О группахъ перестановочныхъ матрицъ [1]).

Студ. Университета Св. Влад. ***Кравчука.***

(Представлено проф. Д. А. Граве).

Въ журналѣ Crelle'я за 1905 годъ помѣщена статья Schur'a „Zur Theorie der vertauschbaren Matrizen", въ которой доказывается теорема, что *число t линейно независимыхъ матрицъ перестановочной группы n-го порядка есть maximum* $\left[\frac{n^2}{4}\right]+1$, и указываются единственно возможные типы перестановочныхъ группъ, для которыхъ $t=\left[\frac{n^2}{4}\right]+1$.

§ 1 настоящей статьи посвященъ болѣе простому доказательству этой теоремы; въ §§ 2-мъ и 3-мъ дается ея обобщеніе.

Предварительно замѣтимъ, что если матрица A n-го порядка распадается на рядъ матрицъ A_i порядковъ n_i, т. е.

$$A=\left\| \begin{matrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \end{matrix} \right\|,$$

при чемъ характеристическія уравненія матрицъ A_i попарно не имѣютъ общихъ корней, то всякая перестановочная съ ней матрица B имѣетъ подобный же видъ:

$$B=\left\| \begin{matrix} B_1 & & \\ & B_2 & \\ & & \ddots \end{matrix} \right\|,$$

гдѣ B_i—перестановочная съ A_i матрица n_i-го порядка. А такъ какъ всякую матрицу A контрагредіентнымъ преобразованіемъ [2]) можно разбить

---

[1]) «*Группой перестановочныхъ матрицъ*» будемъ называть совокупность перестановочныхъ матрицъ, удовлетворяющихъ двумъ условіямъ: 1) произведеніе двухъ матрицъ совокупности есть матрица той же совокупности и 2) нѣтъ матрицы, которая, не принадлежа къ совокупности, была бы перестановочна со всѣми ея матрицами.

Порядкомъ группы матрицъ будемъ называть порядокъ всякаго ея элемента, т. е. число строкъ (или колоннъ) всякой матрицы, входящей въ группу.

[2]) Контрагредіентно преобразованной изъ A называется матрица $X^{-1}AX$, гдѣ X—любая, очевидно, не особенная матрица.

на такія матрицы A_i, что характеристическія ихъ уравненія будутъ всѣ вида

$$(x - \alpha_i)^{n_i} = 0,$$

то легко понять, что отъ разсмотрѣнія любыхъ группъ перестановочныхъ матрицъ можно перейти къ разсмотрѣнію такихъ группъ, каждая матрица которыхъ удовлетворяетъ уравненію указаннаго вида. Такая группа содержитъ, очевидно, элементъ

$$J = \begin{Vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{Vmatrix},$$

и базисъ ея можно выбрать такъ, чтобы онъ содержалъ J, а всѣ прочія его матрицы $M_k \, (k = 1, 2, \ldots, t - t)$ удовлетворяли бы уравненіямъ:

$$M_k^{n_k} = 0.$$

Всѣ линейныя комбинаціи вида $\sum\limits_k \lambda_k M_k$ удовлетворяютъ уравненіямъ подобнаго же вида. Совокупность этихъ комбинацій Frobenius называетъ Wurzelgruppe. Итакъ, будемъ разсматривать перестановочныя Wurzelgruppen.

§ 1.

Непосредственно можемъ построить перестановочную Wurzelgruppe n-го порядка, содержащую $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ линейно независимыхъ матрицъ. Это будетъ совокупность матрицъ

$$\mathrm{W} = \| a_{\mu\lambda} \|, \qquad (\mu, \lambda = 1, \ldots, n)$$

гдѣ всѣ коэффиціенты $a_{\mu\lambda}$ съ четными значками μ и нечетными λ — равны нулю, а прочіе $a_{\mu\lambda}$ — произвольны, — либо наоборотъ — всѣ $a_{\mu\lambda}$ съ нечетными μ и съ четными λ равны нулю, а прочіе $a_{\mu\lambda}$ — произвольны; т. е. наша W имѣетъ одинъ изъ двухъ видовъ:

$$\mathrm{W}_\alpha = \begin{Vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & a_{14} & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix} \quad \text{или:} \quad \mathrm{W}_\beta = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix} \qquad (\mathrm{I})$$

Легко показать, что при n нечетномъ они не эквивалентны, т. е. нѣтъ контрагредіентнаго преобразованія, которое бы переводило W_α въ W_β, а при n четномъ—эквивалентны.

