Пріемъ Даламбера въ теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ постоянными коэффиціентами и его обобщенія.

М. Н. Лагутинскаго.

Когда система линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ постоянными коэффиціентами перестаетъ быть общей, т. е. когда характеристическое уравненіе этой системы перестаетъ имѣть различные корни, нѣкоторые изъ ея интеграловъ совпадаютъ, и такимъ образомъ число интеграловъ оказывается недостаточнымъ. Даламберъ для ихъ полученія предложилъ пріемъ, который состоитъ во введеніи безконечно-малаго параметра и послѣдующаго перехода къ предѣлу.

Я не имѣю намѣренія поставить эту задачу во всей общности, а только попытаюсь выяснить значеніе этого метода и потому ограничусь его примѣненіемъ къ нѣкоторымъ вопросамъ интегрированія уравненій. Болѣе послѣдовательно я остановлюсь на приведеніи системы линейныхъ дифференціальныхъ уравненій къ канонической формѣ Вейерштрасса и воспользуюсь имъ для опредѣленія формъ, допускающихъ безконечное число линейныхъ преобразованій самихъ въ себя.

§ 1. Пусть

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\frac{dx_3}{X_3}=\ldots=\frac{dx_p}{X_p} \tag{1}$$

нѣкоторая дифференціальная система уравненій. Предположимъ функціи X_i для простоты голоморфными, какъ относительно перемѣнныхъ x_i, такъ и относительно параметровъ $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_q$.

Положимъ, что намъ удалось найти интегралъ f этой системы, голоморфный относительно перемѣнныхъ x_i и параметровъ b_i, и допустимъ, что въ томъ случаѣ, когда постоянныя b_i связаны соотношеніями

$$\Theta_j(b_1, b_2, \ldots, b_q)=0, \qquad (j=1, 2, 3, \ldots, l) \tag{2}$$

интегралъ f обращается въ постоянную.

Такимъ образомъ, въ этомъ случаѣ болѣе общая система будетъ обладать интеграломъ, а когда она станетъ частной и параметры ея пріобрѣтутъ значенія b_{01}, b_{02}, $b_{03}, \ldots, b_{0q}$, находящіяся внутри области голоморфности и удовлетворяющія условіямъ (2), этотъ интегралъ обратится въ постоянную.

Можно примѣнить къ этому случаю пріемъ Даламбера. Для этого надо ввести прежде всего новый параметръ, по которому позже мы будемъ дифференцировать.

Въ области измѣненія перемѣнныхъ b_i уравненія (2) представятъ многообразіе нѣкотораго измѣренія, проходящее черезъ точку $A(b_{01}, b_{02}, \ldots, b_{0q})$. Возьмемъ внутри вышеупомянутой области голоморфности параметровъ b_i точку $B(b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1q})$ такъ, чтобы всѣ точки отрѣзка AB, за исключеніемъ точки A, находились внѣ многообразія, опредѣляемаго уравненіями (2).

Замѣщаемъ въ системѣ (1) и въ интегралѣ f параметры b_i соотвѣтственно черезъ $b_{0i} + h(b_{1i} - b_{0i})$. Тогда для всѣхъ значеній h большихъ нуля и не большихъ единицы функція f будетъ интеграломъ системы (1).

Обозначимъ результатъ подстановки $b_i = b_{0i}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, q)$ въ тѣ же функціи въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{gathered} X_i = X_{0i} + h^k X_{1i} \qquad (i=1, 2, 3, \ldots, p) \\ f = F_0 + hF_1 + h^2F_2 + \ldots + h^{k_1}F_{k_1} + h^{k_1+1} F_{k_1+1}, \end{gathered} \tag{3}$$

гдѣ $F_0, F_1, F_2, \ldots, F_{k_1-1}$ — нѣкоторыя постоянныя, $X_{1i} (i = 1, 2, 3, \ldots, p)$ и F_{k_1+1} — функціи, которыя для $h = 0$ остаются конечными, и, наконецъ, F_{k_1} — функція, зависящая отъ перемѣнныхъ x_i, но независящая отъ h.

Теперь покажемъ, что функція F_{k_1} — интегралъ системы:

$$\frac{dx_1}{X_{01}} = \frac{dx_2}{X_{02}} = \frac{dx_3}{X_{03}} = \ldots = \frac{dx_p}{X_{0p}}, \tag{4}$$

т. е. система, которую мы получимъ изъ системы (1), если выполнимъ въ ней подстановку $b_i = b_{0i}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, q)$.

Такъ какъ f будетъ интегралъ системы (1), мы можемъ написать тождество:

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

или принимая во вниманіе равенство (3):

$$\sum_{i=1}^{p}\{X_{0i}+h^k X_{1i}\}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\sum_{j=0}^{k_1+1} h^j F_j\right\}=0.$$

Но функціи $F_0, F_1, F_2, \ldots, F_{k_1-1}$ — постоянныя и производныя отъ нихъ равны нулю, и мы должны имѣть:

$$h^{k_1}\sum_{i=1}^{p} X_{0i}\frac{\partial F_{k_1}}{\partial x_i}+h^{k_1+1}\sum_{i=1}^{p} X_{0i}\frac{\partial F_{k_1+1}}{\partial x_i}+h^{k+k_1+1}\sum_{i=1}^{p} X_{1i}\frac{\partial F_{k_1}}{\partial x_i}+$$
$$+h^{k+k_1+1}\sum_{i=1}^{p} X_{1i}\frac{\partial F_{k_1+1}}{\partial x_i}=0.$$

Если мы раздѣлимъ это тождество на h^{k_1} и перейдемъ къ предѣлу $h=0$, то получимъ тождественно:

$$\sum_{i=1}^{p} X_{0i}\frac{\partial F_{k_1}}{\partial x_i}=0,$$

откуда и слѣдуетъ наше утвержденіе.

