Формула Stokes'а для пространства n измѣреній.

Н. Ѳ. Спенглера.

Положимъ, что имѣемъ n функцій двухъ независимыхъ перемѣнныхъ u, v

$$x_1 = x_1(u,\ v),\ x_2 = x_2(u,\ v), \ldots x_n = x_n(u,\ v). \tag{1}$$

Пусть эти функціи опредѣлены въ области (U) перемѣнныхъ независимыхъ u, v. Возьмемъ выраженіе

$$\iint_{(U)} \sum_{i,\,k} \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \frac{D(x_i,\ x_k)}{D(u,\ v)} du dv \qquad i, k = 1, 2, \ldots n,$$

гдѣ значки i, k принимаютъ всѣ значенія отъ 1 до n, исключая $i = k$.

Наша задача состоитъ въ преобразованіи этого выраженія въ такое, которое содержало бы только простые интегралы.

Относительно функцій (1) и области (U) мы сдѣлаемъ слѣдующія предположенія.

1) Пусть функціи x_1, $x_2, \ldots x_n$ непрерывны, ограничены и имѣютъ непрерывныя частныя производныя перваго порядка въ области (U). Пусть эта область ограничена замкнутой кривой

$$\varphi(u,\ v) = 0. \tag{2}$$

Если x_1, $x_2, \ldots x_n$ примемъ за координаты точки въ пространствѣ n измѣреній, то уравненія (1) опредѣлятъ кусокъ поверхности S въ этомъ пространствѣ, а система уравненій (1) и (2) опредѣлитъ кривую (C), принадлежащую куску поверхности S.

Мы ограничимся случаемъ, когда

2) каждый якобіевскій опредѣлитель

$$\frac{D(x_i,\ x_k)}{D(u,\ v)},\ \text{гдѣ}\ i,\ k = 1,\ 2, \ldots n$$

не мѣняетъ знака и не обращается въ нуль въ области (U).

Любое x_i въ силу перваго условія имѣетъ верхнюю границу G_i и нижнюю g_i и достигаетъ ихъ. Также и на кривой (C) x_i имѣютъ верхнюю и нижнюю границу G_i' и g_i'. Докажемъ, что эти послѣднія границы совпадаютъ соотвѣтственно съ первыми.

Дѣйствительно пусть, напр., $g_i < g_i'$. Тогда значеніе g_i функція x_i принимаетъ *внутри* области (U). Это значеніе является минимумомъ этой функціи, и потому въ той точкѣ, для которой $x_i = g_i$, будетъ

$$\frac{\partial x_i}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial x_i}{\partial v} = 0, \quad \text{а слѣдовательно,}$$

$$\frac{D(x_i, x_k)}{D(u, v)} = 0,$$

что противорѣчитъ условію 2).

Положимъ еще, что

3) уравненіе $x_i(u, v) = a$, гдѣ $g_i < a < G_i$, для любого i совмѣстно съ уравненіемъ (2) даетъ двѣ системы значеній u, v, такъ что на кривой (C) координатѣ $x_i = a$ соотвѣтствуютъ двѣ различныя точки, если только a не совпадаетъ съ g_i или G_i. Въ послѣднемъ случаѣ двѣ точки сливаются въ одну.

Сдѣлаемъ наконецъ послѣднее предположеніе.

4) Существуетъ такое вообще однозначное и однозначно обратимое преобразованіе

$$u = u(\alpha, \beta), \quad v = v(\alpha, \beta), \tag{3}$$

гдѣ $u(\alpha, \beta)$ и $v(\alpha, \beta)$ функціи отъ α, β съ непрерывными частными производными перваго порядка, что u, v получаютъ всѣ значенія изъ области (U), когда α и β получаютъ значенія изъ области (A), удовлетворяющей условіямъ

$$\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1, \quad \beta_0 \leq \beta \leq \beta_1,$$