Покажемъ, что не существуетъ перестановочной Wurzelgruppe n-го порядка съ бо́льшимъ числомъ линейно независимыхъ матрицъ, и что, кромѣ случая $n=3$, указанные типы (I)—единственные, для которыхъ это число равно $\left[\frac{n^2}{4}\right]$.

Для $n=1$ теорема очевидна; для $n=2,5$ ее легко доказать.

Итакъ, пусть она доказана для матрицъ n-го порядка; покажемъ, что она вѣрна и для матрицъ порядка $n+2$.

Извѣстно, что всякая Wurzelgruppe M содержитъ такую неравную нулю матрицу M, что

$$M \,.\, \mathrm{M}=0 \qquad (1);$$

а тогда M съ помощью контрагредіентнаго преобразованія можно представить въ видѣ:

$$M=\begin{array}{cl} \left\|\begin{array}{c:c} 0 & 0 \\ \hdashline J & 0 \end{array}\right\| & \begin{array}{l} \}\,n_2 \\ \}\,n_1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{n_1} & \underbrace{\quad}_{n_2} \end{array} & \end{array} \qquad (n_2 \geq n_1),$$

гдѣ знаки 0 — обозначаютъ матрицы, всѣ коэффиціенты которыхъ— нули,—и Wurzelgruppe M символически изобразится такъ:

$$\mathrm{M}=\begin{array}{cl} \left\|\begin{array}{c:c} 0 & 0 \\ \hdashline \mathrm{M}' & 0 \end{array}\right\| & \begin{array}{l} \}\,n_2 \\ \}\,n_1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{n_1} & \underbrace{\quad}_{n_2} \end{array} & \end{array}$$

Но въ такомъ случаѣ и матрица

$$M_0=\begin{array}{cl} \left\|\begin{array}{c:c} 0 & 0 \\ \hdashline \begin{array}{c} 00\ldots0 \\ 00\ldots0 \\ \ldots \\ 00\ldots0 \\ 10\ldots0 \end{array} & 0 \end{array}\right\| & \begin{array}{l} \}\,n_2 \\ \}\,n_1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\qquad}_{n_1} & \underbrace{\qquad}_{n_2} \end{array} & \end{array}$$

удовлетворяетъ уравненію (1) и принадлежитъ къ M.

Переставивъ въ M_0 первый съ предпослѣднимъ столбецъ и первую съ предпослѣдней строку, преобразуемъ ее въ эквивалентную матрицу

$$M_0'=\left\|\begin{array}{c:c} 0 & 0 \\ \hdashline 0 & \begin{array}{c} 00 \\ 10 \end{array} \end{array}\right\|$$

А тогда, ввиду равенствъ

$$M_0'\mathrm{M}=0,\quad \mathrm{M}M_0'=0,$$

матрицы совокупности М будутъ имѣть видъ:

$$\mathrm{M}=\left\|\begin{array}{c:cc} & a_1 & 0\\ & a_2 & 0\\ \mathrm{M}_1 & \vdots & \vdots\\ & a_n & 0\\ \hdashline 0\;0\ldots0 & 0 & 0\\ b_1b_2\ldots b_n & m & 0\end{array}\right\|$$

Выдѣлимъ изъ нихъ всѣ тѣ, въ которыхъ

$$m=0,\ a_i=0,\ b_k=0 \qquad (i,\ k=1,\ \ldots,\ n);$$

получимъ совокупность съ базисомъ вида

$$\mathrm{M}_\alpha^{(j)}=\left\|\begin{array}{c:c} \mathrm{M}_{1\alpha}^{(j)} & 0\\ \hdashline 0 & 0\end{array}\right\| \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ q);$$

всѣ ея матрицы перестановочны, и линейно независимыхъ среди нихъ, по предыдущему, есть $q\leqslant\left[\frac{n^2}{4}\right]$.