Отсюда слѣдуетъ такое правило для опредѣленія интеграла въ томъ случаѣ, когда въ силу соотношеній между параметрами, входящими въ систему (1), интегралъ, найденный для болѣе общаго случая, обращается въ постоянную.

Опредѣливъ подстановку $b_i=b_{0i}+h(b_{1i}-b_{0i})$ $(i=1, 2, 3, \ldots, q)$, *производимъ ее въ интегралъ* f *и, такъ какъ онъ представляетъ по предположенію голоморфную функцію параметровъ* b_i, *то всѣ производныя отъ интеграла* f *по параметру* h *будутъ имѣть вполнѣ опредѣленное значеніе. Будемъ послѣдовательно опредѣлять значенія этихъ производныхъ для значенія параметра* h, *равнаго нулю, и первая изъ этихъ послѣднихъ производныхъ, не обращающаяся въ постоянную, и будетъ искомымъ интеграломъ системы (4).*

Очевидно, конечно, что можно снять условія голоморфности; но я не останавливаюсь на этомъ, чтобы введеніемъ ряда сложныхъ условій не затемнить основной идеи.

Приведемъ простой примѣръ на только-что изложенную теорію.

Разсмотримъ уравненіе:

$$\frac{dy}{x^{n-1}\log x}=\frac{dx}{1}. \tag{5}$$

Его интегралъ равенъ

$$n^2y+x^n-nx^n\log x.$$

При $n=0$ этотъ послѣдній обращается въ постоянную равную единицѣ. Согласно только что изложенному, беремъ производную по параметру n и получаемъ:

$$2ny - nx^n \log^2 x$$

интегралъ дифференціальнаго уравненія

$$\frac{dy}{\log x} = \frac{dx}{x},$$

которое получимъ изъ уравненія (5), если примемъ въ немъ $n=0$.

§ 2. Предположимъ, что извѣстны два интеграла системы (1), но при выполненіи условій (2) они оба обращаются въ постоянныя. Соглано предыдущему вводимъ параметръ h и опредѣляемъ по обоимъ интеграламъ два новыхъ для случая $h=0$. Но можетъ случиться, что эти два интеграла не будутъ различны, и одинъ будетъ функціей другого.

Въ этомъ случаѣ опять можно примѣнить переходъ къ предѣлу, чтобы найти второй интегралъ. Предположимъ оба интеграла f_1 и f_2 разложенными въ рядъ по степенямъ h, т. е. положимъ:

$$f_1 = \sum_{l=1}^{\infty} \varphi_{1l}\, h^l, \qquad f_2 = \sum_{l=1}^{\infty} \varphi_{2l} h^l, \tag{6}$$

гдѣ φ_{11} $\varphi_{12} \ldots, \varphi_{1k_1}$ и φ_{21} $\varphi_{22} \ldots \varphi_{2k_2}$—нѣкоторыя постоянныя.

Можно написать равенства (6) и въ такомъ видѣ:

$$f_1 = \sum_{l=1}^{k_1} \varphi_{1l}\, h^l + h^{k_1+1} \sum_{l=1}^{\infty} \varphi_{1,\, k_1+l} h^{l-1}$$

$$f_2 = \sum_{l=1}^{\infty} \varphi_{2\,l} h^l + h^{k_2+1} \sum_{l=1}^{\infty} \varphi_{1,\ k_2+l}\, h^{l-1}$$

Обозначимъ суммы

$$\sum_{l=1}^{k_1} \varphi_{1l} h^l, \sum_{l=1}^{k_2} \varphi_{1l} h^l, \sum_{l=1}^{\infty} \varphi_{1,\ k_1+l}\, h^{l-1} \quad \text{и} \quad \sum_{l=1}^{\infty} \varphi_{2,\ k_2+1}\, h^{l-1}$$

соотвѣтственно черезъ A_1, A_2, f_{11}, f_{12}. Тогда интегралы f_1 и f_2 могутъ быть написаны въ видѣ: $A_1 + h^{k_1+1} f_{11}$, $A_2 + h^{k_2+1} f_{22}$. Такъ какъ A_1, A_2 и h—постоянныя, то эти выраженія показываютъ, что функціи f_{11} и f_{22} будутъ интегралами системы

$$\frac{dx_1}{X_{01}+h^k X_{11}} = \frac{dx_2}{X_{02}+h^k X_{12}} = \frac{dx_3}{X_{03}+h^k X_{13}} = \ldots = \frac{dx_p}{X_{0p}+h^k X_{1p}}, \tag{7}$$

которую мы получили изъ системы (1) подстановкой

$$b_i = b_{0i} + h(b_{1i} - b_{0i}). \qquad (i=1, 2, 3, \ldots p) \qquad (8)$$

Эти два интеграла будутъ, какъ и f_1 и f_2, независимы, и, слѣдовательно, по крайней мѣрѣ одинъ изъ опредѣлителей матриссы

$$\left| \begin{array}{ccccc} \frac{\partial f_{11}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{11}}{\partial x_2} & \frac{\partial f_{11}}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_{11}}{\partial x_p} \\ \frac{\partial f_{22}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{22}}{\partial x_2} & \frac{\partial f_{22}}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_{22}}{\partial x_p} \end{array} \right| \qquad (9)$$

будетъ отличенъ отъ нуля.