при чемъ опредѣлитель $\dfrac{D(u, v)}{D(\alpha, \beta)}$ не мѣняетъ знака въ области (A) и можетъ обращаться въ нуль только въ изолированныхъ точкахъ и линіяхъ[1]), а для $\beta = \beta_1$ совсѣмъ не обращается въ нуль. Предположимъ, что параметры α, β таковы, что при $\beta = \beta_1$ и измѣняющемся α въ предѣлахъ (α_0, α_1) точка $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ описываетъ кривую (C). Тогда точки этой кривой соотвѣтствуютъ взаимно однозначно точкамъ промежутка (α_0, α_1).

Преобразованіе (3) особенно просто, напримѣръ, въ томъ случаѣ, когда кривая φ конвексна Тогда внутри кривой φ можно найти такую точку M, что полупрямыя, исходящія изъ этой точки къ любой точкѣ

---

[1]) Въ этихъ точкахъ обратная однозначность можетъ нарушаться.

кривой φ, не встрѣчаютъ эту кривую въ другихъ точкахъ. Дѣйствительно, если координаты u, v точекъ кривой φ выразить въ параметрической формѣ въ функціяхъ отъ параметра α, то положеніе любой точки A внутри кривой φ опредѣлится значеніемъ α, соотвѣтствующимъ точкѣ пересѣченія B кривой съ полупрямой MA, и затѣмъ значеніемъ

$$\beta = \frac{MA}{MB}.$$

Пусть на кривой φ

$$u = \mu(\alpha),\ v = \nu(\alpha)$$

и координаты точки M будутъ ξ, η. Тогда координаты a, b точки A будутъ

$$a = \xi + \beta\,[\mu(\alpha) - \xi],\ b = \mu + \beta\,[\nu(\alpha) - \eta].$$

Итакъ, за преобразованіе (3) въ этомъ случаѣ можетъ быть взято слѣдующее

$$u = \xi + \beta\,[\mu(\alpha) - \xi],\ v = \eta + \beta\,[\nu(\alpha) - \eta].$$

Кривая φ, очевидно, соотвѣтствуетъ значенію $\beta = 1$. Опредѣлитель этого преобразованія есть

$$\frac{D(u,\ v)}{D(\alpha,\ \beta)} = \beta \begin{vmatrix} \mu'(\alpha) & \nu'(\alpha) \\ \mu(\alpha) - \xi & \nu(\alpha) - \eta \end{vmatrix}.$$

Правая часть, очевидно, равна произведенію

$$\pm\,\beta \sqrt{\mu'^2 + \nu'^2}\ \sqrt{(\mu - \xi)^2 + (\nu - \eta)^2}$$

на синусъ угла между касательной къ кривой въ точкѣ B и прямой MB. Вслѣдствіе конвексности кривой φ этотъ синусъ никогда не мѣняетъ знака и никогда не обращается въ нуль. Слѣдовательно, разсматриваемый опредѣлитель обращается въ нуль только при $\beta = 0$ и не мѣняетъ знака.

Мы хотимъ преобразовать двойной интегралъ, взятый по поверхности S, къ простому, взятому по кривой (C). Для этого преобразованія необходимо вывести нѣкоторыя свойства куска поверхности S и кривой (C).

Пусть

$$x_i(u,\ v) = a, \tag{4}$$

гдѣ

$$g_i < a < G_i.$$

Тогда по условію 3) какое либо другое $x_k(u, v)$ на кривой (C) получаетъ два различныхъ значенія x'_k и x''_k, при чемъ пусть

$$x'_k < x''_k.$$

Докажемъ, что при условіи (4) функція $x_k(u, v)$ въ области (U) измѣняется въ промежуткѣ (x'_k, x''_k) и получаетъ всѣ значенія изъ этого промежутка. Дѣйствительно, если бы x_k могло получить значеніе, напр., большее чѣмъ x''_k, то вслѣдствіе условія 1) существовалъ бы максимумъ функціи $x_k(u, v)$, который соотвѣтствовалъ бы точкѣ (u, v), лежащей внутри области (U). Этотъ максимумъ былъ бы условнымъ, ибо u, v связаны условіемъ (4), и потому должно существовать такое λ, что

$$\frac{\partial x_k}{\partial u} - \lambda \frac{\partial x_i}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial v} - \lambda \frac{\partial x_i}{\partial v} = 0,$$

