Sur les sommes de Gauss.

par *Démétrius Gravé.*

1. Nous avons en vue d'étudier la somme

$$\psi(2\mu,\ n) = \sum_{s=0}^{s=n-1} e^{s^2 \frac{2\mu\pi i}{n}}$$

où n est un nombre entier, impair et positif, arbitrairement choisi, μ étant un entier premier avec n.

2. Dans le cas du nombre n premier on a

$$\psi(2\mu,\ n) = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=n-1} \left(\frac{\sigma}{n}\right) e^{\sigma \frac{2\mu\pi i}{n}}$$

où $\left(\frac{\sigma}{n}\right)$ est le symbole de Legendre.

Il est remarquable que la formule (1) reste vraie pour le cas de n impair composé, qui n'a pas des diviseurs carrés. Il faut naturellement comprendre le symbole $\left(\frac{\sigma}{n}\right)$ dans le sens de Jacobi avec la condition $\left(\frac{\sigma}{n}\right) = 0$ quand σ n'est plus premier avec n.

Soit, en effet,

$$n = pp_1p_2\ldots p_k = pP = p_1P_1 = p_2P_2 = \ldots = p_kP_k$$

on aura [1])

$$\psi(2\mu,\ n) = \prod \psi(2\mu P,\ p) = \prod \sum \left(\frac{\sigma}{p}\right) s^{\sigma \frac{2\mu P\pi i}{p}}$$

$$= \sum \left(\frac{\sigma}{p}\right) \left(\frac{\sigma_1}{p_1}\right) \ldots \left(\frac{\sigma_k}{p_k}\right) e^{\tau \frac{2\mu\pi i}{n}}$$

où

$$\tau \equiv \sigma P^2 + \sigma_1 P_1^2 + \ldots + \sigma_k P_k^2 \pmod{n}.$$

---

[1]) Bachmann. Die analytische Zahlentheorie p. 154.

On aura

$$\left(\frac{\tau}{p}\right)=\left(\frac{\sigma}{p}\right),\ \left(\frac{\tau}{p_1}\right)=\left(\frac{\sigma_1}{p_1}\right),\ldots$$

d'où

$$\left(\frac{\sigma}{p}\right)\left(\frac{\sigma_1}{p_1}\right)\cdots\left(\frac{\sigma_k}{p_k}\right)=\left(\frac{\tau}{n}\right)$$

et la formule (1) reste vraie pour le cas, où le nombre impair n n'a pas des diviseurs multiples.

Daus le même cas on obtient

$$\left(\frac{\mu}{n}\right).\psi(2\mu,\ n)=\sum\left(\frac{\mu\sigma}{n}\right)e^{(\mu.\sigma)\frac{2\pi i}{n}}=\psi(2,\ n)$$

ou

$$\psi(2\mu,\ n)=\left(\frac{\mu}{n}\right)\psi(2,\ n) \qquad (2)$$

3. La formule (2) reste vraie dans le cas générale du nombre impair n arbitrairement choisi.

Posons, en effet,

$$n=p^{\omega}p_1{}^{\omega_1}p_2{}^{\omega_2}\ldots=p^{\omega}P=p_1{}^{\omega_1}P_1=\ldots$$

Nous aurons deux formules suivantes

$$\psi(2,\ n)=\prod\psi(2P,\ p^{\omega}),\quad \psi(2\mu,\ n)=\prod\psi(2\mu P,\ p^{\omega}) \qquad (3)$$

Si ω est pair, on a

$$\psi(2P,\ p^{\omega})=\psi(2\mu P,\ p^{\omega})=p^{\frac{\omega}{2}}$$

Si ω est impair, on a

$$\psi(2P,\ p^{\omega})=p^{\frac{\omega-1}{2}}\psi(2P,\ p);\quad \psi(2\mu P,\ p^{\omega})=p^{\frac{\omega-1}{2}}\psi(2\mu P,\ p)$$

en outre

$$\psi(2\mu P,\ p)=\left(\frac{\mu}{p}\right)\psi(2P,\ p)$$

$\left(\frac{\mu}{p^{\omega}}\right)=1$ si ω est pair; $\left(\frac{\mu}{p^{\omega}}\right)=\left(\frac{\mu}{p}\right)$ si ω est impair

Alors on peut écrire toujours

$$\psi(2\mu P,\ p^{\omega})=\left(\frac{\mu}{p^{\omega}}\right)\psi(2P,\ p^{\omega}).$$

Les formules (3) donnent

$$\psi(2\mu,\ n) = \psi(2,\ n)\ \Pi \left(\frac{\mu}{p^{\varpi}}\right) = \left(\frac{\mu}{n}\right)\psi(2,\ n)$$

ce qu'il fallait démontrer.