Пусть это будетъ $B = \frac{D(f_{11}, f_{22})}{D(x_1, x_2)}$.

Полагая въ функціяхъ f_{11} и f_{22} $h=0$, мы получаемъ непосредственно интегралы Φ_{1, k_1+1} и Φ_{2, k_2+1} для системы (4). Но мы разсматриваемъ на этотъ разъ предположеніе, что эти интегралы связаны функціональной зависимостью и, слѣдовательно, въ частности опредѣлитель $\frac{D(\Phi_{1,k_1+1}\,\Phi_{2,k_2+1})}{D(x_1, x_2)}$ равенъ нулю. Но онъ составляетъ первый членъ разложенія опредѣлителя B по степенямъ параметра h, и потому можно представить его въ видѣ $h^{k_3}\psi$, гдѣ k_3 — цѣлое положительное число, а ψ—функція необращающаяся въ нуль вмѣстѣ съ h.

Пусть

$$\Phi_{2_1, k+1} = \Theta(\Phi_{1, k_1+1}).$$

Если мы исключимъ изъ области голоморфности перемѣнныхъ $x_i (i=1, 2, 3, \ldots, p)$ тѣ значенія системы, которыя обращаютъ въ нуль одновременно первыя производныя функція Φ_{1, k_1+1}, то изъ тождества (10) мы послѣдовательнымъ дифференцированіемъ можемъ получить значеніе производной $\Theta^{(n)}(\Phi_{1, k_1+1})$ при сколь угодно большомъ значеніи порядка производной n.

Возьмемъ интегралъ:

$$f_{22} - \Theta(f_{11}).$$

При $h=0$ въ силу тождества (10) онъ обращается въ нуль; слѣдовательно, если разложить его въ строку Маклореня, то мы можемъ написать:

$$f_{22} - \Theta(f_{11}) = h\Phi_{3,2} + h^2\Phi_{3,3} + h^3\Phi_{3,4} + \ldots + h^{k_4}\Phi_{3, k_4} + h^{k_4+1}\Phi_{3, k_4+1},$$

гдѣ число k_4 можетъ быть сколь угодно большимъ, а функція Φ_{3,k_4+1} не теряетъ непрерывности при $h=0$.

Если $\Phi_{3,2}$ не представляетъ собой функцію отъ Φ_{1,k_1+1}, то, очевидно, эта функція будетъ вторымъ интеграломъ для системы (4). Если же существуетъ тождество:

$$\Phi_{3,2}=\Theta_1(\Phi_{1,k_1+1}), \tag{11}$$

то, пользуясь имъ, мы безъ труда находимъ новый интегралъ системы (7):

$$f_{22}-\Theta(f_{11})-h\Theta_1(f_{11})=h^2\Phi_{4,3}+h^3\Phi_{4,4}+h^4\Phi_{4,5}+\ldots+h^{k_4}\Phi_{4,k_4}+h^{k_4+1}\Phi_{4,k_4+1},$$

гдѣ функція Φ_{4,k_4+1} не теряетъ непрерывности при $h=0$.

Продолжая разсуждать точно такъ же, мы либо придемъ къ новому интегралу $\Phi_{l,l-1}$, либо къ тождеству типа:

$$\Phi_{l,l-1}=\Theta_{l-2}(\Phi_{1,k_1+1}), \tag{12}$$

которое приведетъ къ новому:

$$\begin{gathered}f_{22}-\Theta(f_{11})-h\Theta_1(f_{11})-h^2\Theta_2(f_{11})-\ldots-h^{l-2}\Theta_{l-2}(f_{11})=\\=h^{l-1}\Phi_{l+1,l}+h^l\Phi_{l+1,l+1}+\ldots+h^{k_4}\Phi_{l+1,k_4}+h^{k_4+1}\Phi_{l+1,k_4+1}.\end{gathered}$$

Нетрудно показать, что тождество (12) станетъ въ противорѣчіе съ нашими предположеніями относительно опредѣлителя B, если мы предположимъ l большимъ k_3+1. Примемъ въ самомъ дѣлѣ, что всѣ функціи $\Phi_{l+1,l}$ при l какомъ угодно будутъ функціями Φ_{1,k_1+1}; мы будемъ имѣть въ частности для $l=k_3+2$:

$$\begin{gathered}f_{22}-\Theta(f_{11})-h\Theta_1(f_{11})-h^2\Theta_2(f_{11})-\ldots-h^{k_3}\Theta_{k_3}(f_{11})=\\=h^{k_3+1}\Phi_{k_3+3,k_3+2}+h^{k_3+2}\Phi_{k_3+3,k_3+3}+\ldots+h^{k_4}\Phi_{k_3+3,k_4}+h^{k_4+1}\Phi_{k_3+3,k_4+1},\end{gathered}$$

гдѣ Φ_{k_3+3,k_4+1} при $h=0$ не теряетъ непрерывности.

Подвергнемъ это тождество операціи:

$$\frac{\partial f_{11}}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}-\frac{\partial f_{11}}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1}$$

и получимъ тождество:

$$B=h^{k_3}\psi=h^{k_3+1}\Psi,$$

которое показываетъ, что функція ψ противъ предположенія обращается въ нуль вмѣстѣ съ параметромъ h, и, слѣдовательно, одна изъ функцій $F_{l+1,l}$ при $l<k_3+2$ дастъ новый интегралъ для системы (4).