Оставшаяся часть членовъ совокупности М имѣетъ видъ:

$$\mathrm{M}_\beta=\left\|\begin{array}{c:cc} & a_1 & 0\\ & a_2 & 0\\ \mathrm{M}_{1\beta} & \vdots & \vdots\\ & a_n & 0\\ \hdashline 0\;0\ldots0 & 0 & 0\\ b_1b_2\ldots b_n & m & 0\end{array}\right\|=\left\|\begin{array}{c:cc} \mathrm{M}_{1\beta} & \multicolumn{2}{c}{A}\\ \hdashline \multirow{2}{*}{B} & 0 & 0\\ & m & 0\end{array}\right\|$$

Выдѣлимъ изъ нея, въ свою очередь, всѣ матрицы, для которыхъ $A\neq0$ или $m\neq0$; линейно независимыхъ среди нихъ будетъ $p+1\leqslant n+1$ итакъ, M_β разобьется на двѣ совокупности

$$\mathrm{M}_\gamma=\left\|\begin{array}{c:cc} \mathrm{M}_{1\gamma} & \multicolumn{2}{c}{A}\\ \hdashline \multirow{2}{*}{B_1} & 0 & 0\\ & m & 0\end{array}\right\| \quad \text{и} \quad \mathrm{M}_\delta=\left\|\begin{array}{c:cc} \mathrm{M}_{1\delta} & \multicolumn{2}{c}{0}\\ \hdashline \multirow{2}{*}{B_2} & 0 & 0\\ & 0 & 0\end{array}\right\|$$

Ввиду равенства

$$M_\gamma \,.\, M_\delta = M_\delta \,.\, M_\gamma$$

получимъ

$$B_2 A = 0\,,$$

откуда заключаемъ, что линейно независимыхъ среди матрицъ B_2, а значитъ и среди M_δ есть maximum $n-p$.

Поэтому число всѣхъ линейно независимыхъ матрицъ M_β есть

$$s \leq n+1\,,$$

а линейно-независимыхъ матрицъ M — всего

$$t-1 = q+s \leq \left[\frac{n^2}{4}\right] + n + 1 = \left[\frac{(n+2)^2}{4}\right]$$

Далѣе: $t-1$ можетъ быть равно $\left[\frac{(n+2)^2}{4}\right]$ лишь въ томъ случаѣ, если

$$q = \left[\frac{n^2}{4}\right] \text{ и } s = n+1\,;$$

а тогда, *во-первыхъ*, совокупность $M_{1\alpha}^{(i)}$ можетъ быть приведена къ одному изъ видовъ (I), и значитъ, *во-вторыхъ*, равенства

$$M_\alpha M_\beta = M_\beta M_\alpha$$

показываютъ, что

$$\text{либо } M_\beta = \left\|\begin{array}{c|cc} & a_1 & 0 \\ & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & \vdots & \vdots \\ & & 0 \\ \hline 0\,0\,0\ldots0 & 0 & 0 \\ 0b_2 0b_4\ldots0 & m & 0 \end{array}\right\|, \text{ либо } M_\beta = \left\|\begin{array}{c|cc} & 0 & 0 \\ & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ & a_4 & 0 \\ & \vdots & \vdots \\ & & 0 \\ \hline 0\,0\ldots0 & 0 & 0 \\ b_1 0 b_3 0\ldots & m & 0 \end{array}\right\|,$$

гдѣ, очевидно, всѣ a_i и b_k можно считать совершенно произвольными.

Переставляя теперь въ одномъ (подходяще выбранномъ) изъ этихъ двухъ видовъ M_β $n+2$-ую строку съ $n+1$-ой и $n+2$-ой столбецъ съ $n+1$-мъ, мы и получимъ, что типы (I)—единственные, которымъ можетъ быть эквивалентна перестановочная Wurzelgruppe n-го порядка, заключающая $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ линейно независимыхъ элементовъ.