откуда вытекаетъ

$$\frac{D(x_i, x_k)}{D(u, v)} = 0$$

внутри области (U), что противорѣчитъ условію 2).

Если бы x_k не получало какихъ либо значеній изъ промежутка (x'_k, x''_k), то существовало бы такое l, удовлетворяющее условію $x'_k < l < x''_k$, что x_k получало бы всѣ значенія между x'_k и l, но не получало бы значеній бо̀льшихъ, чѣмъ l, но меньшихъ, чѣмъ $l + \varepsilon$, гдѣ ε нѣкоторое положительное число. Слѣдовательно, l было бы условнымъ максимумомъ функціи $x_k(u, v)$ внутри области (U), и опять пришли бы къ выводу, не совмѣстному съ условіемъ 2). Такимъ образомъ высказанное утвержденіе доказано.

Если точка (u, v) описываетъ въ плоскости U, V замкнутую кривую φ, то точка (x_i, x_k) опишетъ въ плоскости $X_i X_k$ также замкнутую кривую S_{ik}, расположенную между параллельными прямыми $x_i = g_i$, $x_i = G_i$, $x_k = g_k$, $x_k = G_k$. Каждая прямая $x_i = a$, гдѣ $g_i < a < G_i$ встрѣчаетъ эту кривую въ двухъ точкахъ, не совпадающихъ другъ съ другомъ. Такимъ образомъ, если будемъ двигаться по этой кривой, то x_i будетъ измѣняться сначала отъ g_i до G_i, а потомъ обратно отъ G_i до g_i. Замѣтимъ, что при каждомъ изъ этихъ двухъ измѣненій x_i не можетъ пріобрѣсти экстремальнаго значенія, заключеннаго между g_i и G_i. Дѣйствительно, если бы такое значеніе существовало, напр., при первомъ измѣненіи, то x_i сначала увеличивалось бы до этого значенія, потомъ бы уменьшалось, а потомъ опять бы увеличивалось до G_i, т. е. три раза получило бы нѣкоторое опредѣленное значеніе. Каждому изъ этихъ значеній соотвѣтствовало бы три[1]) значенія x_k, что противорѣчитъ условію 3).

Сдѣлаемъ теперь преобразованіе (3). Функціи $x_i(u, v)$ и $x_k(u, v)$ перейдутъ въ новыя функціи $x_i(\alpha, \beta)$ и $x_k(\alpha, \beta)$. Кривую S_{ik} въ плоскости X_iX_k получимъ, если положимъ $\beta = \beta_1$ и будемъ измѣнять α въ промежуткѣ (α_0, α_1). Пусть значенія g_i и G_i функція $x_i(\alpha, \beta_1)$ получаетъ, соотвѣтственно, при $\alpha = \alpha'$ и $\alpha = \alpha''$. Тогда при измѣненіи α отъ α' до α'' x_i измѣняется отъ g_i до G_i, а при измѣненіи отъ α'' до соотвѣтствующаго предѣла и отъ другого предѣла до α' измѣняется отъ G_i до g_i. При обоихъ этихъ измѣненіяхъ производная $\dfrac{\partial x_i(\alpha, \beta_1)}{\partial \alpha}$ сохраняетъ знакъ, ибо x_i не можетъ имѣть экстремальныхъ значеній между g_i и G_i.