Итакъ, когда два интеграла системы (1) обращаются въ постоянныя при существованіи условій (2), всегда можно дать имъ такую форму:

$$
\begin{aligned}
f &= F_0 + hF_{01} + h^2F_{02} + \ldots + h^kF_{0k} \\
f_1 &= F_1 + hF_{11} + h^2F_{12} + \ldots + h^{k_1}F_{1k_1},
\end{aligned}
\qquad (13)
$$

гдѣ функціи F_0 и F_1 будутъ функціонально независимы, функція $F_{0,k}$ голоморфная въ области измѣненія перемѣнныхъ x_i и h, а функція $F_{1,k}$, непрерывная и имѣющая всѣ производныя въ области, которую получимъ, исключивъ системы значеній перемѣнныхъ x_i, обращающихъ всѣ первыя производныя функціи F_0 въ нуль.

Попутно мы рѣшили задачу, какъ найти дополнительный интегралъ, если два независимыхъ интеграла системы (1) при условіяхъ (2) становятся функціей одинъ другого.

§ 3. Мы можемъ воспользоваться рѣшеніемъ, даннымъ для случаевъ одного и двухъ интеграловъ для самаго общаго случая n интеграловъ, При наличности условій (2) число независимыхъ интеграловъ можетъ уменьшиться. Каждый интегралъ можетъ въ силу этихъ условій обратиться въ постоянную, а когда содержитъ перемѣнныя, можетъ стать функціей другихъ.

Предположимъ, что часть изъ этихъ n интеграловъ обращается въ постоянныя, а остальные связаны тоже нѣсколькими зависимостями.

Согласно предыдущему, вводимъ параметръ h при помощи формулъ (8). Тогда согласно предыдущему параграфу, каждый интегралъ, обращающійся въ постоянную, можно замѣнить такимъ, который не обращается уже въ постоянную, и, слѣдовательно, задача приводится къ тому случаю, когда при $h=0$ нѣкоторые изъ интеграловъ системы (7) перестанутъ быть независимыми другъ отъ друга.

Мы уже видѣли въ предыдущемъ параграфѣ, что эта задача рѣшается въ случаѣ двухъ интеграловъ вполнѣ. Покажемъ, что эта задача рѣшается послѣдовательно сначала для двухъ, потомъ для трехъ и такъ далѣе. Поэтому предположимъ, что мы можемъ преобразовать систему $n-1$ интеграловъ такъ, чтобы они и при $h=0$ оставались независимыми другъ отъ друга и покажемъ, что можно преобразовать n-ый интегралъ, который и при h, равномъ нулю, оставался бы независимымъ.

Итакъ, положимъ, что система (7) имѣетъ n интеграловъ

$$
f_i = \sum_{j=0}^{k_i} F_{ij}h^j + h^{k_i+1} F_{i,\,k_i+1} \qquad (i=1,\,2,\,3,\ldots,\,n) \qquad (14)
$$

О функціяхъ F_{i0} мы сдѣлаемъ слѣдующія предположенія:

Функціи $F_{ij}(i=1,\ 2,\ 3,\ldots,\ n-1)$ *считаемъ независимыми между собою. Функція же* F_{n0} *выражается черезъ нихъ, такъ что имѣемъ тождество:*

$$F_{n0}=\Theta_0\{F_{10},\ F_{20},\ldots,F_{n-1,0}\}. \tag{15}$$

Функціи $F_{1,\,k_1+1},\ F_{n,\,k_1+1}$ *— голоморфныя въ соотвѣтственной области, а* $F_{i,\,k_1+1}\,(i=1,\ 2,\ 3,\ldots,\ n-1)$ *имѣютъ въ этой области производныя какого-угодно порядка и для* $h=0$ *не обращаются въ безконечность.*

И, наконецъ, цѣлое число k_1 *можно сдѣлать сколь-угодно большимъ.*

Интегралы f_i системы (7) независимы, и потому по крайней мѣрѣ одинъ изъ опредѣлителей матриссы:

$$\left|\begin{array}{ccccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial x_3}{\partial x_3} & \ldots & \frac{\partial f_3}{\partial x_p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_3} & \ldots & \frac{\partial f_v}{\partial x_p} \end{array}\right| \tag{16}$$

не равенъ нулю. Мы можемъ предположить, что, этотъ миноръ—B, равный опредѣлителю

$$\frac{D(f_1,\ f_2,\ f_3,\ldots f_n)}{D(x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots,\ x_n)}.$$

Онъ будетъ обладать тѣми же свойствами, что и интегралы f_i и потому можетъ быть расположенъ въ рядъ по степенямъ параметра h съ остаточнымъ членомъ.

Пусть это разложеніе напишется такъ:

$$\sum_0^k B_i h^i + h^{k+1}\Psi,$$

гдѣ функція Ψ не обращается въ безконечность при $h=0$ и имѣетъ въ разсматриваемой области производныя какого-угодно порядка.