Итакъ, можно считать доказанной *теорему:*

Наибольшее число линейно независимыхъ матрицъ перестановочной группы n-го порядка есть $t=\left[\frac{n^2}{4}\right]+1$; *при* $n \neq 2, 3$ *группа, для которой* $t=\left[\frac{n^2}{4}\right]+1$, *эквивалентна совокупности линейныхъ комбинацій вида* $x.\mathrm{W}+y.J$; *при* $n=2, 3$ *къ этимъ типамъ присоединяются еще совокупности матрицъ видовъ:*

$$1)\ \begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{Vmatrix},\quad 2)\ \begin{Vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{Vmatrix},\quad 3)\ \begin{Vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{Vmatrix}\quad \text{и}\quad 4)\ \begin{Vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{Vmatrix}.$$

Теорема доказана лишь для группъ матрицъ, удовлетворяющихъ уравненіямъ вида

$$(x-\alpha)^n=0;$$

но легко видѣть, что она справедлива и вообще, потому что всегда

$$\left[\frac{n^2}{4}\right]+1>\left[\frac{u^2}{4}\right]+1+\left[\frac{(n-u)^2}{4}\right]+1,$$

за исключеніемъ случаевъ $n=2, 3$, которые и приводятъ къ типамъ 1), 3) и 4). Типъ 2) получается, очевидно, оттого, что при $n=3$ существуетъ равенство $\left[\frac{n^2}{4}\right]+1=n$.

Формулировка этой теоремы въ упомянутой статьѣ J. Schur'а отличается отъ предложенной тѣмъ, что вмѣсто Wurzelgruppen видовъ (I) онъ получаетъ: 1) для n четнаго ($n=2m$) совокупность W въ видѣ

$$\mathrm{W}_1=\left\|\begin{array}{c:c} 0 & 0 \\ \hdashline \underbrace{\mathrm{W}_1'}_{m} & \underbrace{0}_{m} \end{array}\right\|\begin{matrix}\}\,m \\ \}\,m\end{matrix} \qquad \text{(II)}$$

гдѣ всѣ коэффиціенты матрицъ W_1' произвольны, 2) для n нечетнаго ($n=2m+1$) въ двухъ разныхъ видахъ:

$$\mathrm{W}_2=\left\|\begin{array}{c:c:c} 0 & 0 & 0 \\ \hdashline \alpha_1\ldots\alpha_m & 0 & 0 \\ \hdashline \mathrm{W}_2' & & 0 \\ \underbrace{\qquad\quad}_{m} & & \underbrace{\qquad\quad}_{m} \end{array}\right\|\begin{array}{l} \}\,m \\ \\ \}\,m \\ \\ \end{array},\quad \mathrm{W}_3=\left\|\begin{array}{c:c:c} 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \\ \hdashline \mathrm{W}_3' & \begin{matrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{matrix} & 0 \\ \underbrace{\qquad\quad}_{m} & & \underbrace{\qquad\quad}_{m} \end{array}\right\|\begin{array}{l} \}\,m \\ \\ \}\,m \\ \\ \end{array},\ (\mathrm{II}a, \mathrm{II}b)$$

гдѣ

$$\mathrm{W}_2',\ \mathrm{W}_3',\ \alpha_i,\ \beta_k \qquad (i=1,\ldots,m)$$

тоже совершенно произвольны.

Легко показать, что Wurzelgruppen (I) симметричной перестановкой строкъ и столбцовъ переходятъ въ Wurzelgruppen (II), т.-е. что W всегда эквивалентна одной изъ трехъ совокупностей:

$$\mathrm{W}_1,\ \mathrm{W}_2,\ \mathrm{W}_3.$$

§ 2.

Изъ матрицъ перестановочной Wurzelgruppe M, удовлетворяющихъ уравненію (I) §-а 1, выберемъ матрицу M наивысшаго ранга r.