Составимъ два ансамбля точекъ α. Одинъ пусть состоитъ изъ всѣхъ точекъ промежутка $\alpha'\alpha''$, а другой изъ остальныхъ точекъ промежутка (α_0, α_1), включая еще точки α' и α''. Одинъ изъ этихъ ансамблей обозначимъ черезъ σ_1, а другой черезъ σ_2. Очевидно, что въ этихъ ансамбляхъ производная $\dfrac{\partial x_i(\alpha, \beta_1)}{\partial \alpha}$ имѣетъ противоположные знаки.

По условію 3) каждому значенію $x_i = a$ между g_i и G_i соотвѣтствуютъ два значенія x_k' и x_k'' функціи x_k. Пусть $x_k' < x_k''$. Каждое изъ этихъ значеній получаетъ функція $x_k(\alpha, \beta)$ при $\beta = \beta_1$ и нѣкоторомъ значеніи a. При этомъ значеніе x_k' функція x_k получаетъ, когда α измѣняется въ одномъ изъ ансамблей σ_1 и σ_2, а значеніе x_k'', когда α измѣняется въ другомъ. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ обратное. Уравненіе

$$x_i(\alpha, \beta_1) = a \tag{5}$$

имѣетъ два рѣшенія относительно α. Пусть эти рѣшенія будутъ $\alpha = \gamma_1$ и $\alpha = \gamma_2$ и пусть $x_k(\gamma_1, \beta_1) = x_k'$ и $x_k(\gamma_2, \beta_1) = x_k''$. Тогда разность

$$x_k(\gamma_2, \beta_1) - x_k(\gamma_1, \beta_1) > 0.$$

Пусть γ_1 принадлежитъ ансамблю σ_1, а γ_2 ансамблю σ_2 (оба γ одному ансамблю, очевидно, принадлежать не могутъ, ибо тогда уравне-

---

[1]) Если бы x_k получало при этомъ одинаковыя значенія, то оно имѣло бы экстремумъ въ той же точкѣ, что и x_i, и тогда имѣли бы $\dfrac{D(x_i, x_k)}{D(u, v)} = 0$ въ этой точкѣ.

ніе (5) имѣло бы болѣе двухъ корней). По предположенію существуетъ такое a', заключенное между g_i и G_i, что уравненіе

$$x_i(\alpha, \beta_1) = a'$$

даетъ два рѣшенія $\alpha = \gamma_1'$ и $\alpha = \gamma_2'$ такихъ, что γ_1' принадлежитъ ансамблю σ_1, а γ_2' — ансамблю σ_2, но разность

$$x_k(\gamma_2', \beta_1) - x_k(\gamma_1', \beta_1) < 0.$$

Такъ какъ разсматриваемая разность измѣняется непрерывно, то существуетъ такое значеніе a, заключенное методу g_i и G_i, что эта разность обратится въ нуль, а это противорѣчитъ условію 3).

Дальше будемъ обозначать черезъ σ_1 тотъ ансамбль, въ которомъ $x_k(\alpha, \beta_1)$ получаетъ значенія x_k', а черезъ σ_2 тотъ, въ которомъ $x_k(\alpha, \beta_1)$ получаетъ значенія x_k''.

Теперь мы можемъ приступить къ рѣшенію нашей задачи. Возьмемъ ее въ болѣе простой формѣ, когда независимыми перемѣнными являются непосредственно перемѣнныя α, β, т. е. будемъ преобразовывать выраженіе

$$I = \iint_{(A)} \sum_{\lambda\mu} \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu} \frac{D(x_\lambda, x_\mu)}{D(\alpha, \beta)} d\alpha d\beta, \quad \text{гдѣ } \lambda, \mu = 1, 2 \ldots n; \ \lambda \neq \mu. \tag{6}$$

Отберемъ тѣ слагаемыя, въ которыхъ значекъ λ имѣетъ постоянное значеніе i и пусть

$$I_i = \iint_{(A)} \sum_{\mu} \frac{\partial A_i}{\partial x_\mu} \frac{D(x_i, x_\mu)}{D(\alpha, \beta)} d\alpha d\beta, \tag{7}$$

гдѣ μ получаетъ всѣ значенія $1, 2 \ldots n$, кромѣ $\mu = i$.

