Къ вопросу о функціяхъ наименѣе уклоняющихся отъ нуля.

А. Маркова.

Въ первомъ выпускѣ тома XXIX «Математическаго Сборника» помѣщена статья Б. К. Млодзѣевскаго «О многочленахъ наименѣе уклоняющихся отъ нуля».

Не касаясь содержанія ея, я не могу оставить безъ вниманія, что Б. К. Млодзѣевскій рядомъ съ русскими математиками, занимавшимися вопросомъ о функціяхъ наименѣе уклоняющихся отъ нуля, поставилъ Либманна.

Упоминаніе о замѣткѣ Либманна «Vereinfachte Behandlung einiger Minimalprobleme von Tschebyscheff (Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung, Band 18.) встрѣчаю я въ русской литературѣ впервые. Оно сдѣлано безъ указанія на ошибку Либманна, которому даже приписанъ особый методъ рѣшенія задачи о такихъ функціяхъ.

Такъ какъ ошибка Либманна имѣетъ важное принципіальное значеніе и, какъ видно, остается незамѣченной, то я считаю нужнымъ на ней остановиться, тѣмъ болѣе, что поводомъ для этой ошибки могутъ служить нѣкоторые мемуары Чебышева о механизмахъ, содержащіе вмѣсто ясной постановки вопросовъ и полнаго ихъ изслѣдованія только окончательные выводы. Для простѣйшей задачи о полиномѣ

$$x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-1}x + p_n$$

наименѣе уклоняющемся отъ нуля Либманнъ, дѣйствительно, немного видоизмѣнилъ извѣстное доказательство правильности рѣшенія даннаго Чебышевымъ, но ничего болѣе не сдѣлалъ.

Для рѣшенія же общей задачи о функціи

$$F(x, p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

наименѣе уклоняющейся отъ нуля онъ далъ невѣрное предложеніе: «Es zeigt sich, dass man die Parameter so zu wählen hat, dass der (vorläufig noch unbekannte) Extremwert $\pm L$ *möglichst oft* erreicht wird..,».

Я прерываю здѣсь цитату изъ статьи Либманна, такъ какъ невѣрное предложеніе выражается словами möglichst oft, которыя онъ самъ отмѣтилъ курсивомъ.

За строгимъ доказательствомъ такого важнаго, если бы оно было справедливымъ, предложенія онъ отсылаетъ къ статьямъ Кирхенбергера и Буркхардта, но конечно напрасно.

Несуществованіе такого общаго предложенія можно обнаружить простымъ примѣромъ.

Такъ, если возьмемъ функцію съ однимъ параметромъ

$$F(x,\, p) = 1 + p^2 + \left(p - \frac{1}{2}\right) x^2 + \left(p^3 - \frac{1}{8}\right) x^3$$

и для перемѣннаго x возьмемъ обычные предѣлы -1 и $+1$; то наименѣе уклоняющейся отъ нуля она будетъ при $p=0$, когда она приводится къ

$$1 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{8} x^3$$

и достигаетъ своего наибольшаго отклоненія отъ нуля только одинъ разъ, т. е. наименьшее число разъ, а именно при $x=0$.

Напротивъ, при $p=\frac{1}{2}$ наша функція приводится къ постоянному

$$1 + \frac{1}{4}$$

и слѣдовательно достигаетъ своего наибольшаго уклоненія отъ нуля для всѣхъ величинъ x; однако ея отклоненіе отъ нуля не будетъ, какъ мы видимъ, въ этомъ случаѣ наименьшимъ.

Итакъ одно указаніе на то, что при извѣстной совокупности значеній параметровъ функція достигаетъ своего наибольшаго уклоненія отъ нуля наибольшее число разъ, не можетъ служить, вообще говоря, доказательствомъ, что при этой совокупности функція наименѣе уклоняется отъ нуля.

27 октября 1914 г.