Извѣстно, что $2r\leq n$; пусть M представлена въ видѣ:

$$M=\left\|\begin{array}{c:c:c} 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \\ \hdashline J & 0 & 0 \\ \underbrace{\ }_{r} & & \underbrace{\ }_{r} \end{array}\right\|\begin{array}{l} \}\,r \\ \\ \}\,r \\ \\ \end{array}$$

Тогда M представится такъ:

$$\mathrm{M}=\left\|\begin{array}{c:c:c} 0 & 0 & 0 \\ \hdashline A & B & 0 \\ \hdashline C & D & 0 \\ \underbrace{\ }_{r} & & \underbrace{\ }_{r} \end{array}\right\|\begin{array}{l} \}\,r \\ \\ \}\,r \\ \\ \end{array}$$

Выдѣлимъ изъ нея совокупность M_1 элементовъ, удовлетворяющихъ равенству

$$\mathrm{M}_1\mathrm{M}=0;$$

пусть

$$M_1 = \left\|\begin{array}{c:c:c} 0 & 0 & 0 \\ \hdashline A_1 & B_1 & 0 \\ \hdashline \underbrace{C_1}_{r} & D_1 & \underbrace{0}_{r} \end{array}\right\|\begin{array}{l} \}\,r \\ \\ \}\,r \end{array} = \left\|\begin{array}{c:c:c} 0 & 0 & 0 \\ \hdashline a_{11} \ldots a_{1r} & b_{11} \ldots b_{n-2r,\, n-2r} & \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ a_{n-2r,\, 1} \ldots a_{n-2r,\, r} & b_{n-2r,\, 1} \ldots & \\ \hdashline c_{11} \ldots c_{1r} & d_{11} \ldots d_{1,\, n-2r} & \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ c_{r,\, 1} \ldots c_{rr} & d_{r,\, 1} \ldots d_{r,\, n-2r} & \end{array}\right\|.$$

А такъ какъ рангъ матрицъ M_1 не можетъ бытъ больше r, то для всѣхъ ихъ должны удовлетворяться либо равенства

$$A_1 = 0,\ B_1 = 0 \tag{1}$$

либо равенства

$$B_1 = 0,\ D_1 = 0 \tag{2}$$

Дѣйствительно, составимъ для какой-нибудь матрицы изъ M_1 миноръ $r+1$-го порядка вида

$$K_{\lambda\mu} = \left\|\begin{array}{c:c} a_{\lambda 1} a_{\lambda 2} \ldots a_{\lambda r} & b_{\lambda\mu} \\ \hdashline & d_{1\mu} \\ & d_{2\mu} \\ C_1 & \vdots \\ & d_{r\mu} \end{array}\right\|$$

и разложимъ его по элементамъ первой строки и послѣдняго столбца:

$$K_{\lambda\mu} = b_{\lambda\mu} . |C_1| - \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial |C_1|}{\partial c_{ik}} . a_{\lambda i} d_{k\mu};$$

чтобы онъ былъ равенъ нулю, необходимо (ввиду произвольности коэффиціентовъ c_{ik}) должны выполняться равенства

$$b_{\lambda\mu} = 0$$

$$a_{\lambda i} . d_{k\mu} = 0$$

для всѣхъ возможныхъ комбинацій значковъ λ, μ, i, k; а эти равенства и равносильны одному изъ условій (1), (2).

Итакъ, совокупность M_1 имѣетъ одинъ изъ видовъ:

$$M_{1a}=\left\|\begin{matrix}0&0&0\\A_1&0&0\\C_1&0&0\end{matrix}\right\|,\quad M_{1d}=\left\|\begin{matrix}0&0&0\\0&0&0\\C_1&D_1&0\end{matrix}\right\|,$$

Въ дальнѣйшемъ будемъ разсматривать лишь видъ M_{1a}, потому что разсужденія относительно M_{1d} были бы совершенно тѣ же.

Очевидно, базисъ совокупности M_{1a} можетъ быть представленъ матрицами двухъ видовъ:

$$M'_{1a}=\left\|\begin{matrix}0&0&0\\0&0&0\\C_1&0&0\end{matrix}\right\|\quad\text{и}\quad M''_{1a}=\left\|\begin{matrix}0&0&0\\A_1&0&0\\0&0&0\end{matrix}\right\|,$$

Для приведенія M''_{1a} къ простѣйшему виду воспользуемся пріемомъ, который указанъ J. Schur'омъ въ упомянутой статьѣ.

