Sur une propriété des polynômes.

Serge Bernstein.

J'ai établi l'inégalité suivante [1]: *si L est la plus grande valeur absolue d'un polynôme de degré n à coefficients réels, sur le segment $(-1, +1)$, et M son module en un point ξ extérieur à ce segment, on a*

$$M < LR^n, \tag{9}$$

où R est la demi-somme des axes de l'ellipse passant par le point ξ et ayant -1 et $+1$ pour foyers.

La démonstration s'appuie sur un théorème [2]) qui n'est démontré que pour ξ réel et qui doit être modifié si ξ est un point complexe quelconque. Il convient donc de reprendre la démonstration de cette inégalité.

A cet effet, désignons par $P(x)$ le polynôme de degré n à coefficients réels qui reçoit le module M au point ξ et s'écarte le moins possible de zéro sur le segment $(-1, +1)$; soit L cet écart.

Je dis que le nombre de points $x_1, x_2, \ldots x_k$, où l'écart maximum L est atteint avec des signes succéssivement contraires n'est pas inférieur à n. En effet, si on avait $k < n$, on pourrait former le polynome de degré n

$$Q(x) = P(x) + \lambda(x-\xi_1)(x-\xi)(x-y_1)\ldots(x-y_{k-1}),$$

où ξ_1 est le point conjugué de ξ, et $y_1, y_2, \ldots y_{k-1}$ sont des points quelconques séparant les points $x_1, x_2, \ldots x_k$. Dans ces conditions, en attribuant à λ une valeur assez petite de signe convenable, on verrait que $Q(x)$ s'écarte moins de zéro que $P(x)$ sur le segment considéré et d'autre part

$$Q(\xi) = P(\xi).$$

---

[1]) Page 15 du mémoire «Sur l'ordre de la meilleure approximation etc.» (publié par l'Academie Royale de Belgique) et page 18 (13) du mémoire «О наилучшемъ приближенiи непрерывныхъ функцiй» (Сообщенiя Харьковскаго Мат. О-ва т. XIII. 1912 г.).

[2]) § 6.

Cela étant, en reprenant la partie correspondante du raisonnement fait pour démontrer le théorème (2), on trouve que le polynôme $P(x)$ satisfait nécessairement à une équation différentielle de la forme

$$L^2 - P^2 = \frac{(1-x^2)(\gamma - x)(\delta - x)}{n^2(\beta - x)^2} \cdot [P'(x)]^2, \tag{1}$$

où les nombres réels β, γ, δ, satisfont à l'une des deux inégalités: $-1 \leqq \beta \leqq \gamma < \delta$, ou bien $1 \geqq \beta \geqq \gamma > \delta$, à moins que $P(x)$ ne soit un polynome trigonométrique, au quel cas $\beta = \gamma = \delta$.

Admettons d'abord que le point ξ n'est pas intérieur au cercle C construit sur le segment $(-1, +1)$ comme diamètre; c'est alors le dernier cas qui se présente, $P(x)$ se reduit nécessairement au polynôme trigonometrique. En effet, supposons le contraire, et soit $Q(x)$ un polynôme à coefficients réels qui a le même module M au point ξ et qui reste constamment inférieur, en valeur absolue, à L sur le segment $(-1, +1)$. Dans ces conditions les polynômes $P(x) - Q(x)$ et $P(x) + Q(x)$ auront le signe de $P(x)$ en tous les points, où $P(x)$ atteint son écart maximum, de sorte que, si l'on désigne par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les racines de $P(x) - Q(x) = 0$, et par $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ celles de $P(x) + Q(x) = 0$, on aura

$$-1 < \alpha_1 < \cos\frac{n-1}{n}\pi < \alpha_2 < \ldots < \cos\frac{\pi}{n} < \alpha_n < 1$$

et (2)

$$-1 < \beta_1 < \cos\frac{n-1}{n}\pi < \beta_2 < \ldots < \cos\frac{\pi}{n} < \beta_n < 1.$$