Пусть одно изъ этихъ значеній будетъ k. Преобразуемъ интегралъ I_i къ новымъ перемѣннымъ x_i, x_k по формуламъ

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(\alpha, \beta), \\ x_k &= x_k(\alpha, \beta). \end{aligned} \tag{8}$$

Это возможно, ибо опредѣлитель $\dfrac{D(x_i, x_k)}{D(\alpha, \beta)}$ по условію 4) можетъ обращаться въ нуль только въ изолированныхъ точкахъ области (A).

Выраженіе (7) перейдетъ въ

$$I_i = \iint_{(v_{ik})} \sum_{\mu} \frac{\partial A_i}{\partial x_\mu} \frac{D(x_k, x_\mu)}{D(\alpha, \beta)} \left| \frac{D(\alpha, \beta)}{D(x_i, x_k)} \right| dx_i dx_k,$$

гдѣ (U_{ik}) есть область перемѣнныхъ x_i, x_k, ограниченная кривой S_{ik}.

Пусть ε_{ik} будетъ единица со знакомъ опредѣлителя $\dfrac{D(\alpha,\ \beta)}{D(x_i,\ x_k)}$ или, что то же, опредѣлителя $\dfrac{D(x_i,\ x_k)}{D(\alpha,\ \beta)}$. Тогда будемъ имѣть

$$I_i = \varepsilon_{ik} \iint_{(U_{ik})} \sum_{\mu} \frac{\partial A_i}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\mu}{\partial x_k} \partial x_i \partial x_k, \quad \text{гдѣ } \mu = 1, 2 \ldots n;\ \mu \mp i.$$

Замѣчая, что $\sum\limits_{\mu} \dfrac{\partial A_i}{\partial x_\mu} \dfrac{\partial x_\mu}{\partial x_k}$ есть частная производная функціи A_i по независимому перемѣнному x_k, можемъ написать

$$I_i = \varepsilon_{ik} \int_{g_i}^{G_i} \left[A_i(x_k'') - A_i(x_k') \right] dx_i =$$

$$= \varepsilon_{ik} \int_{g_i}^{G_i} A_i(x_k'')\, dx_i - \varepsilon_{ik} \int_{g_i}^{G_i} A_i(x_k') dx_i, \tag{9}$$

гдѣ выраженія $A_i(x_k'')$ и $A_i(x_k')$ означаютъ, что въ функціи $A_i(x_1,\ x_2 \ldots x_n)$ всѣ x выражены въ функціяхъ отъ x_i и x_k, а затѣмъ вмѣсто x_k подставлено x_k'' и x_k'.

Преобразуемъ первый интегралъ, стоящій въ правой части равенства (9), къ перемѣнному α по формулѣ

$$x_i = x_i(\alpha,\ \beta_1),$$

опредѣленной въ ансамблѣ σ_2, а второй интегралъ преобразуемъ къ тому же перемѣнному и по той же формулѣ, но опредѣленной въ ансамблѣ σ_1. Это преобразованіе возможно, ибо въ обоихъ ансамбляхъ x_i получаетъ всѣ значенія отъ g_i до G_i и производная $\dfrac{\partial x_i(\alpha,\ \beta_1)}{\partial \alpha}$ не мѣняетъ знака. Пусть η_i будетъ единица со знакомъ производной $\dfrac{\partial x_i(\alpha,\ \beta_1)}{\partial \alpha}$ въ ансамблѣ σ_2. Въ ансамблѣ σ_1 эта производная имѣетъ противоположный знакъ, и потому будемъ имѣть

$$I_i = \varepsilon_{ik}\eta_i \int_{\sigma_2} A_i \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} d\alpha + \varepsilon_{ik}\eta_i \int_{\sigma_1} A_i \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} d\alpha = \varepsilon_{ik}\eta_i \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} A_i \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} d\alpha,$$

гдѣ въ функціи $A_i(x_1,\ x_2 \ldots x_n)$ всѣ x выражены въ функціяхъ отъ α и β и положено $\beta = \beta_1$.