Вообразимъ всѣ матрицы A_1 написанными въ рядъ:

$$\mathsf{A}=\left\|\,A_1^{(1)}A_1^{(2)}A_1^{(3)}\ldots\right\|,$$

Пусть рангъ матрицы A есть r_1; подходящей симметричной перестановкой строкъ и столбцовъ въ M достигнемъ того, что r_1 послѣднихъ строкъ матрицы A будутъ имѣть тотъ же рангъ r_1; пусть A послѣ этой перестановки имѣетъ видъ:

$$\mathsf{A}=\left\|\begin{array}{c}\cdots\cdots\cdots\cdots a_{1,\rho}\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots a_{2,\rho}\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \vdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots a_{n-2r-r_1,\rho}\cdots\cdots\\ \hline \cdots\cdots\cdots\cdots a'_{1,\rho}\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots a'_{2,\rho}\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \vdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots a'_{r_1,\rho}\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\|$$

Изъ разсужденій, подобныхъ тѣмъ, какими мы пользовались для полученія M_{1a} и M_{1d}, слѣдуетъ, что можно найти такую матрицу T, что въ произведеніи

$$UA_1=r\left\{\left\|\begin{array}{c|c}J&\overbrace{T}^{r_1}\\ \hline 0&J\end{array}\right\|\right.\cdot A_1$$

первыя $n-2r-r_1$ строкъ будутъ сплошь состоять изъ нулей; а въ такомъ случаѣ, преобразовавъ M къ эквивалентному виду:

$$V.\mathrm{M}.V^{-1} = \begin{array}{r} r\{ \\ \\ r\{ \end{array}\left\|\begin{array}{c:c:c} J & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & U & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & J \end{array}\right\| . \ \mathrm{M}\ . \left\|\begin{array}{c:c:c} J & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & U^{-1} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & J \end{array}\right\|$$

и обозначивъ преобразованныя совокупности М и M_1 опять черезъ М и M_1, получимъ:

$$\mathrm{M}_{1a} = \left\|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ UA_1 & 0 & 0 \\ C_1 & 0 & 0 \end{array}\right\|$$

Итакъ, лишь r_1 нижнихъ строкъ въ матрицахъ UA_1 содержатъ неравные нулю коэффиціенты; а тогда, ввиду равенства

$$\mathrm{M}.\mathrm{M}_{1a} = 0,$$

легко понять, что r_1 послѣднихъ столбцовъ во всѣхъ матрицахъ B и D состоятъ изъ нулей, и значитъ M_{1a} имѣетъ видъ:

$$\mathrm{M}_{1a} = \begin{array}{r} \\ \\ r+r_1\{ \end{array}\left\|\begin{array}{c:c:c} 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \\ \hdashline \underbrace{M}_{r} & 0 & 0 \end{array}\right\|$$

гдѣ матрицы M — совершенно произвольны. *Итакъ, число линейно независимыхъ матрицъ M_{1a} есть $r(r+r_1)$.*

§ 3.

Всѣ прочія матрицы М, на основаніи равенствъ

$$\mathrm{M}_{1a}\mathrm{M} = \mathrm{M}\mathrm{M}_{1a} = 0,$$

будутъ имѣть видъ:

$$\mathrm{M} = \left\|\begin{array}{c:c:c} 0 & 0 & 0 \\ \hdashline N & P & 0 \\ \hdashline \underbrace{M}_{r} & \underbrace{Q}_{n-2r-r_1} & \underbrace{0}_{r+r_1} \end{array}\right\| \begin{array}{l} \}r \\ \}n-2r-r_1 \\ \}r+r_1 \end{array} . \tag{3}$$