D'autre part, le fait que $P(\xi)$ et $Q(\xi)$ ont le même module, a comme conséquence que les vecteurs $P(\xi) + Q(\xi)$ et $P(\xi) - Q(\xi)$ forment entre eux un angle droit. Il s'agit de faire voir que ceci est impossible avec la distribution des racines exprimée par les inégalités (2). Or, l'angle entre ces vecteurs est nécessairement plus petit que celui qu'on obtiendrait, en déplaçant autant que possible vers la droite les racines d'un des polynomes, et vers la gauche celles de l'autre. Donc l'argument de

$$\frac{P(\xi) + Q(\xi)}{P(\xi) - Q(\xi)}$$

est inférieur à celui de $\dfrac{\xi + 1}{\xi - 1}$, c'est à dire est inférieur à un angle droit, puisque ξ n'est pas à l'intérieur du cercle C.

Ainsi, avec cette restriction au sujet de ξ, le théorème (6) est exact, et l'inégalité (9) en résulte.

Il reste donc à examiner le cas, où ξ est intérieur au cercle C. Soit, pour fixer les idées, $1<\beta<\gamma<\delta$, et posons

$$P=L\cos z, \quad x=\cos t.$$

L'équation (2) devient

$$L^2\sin^2 z=\frac{(\gamma-x)(\delta-x)}{n^2(\beta-x)^2}L^2\sin^2 z.\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

ou

$$\frac{dz}{dt}=n\frac{\beta-x}{\sqrt{(\gamma-x)(\delta-x)}}=n\frac{\beta-\cos t}{\sqrt{(\gamma-\cos t)(\delta-\cos t)}},$$

et, puisqu'on peut prendre $z=0$, pour $t=0$, on a

$$z=n\int_0^t\frac{(\beta-\cos t)\,dt}{\sqrt{(\gamma-\cos t)(\delta-\cos t)}}. \tag{3}$$

Posons

$$\xi=\cos(a-bi)=\frac{1}{2}[(e^b+e^{-b})\cos a+i(e^b-e^{-b})\sin a],$$

b étant un nombre positif, ce qui signifie que ξ se trouve sur une ellipse E ayant -1, $+1$ comme foyers, et $R=e^b$ pour demi-somme des axes.

Il s'agit donc de donner une limite supérieure du module M de

$$P(\xi)=L\cos\zeta=\frac{L}{2}(e^{i\zeta}+e^{-i\zeta}),$$

où

$$\zeta=n\int_0^{a-bi}\frac{(\beta-\cos t)\,dt}{\sqrt{(\gamma-\cos t)(\delta-\cos t)}}.$$

En désignant par ρ la valeur absolue de la partie imaginaire de ζ, on a évidemment

$$M=|P(\xi)|<Le^{\rho}.$$

Mais pour calculer la partie imaginaire de ζ, nous pouvons prendre l'intégrale depuis 0 à a, et ensuite depuis a jusqu'à $a-bi$, en remarquant que la première intégrale ne contient pas de partie imaginaire. Ainsi, on a

$$\rho=\pm\text{ part. im.}\int_a^{a-bi}\frac{n(\beta-\cos t)\,dt}{\sqrt{(\gamma-\cos t)(\delta-\cos t)}}. \tag{4}$$

Or, le module de

$$\frac{\beta - \cos t}{\sqrt{(\gamma - \cos t)(\delta - \cos t)}} = \frac{\beta - x}{\sqrt{(\gamma - x)(\delta - x)}}$$

reste sur tout le chemin d'intégration inférieur à 1, et à fortiori sa partie réelle est aussi inférieure à 1.

Donc,

$$\varrho < nb$$

et, enfin,

$$M < Le^{nb} = LR^n \tag{9}$$

c. q. f. d.

Remarque. Il résulte de ce qui précède que le polynôme de degré n, pour lequel $|P(\xi)| = M$, et qui s'écarte le moins possible de zéro sur le segment $(-1, +1)$ a comme expression asymptotique (en adoptant la définition que j'ai donnée ailleurs) le polynôme trigonométrique, si, ξ étant fixe, n croît indéfiniment. On a de plus la relation *asymptotique*

$$M \backsim \frac{L}{2} R^n.$$

L'inégalité (9) est donc exacte sans restriction. Mais le théorème (6) n'est vrai qu'asymptotiquement, si on ne fait aucune restriction au sujet de ξ.

