Sur l'application de la méthode de W. Ritz au problème des oscillations contraintes.

par *Nikolas Kryloff*.

En 1908 W. Ritz a proposé, comme on sait, un procédé remarquable pour l'intégration des équations différentielles de la physique mathématique. Voici en peu de mots la marche des raisonnements de l'illustre physicien suisse: au lieu de l'équation différentielle et des conditions au contour données, Ritz considère une certaine intégrale, correspondant au problème, de sorte que l'équation donnée sera l'équation d'Euler de cette intégrale et interviendra comme la condition nécessaire pour la rendre minimum (stationnaire); ce premier étape de la pensée de Ritz est donc identique à celui sur lequel répose le fameux «principe de Dirichlet», tel que Riemann l'a conçu; la partie essentielle des mémoires de Ritz consiste dans la démonstration, par la voie du calcul effectif, de l'existance de la solution du problème de minimum posé, qui vérifie l'équation différentielle donnée.

Sans entrer dans les détails, remarquons néanmoins, que le succès de la méthode tient à ce que la forme quadratique, qui intervient dans le raisonnement était positive dans les problèmes traités rigoureusement par W. Ritz et *il n'existait* pas de solutions, dites fondamentales; ce fait n'ayant pas lieu dans les problèmes de Fourier (comme par ex. ceux des cordes et des plaques vibrantes) Ritz remarque [1], que l'application de son procédé de calcul donne pourtant des resultats satisfaisants au point de vue pratique; depuis lors un certain nombre de calculs ont été faits dans cette direction sans s'occuper tout de même de la convergence des approximations; divers savants, entre autres et surtout M. le Prof. Timochenko (pour les diverses questions de la science d'ingénieur) et M. le Prof. Love (pour les problèmes de la mécanique céleste), en appliquant le procédé de Ritz, ont obtenu d'après leur attestation des résultats très satis-

[1]) En calculant par sa méthode la fonction fondamentale dans le cas par ex. où elle est d'avance exactement connue.

faisants au point de vue pratique, quoique la question de la démonstration rigoureuse reste ouverte.

Laissant de côté ce problème d'une extrême difficulté, proposons nous dans cette note de montrer par des exemples simples, pour plus de netteté, quelle liaison intime existe entre la méthode de Ritz et celle de Schwarz—Poincaré—Stekloff *dans le cas* où les fonctions suivant lesquelles Ritz développe sa solution seront les fonctions fondamentales de l'équation fonctionnelle, correspondant à l'équation différentielle et les conditions au contour données.

Bref, l'idée, qui nous a guidé dans cette étude consiste en ceci: la résolution de l'équation fonctionnelle, correspondant au problème, par la méthode connue, ci dessus mentionnée, donne la solution *exacte* du problème; donc si nous parvenons à établir l'identité du développement de la solution de l'équation fonctionnelle avec celui, donné par la méthode de Ritz, nous démontrons en même temps *en toute rigueur* la validité du procédé de Ritz; ceci constitue à notre avis un autre moyen de démontrer la convergence des approximations de Ritz et dans les cas où les fonctions fondamentales du problème se prètent facilement au calcul (par ex. les fonctions trigonométriques dans les cas de l'équation différentielle aux coëfficients constants) on obtient les résultats dignes d'attention au point de vue pratique, sil'on admet la facilité de l'application du procédé de Ritz. En nous bornant, pour plus de brièveté, au cas d'une dimension, considérons l'équation différentielle corespondant au problème des oscillations contraintes d'une corde vibrante *hétérogène:*

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\lambda A(x)\,u=-f(x)\,,\left\{\begin{array}{l}\text{ou } A(x) \text{ d'après les considérations d'ordre}\\ \text{physique ne change pas le signe entre } a \text{ et } b\end{array}\right\}\quad(1)$$

ici λ est donné, puisqu'il s'agit des oscillations contraintes.

Pour former l'équation fonctionnelle correspondant à (1), procédons d'après la méthode bien connue, comme il suit: soit $K(x,\ y)$ la fonction de Green rélative à l'équation $\frac{d^2u}{dx^2}=0$ avec les conditions aux frontières a et b: $u(a)=0$; $u(b)=0$; alors en se souvenant, que $K''(x,y)=0$, d'après les propriétés de la fonction de Green, on reçoit immédiatement:

$$u(y)=\lambda\int_a^b K(x,\ y)\,A(x)\,u(x)\,dx+\int_a^b K(x,\ y)\ f(x)\,dx,\qquad(2)$$

multipliant tous les termes de (2) par $\sqrt{A(y)}$, représentons la sous la forme suivante:

$$u(y)\sqrt{A(y)} = \lambda \int_a^b K(x,\ y)\sqrt{A(x)}\sqrt{A(y)}\,u(x)\sqrt{A(x)}\,dx + \\ + \int_a^b K(x, y)\sqrt{A(y)}\sqrt{A(x)}.\frac{f(x)}{\sqrt{A(x)}}dx\,; \tag{3}$$

à présent le noyau de l'équation fonctionnelle est symétrique et par conséquent en appliquant le développement donné par la méthode de Schwarz—Poincaré—Stekloff, et en appelant le second terme de la seconde partie de (3) par $F(y)$, on obtient:

$$u(y)\sqrt{A(y)} = F(y) + \lambda \sum_n^{1,\infty} \frac{U_n(y)\int_a^b F(y)\,U_n(y)\,dy}{\lambda_n - \lambda}\,, \tag{4}$$

où $U_n(y)$ sont les fonctions fondamentales, rélatives au noyau symétrique $K(x, y)\sqrt{A(x)}\sqrt{A(y)}$ et les λ_n sont les valeurs singulières correspondantes.