4. En posant dans la formule (2) $\mu = -1$ on obtient

$$\psi(-2,\ n) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\psi(2,\ n). \tag{4}$$

Calculons à présent le produit

$$\psi(2,\ n)\,\psi(-2,\ n)$$

qu'on pourra écrire

$$\sum e^{(s^2-s'^2)\frac{2\pi i}{n}} = \sum e^{\tau\rho\frac{2\pi i}{n}}$$

τ et ϱ parcourant le système complet de résidus par rapport au module n. Si τ n'est pas égal à zéro et ϱ parcourt le système complet de résidus la somme deviendra nulle. Dans le cas $\tau = 0$, chaque membre de la somme est égal à l'unité et l'on aura

$$\psi(2,\ n)\,\psi(-2,\ n) = n.$$

En combinant avec la formule (4) on aura

$$[\psi(2,\ n)]^2 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n. \tag{5}$$

5. Si le nombre n a des diviseurs carrés, on aura

$$\sum_{\sigma=0}^{\sigma=n-1} \left(\frac{\sigma}{n}\right) e^{\frac{2\mu\pi i}{n}} = 0 \tag{6}$$

Pour démontrer la formule (6) entrons dans quelques détails sur les *caractères* des groupes abéliens.

La somme (6) est un cas particulier de la formule plus générale

$$(\chi(\sigma),\ r) = \sum \chi(\sigma)\, r^{\sigma}, \qquad r = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

qu'on nomme ***résolvente généralisée.***

La sommation s'étend sur les classes σ premiers avec le module n. La fonction $\chi(\tau)$ représente le caractère [1]) du nombre σ comme élément du groupe de ces classes.

---

[1]) Weber. Algebra T. II, p. 82.

Si l'on a

$$n = p^{\omega} p_1^{\omega_1} p_2^{\omega_2} \ldots p_k^{\omega_k}$$

$$q = \varphi(p^{\omega}), \quad q_1 = \varphi(p_1^{\omega_1}), \ldots q_k = \varphi(p_k^{\omega_k})$$

on aura

$$\chi(\sigma) = \varepsilon^{\tau} \ \varepsilon_1^{\tau_1} \ldots \varepsilon_k^{\tau_k}$$

ε, ε_1, ε_2, ... ε_k étant les racines de l'unité des degrée q, q_1, q_2, ... q_k. Les exposants τ, τ_1, ... τ_k forment le système d'indices par rapport au module composé n.

En introduisant les racines primitives des degrés q, q_1, ... q_k on pourra poser

$$\varepsilon = \zeta^{\beta}, \quad \varepsilon_1 = \zeta_1^{\beta_1}, \ldots \ \varepsilon_k = \zeta_k^{\beta_k}.$$

Les τ_i sont les indices des nombres μ_i définie par la congruence

$$\sigma \equiv \mu P + \mu_1 P_1 + \ldots + \mu_k P_k. \quad (\text{mod. } n)$$

Si l'on pose

$$(\zeta^{\beta}, \ r) = \sum \zeta^{\beta\tau} e^{\mu \frac{2\pi i}{p^{\omega}}},$$

le produit

$$\boldsymbol{\Pi}(\zeta^{\beta}, \ r) = \sum \varepsilon^{\tau} \ \varepsilon_1^{\tau_1} \ldots \varepsilon_k^{\tau_k} e^{\sigma \frac{2\pi i}{n}} = \sum \chi(\sigma) e^{\sigma \frac{2\pi i}{n}}$$

n'est autre chose que la résolvente généralisée.

Les caractères $\chi(\sigma)$ peuvent devenir égals à ± 1 seulement dans le cas ou tous les nombres β, β_1, ... β_k prennent les valeurs suivantes: q ou $\frac{q}{2}$, q_1 ou $\frac{q_1}{2}$, q_2 ou $\frac{q_2}{2}$, ... q_k ou $\frac{q_k}{2}$.

Il est aisé de démontrer [1]) que la résolvente $(\zeta^{\beta}, \ r)$ s'annule seulement dans le cas du nombre β divisible par p. C'est le cas même de $\omega > 1$, par ce que

$$q = p^{\omega-1}(p-1), \quad \frac{q}{2} = p^{\omega-1} \cdot \frac{p-1}{2}$$

Nous voyons ainsi que la résolvente généralisée

$$[\chi(\sigma), \ r]$$

s'annule chaque fois quand un des exposants β est divisible par le nombre correspondent p. C'est toujours le cas des valeurs principales ± 1 des caractères, si le nombre n a un diviseur carré, et la formule (6) devient vraie dans ce dernier cas.

---

[1]) Weber. Algebra T. II, p. 72.

6. Revenons au cas $\omega = \omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_k = 1$.

Dans ce cas la somme de Gauss est le cas particulier d'une résolvente généralisée, correspondente aux valeurs principales des caractères. La résolvente devient égale au produit

$$(\pm 1 \,,\; r)(\pm 1 \,,\; r_1), \ldots \tag{7}$$

chaque fois quand les caractères ont leurs valeurs principales. Les facteurs du produit (7) correspondent aux nombres premiers p, $p_1, \ldots$

Pour calculer (7) il ne faut qu'à remarquer, que $(1 \,,\; r) = -1$, et la résolvente $(-1 \,,\; r)$ n'est autre chose que la somme de Gauss.