При h равномъ нулю въ силу тождества (15) вся матрисса (16) должна обратиться въ нуль, и, слѣдовательно, B_0 тоже должно обратиться въ нуль. Можетъ быть, также и B_1 равно нулю, и т. д., но во всякомъ случаѣ будетъ существовать такое цѣлое число k, при которомъ членъ разложенія минора B съ индексомъ k будетъ отличенъ отъ нуля, и, слѣдовательно, мы можемъ положить:

$$B \equiv \frac{D(f_1,\ f_2,\ f_3, \ldots, f_n)}{D_1(x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots, x_p)} = B_k h^k + h^{k+1}\Psi \tag{17}$$

Число k—вполнѣ опредѣленное, зависящее отъ свойствъ взятыхъ интеграловъ f_i, тогда какъ k_1 можетъ быть выбрано сколь-угодно большимъ; и поэтому мы можемъ предположить, что $k_1 > k$.

Разсмотримъ интегралъ:

$$f_n - \Theta_0\{f_1,\ f_2,\ f_3, \ldots,\ f_{n-1}\}.$$

Его можно разложить по степенямъ h въ области измѣненія перемѣнныхъ x_i, если изъ прежней области исключимъ тѣ значенія перемѣнныхъ, которыя обращаютъ въ нуль всѣ опредѣлители матриссы:

$$\left|\begin{matrix} \dfrac{\partial F_{10}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_{10}}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_{10}}{\partial x_p} \\ \dfrac{\partial F_{20}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_{20}}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_{20}}{\partial x_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_{n-1,0}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_{n-1,0}}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_{n-1,0}}{\partial x_p} \end{matrix}\right| \tag{18}$$

Само собой разумѣется, что полученное разложеніе должно дополняться членомъ, состоящимъ изъ произведенія цѣлой степени параметра h на функцію, не обращающуюся въ безконечность при $h=0$. Разложеніе будетъ, слѣдовательно, того же типа, какъ и разложеніе интеграловъ $f_2,\ f_3, \ldots,\ f_{n-1}$.

Для того, чтобы получить всѣ члены разложенія, достаточно найти всѣ производныя отъ этого новаго интеграла по параметру h для его значенія, равнаго нулю. Очевидно, что эти послѣднія будутъ функціями коэффиціентовъ разложеній интеграловъ f_i и значеніями функціи Θ_0 и ея производныхъ для аргументовъ $F_{10},\ F_{20},\ F_{30}, \ldots,\ F_{n-1,0}$.

Нетрудно найти эти производныя съ помощью тождества (15).

Такъ какъ по предположенію мы ограничились лишь тою областью значеній, которая не обращаетъ въ нуль по крайней мѣрѣ одного изъ опредѣлителей матриссы (18), то можемъ принять, что отличенъ отъ нуля опредѣлитель:

$$C \equiv \frac{D(F_{10},\ F_{20}, \ldots,\ F_{n-1,0})}{D(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{n-1})}.$$

Составимъ операцію;

$$D_i \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial F_{10}}{\partial x_1} & \frac{\partial F_{10}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_{10}}{\partial x_{n-1}} \\ \frac{\partial F_{20}}{\partial x_1} & \frac{\partial F_{20}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_{20}}{\partial x_{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_{i-1,0}}{\partial x_1} & \frac{\partial F_{i-1,0}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_{i-1,0}}{\partial x_{n-1}} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \\ \frac{\partial F_{i+1,0}}{\partial x_1} & \frac{\partial F_{i+1,0}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_{i+1,0}}{\partial x_{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_{n-1,0}}{\partial x_1} & \frac{\partial F_{n-1,0}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_{n-1,0}}{\partial x_{n-1}} \end{vmatrix}$$

которую получимъ, если замѣстимъ въ i-ой строкѣ опредѣлителя C элементы $\frac{\partial F_{i,0}}{\partial x_j}$ соотвѣтственно черезъ операціи $\frac{\partial}{\partial x_j}$.

Подвергнемъ обѣ части тождества (15) операціи D_i, тогда получаемъ тождество:

$$\frac{D(F_{10}, F_{20}, \dots, F_{i-1,0}, F_{n,0}, F_{i+1,0}, \dots, F_{n-1,0})}{D(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n-1})} = \frac{\partial \Theta_0}{\partial F_{i,0}} C, \qquad (19)$$

которое дастъ возможность опредѣлить всѣ первыя производныя функціи Θ_0 для вышеупомянутыхъ аргументовъ.

Подвергая обѣ части тождествъ (19) операціямъ D_i и D_j, опредѣлимъ всѣ производныя второго порядка отъ функціи Θ_0. Продолжая такимъ образомъ, мы можемъ, очевидно, опредѣлить для функціи Θ_0 производныя какого-угодно порядка.

Такимъ образомъ, мы получимъ всѣ элементы для опредѣленія членовъ разложенія интеграла $f_n - \Theta_0\{f_1, f_2, \dots, f_{n-1}\}$. Опредѣляя k_1+1 членовъ разложенія и вычитая полученную сумму изъ этого интеграла, найдемъ дополнительный членъ разложенія и можемъ написать:

$$f_n - \Theta_0\{f_1, f_2, \dots, f_{n-1}\} = \sum_{j=1}^{k_1} h^j F_j^{(1)} + h^{k_1+1} F_{k_1+1}^{(1)},$$

гдѣ функція $F_{k+1}^{(1)}$ не обращается въ безконечность для $h=0$.