J'ajouterai encore la réflexion suivante.

Il est facile de montrer que si les polynômes à coéfficients complexes sont admis au concours, le polynôme qui s'écarte le moins de zéro atteindra son module maximum au moins en $(n+1)$ points du segment $(-1, +1)$. Et puisqu'un polynôme (qui n'est pas une constante) de degré n n'atteint pas son module maximum en plus de $(n+1)$ points du segment, le polynôme à coefficients complexes qui réaliserait le minimum, aurait donc nécessairement $(n+1)$ points d'écart maximum. On se rend compte sans peine que ça n'entraine pas du tout que le polynôme en question doive être un polynôme trigonométrique. Ainsi, parmi les polynômes du 1-er degré, à *coefficients réels*, qui au point $\xi = bi$, ont leur module égal à b, c'est le polynôme $P(x) = x$ ou la constante b, qui s'écarte le moins possible de zero sur le segment $(-1, +1)$. Mais, quel que soit le nombre réel ε, les polynômes *complexes*

$$x + \varepsilon(x - bi)$$

du premier degré auront également deux points $(x_1 = -1 \ x_2 = +1)$, où le module maximum

$$\sqrt{(1+\varepsilon)^2 + \varepsilon^2 b^2}$$

est atteint. Parmi tous ces polynômes il y en a un qui correspond à $\varepsilon = -\frac{1}{1+b^2}$, pour lequel ce module maximum, égal à

$$\lambda = \frac{b}{\sqrt{1+b^2}},$$

est le plus petit. On voit par cet exemple que si l'on admet au concours les polynômes à coefficients *complexes* c'est le polynôme

$$R(x) = x - \frac{x - bi}{1+b^2} = \frac{b^2x + bi}{1+b^2}$$

qui réalisera le minimum.

Sans insister sur l'étude générale de ces polynômes qui viennent remplacer les polynômes trigonométriques, lorsqu'on considère les coefficients complexes, je me bornerai à établir l'inégalité suivante:

Si L et λ sont respectivement les modules maxima, du polynôme réel $P(x)$ et du polynôme complexe $R(x)$ de degré n, qui s'écartent le moins de zero sur le segment $(-1, +1)$, en recevant le module M au même point ξ, on a

$$\frac{L}{2} \leqq \lambda \leqq L. \tag{5}$$

L'inégalité $\lambda \leqq L$ est évidente. Pour montrer que $\frac{L}{2} \leqq \lambda$, posons

$$R(x) = A(x) + iB(x),$$

les coefficients de $A(x)$ et de $B(x)$ étant réels. Si λ_1 et λ_2 sont respectivement les maxima de $|A(x)|$ et de $|B(x)|$ sur le segment, on a

$$\lambda \geqq \lambda_1, \quad \lambda \geqq \lambda_2.$$

D'autre part,

$$\lambda_1 \geqq |A(\xi)| \cdot \frac{L}{M}, \quad \lambda_2 \geqq |B(\xi)| \cdot \frac{L}{M},$$

et

$$|A(\xi)| + |B(\xi)| \geqq |R(\xi)| = M;$$

donc

$$\lambda_1 + \lambda_2 \geqq L.$$

Par conséquent,

$$\lambda \geqq \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \geqq \frac{L}{2},$$

c. q. f. d.

L'inégalité (5) montre que l'inégalité établie plus haut

$$M < LR^n, \tag{9}$$

où R est la demi-somme des axes de l'ellipse passant par le point ξ et ayant pour foyers $(-1\ +1)$, qui a lieu, lorsque les coefficients sont réels, peut être remplacée par

$$M < 2\lambda R^n, \tag{9$^{\text{bis}}$}$$

si les coefficients du polynôme sont complexes.

On voit ainsi que toutes les conséquences que nous avons tirées de l'inégalité (9) dans les mémoires cités, subsistent dans le cas, où les coefficients du polynôme sont complexes.