Remarquons à présent, et ceci est essentiel pour notre raisonnement, que d'après *la forme même de* $F(y)$ telle que l'on voit dans la formule (3) on peut affirmer la possibilité de son développement en série des fonctions fondamentales du noyau susdit; donc la formule (4) peut être présentée sous la forme suivante:

$$u(y)\sqrt{A(y)} = \sum_n^{1,\infty} U_n(y)\int_a^b F(y)\,U_n(y)\,dy + \lambda \sum_n^{1,\infty}\frac{U_n(y)\int_a^b F(y)\,U_n(y)\,dy}{\lambda_n - \lambda} = \\ = \sum_n^{1,\infty}\frac{\lambda_n\,U_n(y)\int_a^b F(y)U_n(y)\,dy}{\lambda_n - \lambda}. \tag{5}$$

Traitons à présent le même problème par la méthode de Ritz, en remarquant pour cela, que la question revient au point de vue de «principe de Dirichlet» à la recherche du minimum de l'intégrale:

$$\int_a^b \left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - \lambda\,A(x)\,u^2 - 2fu\right]dx = \mathrm{I} \tag{6}$$

dont l'équation d'Euler sera précisement l'équation differentielle donnée.

En suivant le procédé de Ritz nous substituons dans l'intégrale (1) le développement fini (c. à d. série limitée) de u:

$$u(x) = \alpha_1 v_1(x) + \alpha_2 v_2(x) + \ldots + \alpha_n v_n(x), \tag{7}$$

où $v_i(x)$ sont les fonctions vérifiant les conditions au contour données,— dans le cas que nous envisageons ce sera (7') $v_i(a) = 0$; $v_i(b) = 0$; pour atteindre notre but final nous choisirons, comme il a été mentionné plus haut, pour les $v_i(x)$ les fonctions fondamentales de l'équation:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda\, A(x)\, u = 0\,, \tag{8}$$

vérifiant les mêmes conditions à la frontière (7').

Pour calculer les coëfficients inconnus α_i, substituons l'expression (7) dans (6), ceci nous donne:

$$\sum_{i,\,k} \alpha_i \alpha_k \left[\int_a^b v_i'(x)\, v_k'(x)\, dx - \lambda \int_a^b A(x)\, v_i(x)\, v_k(x)\, dx\right] - 2 \sum_i \alpha_i \int_a^b f(x)\, v\ (x)\, dx,$$

d'où les α_n se déterminent *individuellement* (dans notre cas), d'après la condition à rendre stationnaire l'intégrale (6), par les équations suivantes:

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha_i} = 2\alpha_i \left[\int_a^b v_i'(x)^2\, dx - \lambda \int_a^b A(x)\, v_i^2(x)\, dx\right] - 2 \int_a^b f(x)\, v_i(x)\, dx = 0, \tag{9}$$

car évidemment:

$$\int_a^b A(x)\, v_i(x)\, v_k(x)\, dx = 0\,; \quad \int_a^b v_i'(x)\, v_k'(x)\, dx = 0, \ \text{si } i \neq k;$$

donc de (9) on obtient;

$$\alpha_i = \frac{\int_a^b f(x)\, v_i(x)\, dx}{\lambda_i - \lambda},$$

car il est connu, et du reste facile à vérifier, que:

$$\int_a^b A(x)\, v_i^2(x)\, dx = 1\,; \qquad \int_a^b v_i'^2(x)\, dx = \lambda_i.$$

Pour s'assurer que les développements (5) et (7) sont identiques, il suffira de montrer, que:

$$\int_a^b f(x)\, v_n(x)\, dx = \lambda_n \int_a^b F(x)\, U_n(x)\, dx; \tag{10}$$

or

$$F(x) = \int_a^b K(x, z) \sqrt{A(x)} \sqrt{A(x)}\, \frac{f(z)}{\sqrt{A(z)}}\, dz,$$

donc

$$\lambda_n \int_a^b F(x) U_n(x)\, dx = \lambda_n \int_a^b \int_a^b K(x, z) \sqrt{A(z)} \sqrt{A(x)}\, U_n(x)\, \frac{f(z)}{\sqrt{A(z)}}\, dx\, dz =$$

$$= \int_a^b U_n(z)\, \frac{f(z)}{\sqrt{A(z)}}\, dz = \int_a^b f(x)\, v_n(x)\, dx \quad \text{c. q. f. d.}$$

Puisque le procédé de Ritz présente ses avantages au point de vue du calcul numérique de la solution, d'après l'opinion des savants, qui l'ont appliqué, il est nécessaire donc d'avoir la certitude, que les approximations de Ritz convergent et les considérations, ci-dessus développées, nous la donnent dans le cas que nous envisageons, en établissant l'identité des coëfficients de Ritz avec ceux de la solution de l'équation fonctionnelle, donnée par la méthode de Schwarz—Poincaré—Stekloff. Il va sans dire, que dans le cas $A(x) = \text{const.}$ on peut obtenir les résultats de la portée pratique.

Il serait intéressant de poursuivre plus loin l'étude de la liaison, qui existe entre la méthode de Ritz et la méthode fondamentale, celle de Schwarz—Poincaré—Stekloff, de la physique mathématique, ainsi que d'appliquer les considérations qui précèdent au problème des oscillations contraintes de l'océan sous l'influence du potentiel perturbateur des astres, quand en employant l'artifice analogue à celui de Prof. Love on évite les difficultés, liées à l'existence des latitudes critiques.

Petrograd. 17/IX 1914.