Опредѣлимъ теперь произведеніе $\varepsilon_{ik}\eta_i$. Возьмемъ какую нибудь изъ точекъ (α', β_1) и (α'', β_1), напр., первую. Въ ней опредѣлитель $\triangle = \frac{D(x_i x_k)}{D(\alpha, \beta)}$ обращается въ

$$\triangle = -\frac{\partial x_i}{\partial \beta}\frac{\partial x_k}{\partial \alpha}.$$

Такъ какъ въ точкѣ (α', β_1) x_i получаетъ наименьшее значеніе на поверхности S, то при уменьшеніи β и постоянномъ $\alpha = \alpha'$ x_i должно увеличиваться, и потому производная $\frac{\partial x_i}{\partial \beta}$ въ точкѣ (α', β_1) отрицательна (не равна нулю, ибо иначе $\triangle = 0$). Отсюда видимъ, что знакъ производной $\frac{\partial x_k}{\partial \alpha}$ въ точкѣ (α', β_1) тождествененъ со знакомъ опредѣлителя $\triangle$ или ε_{ik}. Если $\varepsilon_{ik} = 1$, то $\frac{\partial x_k}{\partial \alpha} > 0$, и слѣдовательно x_k получаетъ значенія x_k'' для $\alpha > \alpha'$. Но для этихъ значеній α вблизи $\alpha = \alpha'$ и при $\beta = \beta_1$ $\frac{\partial x_i}{\partial \alpha} > 0$, ибо x_i должно увеличиваться при всякомъ отклоненіи α и β отъ α' и β_1. Итакъ, $\eta_i = 1$ и $\varepsilon_{ik}\eta_i = 1$. Если $\varepsilon_{ik} = -1$, то найдемъ, что $\frac{\partial x_k}{\partial \alpha} < 0$ и x_k получаетъ значенія x_k'' для $\alpha < \alpha'$. Для этихъ значеній α производная $\frac{\partial x_i}{\partial \alpha} < 0$, и потому опять $\varepsilon_{ik}\eta_i = 1$.

Итакъ имѣемъ

$$\iint_{(A)} \sum_{\mu} \frac{\partial A_i}{\partial x_\mu} \frac{D(x_i, x_\mu)}{D(\alpha, \beta)} \, d\alpha d\beta = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} A_i \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} \, d\alpha. \tag{10}$$

Предыдущія разсужденія можемъ повторить относительно любого $\lambda = i$, и потому, суммируя (10) по λ, получимъ

$$\iint_{(A)} \sum_{\lambda\mu} \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu} \frac{D(x_\lambda, x_\mu)}{D(\alpha, \beta)} \, d\alpha d\beta = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} A_x \frac{\partial x_\lambda}{\partial \alpha} \, d\alpha, \tag{11}$$

гдѣ въ лѣвой части суммированіе распространено на всѣ λ и μ отъ 1 до n, исключая случаевъ равенства $\lambda = \mu$; въ правой части положено $\beta = \beta_1$.

Если бы точки кривой C соотвѣтствовали нижнему предѣлу для β, т. е. $\beta = \beta_0$, то при помощи аналогичныхъ разсужденій нашли бы, что въ формулѣ (11) передъ правой частью надо поставить знакъ минусъ.

