le moins possible de zéro. Si la condition (1) est remplacée par

$$\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} |a_n + a_{p-n}| = 1, \quad (1^{\text{bis}})$$

c'est la fonction

$$\frac{\sqrt{p}}{p-1} f_p(x+\pi) = \frac{2}{p(p-1)} \sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} (-1)^n \binom{n}{p} (n-p) \sin nx$$

qui s'écarte le moins possible de zéro.

A cet effet, vérifions d'abord le lemme suivant:

Pour toutes les fonctions

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} \alpha_n \sin nx,$$

telles que

$$\left| \varphi\left(\frac{2h\pi}{p}\right) \right| \leq 1 \quad \left( h = 1, 2, \dots, \frac{p-1}{2} \right),$$

on a

$$\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} |\alpha_n| \leq \frac{p-1}{\sqrt{p}},$$

le signe = ayant lieu, lorsque  $\alpha_n = \frac{2}{\sqrt{p}} \binom{n}{p}$ , si  $p$  est un nombre premier de la forme  $4\mu + 3$ .

En effet, on a

$$\sum_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \varphi^2\left(\frac{2h\pi}{p}\right) = \sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} \alpha_n^2 \cdot \sum_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \sin^2 \frac{2nh\pi}{p} = \frac{p}{4} \sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} \alpha_n^2.$$

Donc,

$$\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} \alpha_n^2 \leq \frac{4}{p} \cdot \frac{p-1}{2} = 2 \frac{p-1}{p}.$$

Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} |\alpha_n|$$

atteint son maximum, si

$$|\alpha_1| = |\alpha_2| = \dots = |\alpha_{\frac{p-1}{2}}| = \frac{2}{\sqrt{p}}.$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} |\alpha_n| \leq \frac{p-1}{\sqrt{p}}.$$

On reconnaît, d'autre part, que, si l'on pose  $\alpha_n = \frac{2}{\sqrt{p}} \left(\frac{n}{p}\right)$ , on a

$$\sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} |\alpha_n| = \frac{p-1}{\sqrt{p}} \quad \text{et} \quad \varphi\left(\frac{2h\pi}{p}\right) = \left(\frac{h}{p}\right) = \pm 1,$$

$p$  étant un nombre premier de la forme  $4\mu + 3$ . C. q. f. d.

Cela étant, considérons une fonction quelconque

$$f(x) = \sum_{n=1}^{p-1} a_n \sin nx.$$

On voit sans peine que

$$a_n = \frac{2}{p} \sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}} f\left(\frac{\pi h}{p}\right) \sin \frac{\pi n h}{p}. \quad (2)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \alpha_n = a_n - a_{p-n} &= \frac{2}{p} \sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}} f\left(\frac{\pi h}{p}\right) \left( \sin \frac{\pi n h}{p} - \sin \frac{\pi (p-n) h}{p} \right) = \\ &= \frac{4}{p} \sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}} f\left(\frac{2\pi h}{p}\right) \sin \frac{2\pi n h}{p}. \end{aligned} \quad (3)$$

Or, la fonction

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} \alpha_n \sin nx,$$

où  $\alpha_n$  est donné par la formule (3), satisfait évidemment aux équations

$$\varphi\left(\frac{2\pi h}{p}\right) = f\left(\frac{2\pi h}{p}\right) \quad (h=1, 2, \dots, \frac{p-1}{2})$$

Donc, si

$$\sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} |\alpha_n| = \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} |a_n - a_{p-n}| = 1, \quad (1)$$

on a, en vertu du lemme qui vient d'être démontré, au moins pour une valeur de  $h$ ,

$$\left| f\left(\frac{2\pi h}{p}\right) \right| = \left| \varphi\left(\frac{2\pi h}{p}\right) \right| \geq \frac{\sqrt{p}}{p-1}.$$

Ainsi, a fortiori, aucune des fonctions  $f(x)$  qui satisfait à la condition (1) ne peut rester constamment inférieure à  $\frac{\sqrt{p}}{p-1}$ . Or, la fonction

$$\frac{\sqrt{p}}{p-1} f_p(x) = \frac{2}{p(p-1)} \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} \binom{n}{p} (p-n) \sin nx$$

qui satisfait aussi à la condition (1) jouit précisément de la propriété que

$$\left| \frac{\sqrt{p}}{p-1} f_p(x) \right| \leq \frac{\sqrt{p}}{p-1},$$

le signe d'égalité ayant lieu pour  $x = \frac{2h\pi}{p} \left( h = 1, 2, \dots, \frac{p-1}{2} \right)$ .