Очевидно, что $F_1^{(1)}$ будетъ интеграломъ системы (4), но можетъ случиться, что и онъ будетъ функціей прежнихъ интеграловъ, если будемъ имѣть тождество:

$$F_1^{(1)} = \Theta\{F_{10}, F_{20}, \ldots, F_{n-1,0}\}. \tag{20}$$

Тогда вмѣсто предыдущаго интеграла возьмемъ интегралъ:

$$f_n - \Theta_0\{f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}\} - h\Theta_1\{f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}\}.$$

Воспользовавшись тождествомъ (20) совершенно аналогично тождеству (15) и операціями D_i, можемъ найти разложеніе новаго интеграла по степенямъ параметра:

$$\sum_{i=2}^{k_1} h^j F_j^{(2)} + h^{k_1+1} F_{k_1+1}^{(2)},$$

гдѣ опять $F_j^{(2)}$ — функція, необращающаяся въ нуль для $h = 0$.

Функція $F_2^{(2)}$ будетъ интеграломъ системы (14). Если это будетъ интегралъ, независимый отъ прежнихъ, то процессъ будетъ законченъ. Въ противномъ случаѣ составляемъ функціональную зависимость и продолжаемъ аналогично прежнему.

Мы преобразовывали интегралъ f_n, прибавляя къ нему функціи отъ остальныхъ интеграловъ такимъ образомъ, чтобы разложеніе начиналось съ болѣе высокой степени параметра h.

Покажемъ, что такой процессъ не можетъ быть безконечнымъ.

Предположимъ, что, продолжая нашъ пріемъ, мы пришли къ разложенію интеграла.

$$f_n - \sum_{j=0}^{l-1} h^j \Theta_j\{f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}\} \equiv \sum_{j=l}^{k_1} F_j^{(l)} h^j + h^{k_1+1} F_{k_1+1}^{(l)} \tag{21}$$

гдѣ относительно F_{k_1+1} справедливы наши обычныя предположенія, и покажемъ, что l не можетъ быть больше опредѣленнаго числа k, извѣстнаго по разложенію опредѣлителя B, минора матриссы (18). Допустимъ противное. Замѣнимъ въ опредѣлителѣ B элементы послѣдней строки $\frac{\partial f_n}{\partial x_i}$ соотвѣтственно черезъ $\frac{\partial}{\partial x_i}$ и подвергнемъ полученной операціи обѣ части тождества (21). Въ результатѣ получимъ новое:

$$B \equiv \sum_{j=l}^{k_1} F_j h^j + h^{k_1+1} F_{k_1+1},$$

гдѣ F_{k_1+1} не обращается въ безконечность при $h = 0$, и при помощи условія (17) найдемъ:

$$B_k h^k + h^{k+1}\Psi \equiv \sum_{j=l}^{k_1} F_j h^j + h^{k_1+1} F_{k_1+1},$$

гдѣ F_{k_1+1} не обращается въ безконечность при $h=0$, и при помощи условія (17) найдемъ:

$$B_k h^k + h^{k+1}\Psi \equiv \sum_{j=1}^{k_1} F_j h^j + h^{k_1+1} F_{k_1+1}\,.$$

Отсюда принимая $l>k$, мы должны получить $B_k=0$, а это было бы противъ предположенія.

Итакъ, мы всегда можемъ замѣнить интегралъ f_n интеграломъ

$$f_n - \sum_{j=0}^{l-1} h^j \Theta_j\{f_1,\ f_2,\ldots,\ f_{n-1}\}\,,$$

который раскладывается въ рядъ по степенямъ параметра h согласно равенству (21), и функція $F_l^{(l)}$ будетъ недостающимъ n-ымъ интеграломъ системы (4), независимымъ отъ прежнихъ интеграловъ.

§ 4. Въ предыдущихъ параграфахъ мы показали, что, если намъ извѣстны n независимыхъ интеграловъ системы (1), заключающихъ произвольные параметры, и они при существованіи условій (2) перестаютъ быть независимыми, то, вводя опредѣленнымъ образомъ новый параметръ и дифференцированіе по послѣднему, мы получимъ и для частной системы полную систему n независимыхъ интеграловъ.

При этомъ мы предположили, что наши интегралы будутъ голоморфными въ извѣстной области, какъ относительно перемѣнныхъ x_i, такъ и относительно параметровъ b_i. Эти условія для приложенія предложенной теоріи не являются необходимыми, а лишь достаточными.

Я позволю себѣ резюмировать процессъ полученія недостающихъ интеграловъ.

Прежде всего мы преобразуемъ систему (1) къ системѣ болѣе частнаго вида (7), введя параметръ h при помощи формулъ (8). Конечно, интегралы преобразуются соотвѣтственнымъ образомъ.

Затѣмъ отбираемъ интегралы, которые при $h=0$ обращаются въ постоянныя и опредѣляемъ для каждаго послѣдовательнымъ дифференцированіемъ и подстановкой $h=0$ ту часть ихъ разложенія по степенямъ параметра h, которая не зависитъ отъ перемѣнныхъ x_i. Вычитая изъ этихъ интеграловъ ихъ постоянныя части и дѣля на соотвѣтственныя степени параметра h, мы получимъ взятые интегралы въ новой формѣ, при которой они уже не обращаются въ нуль при $h=0$.

Такимъ образомъ мы приведемъ всю систему интеграловъ къ одному и тому же типу. Всѣ они будутъ разлагаться въ голоморфный рядъ по степенямъ параметра h, и первый членъ разложенія каждаго изъ нихъ не будетъ постояннымъ относительно перемѣнныхъ x_i.

Если первые члены системы всѣхъ n интеграловъ окажутся независимыми, то задача уже рѣшена, и интегралы для системы (4), получающейся изъ системы (7) подстановкой $h=0$, найдены.