7. La formule (5) donne

$$\psi(2 \,,\; n) = i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sqrt{n}$$

Il ne reste qu'à trouver le signe du radical $\sqrt{n}$. C'est le problème fameux résolu par Gauss; il est en liaison intime avec la loi de réciprocité quadratique.

Parmi les démonstrations différentes du théorême de Gauss une des plus simples et élégantes appartient à Mertens [1]. Elle consiste dans la considération de la formule

$$(1 + i^n)\,\psi(2,\; n) = \sum_{s=0}^{s=2n-1} e^{s^2 \frac{\pi i}{2n}} \tag{8}$$

On peut simplifier encore d'avantage la démonstration de l'illustre géomètre.

En effet Mr Mertens transforme la formule (8) de la sorte

$$(1 + i^n)\,\psi(2,\; n) = \sum_{s=0}^{s=4n-1} e^{s^2 \frac{\pi i}{8n}}$$

La transformation est un peu compliquée et l'auteur ne remarque pas que sa méthode s'applique immédiattement à la forme initiale (8).

Je vais montrer comment il faut simplifier la méthode de Mertens.

Posons

$$\psi(2 \,,\; n) = i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} R$$

où

$$R^2 = n$$

[1]) Mertens, Über die Gaussischen Summen. Sitzungsber. d. Berlin. Acad. 1896 I. 217.

D'après le théorème de Gauss R doit être positif. Pour le démontrer prenons la formule (8) qui prend la forme

$$(1+i)\,R = \sum_{0}^{2n-1} e^{s^2\frac{\pi i}{2n}}$$

d'où l'on a

$$\frac{1}{2}R = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{2} + \sum_{1}^{n-1}\sin 8s^2\omega = \frac{1}{2} + \sum_{1}^{n-1}\cos 8s^2\omega$$

où

$$\omega = \frac{\pi}{16n}.$$

Appliquons avec Mr Mertens la formule

$$\sin^2(2s+1)^2\omega - \sin^2(2s-1)^2\omega = \sin 8s\omega\,\sin(8s^2+2)\,\omega$$

d'où

$$\sin(8s^2+2)\,\omega = \sin 8s^2\omega\cos 2\omega + \cos 8s^2\omega \sin 2\omega =$$

$$= \frac{\sin^2(2s+1)^2\omega - \sin^2(2s-1)^2\omega}{\sin 8s\omega}.$$

En posant $s=1,\ 2,\ 3,\dots n-1$ et en prenant la somme des résultats, on obtient

$$\cos 2\omega\left[\frac{1}{2}R - \left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{2}\right] + \sin 2\omega\left[\frac{1}{2}R - \frac{1}{2}\right] = \frac{\sin^2 3^2\omega - \sin^2\omega}{\sin 8\omega} +$$

$$+ \frac{\sin^2 5^2\omega - \sin^2 3^2\omega}{\sin 16\omega} + \dots + \frac{\sin^2(2n-1)^2\omega - \sin^2(2n-3)^2\omega}{\sin 8(n-1)\,\omega}.$$

Cette équation prend la forme

$$\frac{1}{2}R(\cos 2\omega + \sin 2\omega) = \sin\omega\left[\frac{\sin 2\omega}{\sin\omega} - \frac{\sin\omega}{\sin 8\omega}\right] + \sin^2 3^2\omega\left[\frac{1}{\sin 8\omega} - \frac{1}{\sin 16\omega}\right] +$$

$$+ \sin^2 5^2\omega\left[\frac{1}{\sin 16\,\omega} - \frac{1}{\sin 24\,\omega}\right] + \dots + \sin^2(2n-3)^2\omega\left[\frac{1}{\sin 8(n-2)\omega} -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sin 8(n-1)\omega}\right] + \frac{\sin^2(2n-1)^2\,\omega}{\sin 8\,(n-)\,\omega} + \frac{\cos 2\omega\left(\frac{-1}{n}\right) - \sin 2\omega}{2}$$

Si l'on démontre, que la somme de deux derniers membres de la partie droite de l'équation est positive le théorème de Gauss sera démontré, parce que

$$\frac{\sin 2\omega}{\sin\omega} > 1 > \frac{\sin\omega}{\sin 8\omega}$$

$$\frac{1}{\sin 8\omega} > \frac{1}{\sin 16\omega} > \frac{1}{\sin 24\omega} > \ldots > \frac{1}{\sin 8(n-1)\omega} > 0.$$

Il est évident que la somme des deux derniers membres est positive dans le cas $\left(\frac{-1}{n}\right) = 1$, parce que $\cos 2\omega > \sin 2\omega$.

Si $\left(\frac{-1}{n}\right) = -1$, la somme de deux derniers membres est encore positive, car elle est plus grande que

$$\frac{\sin^2(2n-1)^2\omega}{\sin 8(n-1)\omega} - \cos 2\omega = \frac{\cos^2\omega}{\cos 8\omega} - \cos 2\omega =$$
$$= \cos\omega\left\{\frac{\cos\omega}{\cos 8\omega} - \frac{\cos 2\omega}{\cos\omega}\right\} > 0.$$

Le théorème de Gauss est démontré.

28 Janvier 1915.
Kieff.