Donc, la fonction  $\frac{\sqrt{p}}{p-1} f_p(x)$  s'écarte le moins possible de zéro pour toutes les valeurs de  $x$ , et l'écart minimum de zéro des fonctions satisfaisant à (1) est précisément  $\frac{\sqrt{p}}{p-1}$ .

Pour obtenir le résultat énoncé dans le cas, où la condition (1) se trouve remplacée par (1<sup>bis</sup>), il suffit de remarquer que, si  $f(x)$  satisfait à la condition (1),  $f(x+\pi)$  satisfait à la condition (1<sup>bis</sup>); par conséquent, si  $\frac{\sqrt{p}}{p-1} f_p(x)$  fournit la solution dans le premier cas, c'est  $\frac{\sqrt{p}}{p-1} f_p(x+\pi)$  qui résout la question dans le second cas.

Notre théorème est donc entièrement démontré.

Corollaire. Si  $a_k a_m a_{p-k} a_{p-m} \geq 0$  et

$$\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} |a_k| = M,$$

la fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=p-1} a_n \sin nx \quad (p=4\mu+3, \text{ premier})$$

ne peut rester moindre en valeur absolue que  $\frac{MV\sqrt{p}}{p-1}$ ; cette valeur ne sera pas dépassée, seulement si

$$\pm f(x) = \frac{MV\sqrt{p}}{p-1} f_p(x + k\pi).$$

Démontrons à présent une propriété analogue de  $f_p(x)$  dans le cas, où  $p=4\mu+1$ .

*Théorème. Entre toutes les fonctions de la forme*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=p-1} a_n \cos nx$$

qui satisfont aux conditions  $f(0) = a_0 \sqrt{p}$  et

$$\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} |a_n + a_{p-n}| = 1,$$

c'est la fonction

$$\frac{\sqrt{p}}{p-1} f_p(x) = \frac{2}{p(p-1)} \sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} \binom{n}{p} (p-n) \cos nx$$

qui s'écarte le moins possible de zéro ( $p=4\mu+1$ ).

Remarquons d'abord que notre fonction satisfait bien aux conditions du théorème, puisque  $f_p(0) = a_0 = 0$ .

Démontrons ensuite le lemme suivant:

Si la fonction

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=\frac{p-1}{2}} \alpha_n \cos nx$$

satisfait aux conditions  $\varphi(0) = \alpha_0 \sqrt{p}$  et

$$\left| \varphi\left(\frac{2h\pi}{p}\right) \right| \leq 1 \quad \left( h=1, 2, \dots, \frac{p-1}{2} \right),$$

on a

$$\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} |\alpha_n| \leq \frac{p-1}{\sqrt{p}},$$

le signe=ayant lieu, lorsque  $\alpha_0=0$ ,  $\alpha_n = \frac{2}{\sqrt{p}} \binom{n}{p}$ , pour  $p=4\mu+1$  premier.

En effet, on a

$$\frac{1}{2} \varphi^2(0) + \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} \varphi^2\left(\frac{2n\pi}{p}\right) = \frac{p}{2} \alpha_0^2 + \frac{p}{4} \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} \alpha_n^2$$

et, puisqu'on a  $\varphi(0) = \alpha_0 \sqrt{p}$ , donc

$$\sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} \varphi^2\left(\frac{2n\pi}{p}\right) = \frac{p}{4} \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} \alpha_n^2,$$

Par conséquent, on a, comme plus haut,

$$\sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} |\alpha_n| \leq \frac{p-1}{\sqrt{p}},$$

le signe=ne pouvant avoir lieu que, lorsqu'on a en même temps

$$\left| \varphi\left(\frac{2\pi}{p}\right) \right| = \dots = \left| \varphi\left(\frac{p-1}{p} \pi\right) \right| \text{ et } |\alpha_1| = \dots = |\alpha_{\frac{p-1}{2}}|;$$

or cette circonstance se présente précisément, si  $\alpha_n = \frac{2}{\sqrt{p}} \binom{n}{p}$ , la fonction

$$\varphi_p(x) = \frac{2}{\sqrt{p}} \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} \binom{n}{p} \cos nx$$

satisfaisant à toutes les conditions du lemme.