Очевидно, всегда можемъ базисъ нашей Wurzelgruppe представить матрицами двухъ родовъ:

$$\mathrm{M}_{\mathrm{I}} = \mathrm{M}_{1a} = \begin{array}{r} \\ \\ r+r_1\{ \end{array}\left\|\begin{array}{c:c:c} 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \\ \hdashline \underbrace{M}_{r} & 0 & 0 \end{array}\right\| \quad \text{и} \quad \mathrm{M}_{\mathrm{II}}^{(i)} = \left\|\begin{array}{c:c:c} 0 & 0 & 0 \\ \hdashline N^{(i)} & P^{(i)} & 0 \\ \hdashline \underbrace{\quad}_{r} & \underbrace{Q^{(i)}}_{n-2r-r_1} & \underbrace{0}_{r+r_1} \end{array}\right. \begin{array}{l} \}r \\ \\ \}r+r_1 \end{array} \qquad (i=1,\, 2, \ldots ,\, s)$$

Докажемъ, что рангъ матрицы

$$\mathrm{N}=\left\| N^{(1)}N^{(2)}N^{(3)}\ldots N^{(s)}\right\|$$

есть $S=n-2r-2r_1$. Дѣйствительно, пусть онъ есть $s_1 \leqslant S$; тогда совершенно подобно тому, какъ мы сдѣлали это для A_1, можемъ преобразовать M такъ, чтобы первыя $S-s_1$ строкъ матрицъ $N^{(i)}$ состояли изъ нулей:

$$N^{(i)}=\left\|\begin{array}{c}0\\ \hdashline \mathrm{N}^{(i)}\end{array}\right\|\begin{array}{l}\}{\scriptstyle S-s_1}\\ \}{\scriptstyle s_1}\end{array},$$

а тогда, ввиду символическаго соотношенія

$$\mathrm{M}^2 \succ \mathrm{M}\ ^{1)},$$

послѣдніе s_1 столбцовъ въ первыхъ $S-s_1$ строкахъ матрицъ P тоже будутъ состоять изъ нулей, и M можно будетъ переписать такъ:

$$\mathrm{M}=\begin{array}{r|c:c:c|} & \overbrace{}^{r} & & \\ r\{ & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline S-s_1\{ & 0 & P_1 & 0 \\ \hdashline r+r_1+s_1\{ & \multicolumn{2}{c:}{L} & 0 \\ & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{}_{n-r-r_1}} & \end{array};$$

гдѣ, очевидно, P_1 — совокупность перестановочныхъ матрицъ.

Выберемъ (что всегда возможно) квадратную матрицу X такъ, чтобы первая строка каждой изъ матрицъ совокупности

$$X^{-1}P_1X=P$$

состояла сплошь изъ нулей, и преобразуемъ M къ виду

$$\mathbf{M}=Y^{-1}\mathrm{M}Y,$$

---

[1] Знакъ $\succ$ обозначаетъ, что всѣ матрицы совокупности M^2 заключаются въ совокупности M.

гдѣ

$$Y=\begin{array}{r}
\\
r\{ \\
S-s_1\{ \\
r+r_1+s_1\{ \\
\\
\end{array}
\left\|\begin{array}{c:c:c}
\overbrace{J}^{r} & 0 & 0 \\ \hdashline
0 & X & \\ \hdashline
\multicolumn{2}{c:}{0} & J \\
\multicolumn{2}{c}{\underbrace{\qquad\qquad}_{n-r-r_1-s_1}} &
\end{array}\right\|;$$

получимъ эквивалентную Wurzelgruppe вида

$$\mathbf{M}=\begin{array}{r}
\\
r\{ \\
S-s_1\{ \\
r+r_1+s_1\{ \\
\\
\end{array}
\left\|\begin{array}{c:c:c}
\overbrace{0}^{r} & 0 & 0 \\ \hdashline
0 & \mathbf{P} & \\ \hdashline
\multicolumn{2}{c:}{\mathbf{L}} & 0 \\
\multicolumn{2}{c}{\underbrace{\qquad\qquad}_{n-r-r_1}} &
\end{array}\right\|,$$

Но она заключаетъ въ себѣ уже по крайней мѣрѣ $(r+1)(r+r_1)$ линейно независимыхъ матрицъ $\mathbf{M}_1$, удовлетворяющихъ уравненію

$$\mathbf{M}_1\mathbf{M}=0,$$

что противорѣчитъ выводу §-а 2.

