ДОБАВЛЕНІЕ КЪ СТАТЬѢ:

„Объ абсолютной сходимости тригонометрическихъ рядовъ".

С. Бернштейна.

Въ концѣ моей статьи «Объ абсолютной сходимости тригонометрическихъ рядовъ» предложено элементарное доказательство теоремы Fatou:

Если рядъ

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} | b_n \sin nx |$$

сходящійся для всякаго $x\,(0 \leqq x \leqq \pi)$, *то сходится также и рядъ*

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} | b_n | .$$

Однако одинъ пунктъ въ этомъ доказательствѣ остался не разъясненнымъ [1]). Я доказалъ, что

Если

$$\sum_{n=1}^{n=2m} \left| b_n \sin \frac{2\pi nk}{2m+1} \right| \leqq M, \quad (k=1,\ 2, \ldots,\ 2m)$$

то

$$\sum_{n=1}^{n=2m} | b_n | \leqq 2m\, M \operatorname{tg} \frac{\pi}{4m+2} < \frac{\pi}{2} M,$$

гдѣ $2m+1$ *простое число.*

Отсюда непосредственно вытекаетъ теорема Fatou, если M не возрастаетъ безгранично вмѣстѣ съ m. Но въ моей статьѣ опущено доказательство существованія верхней границы M, которое, какъ сейчасъ увидимъ, не представляетъ труда. Въ самомъ дѣлѣ, изъ формулы

$$\sin(x+x_1) = \sin x \cos x_1 + \cos x \sin x_1$$

слѣдуетъ, что

$$\sum_{n=1}^{n=2m} | b_n \sin n(x+x_1) | \leqq \sum_{n=1}^{n=2m} | b_n \sin nx | + \sum_{n=1}^{n=2m} | b_n \sin nx_1 | ; \qquad (1)$$

[1]) На это было обращено вниманіе ак. А. Марковымъ. *Прим. ред.*

поэтому, *если есть хоть одна точка* x_0, *гдѣ*

$$\sum_{n=1}^{n=2m} | b_n \sin nx_0 | = M,$$

то общая длина всѣхъ промежутковъ (внутри $0, \pi$*), гдѣ*

$$\sum_{n=1}^{n=2m} | b_n \sin nx | < \frac{M}{2} \tag{2}$$

не можетъ превышать $\frac{\pi}{2}$, ибо, если неравенство (2) справедливо для нѣкотораго значенія x, то оно невозможно для $x_0 - x$ и для $\pi + x_0 - x$.

Но, съ другой стороны, рядъ

$$\sum_{n=1}^{\infty} | b_n \sin nx |$$

сходится для всѣхъ точекъ отрѣзка $(0, \pi)$, поэтому всѣ точки этого отрѣзка принадлежатъ одной изъ совокупностей $s_1, s_2, \ldots, s_k, \ldots$, опредѣляя точки совокупности s_k, условіемъ, что

$$k - 1 \leqq \sum_{n=}^{\infty} | b_n \sin nx | < k;$$

при этомъ, обозначая черезъ λ_k нижній предѣлъ суммы[1]) промежутковъ, въ которые возможно вмѣстить точки s_k, мы должны признать, что

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k + \ldots \geqq \pi.$$

Слѣдовательно, существуетъ опредѣленное значеніе k, для котораго

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k > \frac{\pi}{2}.$$

или, иными словами, *если* k *выбрать достаточно большимъ, то совокупность точекъ, гдѣ*

$$\sum_{n=1}^{\infty} | b_n \sin nx | < k,$$

не можетъ вмѣститься въ промежутки, общая длина которыхъ не превышаетъ $\frac{\pi}{2}$, между тѣмъ, вслѣдствіе предыдущаго, это было бы возможно, еслибы для m достаточно большого, мы имѣли бы $\frac{M}{2} \geqq k$; а потому мы и заключаемъ, что для всякаго m, $M < 2k$, ч. и т. д.

---

[1]) По терминологіи Lebesgue'a, λ_k есть внѣшняя мѣра совокупности s_k.