Cela étant, considérons la fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\frac{p-1}{2}} a_n \cos nx.$$

On aura

$$a_n = \frac{1}{p} [f(0) + (-1)^n f(\pi)] + \frac{2}{p} \sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}} f\left(\frac{\pi h}{p}\right) \cos \frac{\pi n h}{p},$$

$$a_0 = \frac{1}{2p} [f(0) + f(\pi)] + \frac{1}{p} \sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}} f\left(\frac{\pi h}{p}\right) = \frac{1}{p} f(0) + \frac{2}{p} \sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}} f\left(\frac{2\pi h}{p}\right).$$

Donc,

$$a_n + a_{p-n} = \frac{2}{p} f(0) + \frac{4}{p} \sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}} f\left(\frac{2\pi h}{p}\right) \cos \frac{2\pi n h}{p}.$$

Or, construisons la fonction

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=\frac{p-1}{2}} \alpha_n \cos nx,$$

définie par les conditions

$$\varphi\left(\frac{2\pi h}{p}\right) = f\left(\frac{2\pi h}{p}\right) \quad \left(h=0, 1, \dots, \frac{p-1}{2}\right);$$

nous aurons

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{p} \varphi(0) + \frac{2}{p} \sum_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \varphi\left(\frac{2\pi h}{p}\right) = a_0 \\ \alpha_n &= \frac{2}{p} \varphi(0) + \frac{4}{p} \sum_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \varphi\left(\frac{2\pi h}{p}\right) \cos \frac{2\pi nh}{p} = a_n + a_{p-n} \end{aligned} \quad (4)$$

Mais la condition  $\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{p}} f(0)$  donne  $\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{p}} \varphi(0)$  et, d'autre part,

$$\sum_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} |\alpha_h| = \sum_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} |a_h + a_{p-h}|.$$

Par conséquent, en vertu de notre lemme, il y aura au moins une valeur de  $h$  ( $h=1, \dots, \frac{p-1}{2}$ ), pour la quelle

$$\left| f\left(\frac{2\pi h}{p}\right) \right| \geq \frac{\sqrt{p}}{p-1},$$

si

$$\sum_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} |a_h + a_{p-h}| = 1;$$

donc la fonction  $\frac{\sqrt{p}}{p-1} f_p(x)$ , dont le module ne dépasse jamais  $\frac{\sqrt{p}}{p-1}$ , est bien celle qui s'écarte le moins possible de zéro.

A fortiori, pouvons nous affirmer la conséquence suivante:

**Théorème.** *Entre toutes les fonctions*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=p-1} a_n \cos nx \quad (p=4\mu+1)$$

telles que  $f(0) = 0$  et

$$\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} |a_n + a_{p-n}| = 1$$

c'est la fonction  $\frac{\sqrt{p}}{p-1} f_p(x)$  qui s'écarte le moins possible de zéro et cet écart minimum est  $\frac{\sqrt{p}}{p-1}$ .

On obtient un résultat analogue et le même écart minimum en remplaçant  $f(0)$  par  $f(\pi)$  et  $|a_n + a_{p-n}|$  par  $|a_n - a_{p-n}|$ .

Je ne sais pas, si dans les énoncés précédents (pour  $p=4\mu+1$ ) on peut rejeter la condition  $f(0) = 0$  (ou  $f(\pi) = 0$ ). Il est certain en tout cas (comme je l'ai vérifié pour  $p=5$ ) que cette restriction est nécessaire, si l'on veut considérer tout l'ensemble de fonctions pour lesquelles

$$\sum_{n=1}^{n=p-1} |a_n| \leq 1$$

au lieu de l'ensemble partiel qui satisfait aux conditions

$$\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} |a_n + a_{p-n}| \leq 1, \quad \sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} |a_n - a_{p-n}| \leq 1$$

que nous nous sommes bornés d'envisager ici.