Итакъ, дѣйствительно,

$$s_1=S.$$

Отсюда получаемъ, что такъ какъ Wurzelgruppe M въ (3) тогда и только тогда удовлетворяетъ символическому равенству

$$\mathrm{M}^2=0,$$

когда

$$PN=0,\ \ QN=0,\ \ P^2=0,\ \ QP=0;$$

а рангъ матрицы N есть S, то

$$P=0,\ Q=0,$$

а послѣднія равенства возможны лишь при $S=0$.

Присоединяя относительно M_{1d} тѣ же разсужденія, которыя были примѣнены относительно M_{1a}, получаемъ такую теорему:

I. *Всякая Wurzelgruppe* M, *удовлетворяющая символическому уравненію*

$$\mathrm{M}^2=0,$$

эквивалентна одной изъ совокупностей матрицъ вида

$$\begin{Vmatrix} m_{11}m_{12}\dots m_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_{n1}m_{n2}\dots m_{nn} \end{Vmatrix},$$

гдѣ, для нѣкотораго опредѣленнаго r *между* 0 *и* n, *всѣ коэффиціенты*

$$m_{n-r-\lambda,\,k},\ \ m_{i,\,r+\mu}$$

$$(i,\ k=1,\ 2,\dots,\ n,\ \mu=1,\ 2,\dots,\ n-r,\ \lambda=1,\ 2,\dots,\ n-r-1)$$

суть нули, а прочіе m_{ik} — *произвольны.*

Значитъ, если рангъ группы перестановочныхъ матрицъ, удовлетворяющихъ уравненіямъ

$$(z-\alpha_j)^2=0,$$

есть r, то число линейно независимыхъ среди нихъ есть

$$r(n-r)+1$$

Далѣе: всегда въ (3) число линейно независимыхъ матрицъ $\mathrm{M}_{\mathrm{II}}^{(i)}$ совпадаетъ съ числомъ линейно независимыхъ $N^{(i)}$; дѣйствительно, разобьемъ совокупность M_{II} надвѣ:

$$\mathrm{M}'_{\mathrm{II}}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ N & P' & 0 \\ 0 & Q' & 0 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \mathrm{M}''_{\mathrm{II}}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & P'' & 0 \\ 0 & Q'' & 0 \end{Vmatrix},$$

изъ которыхъ первая заключаетъ всѣ матрицы M_{II}, для которыхъ

$$N\neq 0,$$

а вторая — всѣ прочія; изъ перестановочности матрицъ $\mathrm{M}'_{\mathrm{II}}$ съ $\mathrm{M}''_{\mathrm{II}}$ слѣдуетъ:

$$P''N=0;\quad Q''N=0,$$

откуда

$$P''=Q''=0,$$

и значитъ

$$\mathrm{M}''_{\mathrm{II}}=0,$$

что и требовалось.

Итакъ число линейно независимыхъ матрицъ M_{II} не превышаетъ $S.r$, а общее число линейно независимыхъ матрицъ группы М не превышаетъ $r(r+r_1)+Sr=r(n-r)$. Мы получили число, наибольшее значенiе котораго есть $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ и достигается при $r=\left[\frac{n}{2}\right]$.

Равенство $t-1=r(n-r)$ существуетъ лишь въ томъ случаѣ, если всѣ элементы матрицъ N совершенно произвольны; а тогда для $r \neq 1$ легко получается:

$$P=0,\quad Q=0,\quad \text{и значитъ}\quad S=0,$$

откуда

$$\mathrm{M}^2=0$$

Получаемъ теорему:

II. *Если наивысшiй рангъ матрицъ* M *перестановочной Wurzelgruppe* М, *удовлетворяющихъ равенству*

$$M\mathrm{M}=0,$$

есть $r \neq 1$, *то наибольшее значенiе числа линейно независимыхъ матрицъ этой группы есть*

$$n(n-r);$$

это число равно $n(n-r)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{M}^2=0.$$

Видъ всѣхъ группъ М, удовлетворяющихъ послѣднему уравненiю дается теоремой I.