Если же этого нѣтъ, то независимость взятыхъ интеграловъ имѣетъ источникомъ послѣдующіе члены разложенія.

Составимъ въ этомъ случаѣ для всѣхъ данныхъ интеграловъ матриссу (16) предыдущаго параграфа. Одинъ изъ ея миноровъ не можетъ обратиться въ нуль, и потому его разложеніе по степенямъ параметра h дастъ намъ число k. Это число представитъ собой показатель наименьшей степени параметра h въ разложеніи этого минора по его степенямъ.

Вычислимъ сначала первые члены всѣхъ интеграловъ. Провѣряемъ ихъ функціональную независимость. Положимъ, что окажется между ними n_1 такихъ, которые будутъ функціями остальныхъ $n-n_1$. Затѣмъ ищемъ разложеніе всѣхъ n интеграловъ по степенямъ параметра h. Достаточно для нашей цѣли найти n_1k+1 членовъ разложенія каждаго интеграла. Для полученія ихъ достаточно найти соотвѣтствующее число производныхъ по параметру h для его значенія равнаго нулю. Такимъ образомъ представимъ каждый интегралъ въ видѣ полинома kn_1-ой степени смѣшаннаго съ остаточнымъ членомъ, представляющимъ собой произведеніе (kn_1-1)-ой степени параметра h на функцію, голоморфную въ разсматриваемой области.

Затѣмъ беремъ одинъ изъ первой группы n_1 интеграловъ и вычитаемъ изъ него такую функцію $n-n_1$ интеграловъ второй группы, разложеніе которой по степенямъ параметра h начиналось бы съ члена, содержащаго h въ первой степени. Разложеніе продолжимъ до члена, содержащаго n_1k-ую степень параметра h и, конечно, присоединимъ остаточный членъ. Если коэффиціентъ при первой степени параметра h не будетъ функціей первыхъ членовъ разложенія интеграловъ второй группы, то полученный интегралъ по раздѣленіи его на h останется независимымъ отъ интеграловъ второй группы и по принятіи параметра h равнымъ нулю. Въ противномъ случаѣ мы можемъ изъ полученнаго интеграла вычесть такую функцію интеграловъ 2-ой группы, умноженную на h, что разложеніе новаго интеграла будетъ начинаться уже съ члена, содержащаго h^2. Продолжая такимъ образомъ, мы придемъ къ такому интегралу, разложеніе котораго будетъ начинаться съ члена функціонально независимаго отъ первыхъ членовъ интеграловъ второй группы. Такой членъ будетъ вида $h^{k_1}\Phi$, гдѣ k_1 не можетъ быть больше k, такъ какъ тогда разложеніе всѣхъ опредѣлителей матриссы (16) начиналось бы съ члена, порядокъ котораго относительно параметра h былъ бы больше k. Раздѣливъ полученный интегралъ на h^{k_1}, мы уменьшимъ на единицу первую группу интеграловъ и увеличимъ вторую.

Новый интегралъ уже не будетъ непремѣнно голоморфнымъ, но онъ будетъ имѣть производныя какого-угодно порядка и, слѣдовательно, разлагается въ рядъ Маклореня съ остаточнымъ членомъ и потому можетъ быть употребленъ для преобразованія интеграла первой группы наравнѣ съ другими интегралами второй группы.

Переводя такимъ образомъ интегралы первой группы во вторую, мы придемъ къ системѣ n интеграловъ, которые при $h=0$ остаются независимыми.

Еще разъ замѣчаю, что способъ примѣнимъ при болѣе широкихъ предположеніяхъ.

Разсмотримъ еще два примѣра.

Пусть намъ дана система:

$$\frac{dx_1}{dt}=\alpha x_1+x_2+x_3+x_4 \qquad \frac{dx_2}{dt}=x_1+\alpha x_2+x_3+x_4$$
$$\frac{dx_3}{dt}=x_1+x_2+\beta x_3+x_4 \qquad \frac{dx_4}{dt}=x_1+x_2+x_3+\beta x_4.$$

Ея интеграламъ можно дать слѣдующій видъ:

$$(x_1-x_2)\,e^{-(\alpha-1)t}, \quad (x_3-x_4)\,e^{-(\beta-1)t},$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & \alpha-\lambda_3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \beta-\lambda_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \beta-\lambda_3 \end{vmatrix} e^{-\lambda_3 t}$$

и

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & \alpha-\lambda_4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \beta-\lambda_4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \beta-\lambda_4 \end{vmatrix} e^{-\lambda . t} \qquad (2)$$

гдѣ

$$\lambda_3=\frac{\alpha+\beta+2+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+16}}{2}, \quad \lambda_4=\frac{\alpha+\beta+2-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+16}}{2}.$$

Если мы въ нашей системѣ положимъ $\alpha=\beta=0$, то получимъ вмѣсто системы (1) новую [1]):

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2+x_3+x_4 \qquad \frac{dx_2}{dt}=x_1+x_3+x_4$$
$$\frac{dx_3}{dt}=x_1+x_2+x_4 \qquad \frac{dx_4}{dt}=x_1+x_2+x_3.$$

[1]) Кіевъ. Университетскія Извѣстія 1912 г. № 1, статья проф. Пфейфера.