Въ общемъ случаѣ, когда всѣ x выражены въ функціяхъ отъ u, v и удовлетворяются перечисленныя выше условія, а кривая C выражена въ параметрѣ s, будемъ имѣть

$$\iint_{(U)} \sum_{\lambda,\ \mu} \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu} \frac{D(x_\lambda,\ x_\mu)}{D(u,\ v)} du dv = \pm \int_{s_0}^{s_1} \sum_{\lambda=}^{\mu} A_\lambda \frac{\partial x_\lambda}{\partial s} ds,$$

гдѣ $+$ или $-$ берется смотря по тому, будутъ ли знаки выраженій

$$\frac{D(u,\ v)}{D(\alpha,\ \beta)},\ \frac{d\alpha}{ds}$$

одинаковы или различны.

Каждый изъ слагаемыхъ интеграловъ въ лѣвой части формулы (11) мы можемъ преобразовать къ новымъ перемѣннымъ x_λ и x_μ, а въ правой части къ перемѣнному x_λ. Получимъ

$$\iint_{(S)} \sum_{\lambda,\ \mu} \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu} dx_\lambda dx_\mu = \int_C A_\lambda dx_\lambda, \tag{12}$$

гдѣ знаки произведенія $dx_\lambda dx_\mu$ и dx_λ тождественны со знаками $\frac{D(x_\lambda,\ x_\mu)}{D(\alpha,\ \beta)}$ и $\frac{\partial x_\lambda(\alpha,\ \beta_1)}{\partial \alpha}$. Можемъ сказать, что двойные интегралы взяты по опредѣленной сторонѣ куска поверхности S, а простые—въ опредѣленномъ направленіи по кривой C.

Посмотримъ теперь, какъ можно геометрически опредѣлить эти сторону и направленіе при $n=3$. Пусть

$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ A_1 = P,\ A_2 = Q,\ A_3 = R.$$

Формула (11) перепишется

$$\iint_{(\Delta)} \Bigg[\sum_{\lambda,\ \mu} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \frac{D(x,\ y)}{D(\alpha,\ \beta)} + \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) \frac{D(y,\ z)}{D(\alpha,\ \beta)} +$$
$$+ \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) \frac{D(z,\ x)}{D(\alpha,\ \beta)} \Bigg] d\alpha d\beta = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \left(P \frac{\partial x}{\partial \alpha} + Q \frac{\partial y}{\partial \alpha} + R \frac{\partial z}{\partial \alpha}\right) d\alpha.$$

Пусть система координатъ взята, напр., лѣвовращающая и пусть кривая C будетъ $\alpha' M N \alpha''$, при чемъ точки α' и α'' соотвѣтствуютъ минимуму и максимуму x на кривой C.

Пусть, напр., $\frac{D(x,\ y)}{D(\alpha,\ \beta)} < 0$. Если возьмемъ формулу (12), то для той стороны поверхности, по которой берется двойной интегралъ, косинусъ угла, образованнаго полунормалью съ осью Z-овъ, будетъ также отрицателенъ, и полунормаль въ какой либо точкѣ A поверхности будетъ составлять съ осью Z-овъ уголъ больше 90°.

По предыдущему вблизи точки α' на кривой C будетъ $\frac{\partial y}{\partial \alpha} < 0$. Такъ какъ при нашемъ выборѣ координатъ y больше на дугѣ $\alpha' M \alpha''$, чѣмъ на дугѣ $\alpha' N \alpha''$, то на первой дугѣ $\alpha < \alpha'$, а на второй $\alpha > \alpha'$. Простые интегралы въ формулѣ (12) берутся по кривой въ сторону увеличенія α. Такимъ образомъ направленіе интегрированія по кривой C таково, что соотвѣтствующіе двойные интегралы въ формулѣ

$$\iint\left[\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dxdy+\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)dydz+\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)dxdz\right]=$$
$$=\int(Pdx+Qdy+Rdz)$$

оказываются взятыми по правой сторонѣ поверхности. Для случая $\frac{D(x,\ y)}{D(\alpha,\ \beta)} > 0$ получимъ тотъ же результатъ.

Если бы взяли систему координатъ правовращающую, то двойные интегралы были бы взяты по лѣвой сторонѣ поверхности.