Полагая въ интегралахъ прежней системы α и β равными нулю, найдемъ только три интеграла новой:

$$(x_1-x_2)\,e^t,\quad (x_3-x_4)\,e^t,\quad (x_1+x_2+x_3+x_4)\,e^{-3t}$$

Что же касается интеграла (2), то онъ при этой подстановкѣ обращается тождественно въ нуль. Чтобы все-таки получить четвертый интегралъ для новой системы, положимъ въ интегралѣ (2) $\alpha=2h$ и $\beta=h$, продифференцируемъ его выраженіе два раза по параметру h и положимъ $h=0$. Тогда найдемъ интегралъ:

$$\left\{(x_1-x_2)\frac{1}{4}-(x_1-x_3)\frac{1}{4}-(x_1-x_4)\frac{1}{4}\right\}e^t,$$

который будетъ независимымъ отъ первыхъ трехъ.

Какъ второй примѣръ возьму систему, которую я изучалъ въ своей работѣ: Приложеніе полярныхъ операцій къ интегрированію обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій въ конечномъ видѣ» [1]).

$$\begin{aligned}
\alpha p'&=(\beta-\gamma)qr+K(c-b)vw+\frac{2Ma\,(c-b)}{5}[c(a-b)rv-b(c-a)qw]\\
\beta q'&=(\gamma-\alpha)pr+K(a-c)uw+\frac{2Mb\,(a-c)}{5}[a(b-c)pw-c(a-b)ru]\qquad(4)\\
\gamma r'&=(\alpha-\beta)pq+K(b-a)uv+\frac{2Mc\,(b-a)}{5}[b(c-a)qu-a(b-c)pv].
\end{aligned}$$

гдѣ

$$K=\frac{2Mabc}{5}.$$

$$\begin{aligned}
(c+a)(a+b)u'&=a(b-c)vw+2a[(a+c)rv-(a+b)qw]\equiv(c+a)(a+b)\,U\\
(a+b)(b+c)v'&=b(c-a)uw+2b[(b+a)pw-(b+c)ru]\equiv(a+b)(b+c)\,V\quad(5)\\
(b+c)(c+a)w'&=c(a-b)vu+2c[(c+b)qu-(c+a)pv]\equiv(b+c)(c+a)\,W.
\end{aligned}$$

Она заимствована мной изъ двухъ большихъ мемуаровъ В. А. Стеклова, помѣщенныхъ въ Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, 2-e série t. X, p. 271 и 3-e série t. I, p. 145.

Для упрощенія вычисленій я беру въ трехъ первыхъ уравненіяхъ (1) вмѣсто α, β, γ произведенія αK, βK, γK и получаю слѣдующія:

$$\begin{aligned}
\alpha p'&=(\beta-\gamma)qr+(c-b)vw+(c-b)\left(\frac{a-b}{b}rv-\frac{c-a}{c}qw\right)\equiv\alpha P\\
\beta q'&=(\gamma-\alpha)rp+(a-c)uw+(a-c)\left(\frac{b-c}{c}pw-\frac{a-b}{c}ru\right)\equiv\beta Q\qquad(6)\\
\gamma r'&=(\alpha-\beta)pq+(b-a)uv+(b-a)\left(\frac{c-a}{a}qu-\frac{b-c}{b}pr\right)\equiv\gamma R.
\end{aligned}$$

---

[1]) Сообщенія Х. М. О. 2-я серія. Т. XII, стр. 217.

В. А. Стекловъ даетъ въ этой работѣ три интеграла этой системы:

$$f_1 \equiv bcu^2 + acv^2 + abw^2$$
$$f_2 \equiv \frac{au^2 + bv^2 + cw^2}{2} + \alpha p^2 + \beta q^2 + \gamma r^2$$
$$f_3 \equiv \left[\frac{(a+c)(a+b)}{a} u + \alpha p\right]^2 + \left[\frac{(a+b)(b+c)}{b} v + \beta q\right]^2 +$$
$$+ \left[\frac{(b+c)(a+c)}{c} w + \gamma r\right]^2.$$

Кромѣ того, имъ изученъ вопросъ о четвертомъ интегралѣ 1-го и 2-го порядка и опубликованъ примѣръ послѣдняго. Примѣняя методъ полярныхъ операцій, я вновь изслѣдовалъ, ограничиваясь аналитической стороной дѣла этотъ вопросъ. Не получивъ ничего существенно новаго, я нашелъ два четвертыхъ интеграла: одинъ типа:

$$\nu_1 pu + \nu_2 qv + \nu_3 rw + \varrho_1 u^2 + \varrho_2 v^2 + \varrho_3 w^2 \tag{8}$$

съ тремя условіями и другой типа:

$$\mu_1 p^2 + \mu_2 q^2 + \mu_3 r^2 + \nu_1 pu + \nu_2 qv + \nu_3 rw + \varrho_1 u^2 + \varrho_2 v^2 + \varrho_3 w^2 \tag{9}$$

съ четырьмя условіями.

Оказывается, что, если прибавить къ тремъ условіямъ, необходимымъ для существованія интеграла типа (8), условія

$$\alpha = \beta = \gamma\,, \tag{10}$$

то интегралъ (8) становится функціей трехъ интеграловъ (7).

Согласно изложенной теоріи мы должны получить четвертый интегралъ и для этого случая; и дѣйствительно, три прежнія условія и условія (10) оказываются эквивалентными четыремъ условіямъ, при которыхъ существуетъ интегралъ (9), и, слѣдовательно, можно получить его не только тѣмъ алгебраическимъ путемъ, который примѣненъ мной въ моей цитированной выше работѣ, но также и при помощи пріема Даламбера.